Ноябрь 1991 г. Том 161, № 11

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

533.6.952+539.12.164

ПЕРЕТЯЖКИ НА РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПИНЧЕ С ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Б.А. Трубников

(Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова, Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В работах [1 — 4] рассматривалась гипотеза о рождении галактических космических лучей (ГКЛ) в космических плазменных пинчах, не содержащих внутреннего магнитного поля, и было показано, что в струях плазмы, выдавливаемых из перетяжек, возникают ускоренные частицы. В области ультрарелятивистских энерий $E \gg Mc^2$ интегральный спектр частиц имеет вид $I = CE^{-\nu}$ с показателем $\nu = \sqrt{3}$, который близок к показателю наблюдаемого спектра ГКЛ, что увеличивает правдоподобность гипотезы.

Однако наблюдаемые в космосе плазменные волокна-филаменты, как правило, содержат в себе продольное магнитное поле, о чем свидетельствует поляризация их синхротронного излучения. Поэтому в данной статье рассматривается задача о перетяжках на пинче с продольным полем. Можно предвидеть, что в идеальной плазме при условии полной "вмороженности" внутреннего магнитного поля перетяжки на пинче не могут обрываться "до конца", так что силы магнитного сжатия остаются конечными, и выход ускоренных частиц с большими энергиями существенно снижается по сравнению со случаем пинча без поля. Ниже показано, что показатель спектра частиц в пинче с полем равен $\nu = (3 + \alpha)^{1/2}$, где $\alpha = (cB^0_{\parallel}/B^0_{\perp} v^0_T)^2$, а v^0_T — тепловая скорость ионов.

2. Четырехмерные векторы электрического и магнитного полей

Предполагая отсутствие столкновений, способствующих обмену энергии между различными степенями свободы частиц, следует использовать МГД-уравнения с анизотропным давлением плазмы. Такие уравнения идеальной релятивистской анизотропной магнитной гидродинамики (ИРАМГД), являющиеся релятивистским обобщением известных уравнений Чу, Гольдбергера, Лоу (ЧГЛ; см. [5]), рассматривались ранее в работах [6 — 10], и при этом во всех случаях они выводились из релятивистского кинетического уравнения.

Здесь для простоты мы укажем более краткий вывод уравнений ИРАМГД, используя чисто гидродинамический подход. Для этого заметим, что в собственной системе координат, движущейся вместе с веществом, 4-мерный тензор энергии-импульса плазмы и поля должен иметь вид

$$\tilde{T}^{ik} = \begin{pmatrix} e+\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\perp+\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\parallel-\mu \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $e = \rho c^2 \langle\gamma\rangle$ — плотность энергии частиц, ρ — плотность массы, $\mu = \tilde{B}^2/8\pi$ — плотность магнитной энергии, а $p_{\parallel,\perp}$ — компоненты давления. Чтобы записать этот тензор в произвольной, в частности, лабораторной системе координат, полезно рассмотреть вначале вспомогательную задачу о движении в полях **E**, **B** гипотетической частицы типа "монополя Дирака", обладающей и электрическим зарядом q_e и магнитным зарядом q_m. Уравнение релятивистского движения (см. [11]) должно иметь вид $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$, где $\mathbf{F}_e = q_e\mathbf{E}^*$, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + [\vec{\beta}\mathbf{B}]$ — известная сила Лоренца, а $\mathbf{F}_m$ — менее известный "магнитный аналог силы Лоренца", приведенный, например, в [11] и равный $\mathbf{F}_m = q_m\mathbf{B}^*$, $\mathbf{B}^* = \mathbf{B} - [\vec{\beta}\mathbf{E}]$, $\vec{\beta} = \mathbf{v}/c$.

Далее напомним, что в специальной теории относительности (СТО) в 4-мерном пространстве с координатами $\tau = ct = x^0$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и метрикой $(ds)^2 = (c\,dt)^2 - (d\mathbf{r})^2 = g_{ik}dx^i dx^k = (d\tau/\gamma)^2$ вводится вектор 4-скорости $u^i = dx^i/ds = (\gamma, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = \vec{\beta}\gamma$, $\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$ и 4-ускорения $w^i = du^i/ds$, с помощью которого приведенное выше уравнение движения гипотетической частицы можно переписать в виде

$$w^i = \xi_e e^i + \xi_m b^i,\quad e^i = (\mathbf{uE}^*, \gamma\mathbf{E}^*),\quad b^i = (\mathbf{uB}^*, \gamma\mathbf{B}^*)\ , \tag{2}$$

где $\xi_{e,m} = q_{e,m}/Mc^2$ — скаляры. Отсюда видно, что величины e^i, b^i являются правильными релятивистскими 4-векторами, которые и используются для построения уравнений релятивистской МГД.

3. Уравнения релятивистской анизотропной МГД

Для вывода уравнений ИРАМГД замечаем, что при предполагаемой нами бесконечной электропроводности имеем условие $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + [\vec{\beta}\mathbf{B}] = 0$, так что $e^i = 0$, и остается лишь 4-вектор магнитного поля b^i (2), с помощью которого тензор энергии-импульса должен записываться в виде

$$T^{ik} = S_1 u^i u^k + S_2 g^{ik} + S_3 b^i b^k\ , \tag{3}$$

где $S_{1,2,3}$ — три скаляра. Сравнение (1) с (3) дает их значения

$$S_1 = e + p_\perp + 2\mu\ ,\quad S_2 = -p_\perp - \mu\ ,\quad S_3 = (p_\parallel - p_\perp - 2\mu)\tilde{B}^{-2}\ . \tag{4}$$

Если далее использовать более удобный тензор

$$T^i_k = S_1 u^i u_k + S_2 \delta^i_k + S_3 b^i b_k\,, \quad b_k = g_{ki} b^i\,, \tag{5}$$

то искомые уравнения ИРАМГД сводятся к соотношениям

$$\nabla_i T^i_k = 0, \quad \nabla_i \rho u^i = 0, \quad \nabla_i (b^i u^k - b^k u^i) = 0\,, \tag{6}$$

первое из которых дает законы сохранения энтропии, энергии и импульса, второе является релятивистским уравнением непрерывности, а третье с учетом выражения $\mathbf{B} = \gamma \mathbf{b} - \mathbf{u} b^0$ эквивалентно уравнениям вмороженности

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0\,, \quad \partial \widetilde{\mathbf{B}}/\partial t = \operatorname{rot}\,[\mathbf{vB}]\,. \tag{7}$$

Полезно отметить, что комбинация $u^k \nabla_i T^i_k = 0$ дает уравнение адиабат

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S_1/\rho) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_2 + \frac{1}{2}\rho^2 S_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\widetilde{\mathrm{B}}/\rho)^2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = u^i \nabla_i\,, \tag{8}$$

а комбинация $\nabla_i T^i_k - u_k u^i \nabla_j T^j_i = 0$ при $k = 0$ дает закон сохранения энергии

$$S_1 \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} + \gamma\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S_1/\rho) + \frac{\partial}{\partial\tau} S_2 + \nabla_i (S_3 b^i b^0) = 0\,. \tag{9}$$

4. Уравнения длинноволновых возмущений пинча

Используем полученные уравнения ИРАМГД для рассматриваемой нами задачи о перетяжках на пинче с продольным магнитным полем. Ввиду сложности общих уравнений ограничимся, как и ранее, анализом лишь длинноволновых возмущений с $\lambda \gg a$, где $a(t, z)$ — радиус пинча. Для таких возмущений можно использовать "приближение узкой струи" (УС-приближение), при котором величины $e, \mu, \rho, p_\parallel, p_\perp, v = v_z$ и $B = B_z$ считаются постоянными по сечению пинча πa^2, а радиальные компоненты считаются равными соответственно

$$v_r = r\dot{a}/a, \quad \dot{a} = \partial a/\partial t + v\partial a/\partial z\,, \quad B_r = -(r/2)\partial B_z/\partial z\,. \tag{10}$$

Тогда, полагая $u = \operatorname{sh} y$, $\rho_* = \rho a^2/\rho_0^2 a_0^2$ и вводя два удобных оператора

$$\hat{P} = u^i \nabla_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \gamma \frac{\partial}{\partial\tau} + u \frac{\partial}{\partial z}\,, \quad \hat{Q} = u \frac{\partial}{\partial\tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{11}$$

можно привести уравнение непрерывности (6) и уравнение энергии (9) к виду

$$\hat{Q} y = -\hat{P} \ln \rho_*, \quad (e + p_\parallel)\hat{P} y = -\hat{Q} p_\parallel + (p_\parallel - p_\perp)\hat{Q} \ln \widetilde{B}\,. \tag{12}$$

При выводе последнего уравнения из (9) учтено, что в УС-приближении можно полагать $b^i \nabla_i = \widetilde{B}\hat{Q}$, $\nabla_i b^i = \widetilde{B}\hat{P} y$. Далее считаем, что в собственной системе координат плазма является нерелятивистской, и при этом $e = \rho c^2 + p_\perp + p_\parallel/2$, а тогда уравнение (8) дает две адиабаты Чу, Гольдбергера, Лоу: $p_\parallel \sim \rho^3 \widetilde{B}^{-2}$, $p_\perp \sim \rho \widetilde{B}$, $T_\perp \sim \widetilde{B}$.

Однако для простоты далее будем предполагать, что $p_\parallel = 0$. Такое предположение представляется разумным применительно к гипотетическим космическим пинчам, формированию которых, по-видимому, должна предшествовать стадия постепенного сгребания плазмы в цилиндр, и можно ожидать, что на этой стадии компонента $p_\perp$ возрастает значительно сильнее, чем продольное давление $p_\parallel$, что соответствует $p_\perp \gg p_\parallel$. Считая равными температуры и плотности электронов и ионов и подставляя адиабату $p_\perp = p_e + p_i = p^0_\perp \rho_* (a_0/a)^4$ в условие равенства давлений $p_\perp + \tilde{B}^2/8\pi = B^2_\varphi/8\pi$ на границе пинча $r = a$, выразим эффективную плотность через поперечную температуру

$$\rho_* = \varepsilon(1 - x)/x(1 - \varepsilon), \quad \varepsilon = (B^0_\parallel/B^0_\varphi)^2, \quad x = \varepsilon T_\perp/T^0_\perp\,, \tag{13}$$

и подставляя ее в (12), окончательно находим два уравнения

$$\hat{P}x = x(1 - x)\hat{Q}y, \quad \hat{P}y = -\nu\hat{Q}x, \quad \nu = 2T^0_\perp/\varepsilon Mc^2\,. \tag{14}$$

5. Решение методом годографа с преобразованием Лоренца

Для решения этих нелинейных уравнений вначале вводим обратные функции $\tau = ct = T(x, y)$, $z = Z(x, y)$, являющиеся "лабораторными" временем и координатой, а затем вводим еще "сопутствующие" время и координату $\tilde{T}(x, y)$, $\tilde{Z}(x, y)$, связанные с лабораторными величинами T, Z формулами преобразования Лоренца: $\tilde{T} = \gamma T - uZ$, $\tilde{Z} = \gamma Z - uT$. Тогда нетрудно проверить, что такое "преобразование годографа" с дополнительным преобразованием Лоренца позволяет получить из (14) два соотношения

$$\tilde{T}'_y + \tilde{Z} + \tilde{Z}_x/\nu = 0, \quad \tilde{Z}'_y + \tilde{T} - x(1 - x)\tilde{T}_x{}' = 0\,, \tag{15}$$

из которых с учетом нерелятивизма величины $\nu x = 2T_\perp/Mc^2 \ll 2$ находим

$$x(1 - x)\tilde{T}''_{xx} + x(\nu - 2)\tilde{T}'_x = \nu(\tilde{T} - \tilde{T}''_{yy})\,. \tag{16}$$

Наконец, вводя удобную переменную $\xi = 1 - 2x$, окончательно получим "уравнение собственного времени"

$$\hat{\theta}\tilde{T} = \nu(\tilde{T} - \tilde{T}''_{yy}), \quad \hat{\theta}\tilde{T} = (1 - \xi^2)\tilde{T}''_{\xi\xi} + (1 - \xi)(2 - \nu)\tilde{T}'_\xi\,. \tag{17}$$

Для наших целей интерес представляют лишь такие особые решения этого уравнения, которые описывают возмущения, исчезающие в обратном пределе времени $t \to -\infty$. Такое "условие спонтанности" возмущений как бы имитирует предварительную стадию сгребания плазмы в цилиндрический пинч, который исходно предполагается равновесным и не имеющим возмущений. Отсутствие возмущений соответствует "начальной точке" $\xi = \xi_0 = 1 - 2\varepsilon$, $y = y_0 = 0$, и мы требуем, чтобы функция $\tilde{T}(\xi, y)$ имела бы в этой точке особенность типа $\tilde{T} \to -\infty$, и обращалась бы в нуль на всех границах рассматриваемой области изменения аргументов $-1 < \xi < 1$, $-\infty < y < \infty$! Нетрудно проверить, что в нуль на границах обращаются лишь решения вида

$$\tilde{T} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k Y^{q_k}, \quad \hat{\theta}\psi_k(\xi) = \theta_k \psi_k, \quad Y = e^{-|y|} = [\gamma + (\gamma^2 - 1)^{1/2}]^{-1}\,, \tag{18}$$

где собственные значения равны $\theta_k = -(1 + k)(k + \nu)$, а собственными функциями являются известные полиномы Якоби (см. [12])

$$\psi_k = wP_k, \quad w = (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta, \quad P_k = P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi),$$
$$\alpha = 1, \quad \beta = \nu - 1 > 0\,, \tag{19}$$

обладающие свойством ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} wP_n P_k \mathrm{d}\xi = h_k \delta_k^n, \quad h_k = 2^{\nu+1}(1+k)/(k+\nu)(2k+\nu+1)\,. \tag{20}$$

По полному набору полиномов P_k можно разложить любую, в том числе и дельта-функцию

$$\delta(\xi - \xi_0) = w(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\xi) P_k(\xi_0) h_k^{-1}\,, \tag{21}$$

имеющую требуемую особенность в начальной точке $\xi = \xi_0 = 1 - 2\varepsilon > 0$. Заметим попутно, что при $\varepsilon > 1/2$ пинч оказывается устойчивым и перетяжки не могут нарастать ввиду стабилизирующего влияния поля $B_\|$. Полная совокупность решений интересующего нас спонтанного типа есть

$$\tilde{T}^{(m,n)} \sim w(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{-1} P_k(\xi) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi_0}\right)^m P_k(\xi_0) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^n Y^{q_k}\,. \tag{22}$$

6. Спектр частиц, ускоренных в перетяжках

Возмущения, описываемые решениями (22), исчезают при $t \to -\infty$, затем постепенно нарастают на интервале времени $-\infty < t < 0$, и в критический момент времени $t = 0$ в самых узких местах перетяжек имеем $\rho_* \to 0$ при минимально возможном, но конечном значении радиуса $a = a_{\min} = a_0 \varepsilon^{1/2}$. Плазма из перетяжек выдавливается в утолщения, которые в нашей модели с "приближением узкой струи" имеют вид тонких дисков, в которых имеем $\rho_* \to \infty$, $a \to \infty$, $x \to 0$. Функцию распределения частиц по импульсам $p = Mcu$ найдем из выражения $\mathrm{d}N = n\gamma\pi a^2 \mathrm{d}z = F(u, t)\mathrm{d}u$, и с учетом формул (15) получим

$$F = (N_0/\nu)\rho_* [\tilde{Z}_x'^2 + \nu x(1-x)\tilde{T}_x'^2]/(\gamma \tilde{T}_x' + u\tilde{Z}_x'), \quad N_0 = \pi a_0^2 n_0\,. \tag{23}$$

В пределе $x \to 0$ отсюда имеем $F = \mathrm{const}\ \gamma^{-1}(\tilde{T}_x')_{x\to 0}$, и при $\gamma \gg 1$ в ряде (22) достаточно удержать первый неисчезающий член с $k = k_{\min}$, что дает в асимптотике ультрарелятивистский спектр частиц вида $F \sim \mathrm{d}N/\mathrm{d}E \sim E^{-s}$ с показателем $s = 1 + q_k$, где $k = k_{\min}$.

Первое $\tilde{T}^{(0,0)}$ решение из набора (22) имеет член с $k = 0$ с показателем $q_0 = \sqrt{2}$ как при наличии, так и при отсутствии продольного поля $B_\|$. Остальные показатели равны $q_k = [1 - (\theta_k/\nu)]^{1/2} = \{2 + k + [k(k+1)/\nu]\}^{1/2}$. Однако можно показать, что решение $\tilde{T}^{(0,0)}$ описывает возмущения, периодические по длине пинча, для нарастания которых нужно иметь периодические "затравочные" возмущения. Можно предположить, как и ранее в [1 — 4], что в космосе нет видимых причин для развития периодических по длине возмущений, так что решение $\tilde{T}^{(0,0)}$, по-видимому, не реализуется "на практике .

Все остальные решения (22) описывают не периодические, а локальные возмущения типа "уединенной перетяжки", и среди них наиболее типичным, видимо, следует считать решение $\tilde{T}^{(1,0)}$, начинающееся с члена с $k = 1$, имеющего показатель спектра $q_1 = [3 + (\varepsilon Mc^2/T^0_\perp)]^{1/2}$. При отсутствии продольного поля $B_\| = 0$ получим прежний результат $q_1 = \sqrt{3}$, однако при нерелятивистской температуре $T^0_\perp \ll Mc^2$ добавление даже сравнительно небольшого продольного поля $B^0_\|$ дает сильно спадающий спектр ускоренных частиц.

7. Заключение

Заметим, что случай без продольного поля [1 — 4] получается из приведенных выше формул с полем при предельном переходе $\varepsilon \to 0, \nu \to \infty$, когда имеем $\psi_k \to \eta e^{-\eta} L_k^{(1)}(\eta)$, где $\eta = 2T_\perp/Mc^2$, а $L_k^{(1)}$ — полиномы Лагерра, фигурировавшие ранее в [1 — 4].

Полезно также отметить, что и в лабораторных опытах с дейтериевыми пинчами, проводимых в рамках термоядерных исследований, добавление продольного магнитного поля существенно снижает выход ускоренных дейтронов и рождаемых ими нейтронов ядерных реакций D+D, хотя устойчивость пинчей повышается.

Наконец, в [13] показано, что энергетическое питание ГКЛ могут обеспечить так называемые космические "гамма-всплески", которые по нашему мнению являются разрядами типа "космических молний" с пинчами, подобными рассмотренным в данной статье,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Власов В.П., Жданов С.К., Трубников Б.А.*//Письма ЖЭТФ, 1989. Т. 49. С. 581; см. также Препринт ИАЭ им. И.В. Курчатова ИАЗ-4828/6. — Москва, 1989.

2. *Trubnikov В.А., Vlasov V.P., Zhdanov S.K.*//Proc. of 1989 Intern. Conference on Plasma Physics. — New Delhi, 1989. — V. 1. P. 257 (rep. 65).

3. *Трубников Б.А.*//УФН. 1990. Т. 160. С. 167; см. также Preprint IAE I.V. Kurchatov IAE-5150/1. — Moscow, 1990;//Proc. of Workshop on Plasma Astrophysics. — Telavi, Georgia, ESASP-3II. 1990. — P. 121.

4. *Власов В.П., Жданов О.К., Трубников Б.А.*//Физ. плазмы. 1990. Т. 16. С. 1457.

5. *Chew G., Goldberger M., Low F.*// Proc. Roy. Soc. 1956. V. 236. P. 112.

6. *Заславский Г.М., Моисеев С.С.*//ПМТФ. 1962. № 1. С. 20.

7. *Заславский Г.М.*// Ibidem. № 5. С. 42.

8. *Cissoko M.*// C.R. Ac. Sci. Paris. Ser. A. 1974. T. 278. P. 463, 641, 1233, 1461.

9. *Шикин И.С.*//Физ. плазмы. 1976. Т. 2. С. 24.

10. *Lominadze J.G., Javakhisfivili J.I., Tsikarishvili E.G.*// Proc. of Workshop on Plasma Astrophysics. — Telavi, Georgia, ESA SP-3II, 1990. P. 133.

[11] *Зоммерфельд А.* Электродинамика. — М.: ИЛ, 1958. С. 331.

12. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовича, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

13. *Трубников Б.А., Жданов С.К., Власов В.П.*//Физика плазмы. 1991. Т. 17. С. 1192.

Статья поступила 17.12.90 г.