Ноябрь 1991 г. **Том 161, № 11**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

533.77

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О МИГРАЦИИ ЧАСТИЦ В ГАЗЕ

С.Г. Раутиан

(Институт автоматики и электрометрии СО АН СССР, Новосибирск)

Проблема миграции частицы в фазовом пространстве представляет собой классическую задачу и ее корректная, нефеноменологическая постановка для не слишком плотных газов содержится, по существу, в работе Больцмана [1], где он сформулировал свое знаменитое кинетическое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)\rho(\mathbf{rv}t) = S \tag{1}$$

для функции распределения $\rho(\mathbf{rv}t)$ ($\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, t — координата, скорость и время). При определенных условиях интеграл столкновений S может быть выражен через производные от ρ; это приближение, называемое диффузионным, широко применяемое в самых различных областях физики, подробно обсуждалось в литературе и вошло в учебники [2 — 8]. В недалеком прошлом, однако, обстановка изменилась таким образом, что данная, казалось бы, устоявшаяся проблема потребовала известной модернизации и доосмысления.

Во второй половине 60-х годов возникла новая область приложения физической кинетики — лазерная физика, нелинейная лазерная спектроскопия, характеризующаяся условиями, совершенно необычными с точки зрения традиционной кинетики. Дело в том, что основной агент лазерной спектроскопии — плоская монохроматическая волна, резонансно взаимодействующая с газом, создает резкую структуру в распределении по скоростям для атомов, находящихся на оптически комбинирующих энергетических уровнях. Ширина этой структуры может быть значительно меньше, чем общая (максвеллова) ширина распределения (причем сказанное касается одной декартовой переменной — проекции $\mathbf{v}$ на волновой вектор $\mathbf{k}$ волны). В противоположность этому, традиционные физические представления, ассоциирующиеся с диффузионным приближением, явно или неявно исходили из картины сравнительно плавных неравновесных составляющих распределения по скоростям.

Второе новое и важное обстоятельство связано с большими спектральными плотностями мощности лазерного излучения и с созданием значительных концентраций возбужденных состояний. Для миграции атомов в возбужденных состояниях очень существенны, в частности, малая их продолжительность, особенности дифференциального сечения в области малых углов рассеяния и другие обстоятельства. В итоге для описания миграции возбужденных атомов интересными оказываются модели, сильно отличающиеся от пригодных в основном состоянии.

Особые подходы в теории и в общей физической картине диффузионных процессов породила и сугубо оптическая задача о случайных блужданиях дипольного момента (или поляризации, или когерентности), органически входящая в проблему допплеровского уширения спектральных линий.

Изучение упомянутых и ряда других проблем нелинейной спектроскопии привело к ревизии условий применимости диффузионного приближения при описании миграции в **v**-пространстве, к некоторому его развитию и к изменению акцентов в общих представлениях. Впрочем, так обычно и бывает при попытках применить старые разработанные методы к новым задачам. Существенное значение имела и общая тенденция последних десятилетий к ослаблению роли феноменологии и к увеличению удельного веса микроскопических теорий.

Рассмотрим, прежде всего, традиционную задачу о миграции малой примеси тяжелых частиц (масса m) в буферном газе легких частиц (масса m_b, $m \gg m_b$). Имея в виду простейший случай бесструктурных частиц, запишем интеграл столкновений в виде

$$S = -\nu\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t) + \int A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1t)d\mathbf{v}_1, \tag{2}$$

$$\nu = \int A(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})d\mathbf{v}_1, \tag{3}$$

где ядро $A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ интеграла столкновений есть число переходов $\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}$ за 1 с вследствие столкновений с буферным газом, частота ухода ν задает, очевидно, число переходов за 1 с из точки ν во все пространство скоростей[1*].

Обычно рассуждают следующим образом (см., например, [6], п. 21). Фактически очевидно, что при $m \gg m_b$ изменение скорости тяжелой частицы в результате столкновений сравнительно невелико. Иными словами, ядро $A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ будет резкой функцией разности скоростей $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \vec{\zeta}$ и гораздо более плавной функцией от $\mathbf{v}_1$:

$$A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) = a(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\zeta}), \quad \vec{\zeta} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}. \tag{4}$$

Поэтому естественно воспользоваться разложением

$$A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1t) = a(\mathbf{v} + \vec{\zeta}, \vec{\zeta})\rho(\mathbf{r}\mathbf{v} + \vec{\zeta}t) = a(\mathbf{v}, \vec{\zeta})\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t) +$$

$$+ \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(a(\mathbf{v}, \vec{\zeta})\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t)\right) + \frac{1}{2}\zeta_\alpha\zeta_\beta \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}\left(a(\mathbf{v}, \vec{\zeta})\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t)\right) \tag{5}$$

и записать интеграл столкновений в виде

$$S = \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(A_\alpha\rho + \frac{\partial}{\partial v_\beta}(B_{\alpha\beta}\rho)\right), \tag{6}$$

где компоненты вектора A_α и тензора $B_{\alpha\beta}$ суть

$$A_\alpha = \int \zeta_\alpha a(\mathbf{v}, \vec{\zeta})d\vec{\zeta}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int \zeta_\alpha\zeta_\beta a(\mathbf{v}, \vec{\zeta})d\vec{\zeta}. \tag{7}$$

При равновесном распределении

$$\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t) = \rho_0\exp(-\mathbf{v}^2/\bar{v}^2), \quad \bar{v}^2 = 2T_b/m, \tag{8}$$

где T_b — температура буферного газа[2*], интеграл столкновений должен равняться нулю. Вследствие этого должно существовать соотношение, связывающее величины A_α и $B_{\alpha\beta}$:

$$A_\alpha + \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial v_\beta} = \frac{2v_\beta}{\bar{v}^2} B_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

В конечном итоге кинетическое уравнение приобретает вид уравнения диффузии в v-пространстве, называемого уравнением Фоккера—Планка [6]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)\rho = \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left[B_{\alpha\beta}\left(\frac{2v_\beta}{\bar{v}^2}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial v_\beta}\right)\right]. \tag{10}$$

Интеграл столкновений в уравнении (10) представляет собой дивергенцию в **v**-пространстве от некоторого вектора, который естественно назвать плотностью потока частиц в пространстве скоростей, обусловленного столкновениями:

$$S = -\mathrm{div}_{\mathbf{v}}\mathbf{s}, \quad s_\alpha = -\left(A_\alpha + \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial v_\beta}\right)\rho - B_{\alpha\beta}\frac{\partial\rho}{\partial v_\beta}. \tag{11}$$

Поэтому кинетическое уравнение (10) имеет вид уравнения непрерывности в **v**-пространстве:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)\rho + \mathrm{div}_{\mathbf{v}}\mathbf{s} = 0, \tag{12}$$

"тем самым автоматически соблюдается сохранение числа частиц" ([6], п. 21).

Как вывод, так и само уравнение (10) оставляют чувство известной неудовлетворенности. Прежде всего, по определению, совокупность величин A_α и $B_{\alpha\beta}$ суть первые и вторые моменты ядра. Вообще говоря, моменты какой-либо функции, в данном случае $a(\mathbf{v}, \vec{\zeta})$, служат независимыми ее характеристиками. Поэтому существование некой связи между A_α и $B_{\alpha\beta}$ представляется неочевидным и требует разъяснения. Разъяснение тем более необходимо, что в равновесных условиях интеграл столкновений (2) тождественно равен нулю при произвольном взаимодействии сталкивающихся частиц, при произвольных значениях любых их характеристик. Вследствие сказанного плотность потока в v-пространстве, обусловленного столкновениями, должна автоматически равняться нулю, и дополнительное условие (9), якобы обеспечивающее это равенство, казалось бы, излишне. Отменим, кроме того, что из рассуждений, приведших к уравнению (10), не ясно, чему же равен малый параметр, оправдывающий разложение (5). Наконец, само разложение (5), где в произведении $a(\mathbf{v}_1, \vec{\zeta})\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t)$ функции $a(\mathbf{v}_1, \vec{\zeta})$ и $\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t)$ фигурируют "на равных правах", будет естественным, если ширины сомножителей $a(\mathbf{v}_1, \vec{\zeta})$, $\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t)$ как функции скорости — одного порядка величины. Возможно, в традиционных задачах положение именно таково, однако для задач нелинейной спектроскопии указанные условия совсем не типичны.

Приведенные соображения и сомнения становятся вполне наглядными, если обращение интеграла столкновений в нуль для равновесных условий использовать не в конце, а в самом начале рассуждений. Действительно, подставим выражение (8) в формулы (2), (3) для интеграла столкновений и из условия $S = 0$ найдем связь между $A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ и $A(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})$ (принцип детального равновесия):

$$A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)\exp(-\mathbf{v}_1^2/\bar{v}^2) = A(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})\exp(-\mathbf{v}^2/\bar{v}^2), \tag{13}$$

пекле чего интеграл столкновений можно записать так:

$$S = \int a(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_1)\left\{\exp\left[(\mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}^2)/\bar{v}^2\right]\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t) - \rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t)\right\}\mathrm{d}\mathbf{v}_1. \tag{14}$$

Отметим теперь, что "плавная" зависимость ядра $a(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_1)$содержит $\mathbf{v}$, а не $\mathbf{v}_1$, и в подынтегральной функции члена прихода будет разлагаться фактически не произведение $a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v})\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t)$, как это было ранее, а комбинация $\exp(\mathbf{v}_1^2/\bar{v}^2)\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t)$ функции распределения и стандартного множителя, не зависящего от особенностей взаимодействия частиц при столкновениях. Иными словами, соотношение (14) в явном виде дает "медленный" множитель при $\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t)$ и его ширина оказывается равной $\bar{v}$. Разложение произведения $\exp(\mathbf{v}_1^2/\bar{v}^2)\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}_1 t)$ по степеням $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})_\alpha$ приводит к соотношению

$$Se^{\mathbf{v}^2/\bar{v}^2} = -A_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(e^{\mathbf{v}^2/\bar{v}^2}\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t)\right) + B_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}\left(e^{\mathbf{v}^2/\bar{v}^2}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)\right), \tag{15}$$

причем A_α и $B_{\alpha\beta}$ по-прежнему определяются формулами (7).

В равновесных условиях $\exp(\mathbf{v}^2/\bar{v}^2)\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t) = \mathrm{const}$ и согласно формуле (15) имеем $S = 0$ без дополнительных условий типа (9). Вывод об отсутствии связей между коэффициентами останется в силе и при сохранении производных от $\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ любых порядков. Такой результат и следовало ожидать, поскольку коэффициентами разложения служат моменты ядра различных порядков, а они суть независимые характеристики его. С другой стороны, как нетрудно убедиться, условие перехода от формулы (15) к формуле (6) дается тем же равенством (9). Иными словами, в рамках последовательности рассуждений (13) — (15) условие (9) обеспечивает представление интеграла столкновений в виде дивергенции в $\mathbf{v}$-пространстве некого вектора, интерпретируемого как плотность потока частиц в $\mathbf{v}$-пространстве, а не равенства $S = 0$ в равновесных условиях.

Выводы теории не должны зависеть от очередности использования аргументов, и возникшее противоречие может иметь только методический характер. Дело в том, что соотношение (9) между A_α и $B_{\alpha\beta}$ в общем случае, конечно же, не справедливо, однако оно оказывается правильным приближенно, с той точностью вычисления 5, которая задается членами, отброшенными в разложении $\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$.

Действительно, воспользуемся явным выражением для ядра:

$$A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) =$$

$$= 2N_{\mathrm{b}}\int \sigma(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)\delta(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}_1^2)\delta\left[\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \frac{\mu}{m}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)\right] W_{\mathrm{b}}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)\mathrm{d}\mathbf{u}\mathrm{d}u_1; \tag{16}$$

здесь $\sigma(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ — дифференциальное сечение рассеяния, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ — относительные скорости после и до столкновения, μ — приведенная масса, N_b — концентрация буферных частиц, $W_b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)$ — их распределение по скоростям, которое следует полагать равновесным:

$$W_b(\mathbf{v}_{b1}) = (\sqrt{\pi}\bar{v}_b)^{-3}\exp(-\mathbf{v}_{b1}^2/\bar{v}_b^2),$$
$$\mathbf{v}_{b1} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1, \quad \bar{v}_b^2 = 2T_b/m_b, \quad \mu = mm_b/(m + m_b). \tag{17}$$

δ-функция в соотношении (16) отображают законы сохранения энергии и импульса. Таким образом, ядро $A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ пропорционально дифференциальному сечению (или парциальной частоте столкновений N_b и $\sigma(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$), усредненному по скоростям буферных частиц (или по относительным скоростям) с учетом законов сохранения.

С помощью теоремы взаимности и формулы (17) можно показать [6, 9], что из выражения (16) вытекает соотношение (13) между ядрами $A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ и $A(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})$, возникшее выше чисто феноменологическим путем.

Предполагая, что $\sigma(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ зависит только от u и угла θ между и и $\mathbf{u}_1$, можно прийти к формулам

$$\mathbf{A} = \nu_1\mathbf{v}, \tag{18}$$

$$\nu_1 = \frac{\mu}{mv}N_b\int \sigma^{(1)}(u)\cos\vartheta\, W_b(\mathbf{v} - \mathbf{u})u^2 d\mathbf{u}, \tag{19}$$

$$SpB_{\alpha\beta} = B_{\parallel} + 2B_{\perp} = \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 N_b\int \sigma^{(1)}(u)W_b(\mathbf{v} - \mathbf{u})u^3 d\mathbf{u}, \tag{20}$$

$$B_{\parallel} - B_{\perp} = \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 \frac{N_b}{2}\int \left(\sigma^{(1)}(u) - \frac{3}{4}\sigma^{(2)}(u)\right)(3\cos^2\vartheta - 1)W_b(\mathbf{v} - \mathbf{u})u^3 d\mathbf{u}, \tag{21}$$

$$\sigma^{(l)}(u) = 2\pi\int_0^{\pi}(1 - \cos^l\theta)\sigma(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)\sin\theta d\theta, \quad \cos\theta = \mathbf{u}\mathbf{u}_1/u^2, \tag{22}$$

$$\cos\vartheta = \mathbf{v}\mathbf{u}/vu.$$

Коэффициент пропорциональности ν_1 между вектором $\mathbf{A}$ и $\mathbf{v}$ называется транспортной частотой. Тензор диффузии $B_{\alpha\beta}$ аксиальносимметричен (ось симметрии направлена вдоль $\mathbf{v}$); $B_{\parallel}$ и $B_{\perp}$ — компоненты тензора в $\mathbf{v}$-системе, параллельный и перпендикулярный v.

Прямой расчет показывает, что значения A_α, $B_{\alpha\beta}$ из формул (18) — (21) не удовлетворяют равенству (9). Если, однако, принять неравенства

$$m_b/m \ll 1, \quad v^2/\bar{v}_b^2 = m_b v^2/m\bar{v}^2 \ll 1, \tag{23}$$

то соответствующие приближенные значения даются формулами

$$B_{\alpha\beta} = B\delta_{\alpha\beta}, \quad B = (1/2)\nu_1\bar{v}^2, \quad \mathbf{A} = \nu_1\mathbf{v},$$

$$\nu_1 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{m_b}{m}N_b\bar{v}_b\int\limits_0^\infty \sigma^{(1)}(u)\exp\left(-\frac{u^2}{\bar{v}_b^2}\right)\frac{u^5 du}{\bar{v}_b^6} \tag{24}$$

и условие (9) выполняется. Относительные поправки к первому приближению (24) по порядку величины равны m_b/m, $m_b v^2/m\bar{v}^2$, и их удерживать нельзя, так как отброшенные члены с третьими и четвертыми производными от ρ того же порядка малости. Действительно, простые оценки членов с производными n-го порядка от ρ таковы:

$$\begin{aligned} &n = 1: \quad \frac{v}{\delta v}\nu_1\rho, && n = 2: \quad \left(\frac{\bar{v}}{\delta v}\right)^2 \nu_1\rho, \\ &n = 3: \quad \frac{v}{\partial v}\nu_1\rho\frac{m_b}{m}\left(\frac{\bar{v}}{\partial v}\right)^2, && n = 4: \quad \left(\frac{\bar{v}}{\partial v}\right)^2 \nu_1\rho\frac{m_b}{m}\left(\frac{\bar{v}}{\delta v}\right)^2, \end{aligned} \tag{25}$$

где δv — характерная ширина неравновесной составляющей функции $\rho(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$. Параметром разложения интеграла столкновений служит, очевидно, величина

$$\frac{m_b}{m}\left(\frac{\bar{v}}{\partial v}\right)^2, \tag{26}$$

совпадающая с m_b/m, если $\delta v \sim \bar{v}$. Из оценок (25) видно также, что первый член разложения может быть как меньше $(v < \bar{v}^2/\delta v)$, так и больше $(v > \bar{v}^2/\delta v)$ второго, вследствие чего нужно сохранять члены с первыми и вторыми производными от $\rho^{(3*)}$. Члены же 3-го и 4-го порядков малы по параметру $m_в/m$, как и поправки к значениям A_α и $B_{\alpha\beta}$, вычисленным по приближенным формулам (24).

Таким образом, соотношение (9) справедливо лишь приближенно, когда транспортная частота и $B_\parallel \approx B_\perp \approx B$ принимаются не зависящими от скорости v.

Иногда независимость B от v выдвигается в качестве предположения, не связанного с условием (9), дополнительного к нему. Здесь видится ошибка, по крайней мере, когда речь идет о броуновском движении частицы в газе. Разумеется, без конкретизации физического смысла аргументов и функций, при чисто феноменологическом подходе, зависимость ν_1 и B от переменных задачи вполне возможна (см., например, [4, 8]).

Близкие по духу вопросы возникают в противоположном предельном случае $m \ll m_b$, когда у буферных частиц скорости в среднем значительно меньше, чем у примесных $(\bar{v} \gg \bar{v}_b)$. Полагая в формуле (16) $\mu/m = m_b/(m + m_b) \approx 1$ и подставляя $\delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)$ взамен $W_b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)$, получим

$$A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) = 2N_b\sigma(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)\delta(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_1^2). \tag{27}$$

Другими словами, в этом приближении буферные частицы полагаются неподвижными, а относительные скорости $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ — совпадающими с $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ соответственно. О предельном соотношении (27) говорят как о модели Лоренца, согласно которой модуль скорости не изменяется при столкновении, а угловая зависимость ядра и дифференциального сечения от угла между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ совпадают.

Распределение $W_b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)$, которое было заменено на $\delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)$, в действительности обладает шириной $\bar{v}_b$ (см. формулу (17)), и поэтому, как показывают простые оценки, среднеквадратичное изменение модуля скорости есть

$$\langle (v - v_1)^2 \rangle \equiv \frac{1}{\nu} \int (v - v_1)^2 A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)\mathrm{d}\mathbf{v}_1 \approx \frac{\nu_1}{\nu}\bar{v}_b^2, \quad v \lesssim \bar{v}. \tag{28}$$

Изменение модуля скорости в среднем сравнительно невелико и можно идти на диффузионное приближение по отношению к распределению частиц по модулю скорости v.

Рассмотрим пространственную однородную задачу $(\nabla\rho = 0)$; проинтегрируем кинетическое уравнение по направлениям $\hat{\mathbf{v}}$ вектора $\mathbf{v}$ и примем во внимание тот факт, что ядро зависит только от v, v_1 и угла между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho}(vt) = \int\limits_0^\infty \bar{A}(v_1|v)\left[e^{(v_1^2 - v^2)/\bar{v}^2}\bar{\rho}(v_1 t) - \bar{\rho}(vt)\right] v_1^2 \mathrm{d}v_1, \tag{29}$$

$$\bar{\rho}(vt) = \int \rho(\mathbf{v})\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}, \quad \bar{A}(v_1|v) = \int A(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}_1. \tag{30}$$

Разлагаем теперь $\exp(v_1^2/\bar{v}^2)\bar{\rho}(v_1 t)$ в уравнении (29) по степеням $v_1 - v$ и ограничиваемся членами второго порядка:

$$e^{v^2/\bar{v}^2}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} = -a\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{v^2/\bar{v}^2}\rho\right) + b\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(e^{v^2/\bar{v}^2}\bar{\rho}\right), \tag{31}$$

где для первого и второго моментов ядра введены обозначения

$$a = -\int\limits_0^\infty (v_1 - v)\bar{A}(v_1|v)v_1^2 dv_1 = -\int (v_1 - v)A(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}_1, \tag{32}$$

$$b = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (v_1 - v)^2\bar{A}(v_1|v)v_1^2 dv_1 = \frac{1}{2}\int (v_1 - v)^2 A(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}_1. \tag{33}$$

Как и в предыдущем случае ($m \gg m_b$), в равновесных условиях интеграл столкновений равен нулю при произвольных значениях моментов a и b. Если, однако, уравнение (31) попытаться свести к уравнению непрерывности для функции $v^2\bar{\rho}(vt)$ [6],

$$v^2\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho} = \frac{\partial}{\partial v}\left[v^2 b\left(\frac{2v}{\bar{v}^2}\bar{\rho} + \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial v}\right)\right], \tag{34}$$

то придется наложить условие

$$c \equiv a + \frac{\partial b}{\partial v} - \frac{2}{v}\left(\frac{v^2}{\bar{v}^2} - 1\right)b = 0. \tag{35}$$

Для точных значений a, b соотношение (35) не выполняется, но оказывается справедливым в случае

$$m \ll m_b, \quad v \gg \bar{v}_b. \tag{36}$$

Роль неравенства $m \ll m_b$ уже обсуждалась, условие же $v \gg \bar{v}_b$, быть может, не вполне очевидно. Оно связано с фундаментальным условием применимости диффузионного приближения: в течение любого интересующего интервала Δt времени должно произойти большое число столкновений n, т.е. $n = \nu\Delta t \gg 1$ (см., например, [8]). В силу сказанного в диффузионном приближении физически оправдано рассмотрение интервалов $v^2 \sim (\Delta v)^2 \sim \sim \bar{v}_b^2 n \gg \bar{v}_b^2$.

Таким образом, и в случае тяжелых буферных частиц условие (35) выполняется лишь на том уровне точности, который свойствен диффузионному приближению. В этой связи представляет интерес оценка порядка величины членов, отбрасываемых в соотношении (35). Здесь важны значения коэффициентов, и поэтому нужно воспользоваться какими-то моделями, допускающими вычисление моментов до конца. Для расчетов наиболее проста модель, в которой комбинации $u\sigma^{(1)}(u)$, $u\sigma^{(2)}(u)$, $u\sigma(u)$ не зависят от u. Для этой модели имеем

$$c = 15(m/m_b - \bar{v}_b^2/6v^2)a.$$

Следовательно, в действительности условие применимости диффузионного приближения на порядок более жесткое:

$$15\frac{m}{m_b}\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{6v^2}\right) \ll 1. \tag{37}$$

Близкие результаты имеют место для модели, в которой принята независимость $\sigma^{(l)}(u)$ и $\sigma(u)$ от скорости u.

Если легкие частицы электроны, а тяжелые — атомы или молекулы, то условие (37) выполняется с большим запасом; однако для смеси атомных или молекулярных газов коэффициент 15 практически важен, поскольку для выполнения неравенства (37) требуется $m/m_b \sim 10^{-2}$ и уже для $m = 2$ (молекулярный водород) и $m = 4$ (гелий) нужно $m_b = 200$ и 400 соответственно.

Оценки (25) и параметр (26) характеризуют те случаи, когда весь интеграл столкновений записывается в диффузионном приближении. Такой подход, однако, отнюдь не обязателен. Дело в том, что ядро $A(\mathbf{v}|\,\mathbf{v}_1)$ состоит из частей, сильно отличающихся своими угловыми свойствами, и можно применить диффузионное приближение для описания вклада только малоуглового рассеяния. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Для столкновений тяжелых частиц (атомов, молекул) в газокинетических условиях дифференциальное сечение имеет, как правило, три компоненты — изотропную или почти изотропную (**i**), малоугловую классическую (**c**) и дифракционную (**d**). Используя представления квазиклассической теории рассеяния, можно сказать, что изотропному рассеянию отвечают значения прицельных параметров, меньших радиуса электронных оболочек (или радиуса отталкивания) частиц. Малоугловое классическое рассеяние возникает вследствие дальнодействующих сил, например притяжения ван дер Ваальса. Наконец, дифракционная часть рассеяния обусловлена областью значений прицельных параметров, превышающих радиус Вайскопфа, где взаимодействие изменяет фазу волновой функции меньше, чем на $\pi/2$, и оно должно рассматриваться квантовомеханически, в борновском приближении.

Оценки эффективных углов рассеяния для указанных трех компонент таковы:

$$\theta_{\mathrm{i}} \sim 1, \quad \theta_{\mathrm{c}} \sim U/T \sim 0{,}1, \quad \theta_{\mathrm{d}} \sim \frac{\lambda}{\rho_{\mathrm{W}}} = \frac{\hbar}{\mu \bar{u} \rho_{\mathrm{W}}} \sim 10^{-2}, \tag{38}$$

где U, λ и ρ_{W} — потенциал взаимодействия, длина волны де Бройля и радиус Вайскопфа сталкивающихся частиц. Поскольку изменение скорости связано с углом рассеяния θ простым соотношением (см. формулу (16))

$$\Delta v = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| = \frac{\mu}{m}|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| = 2\frac{\mu}{m} u \sin\frac{\theta}{2}, \tag{39}$$

то и ядро $A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ состоит из трех частей, с резко отличающимися характерными ширинами:

$$\Delta v_{\mathrm{i}} \sim (\mu/m)^{1/2}\bar{v}, \quad \Delta v_{\mathrm{c}} \sim 0{,}1(\mu/m)^{1/2}\bar{v}, \quad \Delta v_{\mathrm{d}} \sim 10^{-2}(\mu/m)^{1/2}\bar{v} \tag{40}$$

(здесь u заменена на среднетепловую относительную скорость $\bar{u} = (m/\mu)^{1/2}\bar{v}$). Уместно напомнить, что эффективное сечение дифракционной части рассеяния приближенно равно $\pi\rho_{\mathrm{W}}^2$ и составляет примерно половину от полного эффективного сечения ($\approx 2\pi\rho_{\mathrm{W}}^2$).

Параметр малости диффузионного приближения, равный отношению эффективных ширин ядра (Δv) и неравновесной части распределения δv, задается, конечно, самой широкой частью ядра,

$$\Delta v/\delta v \sim \Delta v_{\mathrm{i}}/\partial v \sim (\mu/m)^{1/2}\bar{v}/\delta v,$$

в соответствии с формулой (26).

Известно, что в обычных явлениях переноса — в диффузии, вязкости, теплопроводности — главную роль играет изотропное и малоугловое классическое рассеяние (см., например, [10, 11]). В этих процессах дифракционную часть на фоне других обычно можно не принимать в расчет[4*], поскольку ее вклад в транспортные сечения $\sigma^{(l)}(u)$ ничтожно мал ($1 - \cos^l\theta \approx l\theta^2/2$ при малых θ, см. формулу (22)). Однако в задачах нелинейной спектроскопии газов ситуация существенно иная, и дифракционная часть рассеяния при некоторых условиях может оказаться определяющей.

Как уже упоминалось, вследствие поглощения и вынужденного испускания плоской монохроматической волны распределения атомов по скоростям на комбинирующих уровнях приобретает резкую структуру с характерной шириной $\delta v \sim \Gamma/k$, где Γ — радиационная и ударная ширина спектральной линии для данного перехода (так называемая структура Беннета, см., например, [9, 12, 13]). Для сравнительно небольших давлений (меньше мм рт. ст.) стандартная оценка $\Gamma \sim 10^8 \mathrm{c}^{-1}$ и

$$\delta v/\bar{v} \sim \Gamma/k\bar{v} \sim 10^{-2}.$$

Таким образом, структура Беннета может быть исключительно резкой в масштабе общей ширины распределения $\bar{v}$.

Естественно применить диффузионное приближение только к той части интеграла столкновений, которая обусловлена малоугловым рассеянием (или только дифракционным), сохраняя интегральную форму для изотропной части:

$$S = S^{\mathrm{i}} + S^{\mathrm{d}}, \tag{41}$$

$$S^{\mathrm{d}} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left[A^{\mathrm{d}}_\alpha \rho + \frac{\partial}{\partial v_\beta}(B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta}\rho)\right], \tag{42}$$

$$A^{\mathrm{d}}_\alpha = \int (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})_\alpha A^{\mathrm{d}}(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})d\mathbf{v}_1,$$

$$B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})_\alpha(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})_\beta A^{\mathrm{d}}(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})d\mathbf{v}_1,$$

$$A^{\mathrm{d}}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) = 2N_{\mathrm{b}}\int \sigma^{\mathrm{d}}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)\delta(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}_1^2)\delta\left[\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \frac{\mu}{m}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)\right] \times$$
$$\times W_{\mathrm{b}}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)d\mathbf{u}d\mathbf{u}_1, \tag{43}$$

где $A^{\mathrm{d}}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ и $\sigma^{\mathrm{d}}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ — дифракционные (или малоугловые) части ядра и дифференциального сечения, а член S^{i} связан с изотропным рассеянием и описывается формулами типа (2), (3). Малым параметром в разложении (42) служит комбинация

$$\Delta v_{\mathrm{d}}/\delta v \sim (\mu/m)^{1/2}\theta_{\mathrm{d}}\bar{v}/\delta v. \tag{44}$$

Отметим "практическую неравноправность" эффективного угла θ_{d} и отношения масс μ/m в формировании малого значения отношений Δv_{d} и δv: значения $\theta_{\mathrm{d}} \sim 10^{-1}$ — 10^{-2} можно считать типичными, тогда как "эквивалентные" им значения $\mu/m = 10^{-2}$ — 10^{-4} следует причислить к уникальным.

Интегрирование по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_1$ сводит соотношения (43) для A^{d}_α и $B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta}$ к формулам, аналогичным (18) — (22). Однако предположение 6 резко направленном рассеянии вперед (θ_{d} — малый параметр) приводит к упрощению. Очевидно,

$$1 - \cos^2\theta = 2(1 - \cos\theta) - (1 - \cos\theta)^2,$$

и для малых углов член $(1 - \cos\theta)^2$ в определении (22) транспортного сечения $\sigma^{(2)}(u)$ можно отбросить. Для малоуглового рассеяния, следовательно, имеем $\sigma^{(2)}_{\mathrm{d}}(u) = 2\sigma^{(1)}_{\mathrm{d}}(u)$, и формулы (18) — (22) принимают вид

$$\mathbf{A}^{\mathrm{d}} = \nu^{\mathrm{d}}_1\mathbf{v}, \tag{18a}$$

$$\nu^{\mathrm{d}}_1 = \frac{\mu}{mv}N_{\mathrm{b}}\int \sigma^{(1)}_{\mathrm{d}}(u)\cos\vartheta\, W_{\mathrm{b}}(\mathbf{v} - \mathbf{u})u^2d\mathbf{u}, \tag{19a}$$

$$B^{\mathrm{d}}_{\parallel} + 2B^{\mathrm{d}}_{\perp} = \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 N_{\mathrm{b}}\int \sigma^{(1)}_{\mathrm{d}}(u)W_{\mathrm{b}}(\mathbf{v} - \mathbf{u})u^3d\mathbf{u}, \tag{20a}$$

$$B^{\mathrm{d}}_{\perp} - B^{\mathrm{d}}_{\parallel} = \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 N_{\mathrm{b}}\int \sigma^{(1)}_{\mathrm{d}}(u)(3\cos^2\vartheta - 1)W_{\mathrm{b}}(\mathbf{v} - \mathbf{u})u^3d\mathbf{u}. \tag{21a}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае A^{d}_{α} и $B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta}$ задаются единственным транспортным сечением $\sigma^{(1)}_{\mathrm{d}}(u)$. Явное интегрирование по углу ϑ между v и u (cos ϑ входит и в $W_{\mathrm{b}}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$) позволяет убедиться в справедливости тождества

$$A^{\mathrm{d}}_{\alpha} + \frac{\partial B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta}}{\partial v_{\beta}} = \frac{2v_{\beta}}{\bar{v}^2} B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta}, \tag{9a}$$

аналогичного (9), в силу которого часть S^{d} интеграла столкновений можно записать в канонической форме:

$$S^{\mathrm{d}} = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left[B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta} \left(\frac{2v_{\beta}}{\bar{v}^2} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial v_{\beta}} \right) \right]. \tag{10a}$$

Подчеркнем, что соотношения (9а), (10а), (19а) — (21а) справедливы при произвольном отношении масс m/m_{b}, лишь бы значение параметра $(\mu/m)^{1/2}\theta_{\mathrm{d}}$ оставалось малым. При $m_{\mathrm{b}}/m \sim 1$ или > 1 величины ν_1 и $B^{\mathrm{d}}_{\parallel}, B^{\mathrm{d}}_{\perp}$, как это можно извлечь непосредственно из формул (19а) — (21а), существенно зависят от скорости v. Кроме того, также в отличие от случая $m \gg m_{\mathrm{b}}$, анизотропия тензора $B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta}$ оказывается заметной, что, впрочем, можно рассматривать как одно из проявлений зависимости $B_{\parallel}, B_{\perp}$ от v. Отметим также, что для малоуглового рассеяния справедливо неравенство $B^{\mathrm{d}}_{\perp} > B^{\mathrm{d}}_{\parallel}$, в то время как в модели изотропного рассеяния[5*] $B_{\perp} < B_{\parallel}$.

Следует подчеркнуть, что выше неявно предполагалось достаточно быстрое убывание дифференциального сечения с ростом угла рассеяния, обеспечивающее реальное уменьшение средних от $1 - \cos\theta$, $(1 - \cos\theta)^2$ и т.д. Таково, конечно, положение в моделях с экспоненциальным законом убывания. Однако при степенных законах возможны осложнения. Например, для резерфордовского рассеяния $\sigma(\mathbf{u}|\mathbf{u}) \backsim 1/\sin^4\theta/2$; в этом случае средние от $1 - \cos\theta$ и от $(1 - \cos\theta)^l$, $l \geq 2$, отличаются только на значение кулоновского логарифма.

Итак, именно при выделении малоугловой части рассеяния диффузионное приближение приводит к общему виду уравнения Фоккера—Планка, с коэффициентами, зависящими от скорости, с анизотропией тензора диффузии, с нетривиальным соотношением (9а) между A^{d}_{α} и $B^{\mathrm{d}}_{\alpha\beta}$. Традиционный же случай миграции тяжелой частицы в более легком буферном газе сильно упрощен, так как транспортная частота и коэффициент диффузии не зависят от скорости.

Напомним, что для применимости диффузионного приближения необходимо большое число столкновений. Поэтому выделение малоуглового рассеяния и его описание дифференциальным оператором предполагает, что сечение малоуглового рассеяния гораздо больше, чем изотропного.

Обратимся теперь к анализу особенностей, присущих миграции возбужденных частиц. Здесь новым и важнейшим фактором служит конечность времени жизни возбужденных состояний, обусловленная спонтанным радиационным распадом и неупругими процессами при столкновениях. Для основного состояния время жизни не ограничено, и стационарные условия отвечают равновесному распределению, т.е. статистическому равновесию между мигрирующей частицей и буферным газом[(6*)]. Продолжительность возбужденного состояния конечна, и она может оказаться слишком короткой для достижения равновесного распределения. Поэтому стационарное распределение по скоростям в возбужденном состоянии часто оказывается неравновесным. Такие условия возникают по отношению ко многим степеням свободы, когда столкновениям "не хватает времени" для того, чтобы установить равновесные распределения.

Проиллюстрируем роль малого времени жизни возбужденного состояния на простейшей модели диффузии. Пусть индекс j обозначает принадлежность к уровню с энергией E_j. Кинетическое уравнение для элемента матрицы плотности $\rho_{jj}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ имеет вид (см., например, [9])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \Gamma_j\right)\rho_{jj} = S_j + q_j, \tag{45}$$

здесь Γ_j — константа затухания, S_j — упругая часть интеграла столкновений, q_j описывает приход на уровень j из-за столкновений и взаимодействия с излучением. Величина q_j не содержит ρ_{jj} в явном виде и обычно трактуется как правая часть уравнения (45). Поэтому ниже будет рассматриваться уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \Gamma_j\right)\rho_{jj} = S_j, \tag{46}$$

которое в диффузионном приближении и для модели, в которой транспортная частота ν_1 и коэффициент диффузии не зависят от v, имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \Gamma_j\right)\rho_{jj} = \nu_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\mathbf{v}\rho_{jj} + \frac{\bar{v}^2}{2}\frac{\partial\rho_{jj}}{\partial \mathbf{v}}\right). \tag{47}$$

Функция Грина этого уравнения хорошо известна (см., например, [3, 14,15]):

$$f(\mathbf{r}\mathbf{v}t|\mathbf{r}'\mathbf{v}') = \left[2\pi(GP - H^2)^{1/2}\right]^{-3}\exp\left\{-\Gamma_j t - \frac{G\vec{\xi}^2 - 2H\vec{\xi}\vec{\eta} + P\vec{\eta}^2}{2(GP - H^2)}\right\}, \tag{48}$$

$$G = \frac{\bar{v}^2}{2}\left(1 - e^{-2\nu_1 t}\right), \quad H = \frac{\bar{v}^2}{2\nu_1}\left(1 - e^{-\nu_1 t}\right)^2,$$

$$P = \frac{\bar{v}^2}{\nu_1^2}\left[\nu_1 t - 1 + e^{-\nu_1 t} - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\nu_1 t}\right)^2\right], \tag{49}$$

$$\vec{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}'\left(1 - e^{-\nu_1 t}\right)/\nu_1, \quad \vec{\eta} = \mathbf{v} - e^{-\nu_1 t}\mathbf{v}'. \tag{50}$$

Фурье-трансформация функции Грина (48) по переменным $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, иногда более удобная, дается формулой

$$f(\mathbf{k}\vec{\varkappa}t|\mathbf{r}'\mathbf{v}') = \exp\left[-\Gamma_j t - i\mathbf{p}\mathbf{k} - i\mathbf{g}\vec{\varkappa} - \frac{1}{2}\left(P\mathbf{k}^2 + 2H\mathbf{k}\vec{\varkappa} + G\vec{\varkappa}^2\right)\right],$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}'\left(1 - e^{-\nu_1 t}\right)/\nu_1, \quad \mathbf{g} = e^{-\nu_1 t}\mathbf{v}', \tag{48a}$$

$\mathbf{k}, \vec{\varkappa}$ — фурье-переменные, сопряженные с $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ соответственно.

В отсутствие затухания ($\Gamma_j = 0$, основное состояние) малые времена $\nu_1 t \ll 1$ обычно не рассматривают, поскольку они составляют лишь самое начало эволюции, а интересуются длительностью переходной фазы процесса ($\sim 1/\nu_1$) и сравнительно большими временами $\nu_1 t \gg 1$,

$$G = \bar{v}^2/2, \quad P = \bar{v}^2 t/\nu_1 = 2Dt, \quad D = \bar{v}^2/2\nu_1, \tag{51}$$

когда исчезает память о начальной скорости ($\vec{\eta} = \mathbf{v}$), дисперсия G распределения по $\mathbf{v}$ близка к $\bar{v}^2/2$, дисперсия смещений P растет по "диффузионному" закону:

$$f(\mathbf{r}\mathbf{v}t|\mathbf{r}'\mathbf{v}') = \left[\pi\bar{v}^2(2t\nu_1)^{1/2}\right]^{-3}\exp\left[-\frac{\mathbf{v}^2}{\bar{v}^2} - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2\bar{v}^2 t/\nu_1}\right]. \tag{52}$$

Для возбужденных состояний представляет интерес обратный предельный случай [15], когда все кончается при сравнительно малых временах,

$$\nu_1 t \lesssim \nu_1/\Gamma_j \ll 1, \tag{53}$$

и дисперсии малы:

$$G = \bar{v}^2\nu_1 t \ll \bar{v}^2, \quad H = \bar{v}^2\nu_1 t^2/2, \quad P = \bar{v}^2\nu_1 t^3/3 \ll \bar{v}^2 t/\nu_1, \tag{54}$$

т.е. за время жизни возбужденного состояния резкая структура "не успевает" расшириться и сохраняется узкой в масштабе $\bar{v}$. Именно в этом предельном случае дисперсия распределения по скоростям увеличивается пропорционально t (по "диффузионному" закону), а дисперсия смещения $P \propto t^3$. Кроме того, эффект торможения здесь играет меньшую роль, чем диффузия,

$$(1 - e^{-\nu_1 t})|\mathbf{v}'| \approx \nu_1 t|\mathbf{v}'| \ll (\nu_1 t)^{1/2}\bar{v}, \tag{55}$$

если, конечно, начальная скорость v' не превышает среднетепловую $\bar{v}$ во много раз. В итоге функция Грина (48) принимает вид

$$f(\mathbf{r}\mathbf{v}t|\mathbf{r}'\mathbf{v}') = 3\sqrt{3}(\pi\nu_1|t^2\bar{v}^2)^{-3}\exp\left(-\Gamma_j t - \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}'^2}{2\bar{v}^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2}{2\bar{v}^2\nu_1 t} - \frac{6}{\bar{v}^2\nu_1 t^3}\left[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - (\mathbf{v} + \mathbf{v}')\frac{t}{2}\right]^2\right\}. \tag{56}$$

В данном приближении "эффект торможения" проявился в универсальном асимметричном множителе $\exp[-(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}'^2)/2\bar{v}^2]$. Нетрудно убедиться (например, с помощью формулы (13)) в том, что в произвольном ядре интеграла столкновений этот фактор является единственным множителем, асимметричным относительно перестановки $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ [16], а именно

$$A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) = e^{(\mathbf{v}_1^2-\mathbf{v}^2)/2\bar{v}^2}A_s(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) = e^{(\mathbf{v}_1^2-\mathbf{v}^2)/2\bar{v}^2}A_s(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}),$$

где функция $A_s(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ симметрична относительно перестановки $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$. Можно сказать, следовательно, что в приближении (53) асимметрия ядра просто "переносится" на функцию Грина. Стационарная населенность возбужденного уровня j создается благодаря непрерывному возбуждению, которое описывается правой частью уравнения (45). Рассмотрим пространственно однородную стационарную задачу, положив

$$q_j = Q_j\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}').$$

Тогда

$$\rho_{jj} = Q_jF_j(\mathbf{v}|\mathbf{v}');$$

$$F_j(\mathbf{v}|\mathbf{v}') = \int\limits_0^\infty \left[\pi\bar{v}^2(1 - e^{-2\nu_1 t})\right]^{-3/2} \exp\left[-\Gamma_j t - \frac{(\mathbf{v} - e^{-\nu_1 t}\mathbf{v}')^2}{(1 - e^{-2\nu_1 t})\bar{v}^2}\right] \mathrm{d}t. \tag{57}$$

Функция $F_j(\mathbf{v}|\mathbf{v}')$ представляет собой решение уравнения

$$\Gamma_j F_j = \nu_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\mathbf{v}F_j + \frac{\bar{v}^2}{2}\frac{\partial F_j}{\partial \mathbf{v}}\right) + \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \tag{58}$$

т.е. функцию Грина стационарной пространственно однородной задачи. Для быстрораспадающихся возбужденных состояний (условие (53)) имеем[7*]

$$F_j(\mathbf{v}|\mathbf{v}') = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(2\pi\bar{v}^2\nu_1 t)^{3/2}} \exp\left(-\Gamma_j t - \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2}{2\bar{v}^2\nu_1 t} - \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}'^2}{2\bar{v}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\alpha^2\bar{v}^2|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|\Gamma_j} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\alpha\bar{v}} - \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}'^2}{2\bar{v}^2}\right\}, \quad \alpha = \left(\frac{\nu_1}{2\Gamma_j}\right)^{1/2} \ll 1. \tag{59}$$

Характерной чертой функции Грина (59) является уже упоминавшаяся небольшая асимметрия относительно точки $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ и интегрируемая особенность в этой точке. Можно показать [9], что произвольное ядро интеграла столкновений содержит множитель $1/|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$. Следовательно, подобно асимметричному множителю, сингулярность ядра в приближении (53) "переносится" на функцию Грина (59). Масштаб структуры в распределении по скоростям задается параметром $\alpha\bar{v} = (\nu_1/2\Gamma_j)^{1/2}\bar{v} \ll \bar{v}$.

Функция (57) тесно связана с решением стационарного уравнения

$$\Gamma_j\rho_{jj}(\mathbf{v}) = -\nu\rho_{jj}(\mathbf{v}) + \int A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)\rho_{jj}(\mathbf{v}_1)\mathrm{d}\mathbf{v}_1 + Q_j\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \tag{60}$$

с модельным ядром Кейлсона—Сторера [9, 18]

$$A(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) = A_{\mathrm{KS}}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) = \nu\left[\pi(1 - \gamma^2)\bar{v}^2\right]^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\mathbf{v} - \gamma\mathbf{v}_1)^2}{(1 - \gamma^2)\bar{v}^2}\right]. \tag{61}$$

С помощью метода последовательных приближений можно прийти к формулам (62)

$$\rho_{jj}(\mathbf{v}) = Q_jF_{\mathrm{KS}}(\mathbf{v}|\mathbf{v}'),\ \Gamma_jF_{\mathrm{KS}}(\mathbf{v}|\mathbf{v}') =$$

$$= \frac{1}{1 + n}\left\{\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + n\sum_{l=1}^{\infty} \frac{[n/(1 + n)]^l}{[\pi\bar{v}^2(1 - \gamma^{2l})]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{v} - \gamma^l\mathbf{v}')^2}{(1 - \gamma^{2l})\bar{v}^2}\right]\right\};$$

$$n = \nu/\Gamma_j. \tag{62}$$

Функция Грина (57) диффузионного приближения и регулярная часть функции $F_{KS}(\mathbf{v}|\mathbf{v}')$ примерно равны, если ряд в формуле (62) можно заменить интегралом и положить

$$\nu_1 t = l \ln\frac{1}{\gamma} \approx (1-\gamma)l, \quad l\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \Gamma_j t \frac{1-\gamma}{(-\ln\gamma)} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx \Gamma_j t, \tag{63}$$

что соответствует условиям

$$\nu_1/\nu = 1-\gamma \ll 1, \quad n = \nu/\Gamma_j \gg 1, \tag{64}$$

которые должны выполняться для применимости диффузионного приближения.

Обратим внимание на $\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}')$ в выражении (62) для функции Грина $F_{KS}(\mathbf{v}|\mathbf{v}')$. Данный член, также характерный для короткоживущих состояний, описывает, очевидно, ту часть атомов, которая не испытала ни одного упругого столкновения за время их пребывания в возбужденном состоянии. Доля таких атомов (интегральная по $\mathbf{v}$) есть $\Gamma_j/(\Gamma_j+\nu) = 1/(1+n) \ll 1$, однако δ-функцию нельзя отбрасывать заранее[8*], поскольку она может привести к значительно более резкой структуре, чем регулярная часть, вследствие чего амплитуда этой резкой части может оказаться достаточно большой. Следовательно, функция Грина диффузионного уравнения для стационарной пространственно однородной задачи имеет вид

$$\frac{1}{1+n}\left[\frac{1}{\Gamma_j}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}') + nF_j(\mathbf{v}|\mathbf{v}')\right], \quad n = \nu/\Gamma_j, \tag{65}$$

где $F_j(\mathbf{v}|\mathbf{v}')$ дается формулой (57) или (59).

Итак, диффузионное приближение и теория, основанная на модельном ядре Кейлсона—Сторера (61), эквивалентны с точки зрения параметризации системы: первый и второй моменты ядра интеграла столкновений содержат одну и ту же транспортную частоту столкновений ν_1, которая принимается не зависящей от скорости; в модели Кейлсона—Сторера ν_1 выражается через параметр γ:

$$\mathbf{A} = \nu_1\mathbf{v} = (1-\gamma)\nu\mathbf{v},$$

$$\frac{1}{4}(1-\gamma^2)\nu\bar{v}^2 \approx \frac{1}{2}(1-\gamma)\nu\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\nu_1\bar{v}^2 = B,$$

$$n = \frac{\nu}{\Gamma_j} = \frac{\nu_1}{(1-\gamma)\Gamma_j}. \tag{66}$$

Если нужно сохранить член $\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}')$ в выражении (65), то для параметризации задачи требуются три величины — n, ν_1, B.

Небольшая продолжительность возбужденных состояний, ограничивающая миграцию в пространстве скоростей, делает возможным весьма своеобразный вариант так называемой "каскадной диффузии". Дело в том, что переход из достаточно высоко возбужденных состояний в основное часто осуществляется каскадным способом и по различным каналам. Вследствие этого для какого-то конкретного уровня может образоваться сложная структура в распределении по скоростям, состоящая из нескольких частей с различными степенями диффузионного уширения и смещения из-за эффекта торможения (в качестве примера анализа структуры такого рода можно указать на работу [19]).

До сих пор речь шла о миграции частиц, возбужденных или невозбужденных, т.е. на формальном уровне — о диагональных элементах матрицы плотности. При рассмотрении миграции дипольных моментов (или когерентности, или недиагональных элементов) привлекаются новые идеи. Интерес представляют когерентности как между магнитными подуровнями вырожденного состояния, так и между стационарными состояниями с различными энергиями. Анализ особенностей миграции когерентности первого типа требует учета деориентирующих столкновений, анизотропии взаимодействия сталкивающихся частиц, зависимости сечений не только от угла рассеяния. Здесь (как и везде выше) мы отвлечемся от вырождения уровней и сосредоточим внимание на "оптической" когерентности, когерентности второго типа.

Согласно корреляционной теории, пространственно-временной фурье-образ когерентности тесно связан с формой контура спектральных линий (см., например, [9, 14, 20]). Поэтому проблема допплеровского уширения спектральных линий представляет собой переложение на спектральный язык проблемы миграции когерентности в пространстве скоростей.

Первые плодотворные попытки применения диффузионного приближения к проблеме уширения спектральных линий относятся е щ е к 50-м годам [21, 22]. Было показано, что упругие столкновения, замедляя перемещения дипольных моментов, уменьшают роль допплеровского уширения из-за теплового движения и в пределе больших давлений приводят к лоренцевому контуру с так называемой диффузионной шириной:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma + \gamma_d}{(\Gamma + \gamma_d)^2 + (\omega - \omega_0 - \Delta)^2}, \quad \nu_1 \gg k\bar{v},\ |\omega - \omega_0|, \tag{67}$$

$$\gamma_d = (k\bar{v})^2/2\nu_1; \tag{68}$$

здесь Γ, Δ — полуширина и сдвиг линии, обусловленные спонтанной релаксацией и взаимодействием при столкновениях. Величина γ_d, называемая диффузионной полушириной, описывает остаточный вклад движения излучателя.

В начале 70-х годов появилась серия работ [23 — 27], в которых ядро интеграла столкновений в кинетическом уравнении для недиагонального элемента $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ матрицы плотности было выражено через амплитуды рассеяния. Именно уравнение для $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \gamma_{mn} + \nu_{mn}\right)\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t) = \\ = \int A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}_1t)d\mathbf{v}_1 + q_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t), \tag{69}$$

где γ_{mn} и $q_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ описывают спонтанный распад и возбуждение когерентности (например, светом), а

$$\nu_{mn} = \frac{2\pi\hbar}{i\mu}\int\left(f_{mn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}) - f^*_{nn}(\mathbf{u}|\mathbf{u})\right)\mathcal{V}_b(\mathbf{v} - \mathbf{u})d\mathbf{u}, \tag{70}$$

$$A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1) =$$
$$= 2N_b \int \sigma_{mn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)\delta(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}_1^2)\delta\left[\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \frac{\mu}{m}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)\right] W_b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)d\mathbf{u}d\mathbf{u}_1, \quad (71)$$

$$\sigma_{mn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1) = f_{mm}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)f^*_{nn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1), \quad (72)$$

здесь $f_{jj}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ — амплитуды упругого рассеяния в комбинирующих состояниях $j = m, n$. Таким образом, недиагональный элемент подчиняется кинетическому уравнению типа Больцмана, однако частота ухода ν_{mn} и ядро $A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ оказываются, вообще говоря, комплексными. Если рассеяние в состояниях m и n одинаково, $f_{mm}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1) = f_{nn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$, то ν_{mn} и $A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ вещественны и совпадают с аналогичными величинами интегралов столкновений в уравнениях для числа частиц $\rho_{jj}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$, $j = m, n$.

Замечательная особенность проблемы уширения спектральных линий состоит в том, что в ней приходится иметь дело с "предельно неоднородной" задачей. Действительно, в линейном приближении, например, возбуждение имеет вид

$$q_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t) = Q \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (73)$$

т.е. обладает тонкой пространственной неоднородностью с масштабом $\lambda = 2\pi/k \sim 10^{-4}$ см. Решение уравнения (69) можно представить так:

$$\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t) = Q \int F_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t|\mathbf{r}'\mathbf{v}'t')\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - \omega t')]d\mathbf{r}'d\mathbf{v}'dt', \quad (74)$$

где $F_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t|\mathbf{r}'\mathbf{v}'t')$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \gamma_{mn} + \nu_{mn}\right)F_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t|\mathbf{r}'\mathbf{v}'t') =$$
$$= \int A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)F_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}_1t|\mathbf{r}'\mathbf{v}'t')d\mathbf{v}_1 + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\delta(t - t'). \quad (75)$$

Таким образом, для вычисления $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ по формуле (74) действительно нужно знать функцию, которая на начальном этапе своей эволюции δ-образна в $\mathbf{r}\mathbf{v}$-пространстве, и найти для нее фурье-трансформацию. В противоположность этому в задачах о заселенностях часто встречаются пространственно однородные условия, речь идет только о миграции в пространстве скоростей, и расчеты существенно упрощаются.

Пространственная и временная зависимость возбуждения типа (73) характерна для однофотонных процессов испускания и поглощения. В случае многофотонного возбуждения когерентности в $q_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ вместо $\mathbf{k}\mathbf{r}$ фигурирует комбинация $\sum_i(\pm\, \mathbf{k}_i)\mathbf{r}$ с волновыми векторами $\mathbf{k}_i$ взаимодействующих волн, причем знак выбирается в соответствии с тем, испускается или исчезает фотон i. В некоторых сочетаниях векторов k_i неоднородность может оказаться крупномасштабной. На другом, спектральном языке это означает существенную взаимную компенсацию допплеровских сдвигов частот различных волн.

Вернемся к вопросу о диффузионном приближении по отношению к $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$. Предварительно отметим, что свойства сечений $\sigma_{mn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ и ядер

$A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ изучены значительно менее полно, чем аналогичные величины для заселенностей. Очевидно, $\sigma_{mn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ — комплексная осциллирующая функция угла рассеяния для случая $f_{mm}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1) \neq f_{nn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$. Если $f_{mm}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ и $f_{nn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ отличаются достаточно сильно, то вообще интегральный член в уравнениях (69) и (75) можно отбросить. Физически это очевидный результат: большое различие $f_{mm}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ и $f_{nn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ означает большое различие фаз рассеяния в состояниях m и n, т.е. большую столкновительную разность фаз атомного осциллятора; иными словами, время жизни когерентности обусловливается фазовой памятью, и эволюция $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ в пространстве скоростей уже не имеет значения. Однако существует немало противоположных случаев, когда миграция в $\mathbf{v}$-пространстве "успевает" проявиться за время фазовой памяти, и интегральный член в уравнениях (69) и (75) следует сохранить. Особый интерес с этой точки зрения представляют спектральные характеристики ионов и кулоновское их рассеяние [19, 28, 29]. Дело в том, что при кулоновском взаимодействии амплитуды рассеяния одинаковы для всех j, и фазовые эффекты, следовательно, отсутствуют.

Малое значение параметра $(m_b/m)^{1/2}\theta_d$ (за счет θ_d, или m_b/m, или и того и другого) позволяет применить диффузионное приближение для вычисления когерентности в полной аналогии с рассмотренными ранее случаями заселенностей. При переходе к дифференциальной форме столкновительного оператора фактически используется зависимость $\sigma_{mn}(\mathbf{u}|\mathbf{u}_1)$ только от угла рассеяния и u (но не от азимутального угла), а также то обстоятельство, что $A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$ зависит от $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ через множитель

$$\delta\left[\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \frac{\mu}{m}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)\right] W_b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1). \tag{76}$$

Те же свойства были важны и в случае заселенностей. Поэтому уравнение Фоккера—Планка для $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ имеет стандартный вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \gamma_{mn} + \nu_{mn} - \tilde{\nu}_{mn}\right)\rho_{mn} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left[B^{mn}_{\alpha\beta}\left(\frac{2v_\beta}{\bar{v}^2}\rho_{mn} + \frac{\partial\rho_{mn}}{\partial v_\beta}\right)\right], \tag{77}$$

$$\tilde{\nu}_{mn} = \int A_{mn}(\mathbf{v}_1|\mathbf{v})d\mathbf{v}_1,$$

где комплексный тензор $B^{mn}_{\alpha\beta}$ вычисляется по формулам (7) или (43), но с помощью ядра $A_{mn}(\mathbf{v}|\mathbf{v}_1)$. Из сказанного следует, в частности, что из микроскопической теории (а не из феноменологических соображений) вытекает возможность ввести в уравнении (77) понятие плотности столкновительного потока когерентности в $\mathbf{v}$-пространстве:

$$s^{mn}_\alpha = -B^{mn}_{\alpha\beta}\left(\frac{2v_\beta}{\bar{v}^2}\rho_{mn} + \frac{\partial\rho_{mn}}{\partial v_\beta}\right),$$

и обращение в нуль этой плотности потока в случае равновесного распределения $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ по скоростям. Осторожность в употреблении общих феноменологических соображений, выработанных применительно к свойствам распределений частиц, обязательна, ибо величина $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ сама служит характеристикой неравновесности: система с ненулевой когерентностью статистически неравновесна. Тем не менее если $\rho_{mn}(\mathbf{r}\mathbf{v}t)$ обладает максвелловским распределением по скоростям, то упругая часть интеграла столкновений в кинетических уравнениях (69) и (77) может дать лишь простейший релаксационный член $(\nu_{mn} - \tilde{\nu}_{mn})\rho_{mn}$, который отражает роль скачков фазы атомного осциллятора при столкновениях.

Общие соображения и конкретные ситуации, разобранные выше, показали, надеюсь, достаточно наглядно, существование действительно своеобразных, необычных условий, в которых протекает миграция частиц в газе, резонансно взаимодействующем с лазерным излучением. По многим своим свойствам обсужденные явления близки к тем, что имеют место в пучках или, может быть точнее, — в газовых струях со степенью коллимации порядка $\Gamma/k\bar{v}$. Структуру Беннета можно рассматривать как некий пучок или струю в пространстве скоростей. По одной декартовой компоненте — проекции скорости на волновой вектор действующей волны — струя резко ограничена интервалом порядка $\Gamma/k \ll \bar{v}$, а по двум другим ортогональным компонентам обладает почти максвелловским распределением. Общая картина релаксации структуры Беннета больше соответствует пучковой идеологии, чем стандартным образам, разработанным применительно к явлениям переноса.

Думаю, что именно необычностью ситуации, ее отличием от устоявшихся канонов, можно объяснить следующий прелюбопытный исторический факт. Существование структуры Беннета было установлено впервые в 1962 г. [30], однако только через 17 лет [31] были осознаны ее механические последствия: беннетовы струи (или пучки) атомов на двух оптически комбинирующих уровнях тормозятся буферным газом в разной мере, вследствие чего газ в целом приобретает макроскопическое механическое движение. Данное явление, получившее название светоиндуцированного дрейфа, оказалось началом зарождения нового направления — газовой кинетики в поле лазерного излучения с интересными следствиями по отношению к атомной и молекулярной физике, технологии, астрофизике и к другим областям(9*). Я упоминаю об этой проблеме отнюдь не для того, чтобы хотя бы в какой-то мере обсуждать ее по существу, но исключительно для того, чтобы подчеркнуть важность методических аспектов в системах наших знаний и их зависимость от "типичных физических условий".

Мне приятно поблагодарить М.И. Дьяконова, В.И. Переля, А.М. Шалагина и Д.А. Шапиро за интересные и полезные для меня обсуждения затронутых выше вопросов.

ПРИМЕЧАНИЯ

(1) Скорость в качестве основной переменной представляется нам более удобной, чем часто употребляемый импульс.

(2) Буферный газ, по предположению, находится в состоянии статистического равновесия. В противном случае параллельно с задачей о миграции частицы нужно рассматривать эволюцию буфера к равновесному состоянию.

(3) Необходимость сохранения членов с первыми и вторыми производными от ρ и v_α можно пояснить и другим образом. Диффузионный член приводит к расширению области локализации частицы в $\mathbf{v}$-пространстве. Динамическое трение действует в противоположном направлении. Взаимная компенсация диффузия и трения обеспечивает стабильность равновесного распределения, о чем говорит формула (9).

(4) Исключение составляют легкие газы при низких температурах [10].

(5) Для изотропного рассеяния ($\sigma(\mathbf{u}|\mathbf{u}) = \mathrm{const}$) имеем $\sigma^{(2)} = (2/3)\sigma^{(1)}$, и в формуле (21) получаем $\sigma^{(1)} - (3/4)\sigma^{(2)} = (1/2)\sigma^{(1)}$. Что касается интеграла по ϑ, то он всегда положителен.

(6) Имеются в виду, конечно, пространственно однородные условия. Холодные или горячие стенки либо иные виды искусственно поддерживаемой, существенной пространственной

неоднородности могут привести (и реально приводят во многих случаях) к резкому нарушению равновесия между различными компонентами газовой смеси и разными степенями свободы.

(7) В работе [17] приведен одномерный аналог функции Грина (59).

(8) Это обстоятельство было подчеркнуто еще в работе [18].

(9) Материалы обзорного характера о светоиндуцированном дрейфе и связанных с ним проблемах можно найти в работах [32 — 35].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Boltzmann L.//* Wien. Ber. 1872. Bd.. 66. S. 275.
2. *Ландау Л.Д.//*ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203.
3. *Chandraseknar S.//* Rev. Mod. Phys. 1943. V. 15. P. 1; перевод: Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М.: ИЛ, 1947.
4. *Леонтович М.А.* Введение в термодинамику. Статистическая физика. — М.: Наука, 1983.
5. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1972.
6. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
7. *Хинтон Ф.* Явления переноса в столкновительной плазме//Основы физики плазмы. Т. 1/Под редакцией А.А. Галеева, Р. Судана. — М.: Атомиздат, 1983. — С. 152.
8. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. — 2-е изд. — М.: Наука, 1976.
9. *Раутиан С.Г., Смирнов Г.И., Шалагин А.М.* Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул. — Новосибирск: Наука, 1979.
10. *Гиршфельдер Дж., Кертисс И., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: ИЛ, 1961.
[11] *Месси Г., Бархоп Е.* Электронные и ионные столкновения. — М.: ИЛ, 1958.
12. *Летохов В.С., Чеботаев В.П.* Принципы нелинейной спектроскопии. — М.: Наука, 1975.
13. *Попов А.К.* Введение в нелинейную спектроскопию. — Новосибирск: Наука, 1983.
14. *Раутиан С.Г., Собельман И.И.//*УФН. 1966. Т. 90. С. 209.
15. *Раутиан С.Г.//*ЖЭТФ. 1966. Т. 61. С. 1176.
16. *Алексеев В.А., Малюгин А.В.//* ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 897.
17. *Кольченко А.П., Пухов А.А., Раутиан С.Г., Шалагин А.М.//*ЖЭТФ. 1972. Т. 83. С. 1173.
18. *Keilson J., Storer J.E.//* Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. P. 243.
19. *Раутиан С.Г., Шапиро Д.А//* ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. ПО.
20. *Собельман И.И.* Введение в теорию атомных спектров. — М.: Физматгиз, 1963.
[21] *Dicke R.//* Phys. Rev. 1953. V. 89. P. 472.
22. *Подгорецкий М.И., Степанов А.В.//*ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 561.
23. *Алексеев В.А., Андреева Т.Л., Собельман И.И.* Препринт ФИАН СССР № 124. — Москва, 1971//ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1614.
24. *Tip A.//* Physica. 1971. V. 52. P. 403; 1971. V. 53. P. 183.
25. *Smith E., Cooper J., Choppell W.R., Dillon T.J.//* Quantit. Spectr. and Radiative Transfer. 1971. V. 11. P. 1547, 1567.
26. *Smith E., Cooper J., Choppell W.R., Dillon T.J.//* Stat. Phys. 1971. V. 3. P. 401.
27. *Пестов Э.Г., Раутиан С.Г.//* ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 2032.
28. *Смирнов Г.И., Шапиро Д.А.//* ЖЭТФ. 1979. Т. 76. С. 2084.
29. *Babin S.A., Shapiro D.A.//* Spectral Line Shape. V. 6. — Proceedings of the X International Conference on Spectral Line Shapes/Ed. L. Frommhold. Austin, USA, June 25 — 29, 1990.
30. *Bennett W.R., Jr.//* Phys. Rev. 1962. V. 126. P. 580.
[31] *Гельмуханов Ф.Х., Шалагин А.М.//*Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 776.
Анцыгин В.Д., Атутов С.Н., Гельмуханов Ф.Х., Телегин Г.Г., Шалагин А.М.// Ibidem. Т. 30. С. 262.
32. *Gel'muknanov F.Kh., Il'ichov L.V., Shalagin A.M.//*Physica. A. 1986. V. 137. P. 502.
33. *Rautian S.G., Shalagin A.M.* Kinetic Problems of Nonlinear Spectroscopy. — London; Amsterdam: North-Holland, 1991.
34. *Гельмуханов Ф.Х.//* Автометрия. 1985. № 1. С. 49.
35. *Werij H.G.C., Woerdman J.P.//*Phys. Rep. 1988. V. 169. P. 145.

Статья поступила 21.05.91 г.