

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.871

**МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ,
ЭФФЕКТ САДОВСКОГО
И ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛАЗМЕ**

И.В. Соколов

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| 1. Введение | 175 |
| 2. Момент импульса электромагнитного поля | 177 |
| 3. Нулевая "плотность спиральности" | 178 |
| 4. Замечание об изменении тензора момента при преобразовании сдвига | 178 |
| 5. Замечание о каноническом моменте импульса | 178 |
| 6. Об эффекте Садовского при взаимодействии электромагнитной волны с диполем | 179 |
| 7. Поток момента импульса от вращающегося диполя | 181 |
| 8. Эффект Садовского с пластинкой конечной площади | 181 |
| 9. Эффект Садовского в плазме и генерация квазистационарных токов | 185 |
| 10. Особенности обратного эффекта Фарадея в плазме | 187 |
| 11. Заключение | 189 |
| Список литературы | 189 |

1. Введение

Настоящая методическая заметка призвана разъяснить одно прочно установившееся недоразумение, касающееся выражения для момента импульса плоской электромагнитной волны в классической электродинамике. Оказывается, анализ даже самых простых эффектов передачи момента импульса при взаимодействии электромагнитных волн с веществом требует уточнения сложившихся представлений.

Например, в обзоре [1] по аналогии с известными квантовыми выражениями для энергии фотона ($\mathcal{E} = \hbar\omega$) и для проекции момента импульса на направление распространения ($m = \pm \hbar$ для фотона с правой или левой круговой поляризацией), согласно которым

$$\mathcal{E}/\omega = \pm m, \quad (1)$$

утверждается, что плотность потока момента импульса в плоской поляризованной по кругу электромагнитной волне выражается через плотность потока энергии (вектор Умова — Пойнтинга \mathbf{S}_α [2]) формулой

$$g_{xx} = \pm S_x/\omega; \quad (2)$$

здесь под g_{xx} подразумевается плотность потока в x -направлении x -компоненты момента импульса и считается, что волна $\sim \exp(-i\omega t + ikx)$ распространяется вдоль x -оси координат. Соотношение (2) не содержит постоянной

Планка \hbar , как и (1), и считается справедливым (хотя специально это не проверялось) и в рамках классической электродинамики. В порядке гипотезы такую связь между плотностями потоков энергии и момента импульса впервые предложил Пойнтинг [3], исходя из нестрогих механических аналогий.

В качестве экспериментального доказательства справедливости соотношения (2) обычно приводятся результаты работ [4, 5]. В них было обнаружено действие момента сил на тело, которое поглощает поляризованное по кругу электромагнитное излучение, или на пластинку " $\lambda/4$ ", которая изменяет поляризацию излучения. Этот эффект носит имя А.И. Садовского, который предсказал его (1899 г.) и дал количественный расчет [6]. Интересно, что Садовский упоминал еще более раннюю попытку Риги привести во вращение "пучком по кругу поляризованных электромагнитных волн и таким же пучком световых лучей тела, подвешенные на тончайших кварцевых нитях".

Приведенные соображения о плотности потока момента импульса электромагнитной волны кажутся правдоподобными, они вошли в [7, 8]. Между тем попытка более подробно обосновать соотношение (2) (заранее безнадежная, так как это соотношение неверно и в плоской волне $g_{xx} = 0$) заставляет рассуждать о потоке фотонов, проходящих через единичную площадку — так как речь идет о плотности потоков. Но если фотон "пролез" через такую площадку, то возникшая при этом неопределенность импульса приводит к несовпадению направления волнового вектора фотона с нормалью к площадке (с осью x) и проекция момента на ось x становится неопределенной, так как выражение $m = \pm \hbar$ справедливо только для проекции момента на направление распространения. Поэтому несомненное соотношение (1) нельзя непосредственно переносить на величины типа плотности момента или плотности потока момента.

Экспериментально доказать соотношение (2) также невозможно. Чтобы регистрировать в эксперименте именно плотность потока момента в плоской волне, а не полный поток момента в пучке волн (который из-за краевых эффектов действительно оказывается конечным), размер тела, которому передается вращение, должен быть малым по сравнению с масштабом поперечного распределения амплитуды в падающей на тело волне. Но при этом нельзя утверждать, что передаваемый телу момент импульса локализован в падающей на тело плоской волне, так как закон сохранения в действительности выполнен за счет выноса противоположного по знаку момента в дифрагировавшей на теле волне, которая не является плоской.

Целью заметки является не столько опровержение формулы (2), сколько попытка дать правильные классические аналоги квантового соотношения (1) и более тщательно проследить выполнение законов сохранения момента в эффекте Садовского. Кроме того, представляет интерес анализ эффекта Садовского при поглощении поляризованной по кругу электромагнитной волны в плазме. При этом момент импульса частично передается малоинерциальным электронам и раскручивает их более эффективно по сравнению с воздействием волны на твердые тела.

Оказывается, что в плоской электромагнитной волне $g_{xx} = 0$. Конечным потоком момента обладает пучок электромагнитных волн с конечным поперечным сечением Σ , причем его величина связана с потоком энергии соотношением типа (1), что и является классическим аналогом спиральности фотона. Плотность потока момента локализована на краях пучка, где волна не является плоской. Интересно, что "плотность спиральности", как уместно было

бы назвать величину $g_{\alpha\beta} S_\alpha S_\beta / S^2$, тождественно равна нулю для произвольного электромагнитного поля.

Показано, что проявление эффекта Садовского при поглощении поляризованной по кругу волны в плазме приводит к появлению токов увлечения [9, 10] специфической конфигурации и к генерации стационарных магнитных полей.

2. Момент импульса электромагнитного поля

Известно, что момент импульса электромагнитного поля определяется интегралом [2, 11, 12] (r^i — четырехмерный радиус-вектор, P^i — 4-импульс):

$$M^{ik} = \int r^i dP^k - \int r^k dP^i = c^{-1} \int (r^i T^{kl} - r^k T^{il}) dS_l \quad (3)$$

(сигнатура, как в [21]). При этом тензор плотности момента согласно (3) есть

$$m^{ikl} = c^{-1} (r^i T^{kl} - r^k T^{il}); \quad (4)$$

здесь T^{ik} — симметризованный тензор энергии-импульса для свободного электромагнитного поля:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c} S^\alpha \\ \frac{1}{c} S^\alpha & \sigma^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а $W, S^\alpha, \sigma^{\alpha\beta}$ есть плотность энергии, вектор Пойнтинга (плотность потока энергии и одновременно плотность импульса, умноженная на c^2), $\sigma^{\alpha\beta}$ — максвелловский тензор потока импульса:

$$W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2), \quad (6)$$

$$S_\alpha = \frac{c}{4\pi} [EB]_\alpha, \quad (7)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + B^2) - E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta \right], \quad (8)$$

E и B — электрическое и магнитное поле. Для трехмерных величин с греческими индексами в (6) — (8) и далее не делаем различий между ко- и контр-вариантными компонентами.

Закон сохранения энергии-импульса $\partial T^{ik} / \partial r^k = 0$ для симметризованного тензора T^{ik} приводит к выражению для закона сохранения момента импульса в виде равенства нулю четырехмерной дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial t} m^{\alpha\beta 0} + \frac{\partial}{\partial r^\gamma} c m^{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (9)$$

которое после перехода к дуальным величинам путем домножения на $e_{\alpha\beta\gamma}$ ($e_{\alpha\beta\gamma}$ — трехмерный асимметричный единичный тензор) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[r \frac{S}{c^2} \right]_\delta + \frac{\partial}{\partial r_\gamma} (e_{\delta\alpha\beta} r_\alpha \sigma_{\beta\gamma}) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) связывает изменение плотности момента с трехмерной дивергенцией плотности потока момента импульса

$$g_{\delta\gamma} = e_{\delta\alpha\beta} r_{\alpha} \sigma_{\beta\gamma} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -[rE]_{\delta} E_{\gamma} - [rB]_{\delta} B_{\gamma} + \frac{E^2 + B^2}{2} e_{\delta\alpha\gamma} r_{\alpha} \right\}. \quad (11)$$

Ясно, что величины $g_{\delta\gamma}$ имеют физический смысл количества δ -й компоненты момента, пронесимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную γ -й оси координат. Выражение для $g_{\delta\gamma}$ содержит три слагаемых, описывающих перенос момента импульса вдоль электрического поля, вдоль магнитного поля и перенос составляющей момента, направленной по $[m]$, вдоль любого вектора n .

3. Нулевая "плотность спиральности"

Отметим интересное тождество

$$g_{\delta\gamma} S_{\delta} S_{\gamma} = 0, \quad (12)$$

которое следует из (11) и тождеств $S_{\gamma} E_{\gamma} = 0$, $S_{\gamma} B_{\gamma} = 0$, $e_{\delta\alpha\gamma} S_{\delta} S_{\gamma} = 0$. Оно означает, что вдоль вектора Пойнтинга невозможен перенос составляющей момента импульса, ориентированной по вектору Пойнтинга. В частности, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся вдоль оси x , вектор Пойнтинга направлен по x , и поэтому $g_{xx} = 0$. В силу последнего условия соотношение (2) никогда не выполняется.

4. Замечание об изменении тензора момента при преобразовании сдвига

Здесь никак не фиксируется положение точки (начала координат), относительно которой определен момент импульса. Вообще говоря, при смещении начала отсчета тензор момента импульса изменяется. Однако существуют такие выделенные направления, что проекция момента на это направление остается неизменной при любом сдвиге системы координат. Например, в механике момент импульса материальной точки при смещении начала отсчета на вектор δg изменяется на $\delta M = [\delta g p]$ (p — импульс), но его проекция на направление p остается неизменной, так как δM перпендикулярен p .

Аналогичным образом в (12) и всюду далее, где вычисляются проекции потоков момента на отдельные направления, результаты оказываются инвариантными при преобразовании сдвига.

5. Замечание о каноническом моменте импульса

Вывод закона сохранения момента с помощью теоремы Нётер (см., например, [14]) приводит к каноническому выражению для тензора момента импульса в виде суммы орбитального и спинного моментов:

$$m_{ijk}^{(c)} = m_{ijk}^{(o)} + S_{ijk}. \quad (13)$$

где

$$m_{ijk}^{(o)} = \frac{1}{c} (x_i T_{jk}^{(c)} - x_j T_{ik}^{(c)}), \quad S_{ijk} = \frac{1}{4\pi c} (-A_i F_{jk} + A_j F_{ik}), \quad (14)$$

A_i и F_{ij} — 4-вектор потенциала и тензор поля:

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad (15)$$

а канонический (несимметричный) тензор энергии-импульса равен

$$T_{ij}^{(c)} = T_{ij} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} F_{ij}. \quad (16)$$

Для свободного поля разность между каноническим тензором момента $m_{ijk}^{(c)}$ и используемым в [2] и в настоящей работе тензором m_{ijk} является четырехмерной дивергенцией тензора B_{ijkl} , асимметричного по последней паре индексов, и ее добавление не изменяет закона сохранения момента (9). Поэтому для свободного поля выражения (4) и (13) равноправны. Однако при анализе передачи вращательного движения от поля к заряженным частицам тензоры m_{ijk} и $m_{ijk}^{(c)}$ уже не равноправны, поскольку при наличии зарядов их разность выражается через плотность токов j_k :

$$m_{ijk}^{(c)} - m_{ijk} = \frac{\partial B_{ijkl}}{\partial x_l} - \frac{1}{c^2} (x_i A_j - x_j A_i) j_k. \quad (17)$$

В силу соотношения (17) только тензор m_{ijk} дает плотность момента импульса поля, который (момент) сохраняется в сумме с моментом механического импульса заряженных частиц $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ (закон сохранения приведен в [13], он также непосредственно следует из доказанного в [2] закона сохранения для тензора T_{ij} в сумме с тензором энергии-импульса свободных частиц, если учесть симметричность двух этих тензоров). В то же время канонический тензор $m_{ijk}^{(c)}$ приводит, как нетрудно показать с помощью (17), к каноническому моменту импульса поля, который сохраняется в сумме с моментом канонического импульса частиц:

$$\mathbf{M}^{(c)} = \left[\mathbf{r} \left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right) \right]; \quad (18)$$

e — заряд.

Величина $\mathbf{M}^{(c)}$ вообще не совпадает с \mathbf{M} , поэтому неверно отождествлять изменение канонического момента импульса поля при взаимодействии с телами с передачей вращательного момента телам.

6. Об эффекте Садовского при взаимодействии электромагнитной волны с диполем

Проследим выполнение закона сохранения момента импульса при взаимодействии плоской электромагнитной волны с изменяющимся во времени дипольным моментом. Покажем, что хотя диполью может передаваться момент импульса, тем не менее этот момент не черпается из падающей на диполь плоской волны.

Пусть плоская волна с электрическим полем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + ikx)$ падает на диполь, помещенный в начало координат, момент которого (электрический) перпендикулярен оси x и зависит от времени, как

$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \exp(-i\omega t)$. Комплексность величин \mathbf{E}_0 и \mathbf{d}_0 учитывает возможность эллиптической поляризации волны, а также вращение и/или колебания диполя в плоскости, перпендикулярной оси x .

Такая задача тесно связана с эффектом Садовского, особенно с экспериментом типа [5], когда используются волны СВЧ диапазона, а размер тела, которому передается вращательный момент, меньше длины волны. При этом дипольный момент тела возникает в результате его поляризации в поле волны. Если ось x совпадает с одним из главных направлений поляризуемости тела, то вектор $d_\beta = \alpha_{\beta\gamma} E_\gamma$ перпендикулярен оси x ($\alpha_{\beta\gamma}$ — тензор поляризуемости).

Поле, создаваемое электрическим диполем в точке \mathbf{R} , равно [13]

$$\mathbf{B}_d = k^2 \frac{[\mathbf{R}\mathbf{d}_0]}{R^2} \left(1 - \frac{1}{ikR}\right) \exp(-i\omega t + ikR), \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_d = \left\{ k^2 \frac{[[\mathbf{R}\mathbf{d}_0]\mathbf{R}]}{R^3} + \left(\frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{d}_0)}{R^2} - \mathbf{d}_0 \right) \left(\frac{1}{R^3} - \frac{ik}{R^2} \right) \right\} \exp(-i\omega t + ikR). \quad (20)$$

Вычислим усредненный по времени поток момента импульса G_{xx} через плоскости $x = \pm L$, $kL \rightarrow \infty$. При этом предполагаем, что $|\mathbf{E}_0| \gg k^3 |\mathbf{d}_0|$ (т.е. $k^3 \alpha_{\beta\gamma} \ll 1$) и пренебрегаем квадратичными по \mathbf{B}_d и \mathbf{E}_d членами. Имеем

$$G_{xx} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \int dy dz \left\{ \frac{k^2 x}{R^3} [\mathbf{R}_\perp \mathbf{E}_0](\mathbf{R}_\perp \mathbf{d}_0^*) - \frac{k^2}{R^2} [\mathbf{R}_\perp \mathbf{d}_0^*](\mathbf{R}_\perp \mathbf{E}_0) \right\} \times \\ \times \exp(-ikR + ikx), \quad (21)$$

вектор \mathbf{R}_\perp в плоскости $x = \text{const}$ имеет компоненты y и z ; звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение.

Интегралы типа (21) при $kL \rightarrow \infty$ берутся методом стационарной фазы [15, 16]. Вычисление вклада от точки $\mathbf{R}_\perp = 0$, в которой $\partial R / \partial \mathbf{R}_\perp = 0$, дает

$$G_{xx} = \begin{cases} 0, & x = -L, \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{d}_0 \mathbf{E}_0^*], & x = L, \end{cases} \quad (22)$$

при $kL \rightarrow \infty$.

Таким образом, в падающей волне поток момента импульса отсутствует, а в волне, испытавшей взаимодействие с диполем, наводится конечный поток момента $G_{xx} = -\operatorname{Re} [\mathbf{d}_0 \mathbf{E}_0^*] / 2$.

С другой стороны, среднее по времени изменение момента импульса диполя $d\mathbf{M}_x/dt$, т.е. момент сил, действующих на диполь, равен

$$d\mathbf{M}_x/dt = \operatorname{Re} [\mathbf{d}_0 \mathbf{E}_0^*] / 2, \quad (23)$$

как следует из усреднения по времени известного выражения $[d\mathbf{E}]$. Таким образом, закон сохранения момента выполняется в виде: $d\mathbf{M}_x/dt + G_{xx}(x \rightarrow +\infty) = 0$.

Мы видим, что эффект Садовского при взаимодействии волны с диполем сводится к воздействию на диполь среднего по времени момента сил (23) и в

наведении протиположного по знаку потока момента импульса G_{xx} в волне, дифрагировавшей на диполе. Таким образом, экспериментальное измерение величины dM_x/dt может служить только проверкой несомненного соотношения (23) — но не доказательством существования момента импульса в падающей на диполь волне.

Величина (23) отлична от нуля, например, для линейно поляризованной волны в том случае, когда в плоскости y, z два главных значения тензора поляризуемости не равны друг другу. Момент сил при этом стремится развернуть диполь, чтобы ось с максимальным значением поляризуемости была бы направлена по электрическому полю. Еще интересен случай, когда в плоскости y, z тензор поляризуемости обладает положительной мнимой частью (поглощение): $\alpha_{\beta\gamma} = (\text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha) \delta_{\beta\gamma}$, и диполь взаимодействует с волной, поляризованной по кругу. При этом величина dM_x/dt равна $|E_0|^2 \text{Im } \alpha / 2$ и связана с поглощаемой мощностью $d\xi/dt = \omega \text{Im } \alpha |E_0|^2 / 2$ соотношением

$$\frac{dM_x}{dt} = \pm \omega^{-1} \frac{d\xi}{dt}, \quad (24)$$

которое является точным классическим аналогом квантового соотношения (1). Равенство (24) можно интерпретировать как проявление квантовых законов сохранения энергии и момента при поглощении фотона — но не как свидетельство наличия потока момента в плоской волне.

Подчеркнем, что сам Садовский главным результатом своей работы [6] считал именно вывод формулы (23) для случая монохроматических электромагнитных волн и ее использование для расчета момента сил, действующих на различные пластинки. О моменте импульса поля было сделано лишь одно короткое замечание (правильное! — см. ниже), не относящееся к плоской волне.

7. Поток момента импульса от вращающегося диполя

Хотя эффект потери момента импульса за счет излучения при вращении электрического диполя хорошо известен в литературе (см., например, [13]), приведем здесь ради полноты выражение для потока момента через бесконечно удаленную сферу, центр которой совпадает с точкой расположения диполя. Согласно (11), (19) имеем

$$\frac{dM_x}{dt} = \frac{k^3}{3} \text{Im} [dd^*] = \pm \omega^{-1} \frac{d\xi}{dt}, \quad (25)$$

т.е. соотношение (24) справедливо как при излучении, так и при поглощении.

8. Эффект Садовского с пластинкой конечной площади

Пусть плоская электромагнитная волна $E_w = E_{w0} \exp(-i\omega t + ikx)$ падает на плоскую пластинку, которая параллельна плоскости y, z и имеет конечную площадь $\Sigma \gg k^{-2}$. Если диэлектрическая проницаемость вещества пластинки неизотропна, то пусть направление оси x совпадает с одним из главных направлений тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$. Величины $\epsilon_{\alpha\beta}$ предполагаются зависящими только от x , дифракцией в объеме пластинки пренебрегается.

Такая пластинка может приобретать момент количества движения за счет изменения амплитудных или поляризационных характеристик волны при прохождении электромагнитной волны через пластинку или при отражении. Для количественного анализа эффекта передачи момента пластинке от поля можно вычислить момент импульса, уносимый отраженной и прошедшей волной.

Результирующее электрическое поле \mathbf{E} является суммой \mathbf{E}_w и поля \mathbf{E}_d , которое создается токами, протекающими в пластинке. Вектор плотности дипольного момента в пластинке в силу сделанных предположений перпендикулярен оси x и в каждом сечении $x = \text{const}$ не зависит от y, z .

Приведем результаты вычисления потока момента импульса через плоскости $x = \pm L$, находящиеся во френелевой зоне ($kL \gg 1, k\Sigma \gg L$). В этой зоне \mathbf{E}_d представляет собой поле пучка электромагнитных волн с поперечным сечением Σ и амплитудами $\mathbf{E}_{d\pm}$ (знаки плюс и минус для $x > 0$ и $x < 0$ соответственно), которые постоянны по сечению пучка всюду кроме узкого края. Для величины G_{xx} имеем выражения

$$G_{xx} = \frac{\Sigma}{8\pi k} \text{Im} [\mathbf{E}_{d-} \mathbf{E}_{d-}^*], \quad x < 0, \quad (26)$$

$$= -\frac{\Sigma}{8\pi k} \text{Im} [\mathbf{E}_{d+} \mathbf{E}_{d+}^*] - \frac{\Sigma}{4\pi k} \text{Im} [\mathbf{E}_{d+} \mathbf{E}_{w0}^*], \quad x > 0, \quad (27)$$

которые получены из (11) после выражения вкладов в величины $\mathbf{E}_d, \mathbf{B}_d$ от всех элементов объема пластины и интегрирования по объему пластины и по плоскостям $x = \pm L$ с помощью метода стационарной фазы. Выкладки оказываются длинными из-за высокой кратности интегрирования и поэтому опущены.

Отраженный пучок волн ($x < 0$) уносит поток момента (26). Для волны с круговой поляризацией величина G_{xx} , очевидно, отлична от нуля и притом связана с потоком энергии $S_x \Sigma$ соотношением

$$G_{xx} = \pm S_x \Sigma / \omega, \quad (28)$$

которое опять-таки аналогично (1).

Мы приходим к важному выводу о том, что пучок с конечным поперечным сечением переносит конечный поток момента импульса G_{xx} , несмотря на то, что почти во всем сечении поле пучка совпадает с полем плоской волны и $g_{xx} = 0$. Тем не менее в узком крае пучка волна не является плоской, и вектор Пойнтинга \mathbf{S} не обязательно параллелен оси пучка. Именно в этой зоне плотность потока g_{xx} отлична от нуля (что не противоречит (12)), и ее интегрирование приводит к конечной величине G_{xx} . Представление (26) в виде $G_{xx} = \Sigma [\text{Im} \mathbf{E}_{d-}, \text{Re} \mathbf{E}_{d-}] / (4\pi k)$ помогает понять, что $G_{xx} = 0$ для линейно поляризованной волны (вектор $\text{Im} \mathbf{E}_{d-}$ параллелен $\text{Re} \mathbf{E}_{d-}$) и что G_{xx} максимален по величине для пучка с круговой поляризацией ($\text{Im} \mathbf{E}_{d-}$ перпендикулярен $\text{Re} \mathbf{E}_{d-}$).

Далее предположим, что коэффициент отражения от пластинки равен нулю (за счет того, что диэлектрическая проницаемость вблизи края пластинки плавно стремится к единице). Тогда $G_{xx}(x < 0) = 0$. Момент сил, действующих на пластинку, при этом равен $dM_x/dt = -G_{xx}(x > 0)$, и

$$\frac{dM_x}{dt} = \frac{\Sigma}{8\pi k} \operatorname{Im} [(E_{d+} + E_{w0})(E_{d+}^* + E_{w0}^*)] - \frac{\Sigma}{8\pi k} \operatorname{Im} [E_{w0}E_{w0}^*]. \quad (29)$$

При обсуждении формулы (29) отметим следующее. Во-первых, если бы мы исходили только из конечного соотношения (29), не принимая во внимание (26) и (27), как это фактически и было сделано в работе [4], то казалось бы естественным утверждение этой работы, что плотность потока момента в плоской волне в соответствии с (1), (2) равна $\operatorname{Im} [E^*E]/8\pi k$. При этом полные потоки в сечении Σ равнялись бы: $G_{xx}(x < 0) = -\Sigma \operatorname{Im} [E_{w0}E_{w0}^*]/(8\pi k)$ и $G_{xx}(x > 0) = \Sigma \operatorname{Im} [(E_{d+} + E_{w0})(E_{d+}^* + E_{w0}^*)]/8\pi k$, и их разность давала бы выражение (29). Но в действительности, как показывают формулы (26), (27), распределение потока момента импульса является совершенно иным.

Во-вторых, величину $G_{xx}(x > 0)$ согласно (29) можно интерпретировать как сумму потока G_b в пучке, прошедшем через пластинку (рис. 1; величина

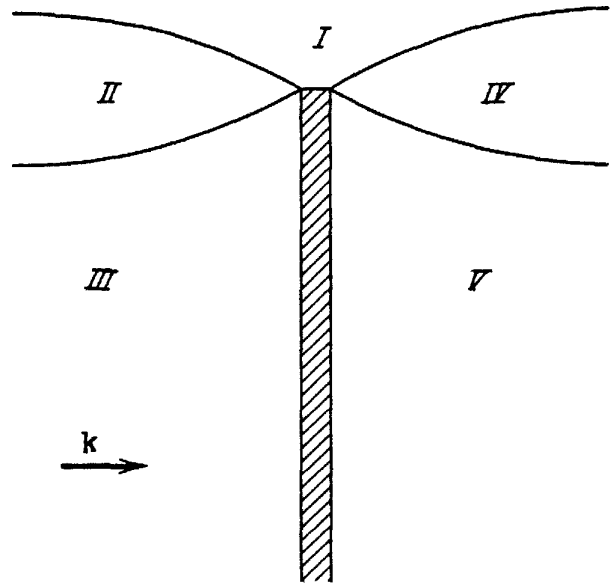


Рис. 1. Краевые волны при дифракции плоской электромагнитной волны на пластинке. Отраженная волна (в области III) и прошедшая волна (в области IV) отделены дифракционными переходными зонами II и IV от области I, где присутствует только поле падающей волны. k — волновой вектор падающей волны. Поток момента импульса локализован в областях II и IV

G_b зависит только от амплитуды прошедшей волны $E_b = E_{d+} + E_{w0}$, и вклада G_h от "дырки" во фронте волны, дифрагировавшей на пластинке, который зависит только от E_{w0} :

$$G_{xx}(x > 0) = G_b + G_h, \quad G_b = \frac{\Sigma}{8\pi k} \operatorname{Im} [E_b^*E_b], \quad G_h = \frac{\Sigma}{8\pi k} \operatorname{Im} [E_{w0}E_{w0}^*]. \quad (30)$$

Такая интерпретация, однако, имеет смысл только в предельных случаях, когда G_b или G_h равны нулю. Например, если падающая волна отсутствует ($E_{w0} = 0$) или линейно поляризована, то поток момента равен G_b и сосредоточен в пучке волн за пластинкой. Наоборот, при полном поглощении волны в пластинке, или если прошедшая волна приобретает чисто линейную поляризацию, то $G_b = 0$ и поток момента локализован в крае волны, дифрагировавшей на пластинке. В общем же случае, когда $G_b \neq 0$ и $G_h \neq 0$, разделение величины $G_{xx}(x > 0)$ на G_b и G_h является чисто условным, так как весь поток момента импульса в действительности локализован в узкой переходной зоне

между волной, прошедшей через пластинку, и волной, огибающей пластинку (см. рис. 1), а не в каждой из этих волн по отдельности.

Нетрудно заметить, что если прошедший через пластинку пучок поляризован по кругу, то величина G_h снова связана с потоком энергии в пучке $S_x \Sigma$ равенством (28), которое аналогично квантовому соотношению (1). Такое же равенство связывает поток момента G_h в "дырке" с дефектом потока энергии в этой "дырке".

Подчеркнем еще, что именно с конечной величиной G_h для эллиптически поляризованной волны связана главная методическая трудность в обсуждаемом вопросе: поскольку G_h не равна нулю и не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, оказывается невозможным естественное определение плотности потока момента электромагнитного поля g_{xx} как момента импульса, приобретаемого единичной площадкой при полном поглощении падающих на нее волн.

Наконец, интересно отметить, что единственное замечание Садовского о моменте импульса поля относится к поляризованному по кругу световому пучку, который образуется при прохождении линейно поляризованного пучка через пластинку " $\lambda/4$ "; ширина пластинки велика по сравнению с диаметром пучка. При этом на пластинку действует момент сил, и естественное предположение об отсутствии момента импульса в линейно поляризованном пучке приводит к необходимости уноса момента пучком волн с круговой поляризацией. Такое рассуждение правильно (если опустить приведенные при этом в [6] соображения о вращении эфирных частиц), но оно, очевидно, справедливо именно для конечного пучка и не имеет отношения к более поздним неправильным выводам [4] о плотности потока момента в плоской волне.

9. Эффект Садовского в плазме и генерация квазистационарных токов

Рассмотрим теперь эффект Садовского в плазме при столкновительном поглощении поляризованной по кругу электромагнитной волны.

Пусть на плазму, занимающую цилиндрический объем, ось которого параллельна оси x , падает волна $E_w = E_{w0} \exp(-i\omega t + ikx)$. При учете столкновений электронов с ионами (ei) диэлектрическая проницаемость плазмы содержит положительную мнимую часть [17, 18]:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (31)$$

где ν — эффективная частота ei-столкновений, а ω_{pe} — электронная плазменная частота $\omega_{pe}^2 = 4\pi Ne^2/m$, заряд и масса электронов равны $-e$ ($e > 0$) и m , а N — концентрация плазмы.

Мнимая часть диэлектрической проницаемости связана с мощностью, поглощаемой элементарным объемом плазмы $dx dy dz$:

$$dQ = \frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Im} \epsilon |E_{w0}|^2 dx dy dz = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{8\pi \omega^2} |E_{w0}|^2 dx dy dz. \quad (32)$$

В (32) и далее для простоты вычислений предполагается, что $\omega_{pe} \ll \omega$, $\nu \ll \omega$. В силу этих условий можно в первом приближении считать поле в плазме совпадающим с полем падающей волны (если только размеры плазменного объема не очень велики) и полагать амплитуду электрического поля равной E_{w0} .

Энергия волны, которая прошла через плазму, частично поглощается в ней. Поэтому за плазменным слоем поле этой волны несколько меньше, чем $|E_{w0}|$, и в соответствии с (29) плазме при этом должен передаваться момент импульса.

На первый взгляд это может показаться удивительным, поскольку в однородной плазме в поле поляризованной по кругу волны электроны движутся по окружности:

$$r_e = r_0 + \frac{eE_w}{m\omega^2}, \quad (33)$$

и не происходит передача среднего по времени момента импульса ни электрону от поля, ни иону от электронов (в (33) r_e — зависящий от времени радиус-вектор электрона, а $r_0 = \text{const}$ — координаты электрона в отсутствие поля). Однако подчеркнутая выше роль краевых эффектов в передаче импульса от поля к телам подсказывает необходимость учета эффектов на границе плазмы, где ее концентрация N равномерно спадает до нуля.

Поэтому рассмотрим случай, когда N однородна (для простоты) вдоль оси x , но в сечении yz функция N зависит от y, z и обращается в нуль на границе плазмы. Чтобы оставаться в рамках линейной электродинамики плазмы, считаем, что радиус электронных орбит, определенный согласно (33), является малым по сравнению с характерным масштабом изменения функции $N(y, z)$.

Считая градиент концентрации малым, но конечным, усредним по времени силу трения, действующую на электрон вследствие e -столкновений $f_e = -mv_e$, где $v_e = dr_e/dt$ — скорость электрона. Необходимо учесть малое изменение вдоль траектории электрона частоты столкновений электрона с ионами ν , которая пропорциональна концентрации ионов N , и использовать стандартный прием усреднения билинейных по комплексной амплитуде величин. Имеем

$$\langle f_e \rangle = -\frac{e\nu(r_0)}{2\omega^2 N} \text{Re} \{ (E \text{ grad } N) v^* \} = \frac{e^2 \nu(r_0)}{2m\omega^3 N} \text{Im} \{ E_{w0}^* (E_{w0} \text{ grad } N) \}. \quad (34)$$

Для волны с чисто круговой поляризацией

$$\langle f_e \rangle = \pm \frac{e^2 \nu(r_0)}{4m\omega^3 N} |E_{w0}|^2 \left[\frac{k}{k} \text{grad } N \right], \quad (35)$$

волновой вектор k направлен по оси x . Сила $\langle f_e \rangle$ направлена по касательной к линии $\nu = \text{const}$ и заставляет электрон двигаться вдоль замкнутого контура $N = \text{const}$, причем средний по периоду радиус-вектор электрона вращается в том же направлении, что и вектор электрического поля в электромагнитной волне. Причина появления силы $\langle f_e \rangle$ в неоднородной плазме и ее ориентация по отношению к вектору $\text{grad } N$ ясны из рис. 2.

Теперь вычислим среднюю силу, действующую на отдельный ион, для простоты предполагая все ионы однозарядными и пренебрегая движением ионов в поле волны. При этом необходимо учесть, что в неоднородной плазме в поле волны электрическая концентрация не вполне совпадает с концентрацией ионов $N(y, z)$ (см. пояснения на рис.2). Поскольку все электроны плаз-

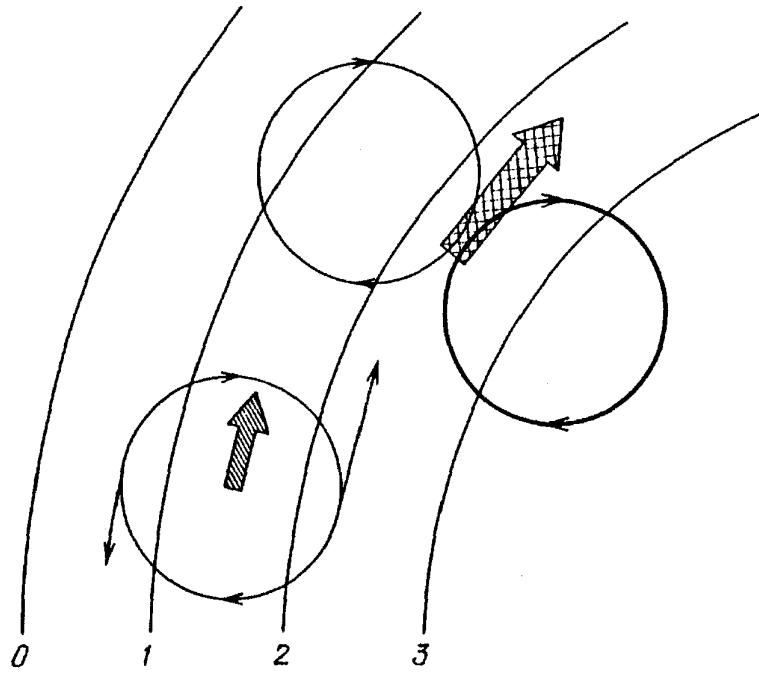


Рис. 2. Иллюстрация причины появления средней силы столкновений при вращении электронов в поле волны на краю плазмы. Здесь 0, 1, 2, 3 — линии равной плотности плазмы ($N = 0$, $N = 1$, и т.д.), выраженной в некоторых условных единицах, окружности со стрелками на них изображают траектории и направление вращения электронов. В нижней части рисунка тонкие стрелки представляют векторы силы трения, действующей на электрон на различных участках траектории. Поскольку сила трения пропорциональна ионной плотности, ее величина непостоянна, и усредненная по периоду сила (толстая стрелка) не равна нулю и направлена вдоль линии $N = \text{const}$. В верхней части рисунка условно изображены траектории электронов, действующих в различные моменты времени на один и тот же ион, причем толщина соответствующей линии связана с плотностью электронов, движущихся по данной траектории. Поскольку сила трения, действующая на ион со стороны электронов, пропорциональна электронной плотности, усредненная по периоду сила (толстая стрелка) опять отлична от нуля и направлена вдоль линии $N = \text{const}$.

мы вращаются одинаково, то концентрация электронов в точке \mathbf{r}_e равна их начальной (до включения поля) концентрации в точке \mathbf{r}_0 , так что $n_e(\mathbf{r}_e) = N(\mathbf{r}_0)$. Поэтому средняя сила трения, которая действует со стороны электронов на ион $\mathbf{f}_i = m\mathbf{v}_i\mathbf{v}_e$ и для которой частота столкновений иона с электронами ν_i пропорциональна электронной концентрации, выражается после усреднения в виде

$$\langle \mathbf{f}_i \rangle = \frac{e^2 \nu(\mathbf{r}_0)}{2m\omega^3 N(\mathbf{r}_0)} \text{Im} \{ \mathbf{E}_{w0}^* (\mathbf{E}_{w0} \text{grad } N) \}. \quad (36)$$

Таким образом, $\langle \mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{f}_e \rangle$. Отметим, что усредненные по объему значения $\langle \mathbf{f}_i \rangle$ и $\langle \mathbf{f}_e \rangle$ равны нулю, как видно из (36) (иначе возникало бы противоречие, так как $\int dx dy dz (\langle \mathbf{f}_i \rangle + \langle \mathbf{f}_e \rangle) = 0$).

Сила $\langle \mathbf{f}_i \rangle$ тесно связана с так называемым нелинейным током (см., например, [19]). Действительно, из вывода выражения (36) ясно, что $\langle \mathbf{r}_i \rangle$ пропорциональна среднему по времени от произведения $\langle \delta n_e \mathbf{v}_e \rangle$, где δn_e — изме-

нение электронной плотности в фиксированной точке \mathbf{r}_0 , связанное с вращением электронов в поле. Но такое же среднее дает вклад в средний электронный ток $\mathbf{J}_n = -e\langle\delta N_e \mathbf{v}_e\rangle$:

$$\mathbf{J}_n = -\frac{e^3}{2m^2\omega^3} \text{Im} \{ \mathbf{E}_{w0}^* (\mathbf{E}_{w0} \text{grad } N) \}. \quad (37)$$

Можно сказать, что сила $\langle \mathbf{f}_i \rangle = -m\nu \mathbf{J}_n / eN$ возникает из-за трения нелинейного тока об ионы.

Интегрирование объемной плотности момента сил $[\mathbf{R}_\perp \langle \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_i \rangle]$ дает выражение для полного момента сил $d\mathbf{M}/dt$:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{2} \text{Im} [\mathbf{E}_{w0} \mathbf{E}_{w0}^*] \int dx dy dz \frac{\nu \omega_{pe}^2}{4\pi\omega^3} = \frac{\text{Im} [\mathbf{E}_{w0}^* \mathbf{E}_{w0}]}{\omega |\mathbf{E}_{w0}|^2} \int dQ \quad (38)$$

(см. (32)), что полностью согласуется с предыдущими результатами. Для круговой поляризации, как и ранее, $d\mathbf{M}/dt = \pm \omega^{-1} \int dQ$.

Итак, поглощение поляризованной по кругу волны в плазме приводит к передаче момента импульса электронам и ионам плазмы. Подчеркнем во избежание недоразумения, что несмотря на интегральную связь (38) с мощностью, поглощаемой в объеме плазмы (в том числе в областях с однородной концентрацией), передача момента связана с силами, действующими только на градиентах плотности плазмы (на краю).

10. Особенности обратного эффекта Фарадея в плазме

Действие силы $\langle \mathbf{f}_e \rangle$ приводит к разгону электронов относительно ионов. При этом средняя скорость электронов $\langle \mathbf{v}_e \rangle$ выходит на стационарное значение $\langle \mathbf{f}_e \rangle / m\nu$, что приводит к появлению тока увлечения:

$$\mathbf{J}_c = -eN\langle \mathbf{v}_e \rangle = -\frac{e^3}{2m^2\omega^3} \text{Im} \{ \mathbf{E}_{w0}^* (\mathbf{E}_{w0} \text{grad } N) \} = \mathbf{J}_n. \quad (39)$$

Величина \mathbf{J}_c не зависит от частоты столкновений (см. примечание ниже), столкновения определяют только время установления. В соответствии с направлением силы $\langle \mathbf{f}_e \rangle$ линии электронного тока лежат в плоскости $x = \text{const}$ и совпадают с контурами $N = \text{const}$ и, следовательно, являются замкнутыми. Отметим, что, с одной стороны, ток (39) является частным случаем токов увлечения, и даже формула (39) может быть получена из общей формулы для таких токов [19]. С другой стороны, именно замкнутый характер токов (39) для поляризованной по кругу волны является важной отличительной особенностью, поскольку обычно проблема замыкания токов увлечения не проста [20].

Считая для простоты плазменный цилиндр длинным (тогда можно пренебречь зависимостью поля от x), найдем напряженность квазистационарного магнитного поля. Уравнения Максвелла и уравнение движения электронов для медленно меняющихся величин имеют вид [21]:

$$\partial \langle \mathbf{v}_e \rangle / \partial t = -(e/m) \langle \mathbf{E} \rangle - \nu_0 \langle \mathbf{v}_e \rangle + m^{-1} \langle \mathbf{f}_e \rangle, \quad \mathbf{J} = -eN \langle \mathbf{v}_e \rangle, \quad (40)$$

$$\text{rot} \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t}, \quad \text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_n) + \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t}. \quad (41)$$

В уравнении (40) введение иного обозначения ν_0 для частоты столкновений учитывает тот факт, что в соотношении (31) для диэлектрической проницаемости эффективная частота столкновений, вообще говоря, зависит от ω (хотя бы из-за зависимости пределов обрезания кулоновского логарифма от ω). Поэтому величина ν_0 в (40), определяющая низкочастотную проводимость, может отличаться от рассматриваемой до сих пор величины ν , которая связана с поглощением плазмы на частоте ω (в (39) этим различием пренебрегалось).

На коротких интервалах времени $t \ll \nu_0^{-1}$ после включения поля ток \mathbf{J}_n компенсируется диамагнитным током $-eN\langle \mathbf{v}_e \rangle$, создаваемым индукционными электрическими полями, а ток увлечения не успевает разогнаться. Отметим, что выше, где шла речь о силах $\langle \mathbf{f}_e \rangle$ и $\langle \mathbf{f}_i \rangle$, диамагнитный ток не принимался во внимание. Тем не менее учет трения этого тока о ионы в соотношении (38) не привел бы к изменению результата (так как суммарная сила $\langle \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_i \rangle$ не зависит от $\langle \mathbf{v}_e \rangle$), а в (40) средняя сила, действующая на электрон, учтена полностью.

При $t \gg \nu_0^{-1}$ уравнения (40), (41) с учетом выражений для \mathbf{J}_n , $\langle \mathbf{f}_e \rangle$ дают уравнение диффузии магнитного поля

$$\frac{\omega_{pe}^2}{c^2 \nu_0} \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} + \text{rot rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \frac{4\pi}{c} \text{rot} \left(\mathbf{J}_n + \frac{\nu}{\nu_0} \mathbf{J}_n \right), \quad (42)$$

в котором роль источника поля играют нелинейный ток (первое слагаемое в скобках в правой части) и ток увлечения, который при $\nu_0 \neq \nu$ отличается от ранее полученного выражения (39) наличием множителя ν/ν_0 . За диффузионное время магнитное поле выходит на стационарное значение

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \left(1 + \frac{\nu}{\nu_0} \right) \langle \mathbf{B}_n \rangle, \quad \langle \mathbf{B}_n \rangle = \frac{\pi e^3 N}{m^2 c \omega^3} \text{Im} [\mathbf{E}_{w0} \mathbf{E}_{w0}^*]. \quad (43)$$

Вне плазмы пространственное распределение магнитного поля совпадает с наружным полем соленоида. Величина $\langle \mathbf{B} \rangle$ зависит от частоты столкновений только через отношение ν/ν_0 и не зависит от величины и характера краевых градиентов концентрации, порождающих ток увлечения и нелинейный ток. При фиксированной мощности электромагнитной волны поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ строго пропорционально степени круговой поляризации и, в частности, меняет знак при замене правой поляризации на левую.

Генерация стационарного магнитного поля при прохождении поляризованной по кругу волны через среду носит название обратного эффекта Фарадея [22, 23]. Известный анализ этого эффекта для прозрачной немагнитной среды [22, 23] основан на использовании выражения для свободной энергии в присутствии магнитного поля и высокочастотной волны, которое может иметь минимум при ненулевой напряженности стационарного магнитного поля, если высокочастотная диэлектрическая проницаемость содержит члены, линейно зависящие от $\langle \mathbf{B} \rangle$. Однако формальное применение результирующих формул [22, 23] к плазме, как это сделано, например, в [24], приводит к выражению (в обозначениях формулы (43)):

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}_n \rangle, \quad (44)$$

которое отличается от (43) отсутствием множителя $1 + (\nu/\nu_0)$, или, что то же самое, пренебрежением током увлечения по сравнению с нелинейным током. Из других соображений, и опять без учета тока увлечения, формула (44) была получена в [25].

Никакого противоречия в этом, однако, нет. Дело в том, что плазму можно рассматривать как прозрачную немагнитную среду и применять к ней формулу (44) лишь в том случае, если, с одной стороны, $\nu \rightarrow 0$ (иначе плазма не вполне прозрачна), а с другой стороны, $\nu_0 \rightarrow \infty$ (иначе плазма диамагнитна). Но как раз при $\nu/\nu_0 \rightarrow 0$ выражение (43) переходило бы в (44).

Однако если величины ν , ν_0 определяются чисто столкновительным механизмом, то $\nu \approx \nu_0$, ток увлечения равен нелинейному току, и генерируемое магнитное поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ превосходит $\langle \mathbf{B}_n \rangle$ примерно в два раза.

Если же поглощение электромагнитной волны обусловлено какими-то коллективными процессами в плазме [26], то величина ν может возрасти на несколько порядков и возможен случай, когда $\nu \gg \nu_0$. При этом соответственно магнитное поле генерируется в основном токами увлечения и превышает $\langle \mathbf{B}_n \rangle$ в отношении $\nu/\nu_0 \gg 1$. Это замечание может оказаться важным, поскольку генерация магнитных полей при взаимодействии электромагнитной волны с плазмой исследуется экспериментально в весьма широком диапазоне параметров, и в ряде экспериментов, по-видимому, поглощение волны сопровождается турбулизацией плазмы и возрастанием эффективной величины ν .

Отметим еще, что после установления магнитного поля (43) во всем объеме плазмы поглощаемый в плазме момент импульса больше не разгоняет ток, а целиком передается ионам (величина $\langle \mathbf{f}_i \rangle$ возрастает в два раза по сравнению с (36) из-за трения тока увлечения об ионы) и вызывает вращение плазмы.

11. Заключение

Несмотря на то, что обсуждаемые в статье вопросы в основном имеют методический характер, результаты последних двух разделов подчеркивают их тесную связь с современными и актуальными вопросами электродинамики плазмы.

Данная заметка не могла бы появиться без настойчивого интереса к рассматриваемым явлениям со стороны Г.А. Аскарьяна, Г.М. Батанова, Н.К. Бережецкой и И.А. Коссого в связи с экспериментами по генерации квазистационарных магнитных полей в плазме с помощью мощной СВЧ-волны. Им же принадлежит постановка большинства из затронутых здесь вопросов. Кроме них автор благодарит за обсуждения С.В. Буланова, В.А. Беякова, Б.М. Болотовского, А.М. Игнатова и А.А. Рухадзе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Розенберг Г.В.//УФН. 1950. Т. 40. С. 328.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
3. Poynting J.H.//Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1909. V. 82, No. 557. P. 560.
4. Beth P.A.//Phys. Rev. 1936. V. 50. P. 115.
5. Carrara N.//Nature. 1949. V. 164, No. 4177. P. 882.

6. Садовский А.И.//Уч. Зап. Имп. Юрьевск. ун-та. 1899. № 1. С. 1 — 126.
7. Садовского эффект//БСЭ. Т. 22. — М.: Сов. энциклопедия, 1975. — С. 1469.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 5. Атомная и ядерная физика. Ч. 1. — М.: Наука, 1986.
9. Аскаръян Г.А., Рабинович М.С., Смирнова А.Д., Студенов В.Б.//Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 5. С. 116.
10. Пашинин П.П., Прохоров А.М.//Ibidem. 1977. Т. 26. С. 687.
- [11] Иваненко Д.Д., Соколов А.А. Классическая теория поля. — М.;-Л.: Гостехиздат, 1949.
12. Иваненко Д.Д., Соколов А.А. Квантовая теория поля. — М.;-Л.: Гостехиздат, 1952.
13. Джексон Дж. Классическая электродинамика, — М.: Мир, 1965.
14. Кушниренко А.Н. Введение в квантовую теорию поля. — М.: Высшая школа, 1983.
15. Эрдейи А. Асимптотические разложения. — М.: Физматгиз, 1962.
16. Риекстыньш Э.Ф. Асимптотические разложения интегралов. Т. 2. — Рига: Зинатне, 1977.
17. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме, — М.: Физматгиз, 1960.
18. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
19. Алиев Ю.М., Быченков В.Ю.//Физ. плазмы. 1980. Т. 6. С. 80.
20. Горбунов Л.М., Гутьеррес С.Р. Генерация электростатических полей и токов увлечения при прохождении через плазму высокочастотной электромагнитной волны. — Препринт ФИАН СССР № 269. — Москва, 1987.
- [21] Горбунов Л.М.//УФН. 1973. Т. 109. С. 631.
22. Питаевский Л.П.//ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1450.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
24. Бункин Ф.В., Калинин Ф.В.//Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 93.
25. Tsytovich V.//Comm. Plasma Phys. and Cont. Fusion. 1978. V. 4. P. 81.
26. Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме. — М.: Наука, 1967.

Статья поступила 22.05.91 г.,
после доработки 28.06.91 г.