Август 1990 г. *Том 160, вып. 8*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.175

КОРРЕЛЯЦИИ И ФЛУКТУАЦИИ В ПРОЦЕССАХ МНОЖЕСТВЕННОГО РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ

И. М. Дремин

(Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Наиболее вероятным исходом столкновения двух частиц очень высокой энергии является рождение большого числа новых частиц. Исследованием процессов множественного рождения частиц, начало которому было положено более 50 лет тому назад при изучении космических лучей, занимается много физиков. Самые полные и точные результаты получаются в экспериментах на ускорителях, которые все далее перекрывают энергетическую область, ранее доступную только в космических лучах. Несмотря на огромное количество накопленной экспериментальной информации и опыт в построении феноменологических моделей мы не можем похвастаться тем, что удается объяснить все наблюдаемые явления и предсказать новые характерные особенности. Прогресс в дешифровке кварковой структуры сильных взаимодействий, достигнутый за четверть века, не решил основных проблем в описании множественного рождения, хотя и помог в развитии новых феноменологических моделей, хорошо воспроизводящих многие характеристики неупругих процессов. Все же приходится часто сталкиваться с ситуациями, когда эксперимент преподносит сюрпризы и вынуждает либо исправлять теоретические модели, либо вообще отказываться от какой-либо из них. Об одной из таких ситуаций и пойдет речь ниже.

Изучение процессов множественного рождения частиц обычно начинается с простейших характеристик — полных сечений, распределения по множественности, одночастичных инклюзивных распределений (по (псевдо) быстроте, поперечному импульсу и т. п. Более детальная информация получается из измерения корреляций и эксклюзивных экспериментов, требующих усовершенствованных установок и больших усилий. Накопление такой информации помогает в прояснении динамики процессов.

С точки зрения теоретика было бы предпочтительным использовать квантовую хромодинамику для описания результатов экспериментов. К сожалению, ее применение к мягким процессам с малыми передачами импульсов весьма ограничено. Это связано с тем, что мы плохо пони-

маем механизм невылетания кварков, связанный с сильными непертурбативными эффектами. В теории множественного рождения эта проблема приводит к необходимости феноменологического описания перехода кварков и глюонов, с которыми оперирует КХД, в наблюдаемые на опыте адроны. В этой ситуации приходится либо рассматривать общие соотношения, связывающие друг с другом различные экспериментальные факты, либо развивать феноменологические модели, описывающие эти факты путем подгонки некоторых свободных параметров. Сейчас существует уже много таких моделей, в которых путем монтекарловского моделирования может быть получена полная информация о всех рождающихся частицах. Иногда та или иная модель оказывается неспособной объяснить полученные экспериментальные результаты или же непригодной в новой области энергий, и тогда либо о ней забывают, либо модифицируют ее.

Проблема флуктуаций оказалась одной из самых критичных для всех ранее предложенных моделей. Ни одна из них не смогла объяснить экспериментальных данных.

Динамическая природа таких флуктуаций широко дискутируется сейчас. Предложены разные объяснения, апеллирующие либо к хаотической (перемежаемой) динамике, либо к обычным (но специального типа) динамическим процессам.

Мы опишем здесь кратко общую ситуацию с корреляциями частиц в процессах рождения адронов, остановимся на экспериментальных результатах о флуктуациях, на их связи с наблюдаемыми корреляциями и теоретических подходах к пониманию динамической природы флуктуаций. Цель обзора состоит в том, чтобы объяснить основные понятия, в сжатой форме изложить предлагаемые идеи и их взаимную связь, оставив читателю широкую свободу выбора среди множества работ последних лет, посвященных этой теме и приведенных в списке литературы. Краткость обзора диктуется, прежде всего, тем, что его предмет еще не созрел до полного обзора. Интерес к этой теме возрастает, растет число экспериментальных и теоретических работ в этой области, а вместе с ними и количество новых проблем.

2. Корреляции. Как в любой задаче многих тел, в процессах множественного рождения частиц можно выделить огромное число характеристик, дающих информацию о корреляциях рожденных частиц. Ведь каждый процесс образования n частиц можно охарактеризовать положениями n точек в трехмерном фазовом пространстве, к каждой из которых добавлена информация о природе этой частицы (масса, заряд, спин и т. п.). Соответственно, число и разнообразие корреляций невообразимо велико — двух-, трех- и т. д. частичные корреляции, азимутальные корреляции, распределения быстротных интервалов, содержащих несколько частиц, корреляции зарядов, корреляции групп частиц в различных областях фазового объема и т. п. В этом обзоре мы, в основном, ограничимся корреляциями частиц по (псевдо) быстроте, оставив в стороне зарядовые корреляции, корреляции частиц разной природы и т. п.

Конечно, наличие некоторых корреляций проявляется уже в простейших характеристиках процессов, таких, как распределения по множественности в разных областях доступного фазового объема, в частности, в поведении высших моментов этих распределений. Как известно, феноменологическое описание распределений неупругих событий по множественности n в полном фазовом объеме с помощью масштабно-инвариантного КНО (Кобы — Нильсена — Олесена) распределения

$$P(n) = \frac{1}{\langle n \rangle} \psi\left(\frac{n}{\langle n \rangle}\right) \tag{1}$$

(ψ считается универсальной функцией, не зависящей явно от энергии) оказалось весьма успешным в электрон-позитронной аннигиляции и в лепторождении при всех доступных сейчас энергиях (до $s^{1/2}\sim 50$ ГэВ), а также в адрон-адронных процессах вплоть до наивысших энергий ISR ($s^{1/2}\sim 63$ ГэВ). Однако при дальнейшем росте энергий на $Sp\bar{p}S$- и FNAL-коллайдерах (до $s^{1/2}\sim 900$ ГэВ и 1,8 ТэВ, соответственно) масштабная инвариантность, определяемая зависимостью функции ψ только от отношения множественности n к ее среднему значению $\langle n\rangle$, нарушается и распределения становятся шире с ростом энергии. Максимум на малых множественностях сужается и возрастает, но растет и роль процессов с множественностью, заметно превышающей среднюю, как это видно из рис. 1, где в КНО-масштабе $n/\langle n\rangle$ сравниваются экспериментальные данные по недифракционным $\bar{p}p$-процессам при энергиях 200 и 900 ГэВ (в логарифмическом и линейном масштабах по оси ординат подчеркиваются различные особенности распределений).

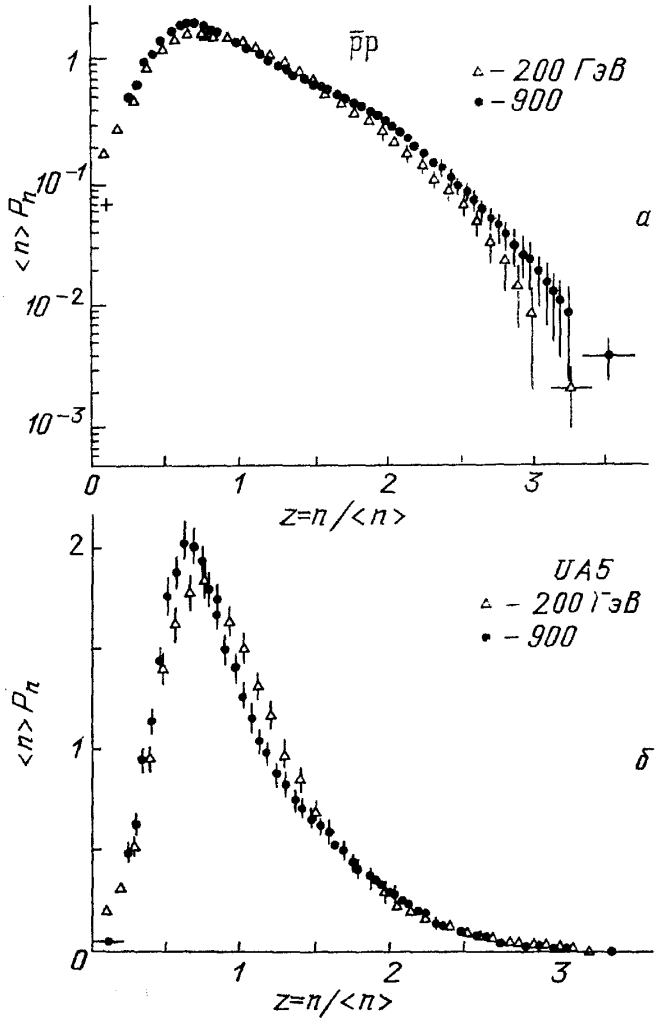

Рис. 1. Распределения по множественности в недифракционных $\bar{p}p$-взаимодействиях при энергиях в системе центра масс 200 и 900 ГэВ демонстрируют нарушение КНО-скейлинга при этих энергиях в логарифмическом (*а*) и линейном (*б*) масштабах

Нарушение КНО-скейлинга за счет корреляций наглядно проявляется в поведении нормированных моментов распределения по множественности

$$C_q=\frac{\langle n^q\rangle}{\langle n\rangle^q}, \qquad (2)$$

которые не должны зависеть от энергии, если справедлив закон КНО-скейлинга. В эксперименте они, действительно, практически постоянны вплоть до энергий ISR, но заметно растут на коллайдере во всем интервале быстрот (рис. 2) и падают в малых интервалах в центральной области.

В связи с этим были предложены другие параметризации с большим числом подгоночных параметров, среди которых наибольшую известность приобрело отрицательное биномиальное распределение. Однако и оно оказалось неспособным описать измеренное распределение по множественности заряженных частиц в $\bar{p}p$-взаимодействиях при энергии $s^{1/2}=900$ ГэВ.

Прежде чем переходить к (псевдо) быстротным корреляциям, упомянем кратко о некоторых других широко обсуждаемых корреляциях.

Зарядовые корреляции могут проявляться в больших флуктуациях чисел заряженных и нейтральных пионов, рожденных в том или ином событии, когда отношение этих чисел заметно отличается от двойки, ожидаемой в отсутствие таких корреляций. Свидетельства в их пользу следуют из наблюдения аномальных событий в космических лучах с малым числом нейтральных частиц (Кентавры и мини-Кентавры) или же, наоборот, с аномально большим числом гамма-квантов (гамманизация). Дальнодействующие корреляции проявляются в линейной зависимости средней множественности частиц, испускаемых в заднюю полусферу, от числа частиц в передней полусфере. Под названием «эффект чайки» известна корреляция среднего поперечного импульса с продольным импульсом рожденных частиц. С проблемой образования кварк-глюонной плазмы связывается изучение корреляции среднего поперечного импульса с плотностью числа частиц на оси быстрот. Ближе к рассматриваемому здесь кругу вопросов стоит бозе-эйнштейновская корреляция, обусловливающая притяжение в быстротном пространстве двух тождественных бозонов (пионов).

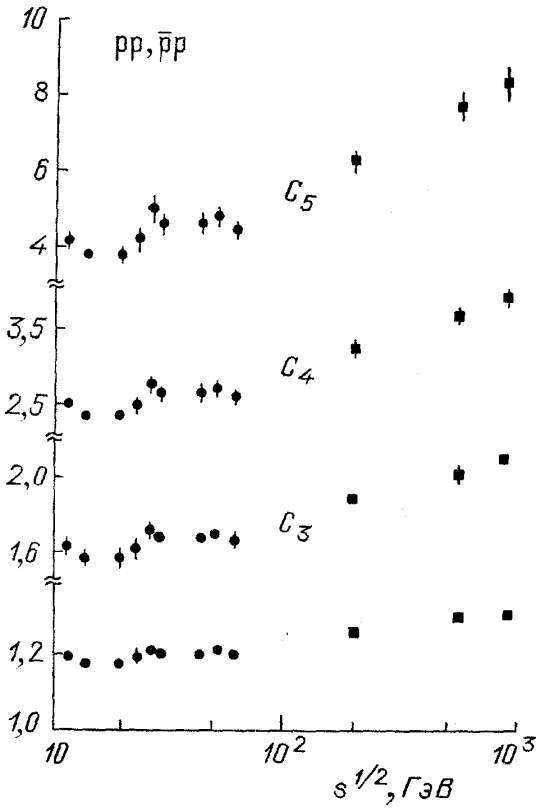

Рис. 2. Поведение нормированных моментов распределений по множественности в зависимости от начальной энергии (нижний ряд распределений — C_2)

Переходя теперь непосредственно к интересующим нас корреляциям по (псевдо) быстроте, остановимся вначале на определении кинематических переменных и форме одночастичных инклюзивных спектров.

Наиболее простой способ изобразить неупругое событие на одномерной картине состоит в том, чтобы спроецировать все частицы — точки фазового пространства — на ось быстроты

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon + p_l}{\varepsilon - p_l}, \tag{3}$$

(где ε и $p_l = p \cos \theta$ обозначают энергию и продольный импульс частицы в системе центра масс) или же на ось (псевдо) быстроты

$$\eta = -\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \tag{4}$$

которая совпадает с быстротой для релятивистских частиц, вылетающих под малыми углами θ.

В дальнейшем мы будем обсуждать, в основном, адрон-адронные процессы, иногда упоминая электрон-позитронную аннигиляцию и ядро-ядерные взаимодействия.

Инклюзивное распределение частиц по (псевдо) быстроте имеет вид колокола или шляпы со слегка вдавленным центром. В простейшем приближении его аппроксимируют в виде плато. Его высота и ширина растут с энергией. Рост высоты оказывается быстрее соответствующего роста полного сечения, тогда как ширина распределения изменяется сла-

бее, нежели это допускается уширением всей доступной согласно законам сохранения области быстрот. Феноменологические подгонки энергетической зависимости высоты (поделенной на полное сечение) имеют вид

$$\rho(0) = \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{d\eta}\bigg|_{\eta=0} = 0{,}01 + 0{,}22 \ln s \text{ (при логарифмической аппроксимации)},$$

$$= 0{,}744\, s^{0{,}105} \text{ (при степенной аппроксимации)}. \qquad (5)$$

Корреляции двух вторичных частиц по быстроте имеют сильную близкодействующую компоненту. Корреляционная функция

$$R(y_1, y_2) = \frac{\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial y_1 \partial y_2}}{\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial y_1}\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial y_2}} - 1 \qquad (6)$$

обладает максимумом при равных быстротах частиц $y_1 = y_2$ с шириной $\Delta y \approx 2$, как видно из рис. 3, где по-отдельности приведены быстротные корреляции двух заряженных (*cc*), отрицательных (— —), положительных (+ +) и отрицательных и положительных (+ —) частиц. Помимо

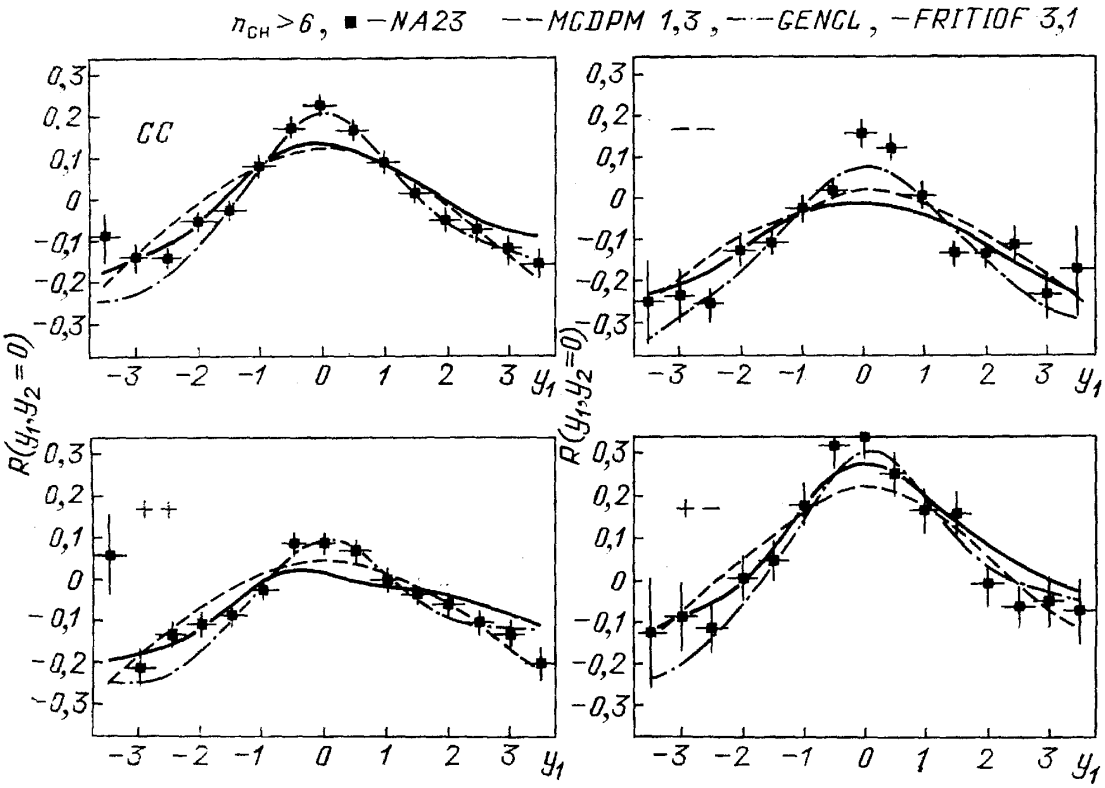

Рис. 3. Двухчастичные корреляции частиц с любым знаком заряда (*cc*), отрицательно заряженных (——), положительно заряженных (+ +) частиц и частиц с противоположными знаками зарядов (+ —)

экспериментальных данных (точки) приведены теоретические кривые, полученные в результате обработки монтекарловских наборов событий согласно дуальной партонной модели (1) группы Орсэ (MCDPM) [1], обобщенной кластерной модели коллаборации (UA5 (GENCL) [2] и модели Фритьоф лундской группы (FRITIOF) [3]. Кластерная модель GENCL фактически является чисто феноменологической и использует в качестве входных данных экспериментальную информацию о распределениях по множественности и быстроте. Поэтому неудивительно, что ей

удается лучше всего описать двухчастичные корреляции, частично учтенные в заложенной информации, после того, как добавлен кластерный механизм, требующий дополнительного двухчастичного близкодействия (хотя можно отметить некоторые проблемы с отрицательно заряженными частицами). Остальные модели исходят из неких теоретических представлений о характере протекания процесса. Однако получаемые там корреляции оказываются чересчур слабыми, хотя качественные тенденции подобны наблюденным.

Отметим, что эти же проблемы возникали уже сравнительно давно при изучении простейших мультипериферических моделей [4]. Единственным способом их разрешения было введение «руками» сильных корреляций внутри некоторых групп частиц, названных кластерами (или, еще ранее, файрболами), которые отличаются от известных резонансов большими массами. В последнее время попытки продвинуть применение квантовой хромодинамики от жестких к полужестким и мягким процессам привели к понятию министруй, смыкающемуся с кластерами (файрболами).

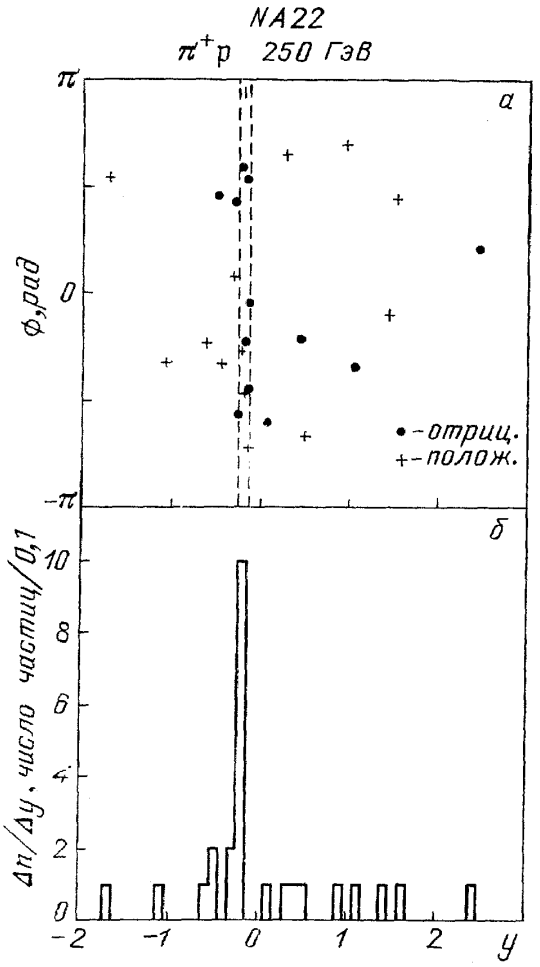

Рис. 4. Событие π^+p-взаимодействия при энергии 250 ГэВ, в котором 10 частиц оказались в узком интервале быстрот $\Delta y=0{,}1$ (верхний рисунок) и соответствующая гистограмма распределения частиц по быстротам в этом событии (нижний рисунок) [9]

Вместе с тем о многочастичных корреляциях из эксперимента непосредственно известно еще пока очень мало. Рассмотрение трехчастичных корреляционных функций, обобщающих (6), затруднено как большим числом переменных, так и меньшей наглядностью их использования. Однако известно, что трехчастичные корреляции растут с энергией [4] в интервале от 50 до 400 ГэВ. Как мы увидим ниже, более наглядная информация об истинно многочастичных корреляциях может быть получена из исследования флуктуаций.

3. Флуктуации. Фазовый объем, доступный согласно законам сохранения в реакциях множественного рождения, заполняется вторичными частицами весьма неравномерно. Большие поперечные импульсы сильно подавлены, а распределение по продольным импульсам определяется обсуждавшимся выше инклюзивным быстротным распределением. В связи с этим часто говорят о цилиндрическом фазовом объеме. Однако в индивидуальных событиях даже внутри этого объема частицы распределены не столь гладко, как это получается при инклюзивном распределении. Само по себе это было бы неудивительно, если бы отклонения от инклюзивных кривых были вызваны только лишь статистическими причинами, связанными с конечностью числа частиц в данном событии. Если же эти отклонения — флуктуации — не могут быть объяснены таким способом, а требуют чего-то дополнительного, то это свидетельствует о неких ди-

намических механизмах, обусловливающих специфические особенности флуктуаций. Выяснение динамики процесса путем изучения таких особенностей и является основной целью общего подхода к проблеме флуктуаций.

Уже сравнительно давно физики, изучающие космические лучи, сообщили [5—7] о неупругих событиях с необычайно большими флуктуациями числа частиц в очень узких интервалах псевдобыстроты. Впоследствии события такого типа были наблюдены и подробно изучены на ускорителях [8, 9]. Одно из них воспроизведено на рис. 4. Внутри очень узкого интервала быстрот $\Delta y = 0{,}1$ находится десять заряженных частиц, что превышает среднее значение инклюзивной плотности $\rho(y)$ примерно в 40 раз.

При уменьшении ширины быстротного интервала распределение по множественности, нормированное на среднее значение числа частиц в таком интервале (т. е. в КНО-переменных), оказывается все более широким при сужении интервала, что свидетельствует об усилении флуктуаций. Естественно спросить прежде всего, не удастся ли эту особенность объяснить в простейших ситуациях, когда флуктуации либо чисто статистические, либо обусловлены слабыми парными корреляциями, какие проявляются, например, в разреженных газах. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим [10] флуктуацию в распределении по быстроте частиц в данном событии $\rho_e(y)$, определив ее по отношению к инклюзивному распределению как

$$\varepsilon(y) = \frac{\rho_e(y)}{\rho(y)} - 1. \tag{7}$$

В системах со слабыми парными корреляциями поведение такой флуктуации должно задаваться гауссовым законом

$$P[\varepsilon(y)] = \frac{1}{N} \exp\left[-\frac{1}{2}\int dz_1 dz_2 \varepsilon(z_1) R^{-1}(|z_1 - z_2|)\, \varepsilon(z_2)\right], \tag{8}$$

где[2]

$$N = \int [d\varepsilon(y)] \exp\left[-\frac{1}{2}\int dz_1 dz_2 \varepsilon(z_1) R^{-1}(|z_1 - z_2|)\, \varepsilon(z_2)\right] \tag{9}$$

с функцией $R(z_1 - z_2)$, задаваемой формулой (6).

Экспериментально наблюдается вероятность появления в событии k пиков, превышающих некоторый порог t и расположенных в точках y_i ($i=1, \ldots, k$). Для ее вычисления надо взять функциональный интеграл

$$P_k(y_i) = \int_t^\infty dr_1 \ldots \int_t^\infty dr_k \int [d\varepsilon]\, P[\varepsilon] \prod_{i=1}^{k} \delta(\varepsilon(y_i) - r_i). \tag{10}$$

Если порог t достаточно высок (очень плотные группы частиц), то практически в одном событии либо таких пиков не будет вообще, либо появится один пик. Поэтому для вероятности сильных флуктуаций достаточно знать

$$P_1 = \left(\frac{R(0)}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{\exp(-t^2/2R(0))}{t} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m-1)!! \left(\frac{R(0)}{t^2}\right). \tag{11}$$

Как видно, воспроизводится гауссовский закон в слегка модифицированном виде, но с четко известной экспонентой. Это распределение можно сравнить с экспериментально измеренным NA22 коллаборацией, что и показано на рис. 5. Эксперимент указывает на экспоненциальное падение числа флуктуаций при повышении высоты пиков, а теория приводит к намного более быстрому падению. Отсюда следует вывод, что либо имеются истинные многочастичные корреляции, не сводимые к

двухчастичным, либо сами парные корреляции настолько сильны, что приводят к заметным многочастичным корреляциям путем последовательного спаривания (см. [4]). Последняя точка зрения была развита в работах [11, 12], которые мы обсудим несколько позже. А сейчас укажем, что монтекарловское моделирование флуктуаций в дуальной партонной модели [13] и в модели Фритьоф [14] показало, что и здесь теория не способна объяснить экспериментальные результаты, так как число флуктуаций в моделях оказывается существенно меньшим, а их. падение с ростом высоты пиков заметно быстрее, чем на опыте (см. рис. 5). Пожалуй, флуктуации оказались первым ярким экспериментальным фактом, который эти теоретические модели не смогли описать или же быстро приспособиться, несколько модифицировав свои параметры, хотя проблема объяснения двухчастичных корреляций, как мы видели выше, тоже не была решена (но она и не выглядит внешне столь драматичной).

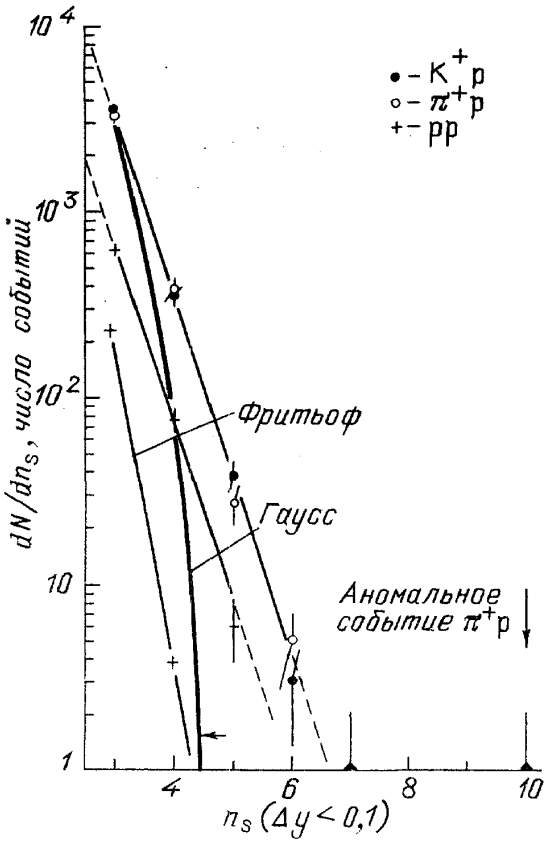

Рис. 5. Экспериментальное распределение по числу групп с заданным числом частиц n в интервале $\Delta y = 0{,}1$ в π^+p-взаимодействиях при энергии 250 ГэВ (точки) [9]. Сплошная кривая — гауссовская параметризация (11) [10], штриховая — результаты модели FRITIOF [14]

Конечно, флуктуации являются проявлением многочастичных корреляций и основная задача состоит в понимании их динамической природы. Было выдвинуто много предложений. Помимо традиционных попыток свести эту проблему к уже известным фактам (например, выразить все через двухчастичные корреляции) или же найти неучтенные ранее особенности предлагавшихся теоретических моделей, были выдвинуты идеи о стохастическом характере динамики множественного рождения, напоминающем турбулентность и связанном с перемежаемостью и фрактальностью. Поскольку понятия перемежаемости и фрактальности не столь давно еще не были известны в физике частиц, мы дадим их краткое определение в следующих разделах. Как мы увидим, оба эти термина тесно связаны друг с другом, хотя понятие фрактальности, на мой взгляд, идет несколько дальше, будучи непосредственным проявлением геометрических свойств объекта или же распределений над данным объектом.

4. Перемежаемость и факториальные моменты. Термин перемежаемость заимствован из теории турбулентности, где он указывает на важное свойство турбулентной жидкости, когда вихри разных размеров перемежаются друг с другом таким образом, что образуют самоподобную структуру. Математически это определяется как степенное поведение моментов распределения вихрей в функции от их размеров.

В применении к процессам множественного рождения частиц [15] перемежаемость определяется (по аналогии с турбулентностью) как степенной рост моментов распределения по множественности в быстротных интервалах при уменьшении ширины этих интервалов. Конечно,

для выявления динамических эффектов надо освободиться от влияния флуктуаций, вызванных чисто статистическими причинами, связанными с конечностью числа частиц. Это особенно важно при изучении небольших интервалов, в которые попадает очень мало частиц. Метод подавления роли статистических флуктуаций был предложен в работе [15]. Нас интересует поведение истинных моментов распределения, усредненных только по динамическим флуктуациям. Однако на эксперименте мы не можем отделить непосредственно динамические и статистические флуктуации и получаем характеристики, усредненные по обоим типам флуктуаций. Если статистические флуктуации описываются распределением Бернулли, то, как показано в [15], факторнальные моменты, вычисленные согласно экспериментальным данным, в точности совпадают с истинными моментами, усредненными лишь по динамическим флуктуациям. При этом факториальный момент q-го порядка распределения по множественности в быстротных интервалах шириной δy определяется следующим образом [3]:

$$F_q(\delta y) = M^{q-1} \frac{\left\langle \sum_{k=1}^{M} n_k (n_k - 1) \ldots (n_k - q + 1) \right\rangle}{\langle n \rangle^q}, \tag{12}$$

где M — число интервалов шириной δy в полном интервале быстрот Y (т. е. $Y = M\delta y$), усреднение ведется по всем событиям, а n_k — число частиц в k-м интервале.

Приняв тождественность определенных таким образом факториальных моментов и усредненных по динамическим флуктуациям истинных моментов, можно определить свойство перемежаемости (по аналогии с тем, как это делается для турбулентной жидкости) как степенную зависимость факториальных моментов от ширины интервала:

$$F_q(\delta y) \sim (\delta y)^{-\varphi(q)}, \tag{13}$$

т. е. линейный рост $\ln F_q$ как функции $-\ln \delta y$ при заданном q. Заметим, что обычные моменты C_q (см. формулу (2)) должны стремиться к постоянному пределу [17] в случае, когда средняя множественность в малом интервале становится меньше единицы. Формулы (12), (13) применяются, если рассматриваемый интервал быстрот находится в области плато. При выходе за область плато надо F_q поделить на

$$R_q(\delta y) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \rho_k^q \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \rho_k \right)^{-q}.$$

Факториальные моменты были вычислены по экспериментальным данным во многих реакциях при разных энергиях. Значения параметров $\varphi(q)$, называемых показателями перемежаемости, оказываются сравнительно небольшими (в несколько раз меньше тех, которые известны для случая развитой турбулентности), но все же заметно отличными от нуля, по крайней мере в области $0{,}1 < \delta y < 1$. Линейный рост F_q от δy на дважды логарифмической шкале демонстрируется на рис. 6, где приведены данные NA22 коллаборации о π^+p-взаимодействиях при энергии 250 ГэВ. Физической причиной роста факториальных моментов при уменьшении размера быстротного интервала являются флуктуации с большой плотностью частиц. Общие тенденции в поведении показателей перемежаемости можно охарактеризовать следующим образом (см. обзор [18], где приведено множество ссылок на экспериментальные и теоретические работы [4]):

1) $\varphi(q)$ растут с ростом q;

2) при одной и той же начальной энергии показатели перемежаемости $\varphi(q)$ больше в электрон-позитронной аннигиляции по сравнению с адронными взаимодействиями, а в тех, в свою очередь, больше по сравнению с ядро-ядерными столкновениями;

3) $\varphi(q)$ уменьшаются с ростом энергии;

4) $\varphi(q)$ уменьшаются с ростом множественности при заданной энергии;

5) $\varphi(q)$ уменьшаются с увеличением поперечного импульса;

6) $\varphi(q)$ меньше при одномерном анализе (быстротные интервалы) нежели при двумерном анализе, когда размер интервала ограничивают не только по быстроте, но и по азимутальному углу;

7) экспериментальные значения $\varphi(q)$ оказываются больше тех, которые предсказывались монтекарловскими версиями теоретических моделей MCDPM и FRITIOF;

8) значения $\varphi(q)$ практически не зависят от зарядов вторичных частиц.

Хотя идея вычисления факториальных моментов возникла из аналогии с турбулентностью и подводит к мысли о роли хаотической динамики, интересно было бы, прежде всего, понять, какое поведение факториальных моментов получается при использовании наших обычных представлений, как это соотносится с теми фактами, которые были известны ранее из эксперимента. Из указанного в п. 7 соотношения показателей перемежаемости на эксперименте и в теории следует, что обычно используемые модели [1, 3] недооценивают роль флуктуаций. Это связано, возможно, с плохим описанием ими двухчастичных корреляций или недостаточно полным учетом бозе-эйнштейновских корреляций. Однако слабая зависимость этих показателей от зарядов частиц (свойство 8) указывает, видимо, на сравнительно малую роль бозе-эйнштейновских корреляций, с помощью которых иногда пытаются объяснить экспериментальные факты о перемежаемости [19]. Теоретические предсказания [19] требуют, чтобы показатели перемежаемости для частиц с одинаковым знаком заряда были вдвое сильнее, чем при разных знаках.

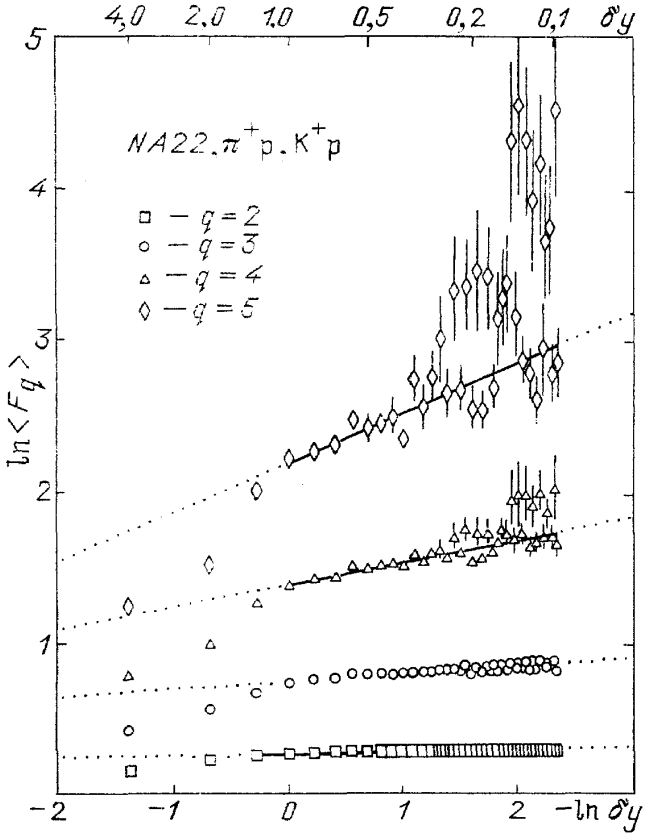

Рис. 6. Поведение факториальных моментов в функции от ширины быстротного интервала в π^+p-взаимодействиях при энергии 250 ГэВ

Вместе с тем отметим работу [20], в которой показано, что бозе-эйнштейновские корреляции могут быть заметно усилены по сравнению с теми предельными значениями, которые для них обычно принимаются. Кроме того, взаимосвязанность каналов с рождением частиц разных знаков и возможное широкое распределение их [21] могут заметно из-

менить соотношение их показателей перемежаемости. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Конечно, одних только двухчастичных корреляций мало, как уже обсуждалось выше, и флуктуации определенно указывают на заметную роль многочастичных корреляций. Если бы многочастичные корреляции удалось выразить через двухчастичные и описать экспериментальные данные, то это было бы заметным прогрессом в понимании динамики процесса. Естественно, такие попытки были предприняты [11, 12]. Многочастичные корреляционные функции выражались через произведения двухчастичных корреляций, которые, в свою очередь, аппроксимировались простой или гауссовой экспонентой. В обеих работах [11, 12] авторы утверждают, что с помощью такой аппроксимации удается хорошо описать поведение факториальных моментов путем подбора некоторых параметров. Сомнения в надежности этого выбора и возможности количественного описания данных при разных энергиях возникают при разборе сделанных там приближений. Экспоненциальная параметризация двухчастичных корреляций использовалась в обеих работах, но, как известно, она не очень хорошо описывает эксперимент на малых интервалах при высоких энергиях $s^{1/2} \gtrsim 200$ ГэВ, где она имеет резкий пик, и, кстати, выводы работ [11] и [12] несколько отличаются здесь. В работе [12] возникает проблема с описанием низшего факториального момента $F_2(\delta y)$, тогда как в [11] эксперимент описывается полностью (за исключением нерегулярностей при малых интервалах в высших моментах). Гауссова параметризация [12] оказывается хуже при объяснении поведения факториальных моментов (хотя она предпочтительна для двухчастичных корреляций). При внимательном рассмотрении графиков в работе [12] видно, что на малых интервалах она дает практически равные нулю показатели перемежаемости, заметно меньшие экспериментальных. Это соответствует выводу, сделанному еще в работе [15], о том, что факториальные моменты не зависят от интервала для гауссовых кластеров с шириной, большей этого интервала. Таким образом, хотя вывод о заметной роли многочастичных корреляций в появлении флуктуаций не вызывает сомнений, их конкретная форма пока не кажется мне выясненной. В этом подходе остается нерешенной и проблема динамического описания многочастичных корреляций. В частности, вполне может оказаться, что именно такие корреляции появляются в каскадных моделях, приводящих к перемежаемости.

Показатели перемежаемости являются простейшими параметрами, характеризующими эти корреляции. В принципе, они могут быть заменены на другие параметры, если те представляются более удобными.

Фактически факториальные моменты определяются характером распределений $P_n(\delta y)$ по множественности в заданных интервалах δy

$$F_q(\delta y) \sim \left\langle \frac{\sum_n n(n-1)\ldots(n-q+1)P_n(\delta y)}{\left(\sum_n nP_n(\delta y)\right)^q} \right\rangle . \tag{14}$$

Они легко вычисляются, например, для отрицательного биномиального распределения, характеризуемого двумя параметрами $\langle n \rangle$ и k и имеющего вид

$$P(n, \langle n \rangle, k) = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k)} \frac{(\langle n \rangle / k)^n}{[1+(\langle n \rangle / k)]^{n+k}}, \tag{15}$$

и оказываются зависящими лишь от одного параметра этого распреде-

ления $k(\delta y)$:

$$F_2 = 1 + k^{-1},$$
$$F_3 = (1 + k^{-1})(1 + 2k^{-2}), \tag{16}$$
$$F_4 = (1 + k^{-1})(1 + 2k^{-2})(1 + 3k^{-3})\ldots$$

Таким образом, зависимость k от δy задает однозначно поведение всех факториальных моментов. Сделанное предположение о распределениях по множественности хорошо описывает экспериментальные данные. Поэтому оказывается, что и все измеренные моменты удается воспроизвести, если задать лишь один из них. При такой параметризации видно, что свойства многочастичных корреляций содержатся в единой функции $k(\delta y)$. Следует отметить, что эта параметризация может быть лишь приближенной, так как произведение производящих функций отрицательных биномиальных распределений в двух соседних интервалах не дает правильной производящей функции для суммарного интервала. Правда, если важны лишь «хвосты» распределений, то здесь отрицательное биномиальное распределение хорошо аппроксимируется гамма-распределением, обладающим требуемым свойством самовоспроизводимости на сумме двух интервалов, и противоречия не возникает.

Подводя итог, можно сказать, что факториальные моменты представляют собой усредненную по разным областям фазового пространства характеристику распределений по множественности, зависящую от размеров выбранных областей. Естественно, все модели, хорошо воспроизводящие эти распределения, будут правильно описывать и поведение факториальных моментов. Преимущество рассмотрения именно факториальных моментов перед обычным воспроизведением распределений по множественности состоит в подчеркивании роли маловероятных, но сильных динамических флуктуаций и, конечно, в их интерпретации по аналогии с турбулентностью.

5. Фрактальность. Более глубокое понимание и единое описание получаемых результатов могут быть достигнуты с использованием понятия о фракталах. Степенное поведение моментов распределений при изменении масштаба свидетельствует об определенной фрактальной структурности (либо самого объекта, либо распределений над ним), и их параметры связаны с динамической природой возникновения свойства самоподобия, допускающей фазовые переходы при некоторых значениях этих параметров. Сделаем прежде небольшое математическое введение о фракталах (см. обзоры [22]).

Фракталами называются самоподобные объекты с нецелочисленной размерностью. Фрактальная размерность является обобщением понятия обычной топологической размерности на нецелые числа. На первый взгляд, трудно представить себе такую ситуацию, если определять размерность числом независимых измерений, т. е. направлений, характеризующих данный объект. Однако все становится прозрачно ясным, если использовать определения, данные Колмогоровым или Хаусдорфом. Согласно им фрактальная размерность D_F определяется как величина, при которой достигается конечный предел

$$0 < \lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon)\, \varepsilon^{D_F} < \infty \tag{17}$$

произведения минимального числа $N(\varepsilon)$ покрывающих данный объект гиперкубов с линейным размером $l = \varepsilon$ (определение Колмогорова) или $l \leqslant \varepsilon$ (определение Хаусдорфа) [5] на величину ε^{D_F} при $\varepsilon \to 0$.

Физикам это определение становится более понятным, если массу (M) объекта связать степенным образом с его линейными размерами l:

$$M \sim l^{D_F}. \tag{18}$$

Для привычных всем обектов величина D_F совпадает с их топологической размерностью (для линии $D_F=1$, для квадрата $D_F=2$, для куба $D_F=3$ и т. д.). Надо подчеркнуть, что и объекты с нецелым D_F—фракталы—не столь уж непривычны в повседневной жизни. Например, фракталами являются наши легкие, облака, береговые линии, полимеры и вообще все объекты со сложной самоподобной структурой.

Рассмотрим некоторые геометрические фигуры, обладающие фрактальной структурой. Прежде всего, построим кривую Кох по следующему алгоритму. Разделим некий отрезок прямой на три равные части, на средней из них построим равносторонний треугольник, а затем выбросим основание. Эту процедуру повторим на каждом из четырех оставшихся отрезков и так далее. Получающаяся самоподобная кривая (рис. 7) является фракталом с размерностью $D_F=\ln 4/\ln 3\approx 1{,}26$, как легко убедиться по соотношению (18).

Рис. 7. Кривая Кох получается итерационной процедурой, первые шаги которой изображены на этом рисунке

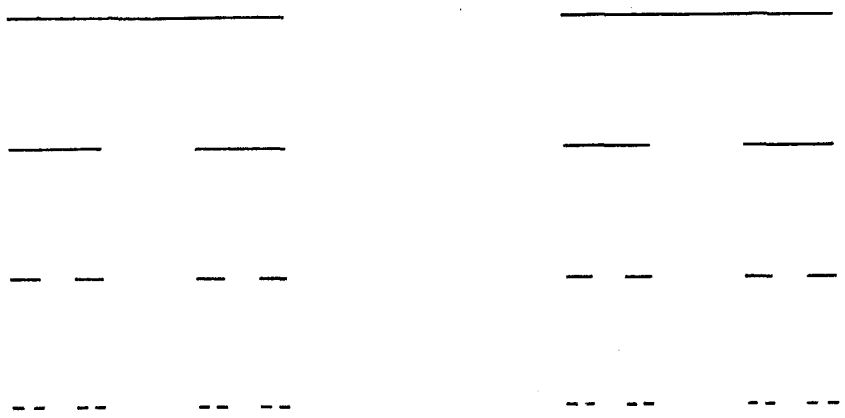

Рис. 8. Канторово множество получается итерационной процедурой, первые шаги которой изображены на этом рисунке

Если просто отбрасывать середины отрезков, не строя на них треугольники, то в пределе получится так называемое канторово множество (рис. 8) бесконечного числа точек с размерностью $D_F=\ln 2/\ln 3\approx 0{,}63$.

Аналогичные процедуры можно проделывать и с двумерными или трехмерными объектами, получая фракталы с размерностями, меньшими или большими, чем у исходных фигур.

Вероятность $p_i(l)$ принадлежать одному (i-му) гиперкубу из общего их числа $N(l)$ пропорциональна l^{D_F} при малых l. Поэтому сумма их моментов в случае фрактала ведет себя как

$$\sum_i p_i^q(l) \sim l^{qD_F} \quad (D_F = \text{const}). \tag{19}$$

Можно представить себе более сложные самоподобные объекты, которые являются совокупностью взвешенных с различными весами фракталов разных размерностей. Такие объекты называются мультифракталами и для них

$$\sum_i p_i^q(l) \sim l^{\psi(q)}, \tag{20}$$

где

$$\phi(q) = q d_{q+1}. \tag{21}$$

Величины d_{q+1} называются размерностями Реньи [23] (или обобщенными размерностями) и зависят от q, причем можно показать [22], что они должны быть падающими функциями q.

Иногда удобно характеризовать мультифракталы не их размерностями, а спектральными свойствами. Спектральная функция $f(\alpha)$ определяется поведением числа гиперкубов, которые необходимы для того, чтобы покрыть подмножество $S(\alpha)$ с одинаковым поведением вероятностей $p_i \sim l^{\alpha}$ $(l \to 0)$

$$\mathrm{d}N_{\alpha}(l) = \mathrm{d}\rho(\alpha)\, l^{-f(\alpha)}. \tag{22}$$

Размерность Реньи связана со спектральной функцией вследствие соотношения

$$\sum_{i}^{N(l)} p_i^q(l) \sim \int \mathrm{d}\rho(\alpha)\, l^{\alpha q - f(\alpha)}, \tag{23}$$

откуда методом перевала получаем

$$d_q = \frac{1}{q-1} \min_{\alpha} (\alpha q, f(\alpha)) = \frac{1}{q-1} (\bar{\alpha} q - f(\bar{\alpha})) \tag{24}$$

с $\bar{\alpha}$, определяемой соотношением

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\bar{\alpha}} = q(\bar{\alpha}) \tag{25}$$

при условии

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\bar{\alpha}} < 0. \tag{26}$$

Спектральная функция $f(\alpha)$ широко используется при анализе свойств мультифракталов. Не входя в детали (подробнее см. [22]), укажем лишь на одно из важных свойств — линейность этой функции на некотором участке может быть признаком фазового перехода, трудно обнаруживаемого другими способами. Здесь же обратим внимание и на развитый термодинамический формализм для мультифракталов, проясняющий их тесную аналогию со спиновыми системами [22]. Понятие размерности Реньи обобщает ряд понятий, вводившихся ранее в различных приложениях, например, фрактальную размерность

$$d_0 = D_{\mathrm{F}} = -\phi(-1), \tag{27}$$

информационную размерность

$$d_1 = D_1 = \phi'(0), \tag{28}$$

корреляционную размерность

$$d_2 = \nu = \phi(1) \tag{29}$$

при общем соотношении $D_{\mathrm{F}} > D_1 > \nu$ (так как $\mathrm{d}d_q/\mathrm{d}_q < 0$).

Какие сведения можно получить при анализе размерности системы?

1. Число степеней свободы системы n_f задается целой частью фрактальной размерности

$$n_f = [D_{\mathrm{F}}] + 1. \tag{30}$$

2. Размерности Реньи связаны с сингулярностями меры на мультифрактале $f(\alpha)$ согласно (24) и с показателями перемежаемости (см. ниже).

3. Фрактальные размерности связаны с характером нелинейности основополагающих уравнений и эффективных лагранжианов. Однако эта связь обычно непроста и устанавливается пока лишь путем численных расчетов.

4. Установление размерностей может помочь в получении сведений об областях наиболее активной диссипации энергии, перемежаемости и фрактальной пространственно-временной структуре области взаимодействия (например, в кварк-глюонной плазме).

5. Свойства каскадных моделей тесно связаны с размерностью Реньи соответствующего каскада (см. раздел 6 обзора).

6. Размерности Реньи можно использовать для классификации неупругих событий, если каждое из них рассматривать как чисто геометрический объект.

Рассмотрим подробнее эту возможность [24, 25]. Каждую частицу, рожденную в неупругом взаимодействии, можно представить как точку в трехмерном фазовом объеме, фиксирующую конец ее вектор-импульса. Известно, что в силу ограниченности поперечного импульса все эти точки концентрируются в так называемом цилиндрическом фазовом объеме вдоль продольных компонент импульса. Однако и внутри этого объема точки располагаются неравномерно. Геометрические характеристики набора точек должны определяться динамикой взаимодействия. Можно попытаться классифицировать эти наборы точек по размерностям Реньи аналогично тому, как это мы можем сделать для канторова множества или же для странных аттракторов. Рассматривая для простоты проекцию фазового объема на ось быстрот y и определяя соответствующие вероятности $p_i(l)$ в индивидуальном событии как

$$p_i(l) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \theta(l - |y_i - y_j|), \tag{31}$$

где n — число частиц в событии, а $y_{i,j}$ — быстроты i-й (j-й) частиц, нормированные на полную быстроту Y, запишем моменты в виде

$$C_q(l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i^q(l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \theta(l - |y_i - y_j|) \right)^q \tag{32}$$

и определим размерности Реньи по поведению моментов

$$C_q(l) \sim l^{qd_{q+1}}. \tag{33}$$

Распределение индивидуальных событий по размерностям Реньи дает возможность их классификации (применение к эксперименту см. [27]).

Конечность числа частиц [6] не позволяет использовать предельную форму определения (при $l \to 0$) размерности Реньи, так как размерность конечного набора точек всегда равна нулю. Однако, как всегда, следует выбрать физически осмысленный интервал l, в рамках которого и определять размерности. По этому поводу имеются различные предложения — либо использовать тот интервал $0{,}1 < \delta y < 1$, который применяется в анализе перемежаемости [18], либо рассматривать лишь достаточно большие интервалы $\delta y \gtrsim 1$—2 [26], где несущественны двухчастичные корреляции. Эти процедуры могут приводить к существенно разным результатам. Продемонстрируем [25, 27] это на примере двух конкретных событий pp-взаимодействия при энергии 400 ГэВ, в которых рождается по 20 заряженных частиц. Они выбраны так, что в одном из них частицы распределены сравнительно равномерно по оси быстрот, а в другом имеется резкая концентрация нескольких частиц на узком интервале («спайк» или «кольцо»). Моменты $C_2(l)$ существенно отличается у этих событий (рис. 9). В однородном событии момент плавно ме-

няется с l и может быть аппроксимирован единой степенной функцией с показателем, несколько меньшим единицы, тогда как в неоднородном событии есть две области (не считая значений вблизи единицы, где определяющую роль уже играют чисто кинематические эффекты), в каждой из которых можно пытаться использовать степенную аппроксимацию с существенно разными показателями. Это означает, что неоднородные события с заметными флуктуациями не могут рассматриваться как мультифракталы. Постановка вопроса о правомерности описания областей внутри и вне спайков как мультифракталов вряд ли разумна

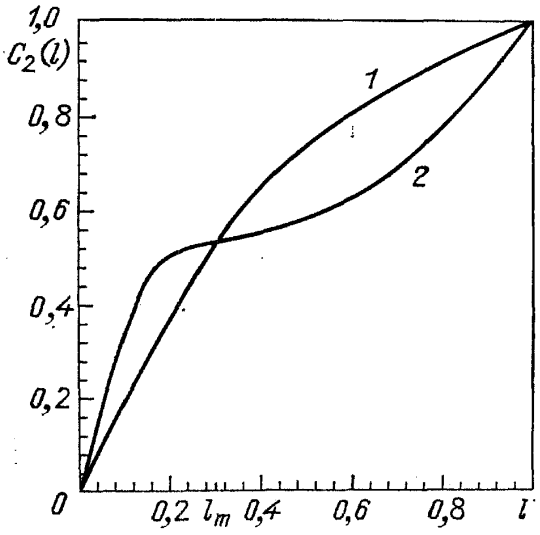

Рис. 9. Моменты распределений частиц в двух событиях с рождением 20 заряженных частиц ведут себя различным образом для сравнительно однородного (монотонная кривая) и резко неоднородного (немонотонная кривая) событий [25]. Это показывает, что неоднородные события со спайками характеризуются разными фрактальными размерностями на малых и больших интервалах

при сравнительно малых множественностях и небольшой статистике. Вместе с тем рассмотренные примеры показывают, что при формальном применении фрактального анализа в разных областях должны получаться большие значения размерностей Реньи (т. е. меньшие показатели перемежаемости) при меньших интервалах. Кроме того, используя сравнительно большие интервалы $l \sim 0{,}3$, можно отделить однородные события от флуктуационных и, таким образом, классифицировать события [25, 27]. Отметим, что при постоянстве границы между большими и малыми интервалами на шкале быстрот при росте энергии происходит сдвижка этой границы в терминах относительных быстрот $l = \delta y / Y$ к меньшим значениям, т. е. расширение области «больших» интервалов с энергией, в которых должен действовать единый закон [26].

Пока не ясно, имеют ли отмеченные закономерности какое-либо отношение к пространственно-временной структуре той области, в которой происходит взаимодействие, хотя хотелось бы предположить, что фрактальность распределений является отражением фрактальных свойств области взаимодействия. К этому вопросу можно подойти с несколько иных позиций. Например, при изучении структуры таких фракталов, как полимерные цепи, используется явление диффузии какой-то привнесенной в них частицы. В примере, приведенном в обзоре [28] и демонстрируемом на рис. 10, описывается математическая модель блужданий частицы в такой цепи, расположенной на плоскости, и показывается, что движение частицы крайне затруднено внутри объекта со сложной структурой по сравнению с обычным броуновским блужданием в объеме, не имеющем каких-либо препятствий и перегородок. Даже после большого числа шагов частица не может удалиться далеко от первоначального местонахождения. В случае неупругих процессов аналогом могло бы служить движение обмениваемого партона [29], которое в простой мультипериферической лесенке совпадает с броуновским движением в плоскости, поперечной оси соударения частиц. Удаление партона в этой

плоскости ρ характеризует наклон упругого дифракционного конуса b, а число шагов n_0 — множественность n, так как на каждом шаге испускается частица (резонанс или кластер). В мультипериферической лесенке, как и в броуновском движении, имеем

$$b \sim \overline{\rho^2} \sim t \sim n_0 \sim n, \tag{34}$$

причем как b, так и n логарифмически растут с энергией ($\sim \ln s$). Однако на опыте это соотношение между b и n не имеет места (рис. 11), а оказывается [29], что

$$b \sim n^{2/D_w} \tag{35}$$

при $D_w = 7{,}5 \pm 1{,}5$ для pp-взаимодействий. Величина D_w называется внутренней размерностью блужданий партона, и ее большое (по срав-

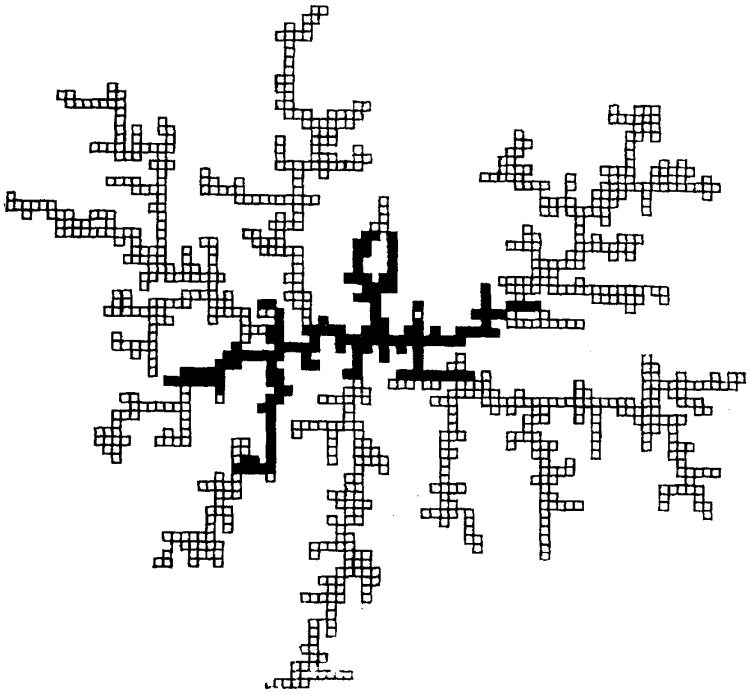

Рис. 10. Случайное блуждание частицы внутри фрактала (темные области) оказывается немного более затрудненным по сравнению с броуновским движением в плоскости, так как размер темной области, где проходила частица, заметно меньше того, что ожидалось бы при свободном броуновском движении [28]

нению с характерной для броуновского движения величиной 2) значение указывает на сложную траекторию этого движения с многочисленными самопересечениями. Это является аргументом в пользу сложной

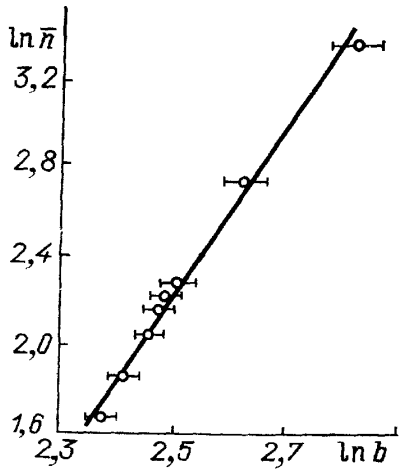

Рис. 11. Связь наклона дифракционного конуса со средней множественностью приводит к большой размерности внутренних блужданий партона [29]

фрактальной пространственно-временной структуры области взаимодействия. В этой связи напомним читателю о гипотезе «инстантонного полимерного вакуума» [30].

Существенной поддержкой такому представлению служат исследования формы области доконфайнмента в точке фазового перехода, проведенные в решеточных калибровочных теориях [31а]. Показано, что соотношение между объемом V и площадью поверхности S этой области имеет в SU(2) теории вид

$$V \sim S^{1,12}, \tag{36}$$

что говорит о явной фрактальной структуре этого объема с наличием в нем больших «пустот», заполненных «адронной» фазой. Фрактальная размерность занятого фазой деконфайнмента пространства оказывается равной 2,5.

Интересно также, что фрактальную структуру образуют и мировые линии конденсата монополей [31б] в фазе конфайнмента, что указывает на их возможную роль в образовании струн. При этом фрактальная размерность конденсата может служить параметром порядка, так как обращается в единицу в фазе деконфайнмента, указывая на фазовый переход при тех же температурах, что и полученные ранее из изучения числа степеней свободы и вильсоновских петель.

Естественно было бы думать, что сложная структура объема, в котором идет взаимодействие, должна как-то отразиться и в расположении конечных частиц по фазовому объему аналогично тому, как наличие перемежающихся вихрей в турбулентной жидкости приводит к фрактальной структуре областей интенсивного энерговыделения. Однако для проверки этого положения требуется решение сложных нелинейных нестационарных задач.

6. Связь перемежаемости и фрактальности. Из приведенных выше формул для моментов распределений на фракталах видна их непосредственная связь с изучением свойства перемежаемости. Более того, нетрудно установить соотношение между размерностью Реньи d_q и показателем перемежаемости $\varphi(q)$ [32]:

$$d_q = 1 - \frac{\varphi(q)}{q-1}. \tag{37}$$

Ясно, что понятие фрактальности идет дальше чисто формального определения перемежаемости, так как связывает полученные значения размерностей с геометрическими и термодинамическими свойствами объектов, что позволяет надеяться при изучении неупругих процессов выявить пространственно-временную структуру области взаимодействия, природу фазовых переходов и, возможно, понять характер нелинейностей в эффективном лагранжиане.

Широко используется и спектральная функция $f(\alpha)$ [7], характеризующая распределение мультифрактала по фрактальным размерностям. В отсутствие флуктуаций для одного фрактала с определенной размерностью $f(\alpha)$ сводится к δ-функции. Распределение по α с некоторой шириной появляется для мультифракталов, когда, помимо свойства самоподобия, становятся важны и флуктуации. Размерности Реньи и показатели перемежаемости, как было показано выше, тесно связаны со спектральной функцией. Приведем здесь набор формул (38), характеризующих эту связь:

$$\varphi(q) = f(\bar{\alpha}) + q(1-\bar{\alpha}) - 1,$$
$$\left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\bar{\alpha}} = q, \quad \left.\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right| < 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = 1 - \bar{\alpha}(q), \quad \frac{d^2\varphi}{dq^2} = -\left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right)^{-1}_{\bar{\alpha}} > 0, \tag{38}$$

$$f(\bar{\alpha}) = -q^2 \frac{d}{dq}\left(\frac{\varphi(q)+1}{q}\right),$$

$$d_q = \frac{1}{q-1}\left(\bar{\alpha}\frac{df}{d\alpha}\bigg|_{\bar{\alpha}} - f(\bar{\alpha})\right).$$

Часть этих формул уже была получена ранее, остальные выводятся из них путем простых преобразований. Эти формулы справедливы для тех предельных условий, при которых математически четко определены понятия фрактала и перемежаемости, и используются при анализе как геометрических объектов, так и теоретических моделей процессов. Однако при их практическом применении, скажем, к неупругим процессам возникают все те же вопросы, которые были поставлены выше: 1. Переход к пределу бесконечно малых интервалов невозможен. При каких длинах получаются сведения об «истинных» размерностях набора точек? 2. Как влияет конечность числа точек на получаемые результаты?

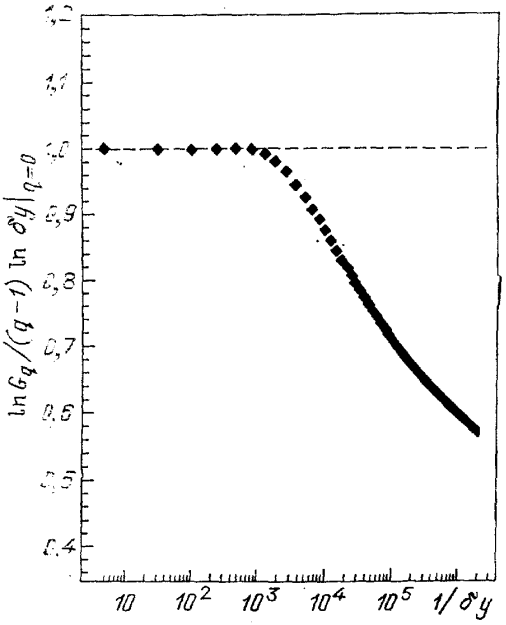

Рис. 12. Фрактальная размерность случайного набора 4096 точек, определенная согласно (17), (18) при разных длинах l [33]

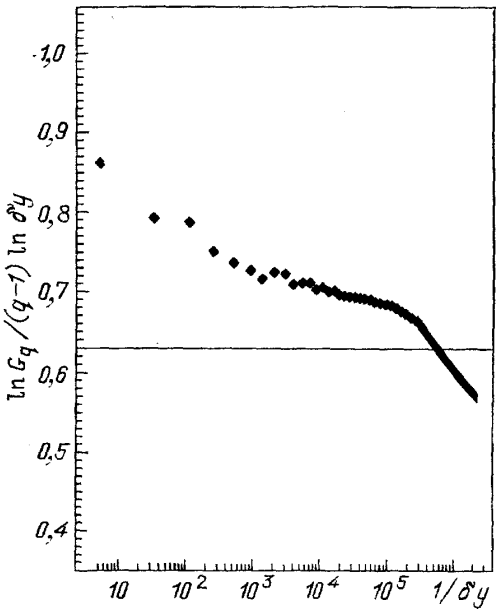

Рис. 13. Истинную фрактальную размерность канторова множества при 12 итерациях не удается определить при грубом сканировании длин l [33]

3. Что изменяется при изменении числа точек? 4. Как влияют на результаты суммирование по всем интервалам в данном событии (горизонтальный анализ) и усреднение по всем событиям (вертикальное усреднение)? Ответы на эти вопросы проще всего начинать искать [33] с разбора ситуаций, где заранее известны размерности. Например, если случайным образом разбросать точки на единичном интервале при равномерном инклюзивном распределении, то при достаточно большом числе их истинная размерность конечного набора точек, равная нулю, начнет проявляться, лишь когда длины покрывающих интервалов l будут заметно меньше обратного числа точек, а при больших длинах этот набор точек будет проявлять себя как сплошная линия, т. е. минимальное число покрывающих этот набор интервалов будет расти с уменьшением длины пропорционально l^{-4} и получаемая при этом «размерность» будет равна единице. Это наглядно видно на рис. 12, где такие расчеты проведены на компьютере для набора из $2^{12} = 4096$ точек [33].

Более интересным примером является канторово множество. Процесс деления отрезка можно рассматривать как, своего рода, каскадный процесс, если центры получающихся отрезков сопоставить с «частицами». Обрывая итерационную процедуру на том или ином числе шагов ν, получаем «процесс» с рождением 2^{ν} «частиц». Фрактальная размерность канторова множества, как было показано выше, равна $D_F = \ln 2/\ln 3 \approx \approx 0{,}63$. Однако если менять длину покрывающих интервалов сравнительно большими шагами, то даже при большом числе итераций ($\nu = 12$;

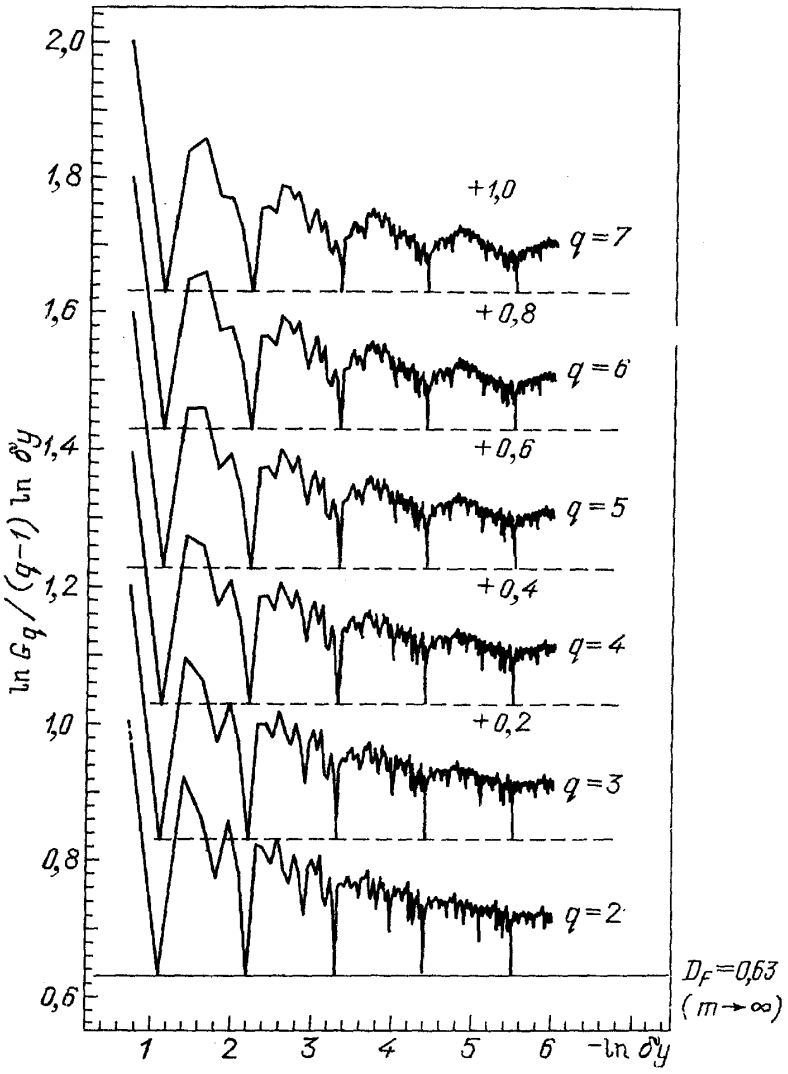

Рис. 14. При медленном изменении l оказывается, что в некоторых точках проявляется истинная размерность канторова множества [33]. (Моменты разных порядков сдвинуты в целях наглядности по оси ординат на указанные на рисунке значения)

число «частиц» $2^{12}=4096$) не удается определить истинную размерность (рис. 13). Если теперь проделать то же самое при очень тонком разрешении, т. е. меняя длины интервалов практически непрерывно, то выявляется «тонкая структура» приведенной выше зависимости, когда в отдельных точках удается точно попасть на значение фрактальной размерности множества (рис. 14).

Ясно, что эти точки соответствуют тем случаям, когда длины покрывающих интервалов кратны длинам отрезков канторова множества на данном этапе итераций, а потому и расстояния между ними кратны $-\ln 1/r = \ln 3$, где $r=3$ — число частей, на которые разбивается отрезок при первичном делении. Такая структурность наблюдается во всех моментах.

Однако в неупругих процессах число частиц оказывается обычно заметно меньше рассмотренного выше. Поэтому интересно понять, что происходит с канторовым множеством при меньшем числе итераций. Остановив итерационный процесс на пятом шаге ($\nu=5$), получим 32 «частицы». Проделаем ту же процедуру покрытия этого множества интервалами разной длины l, определяя опять-таки «размерность» как $D_{\text{г}}=-\mathrm{d}\ln N/\mathrm{d}\ln l$, где N— число покрывающих интервалов. Меняя длину l мелкими шагами, вновь воспроизводим те же «провалы», что и при большом числе итераций с отдельными точками, дающими правильную

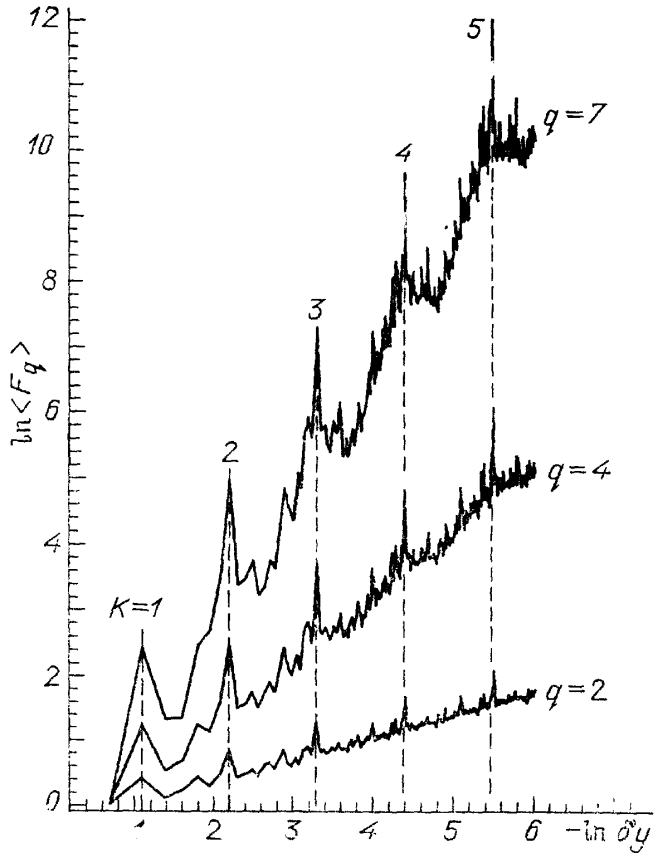

Рис. 15. Поведение факториальных моментов канторова множества (при 12 итерациях) напоминает ход фрактальной размерности [33]

размерность. Однако дополнительно проявляется некая «полосатая» структура при малых интервалах покрытия с параллельными и равноотстоящими полосами. Эта особенность, видимо, проявляется и в неупругих процессах (см. ниже).

Аналогичным образом ведут себя и факториальные моменты канторова множества. При большом числе «частиц» (4096) и грубом разбиении на интервалы они растут примерно линейным образом, а при тонком разрешении (рис. 15) оказывается, что у факториальных моментов имеются выбросы в отдельных точках. Проведенные по этим выбросам прямые имеют наклон, связанный с фрактальной размерностью формулой (37). Таким образом, по факториальным моментам можно определять фрактальную размерность. Следует заметить, вместе с тем, что и наклон прямых, аппроксимирующих основную группу точек на рис. 15, также близок к тому, что дается выбросами. Это свидетельствует в пользу использования факториальных моментов даже при грубом разрешении по длинам интервалов. Изменение общей картины для второго момента при разных числах итераций («частиц») демонстрирует рис. 16. При большом числе частиц как выбросы, так и основная группа

точек как бы лежат на параллельных прямых с наклоном, хорошо воспроизводящим фрактальную размерность по формуле (37). При меньшем числе точек становится заметен спад факториальных моментов на малых интервалах, на котором проявляется характерная структура полос при наименьших числах частиц с наклонами, отличными от показателей перемежаемости. Похоже, что здесь уже проявляется конечность набора точек и «работает» нулевая размерность $D_F=0$, т. е. наклоны полос $\varphi(q)\approx q-1$. Не ясно лишь, чем определяются расстояния между полосами. Сами выбросы при малом числе частиц приводят к несколько завышенным значениям показателей перемежаемости.

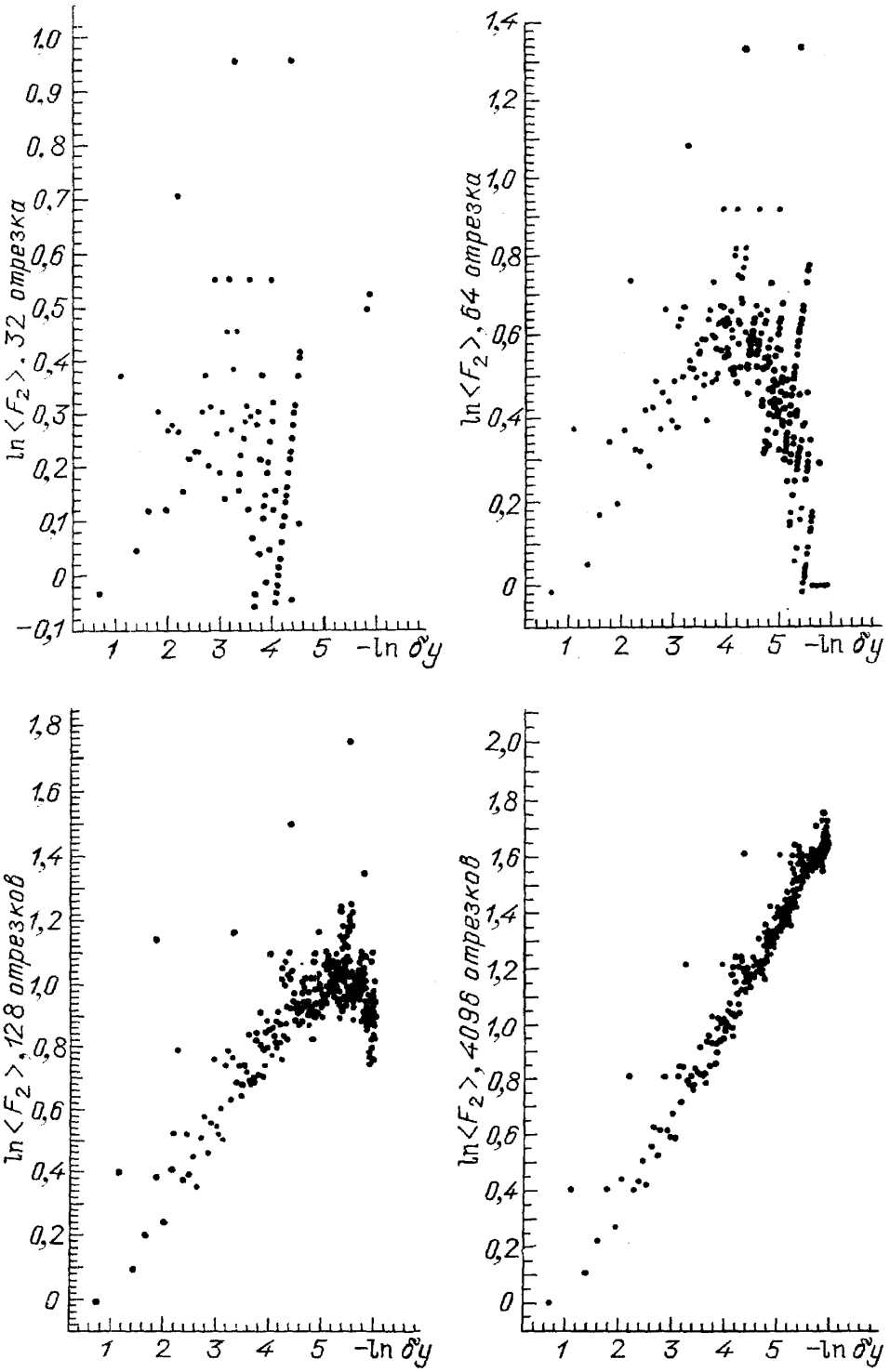

Рис. 16. Поведение второго факториального момента при разном числе итераций канторовой последовательности [33]

Ту же процедуру можно применить к конкретному неупругому событию рождения 26 частиц в π^+p-взаимодействии при энергии 250 ГэВ, обсуждавшемуся выше и изображенному на рис. 4. Пренебрегая ошибками в измерении положений частиц, можно проанализировать это событие вплоть до очень малых интервалов менее 10^{-2}. Получающиеся при этом [33] факториальные моменты от второго до пятого приведены на рис. 17. Здесь не видно резко отделенных выбросов, хотя имеется слева группа из трех точек, которой можно было бы приписать их роль. Интересно, что получающаяся по ним фрактальная размерность события оказывается очень близкой к нулю, как и следует для событий с

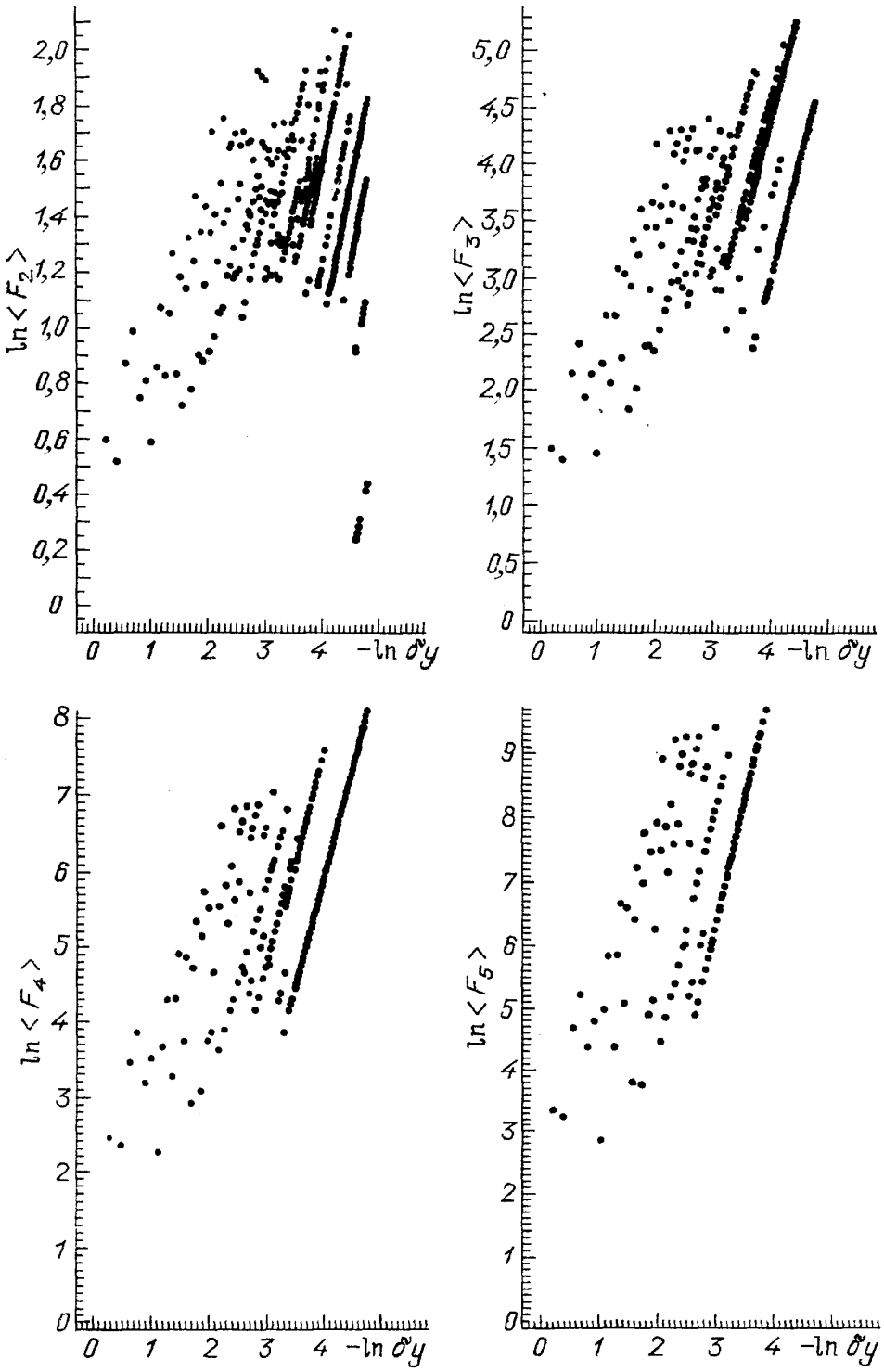

Рис. 17. Факториальные моменты одного события, изображенного на рис. 4, вплоть до очень малых значений интервала [33]

резкими спайками в описанном ранее методе. Наглядно видна полосатая структура в каждом из моментов при малых интервалах, причем полосы расположены уже не эквидистантно. Ясно, что вклад этого события в низкие моменты мал на приведенном ранее рис. 6 и потому он не проявляется. Однако в пятом моменте, особенно при малых интервалах, это событие дает важнейший вклад. Видно, что, ограничившись значением $\delta y = 0{,}1$, как это сделано на рис. 6, мы вряд ли сможем предугадать ту структуру полос, которая заметна на рис. 17, особенно при наименьших интервалах. Только зная о такой структуре из рис. 17, можно попытаться указать на нее в пятом моменте и на рис. 6, проведя пунктирные кривые.

Итак, даже первые шаги в установлении связи между перемежаемостью и фрактальной структурой событий в фазовом объеме представляются весьма многообещающими, хотя полного понимания всех возникающих особенностей еще не достигнуто.

7. Теоретические модели. Наличие больших флуктуаций и, в более общем виде, свойства распределений по множественности в узких интервалах (псевдо) быстроты давно привлекали к себе внимание. Методы факториальных моментов и фрактальных размерностей позволили представить эти свойства в очень наглядной форме. Попытки прояснить их связь с многочастичными корреляциями [11, 12] и симметрийными свойствами тождественных частиц [19] еще не привели к окончательным результатам.

Вообще, проблема динамического описания наблюдаемых явлений в физике высоких энергий остается нерешенной, несмотря на множество гипотез и яркие аналогии, заимствованные из других областей физики. Ввиду явной незавершенности и ограниченности всех моделей их изложение будет весьма кратким и преследует цель лишь ориентировать в литературе тех, кто собирается изучать ту или иную из них более подробно.

Все теоретические подходы к решению этой проблемы можно разбить условно на две группы в зависимости от того, апеллируют ли они к обычной регулярной динамике или к стохастической динамике, хотя даже здесь четкую границу провести трудно. К первой из них обычаю относят модели партонных ливней в КХД с их феноменологическими партнерами — дуальной топологической моделью и моделями кварк-глюонных струн [1, 3, 34], кластерные модели [2, 4, 35, 36] и модель кланов [37, 38], испускание узких струй адронов [39], когерентное излучение глюонных струй [40, 41] (в частности, черепковские глюоны), статистические корреляции в частично когерентных излучающих системах [42, 43], образование и распад холодной кварк-глюонной плазмы [44,45].

Вторая группа моделей [15, 46—52] основана на аналогии с теорией турбулентности [15, 53] и использует модель случайных каскадов, характеризуемую произведением независимых вероятностей и приводящую к явлениям типа фазовых переходов.

Условность такого разбиения, несмотря на различие в конкретных динамических предпосылках, видна хотя бы из того факта, что все ветвящиеся процессы приводят в той или иной степени к стохастизации (в том числе и партонные ливни в КХД) и, в принципе, разделение надо проводить с помощью конкретного численного параметра (например, меры стохастичности).

Одиночные события с сильной флуктуацией числа частиц в узком интервале псевдобыстроты (такие, как изображенное на рис. 4) выглядят в плоскости, перпендикулярной оси соударения, как кольцевые при более или менее равномерном распределении по азимутальному углу

частиц с близким полярным углом вылета. Именно поэтому первая идея объяснения таких флуктуаций была основана на аналогии с черенковским излучением фотонов. Гипотеза о когерентном излучении глюонных струй [40, 41] (в частности, за счет механизма Вавилова — Черенкова) приводила к предсказанию о том, что эти струи должны испускаться в узком интервале псевдобыстрот на большие углы в системе центра масс сталкивающихся адронов. Все последующие модели не указывали на какую-либо выделенность углов, под которыми должны наблюдаться плотные группы частиц. Эта специфическая черта была проверена на эксперименте в pp-соударениях при энергиях 205 и 360 ГэВ, и оказалось [54], что при довольно большом фоне заметны (рис. 18) пики в расположении центров плотных групп на оси псевдобыстрот. Таким образом, можно сказать, что предлагаемый механизм когерентного излучения струй в адронных взаимодействиях, видимо, имеет место, но не является определяющим. Наличие другой причины, вызывающей флуктуации, видно и из того факта, что они весьма отчетливо проявляются и в электрон-позитронной аннигиляции, где трудно представить себе условия, при которых могла бы иметь место когерентность.

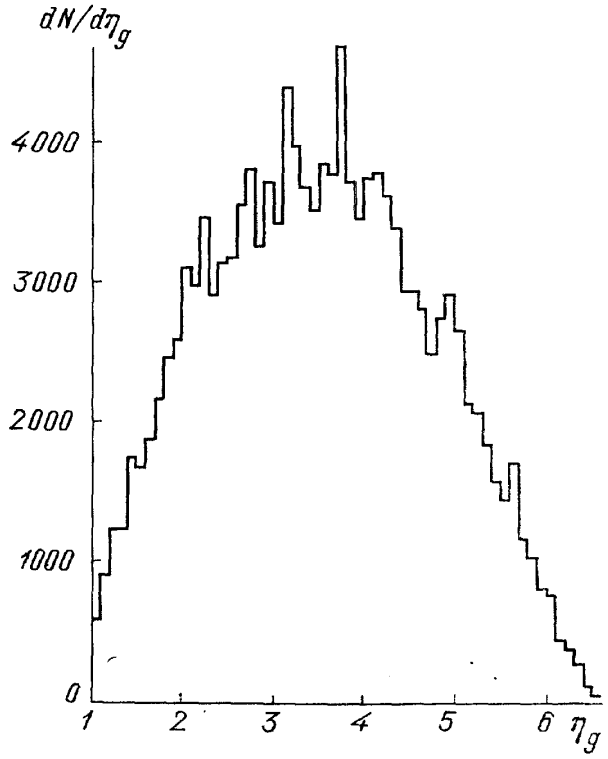

Рис. 18. Распределение центров плотных изолированных групп на оси псевдобыстроты в pp-взаимодействиях при энергии 360 ГэВ указывает на наличие пиков при значениях псевдобыстроты ±0,3 [54]

Традиционные модели, где происходит излучение с обмениваемых партонов [1] или за счет разрыва кварк-глюонных струн [3], оказались неспособны на первом этапе [13, 14] описать данные как о числе флуктуаций и их поведении в зависимости от высоты пика, так и о росте факториальных моментов на малых интервалах. Для соответствия эксперименту, видимо, надо вводить изначальные флуктуации при разрыве каждой струны, что потребует введения новых параметров. В этой связи модели с кластерами [4, 35, 36] или кланами [37, 38] выглядят более мобильными, поскольку в них допускается варьирование ряда параметров. Можно показать [38], что наличие кланов приводит к степенному росту факториальных моментов в малых интервалах. Однако количественного сопоставления с экспериментом не проведено. Что каса-

ется кластерных моделей, то здесь в некоторых случаях удается описать распределения по множественности в симметричных интервалах быстрот разной ширины [37, 38]. Но этого может оказаться недостаточно для воспроизведения характера всех факториальных моментов, которые чувствительны к тонким деталям распределений, незаметным при обычном способе демонстрации их.

Модель холодной кварк-глюонной плазмы [44, 45] встречается с трудностями при объяснении больших величин показателей перемежаемости в электрон-позитронной аннигиляции по сравнению с адронными и ядерными процессами, поскольку согласно такому сценарию эффект должен был бы, наоборот, проявляться сильнее всего в ядро-ядерных соударениях.

Несколько в другой форме описывается процесс множественного рождения в работах [42, 43], где появление новых частиц обусловлено излучением из источников двух типов — хаотических и когерентных. Вместе с тем можно было бы дать динамические модели источников такого типа, скажем, в виде излучения виртуальными и лидирующими партонами соответственно.

В основе всех описанных выше подходов лежит стремление описать распределения по множественности в рамках отрицательного биномиального (или близкого к нему) распределения. В кластерной модели это удается сделать за счет варьирования параметров кластеров. В модели кланов к этому приводит свертка пуассоновского распределения по числу кланов с логарифмическим распределением частиц при их распаде. В статистической модели источников двух типов отрицательное биномиальное распределение естественно получается для хаотических источников, а когерентные источники добавляют пуассоновскую компоненту. Кажется естественным, что все эти модели могут описать высшие факториальные моменты как только фитируют, скажем, самый низший из них. А для этого в их распоряжении достаточное число параметров — например, среднее число кланов и число частиц в них, либо степень хаотичности и корреляционная длина и т. п.

Конечно, хотелось бы надеяться на то, что партонные ливни КХД, дополненные гипотезой об адронизации, приведут к описанию широкой совокупности данных эксперимента, включая и свойство перемежаемости. Эта надежда основана на том, что все ветвящиеся процессы обладают фрактальными свойствами. Однако пока таких конкретных реализаций этой программы не существует, а предлагаются либо чисто феноменологические модели последовательных ветвлений [39], либо изучаются свойства простейших теоретических построений типа древесных диаграмм модели φ^3 и упрощенной КХД [51, 52] также на уровне древесных диаграмм или же в предположении о швингеровском туннельном переходе [55]. Некоторые предсказания можно непосредственно проверить на эксперименте. Так, например, модель последовательных ветвлений начальной системы на две быстро движущиеся подсистемы со сравнительно малыми массами [39] привела к предсказанию об очень узких «карандашных» струях, дающих группы частиц, сильно ограниченные как по полярному, так и по азимутальному углу, что должно увеличить показатели перемежаемости при двумерном анализе. Однако на опыте [54, 70] плотные по оси быстрот группы распределены довольно изотропно по азимуту[8]. Вместе с тем наблюдается [18, 69, 70] увеличение показателей перемежаемости при дополнительном ограничении области азимутальных углов. Здесь требуется более детальный разбор условий отбора групп и т. п.

Анализ уравнений ветвящихся процессов [51, 52] в модели равномерного деления, в φ^3-теории и в ведущем логарифмическом приближении КХД показывает, что совокупность рожденных партонов обладает

свойством перемежаемости и может быть подвергнута полному мультифрактальному анализу, описанному выше. Показатели перемежаемости зависят от конкретного вида ядра интегрального уравнения, описывающего процесс, и оказываются вполне заметными [29, 56] в e^+e^--аннигиляции, если считать, что процесс адронизации партонов не вносит существенных изменений. Спектр сингулярностей $f(\alpha)$ (см. 22)) при этом более широкий, чем в φ^3-модели, из-за более широкого распределения по быстротам [52]. Поскольку итерационное решение уравнений ветвящихся процессов подразумевает своего рода заинтегрированную форму мультипликативных выражений, оно должно приводить к стохастизации. Однако из-за сложного вида решений ясных критериев стохастизации пока найти не удалось. Поэтому более популярны упрощенные каскадные модели, навеянные аналогией с турбулентностью [15].

Модели случайных каскадов описываются неким распределением вероятностей $r(W)$ с соответствующими моментами:

$$\langle W^q\rangle = \int dW r(W) W^q, \quad \langle 1\rangle = \langle W\rangle = 1. \tag{39}$$

Эти вероятности задают флуктуации при последовательном разбиении интервала быстрот на все более мелкие интервалы. Вероятность попасть в m-й из них P_m дается мультипликативным выражением

$$P_m = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\nu} W_n, \tag{40}$$

где $M=\lambda^\nu$ — число интервалов, полученных в результате разбиения полного интервала на λ частей на каждом этапе из ν шагов, причем выбранная последовательность индексов n приводит точно в заданный m-й интервал. Мультипликативная форма (40) естественно обеспечивает большие флуктуации и явление перемежаемости в такой схеме.

Простейшей моделью распределения $r(W)$ является так называемая α-модель, задаваемая формулой

$$r(W) = p\delta(W-a) + (1-p)\delta(W-b), \tag{41}$$

где $0 \leqslant a < 1 < b$ и $pa + (1-p)b = 1$ по условию нормировки (39). Она широко использовалась в теории турбулентности, а также для описания систем типа спиновых стекол и приводит к разным фазовым переходам [47, 50] при изменении параметров p и λ. Интересно отметить, что перемежаемость областей с упорядоченными спинами возникает и в двумерной модели Изинга вблизи точки фазового перехода [57, 58]. Опять таки здесь уместно напомнить и о фрактальной структуре фазы деконфайнмента [31], отмеченной выше.

В целом каскадные модели находятся сейчас еще на этапе осмысливания качественных результатов и не сопоставляются непосредственно с экспериментом, в частности, из-за проблем учета конечности числа частиц, законов сохранения и т. п. Предложенные версии модели, учитывающие эти требования [59], пока лишь фиксируют собственные параметры путем сравнения с опытом, указывая на необходимость введения в струнных моделях изначальных флуктуаций при разрыве струны,

В предельном случае большого числа каскадов произведение независимых вероятностей в формуле (40) должно приводить к логарифмически-нормальному распределению [60, 74, 75]. Факториальные моменты дают сведения о «хвосте» этого распределения. Для изучения свойств и параметров распределения в основной области надо будет использовать [60] логарифмические моменты типа $\langle \ln n\rangle^q$. Однако не ясно, при каких энергиях мы сможем приблизиться к этой предельной форме каскада[9].

8. Заключение. Заканчивая обзор, я хотел бы объяснить, что в целях краткости изложения не приведены детали теоретических расчетов. Мне хотелось изложить в сжатой форме основные идеи и обсудить их взаимосвязь. Краткость этого обзора — перечня теоретических моделей — можно оправдать еще и тем, что модели пока не имеют завершенного вида и нацелены только лишь на объяснение величин типа фрактальности и показателей перемежаемости. Скромные цели этих моделей можно видеть в формулировке рекомендаций для более развитых монтекарловских моделей ливней по приведению их в соответствие с опытом путем претензии на выяснение роли новой стохастической динамики или же на определение эффективных лагранжианов, управляющих рождением частиц при высоких энергиях. До сих пор не сказала своего слова гидродинамическая теория множественного рождения частиц.

Какой из этих путей окажется наиболее плодотворным, покажет будущее. Сейчас несомненно лишь, что изучение показателей перемежаемости и фрактальности привело к новой волне интереса к проблеме корреляций в процессах множественного рождения частиц и вызвало к жизни новые идеи о динамике этих процессов.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

[1] Здесь использована версия этой модели, учитывающая несколько «лестниц».

[2] Квадратные скобки у $d\varepsilon(y)$ означают функциональное интегрирование.

[3] Следует отметить, что используемая экспериментаторами формула (12) несколько отличается от приведенной в работе [15], которая сводится к (12) для событий с множественностью, заметно превышающей порядок q, точнее — при $n \gg q-1$. Порядки усреднения по данному событию (горизонтальное) и по набору событий при заданном положении интервала (вертикальное) обсуждаются подробно в работе [16]. В математике факториальные моменты называют несмещенной оценкой обычных моментов.

[4] Для удобства читателей в конце списка литературы приведены экспериментальные работы [61—73], помимо тех ранних работ [5—9], которые уже были упомянуты выше.

[5] Различие между двумя определениями для нас несущественно, и мы не будем входить в его детали.

[6] Влияние этого обстоятельства будет изучено подробнее в следующем разделе.

[7] Например, для выявления фазовых переходов по линейным участкам этой функции.

[8] Вклад струй с большими поперечными импульсами мал, да и ширины их обычно довольно большие, заметно больше 0,1.

[9] Имеются утверждения [74] о том, что логарифмически нормальное распределение хорошо подходит для описания распределений по множественности в полном интервале быстрот для всех высоких энергий. Однако для меньших интервалов есть проблема с пустыми интервалами ($n=0$) [75].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] а) *Capella A.,* Tran Thanh Van J.//Zs. Phys. Kl. C. 1988. Bd 38. S. 177.
б) *Capella A.*//Proc. of the 18th Intern. Symposium on Multiparticle Dynamics.— Tashkent, 1987.—P. 129.
2. *Fuglesang C.*//Proc. of the 19th Intern. Symposium on Multiparticle Dynamics.— Aries, France, 1988.— P. 257.
3. *Andersson B. et al.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1987. V. 281. P. 289.
4. *Dremin I. M., Dunaevskii A. M.*//Phys. Rep. Ser. C. 1975. V. 18. P. 159.
Dremin I. M.//Proc. of the 12th Intern. Symposium on Multiparticles Dynamics.— Notre Dame, USA, 1981.—P. 261.
5. *Алексеева К. И. и др.*//ЖЭТФ, 1962. Т. 43. С. 783; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1962. Т 26 С 572.
6 *Arata N.*//Nuovo Cimento. Ser. A. 1978. V. 43. P. 455.
7. *Апанасенко А. В. и др.*//Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 30. С. 157.
8. *Марутян Н. А. и др.*//ЯФ. 1979. Т. 29. С. 1566.
9 *Adamus M. et al.*//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 185. P. 200.
10. *Dremin I. M.* Preprint CERN-TH 4693/87.—Geneva, 1987.
[11] *Carruthers P., Sarcevic I.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 1562.
12. *Capella A. el al.*//Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 230. P. 149.

13. *Peschanski R., Tran Thanh Van J.*//[16].
14. *Andersson B. et al.*//[2].
15. *Bialas A., Peschanski R.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 273. P. 703.
16. *Hwa R. C.* Preprints OITS 407, 412.— 1989.
17. *Van Hove L.*//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 4. P. 1867; Preprint CERN-TH. 5529/89.— Geneva, 1989.
18 *Kittel W., Peschanski R.*//Proc. of EPS Conference —Madrid, 1989.
19. *Gyulassy M.* Preprint LBL-26831.— 1989,
20 *Andreev I. V.*//Proc. of the CAMP Intern. Conference. Marbyrg, Germany, 1990.— Singapore: World Scientific, 1990— P. 156.
[21] *Андреев И. В.*//Письма ЖЭТФ, 1981. Т. 33. С. 384.
22. *Paladin G., Vulpiani A.*//Phys. Rep. 1987. V. 156. P. 147.
Tel T.//Zs. Naturforsch. 1988. Bd. 43a. S. 1154.
23. *Renyi A.* Probability Theory.— Amsterdam: North-Holland, 1970.
24. *Dremin I. M.*//Mod.'Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 3. P. 1333.
25. *Dremin I. M.*//Ibidem. 1989. V. 4. P. 1027.
26 *Sarcevic I., Satz H.* Preprints AZPH-TH/89-58, BNL-43183 — 1989.
27. *Dremin I. M. а*) Preprint FNAL-89/71-T.—1989; б)//Leon Van Hove Festschrift.— Singapore a. o.: World Scientific, 1990.—P. 418.
28. *Соколов И.* М.//УФН. 1986. Т. 150. С. 221.
29. *Дремин И.* М.//Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 505.
30. *Shuryak E. V.* Phys. Rep. Ser. C. 1984. V. 115. P. 153.
[31] а) *Polikarpov M. I.*//Phys. Lett. Ser. B. 1990. V. 236. P. 61.
б) Wiese U. E., Polikarpov M. I. Preprint IFUP-TH.— 1989.
32. *Lipa P., Buschbeck* B.//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 223. P. 465.
33. *Levtchenko B.* Preprint MPI.— 1990.
34. *Kaidalov A. B.*//Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 116. P. 459.
35. *Liu L. S., Meng T. C.*//Phys. Rev. Ser. D. 1983. V. 27. P. 2640.
36. *Cai Xu et al.*//Ibidem. 1986. V. 33. P. 1287.
37. *Giovannini A., Van Hove L.*//Acta Phys. Pol. Ser. B. 1988. V. 19. Pp. 495, 917, 931.
38. *Van Hove L.* Preprint CERN-TH. 5563/89.—Geneva, 1989.
39. *Ochs W., Wosiek J.*//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 214. P. 617.
40. *Дремин И. М.*//Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 30. С. 152.
[41] *Дремин И. М.*//Физ. ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. С. 79.
42. *Fowler G. N.. Weiner R. M.*//Phys. Rev. Ser. D. 1978. V. 17. P. 3118.
43. *Carruthers P. et al.* Preprint AZPH-TH/89-1 — 1989.
44. *Van Hove L.*//Ann. of Phys. 1989. V. 192. P. 66.
45. *Seibert D.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 136.
46. *Bialas A., Peschanski R.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1988. V. 308. P. 357; Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 207. P. 59.
47. *Peschanski R.*//Nucl. Phys. Ser. B. 1989. V. 327. P. 144.
48. *Desvallees A. et al.* Preprint SPhT/89-138.— 1989.
49. *Brax Ph., Peschanski R.* Preprint SPhT/89-203.— 1989.
50. *Bialas A. et al.* Preprint TPJU-16/89.— 1989.
[51] *Hwa R. C.* Preprint OITS-404.— 1989.
52. *Chiu C. B., Hwa R. C.* Preprints OITS-424.— 1989, OITS-431.— 1990.
53. *Dias de Deus J.*//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 194. P. 297.
54. *Дремин И. М. и др.*//ЯФ. 1990. Т. 54, вып. 3(9).
55. *Bialas A.* et al. Preprints TPJU 13/89, SPhT/89-96.— 1989.
56. *Fialkowski K.* et al. Preprint TPJU-6/89 — 1989.
57. *Satz H.* Preprint CERN-TH 5312/89.—Geneva, 1989.
58. *Peschanski R.* Preprint SPhT/89—132.— 1989.
59. *Leonidov A. V., Tsypin M. M.*//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1990. V. 8. P. 1256.
60. *Dremin I. M.*//Mod. Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 4. P. 2685.
[61] *Burnett T. H. et al.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 2062.
62. *Alner G. J. et al.*//Phys. Rep. 1987. V. 154. P. 247.
63. *Adamus M. et al.*//Phys. Lett. Ser. B. 1987. V. 188. P. 113.
64. *Adamovich et al.*//Ibidem. 1988. V. 201. P. 397.
65. *Stenlund E. et al.* Preprint LU1P 8807.— 1988.
66. *Bamberger A. et al.*//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 203. P. 320; V. 205. P. 583.
67. *Bamberger A. et al.*//Zs. Phys. Kl. C. 1989. Bd. 43. S. 25.
68. *Holynski R. et al.*//Phys. Rev. Lett. 1989: V. 62. P. 733.
69. *Braunschweig W. et al.* Preprint DESY 89-092.—Hamburg, 1989.
70. *Ajinenko N. et al.* Phys. Lett. Ser. B. 1989. V. 222. P. 306.
[71] *Derado I.*//[276].
72. *Buschbeck B.*//Ibidem.
73. *Gladysz-Dziadus E.* Preprint Krakow.— 1989.
74. *Ingelman G.*//Proc. of the XXIV Moriond Conference.—March 11—17. 1990/Ed. J. Tran Thanh Van.— Paris: Editions Frontieres, 1990.— P. 182.
75. *Dremin I. M. et al.*//Preprint Wuhan HZPP-89-15.— 1989.