

532.527

**УСТОЙЧИВОСТЬ И ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ КВАЗИДВУМЕРНЫХ  
СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ**

**Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин**

(Институт физики атмосферы АН СССР)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	1
1. Уравнения движения, внешнее трение, критерии подобия	2
1.1. Тонкие слои («мелкая вода»). 1.2. Приближение «мелкой воды» для вращающейся жидкости и в магнитной гидродинамике. 1.3. Критерии подобия и возможности лабораторного моделирования.	
2. Линейная теория устойчивости	11
2.1. Результаты классической теории устойчивости двумерных сдвиговых течений. 2.2. Роль внешнего трения.	
3. Лабораторные эксперименты	18
3.1. Методы лабораторного моделирования. 3.2. Сдвиговые и струйные течения в кольцевых каналах. 3.3. Сравнение с линейной теорией.	
4. Нелинейная теория закритических вихревых режимов	26
4.1. Методы нелинейной теории применительно к вязким течениям. 4.2. Описание закритических режимов течения Колмогорова. 4.3. Модельный пример с кусочно-линейным профилем скорости. 4.4. Характеристики закритических режимов струйных и сдвиговых течений. 4.5. Смена вихревых мод и характерный размер вихря в развитых квазидвумерных течениях.	
5. Геофизические приложения	38
5.1. Влияние экмановского слоя на устойчивость волн Россби. 5.2. Трехмерная структура квазидвумерных течений вращающейся жидкости. 5.3. Влияние дифференциального вращения.	
Заключение	44
Примечания к тексту	45
Список литературы	45

**Введение.** Течения жидкости или газа, в которых под влиянием тех или иных физических причин горизонтальная составляющая поля скорости существенно преобладает над вертикальной, играют важную роль в природных и технических гидродинамических системах. К ним относятся, в частности, крупномасштабные движения океана и атмосфер вращающихся планет (включая Землю), циркуляция на Солнце и других звездах, эволюция галактик и течения в замагниченной плазме. Класс таких течений существенно пополняется лабораторными гидродинамическими экспериментами, в которых указанные явления моделируются в контролируемых условиях.

Следует отметить, что лабораторный гидродинамический эксперимент во второй половине XX в. получил как бы второе дыхание, начиная с экспериментов Фульца и Хайда [1, 2], в которых была сделана серьезная попытка воспроизвести свойства общей циркуляции атмосферы и конвекции внутреннего жидкого ядра Земли. Обзор лабораторных экспериментальных результатов, полученных в геофизической гидродинамике к концу 70-х годов, можно найти в [3, 4]. Число публикаций на эту тему продолжает расти, в чем легко убедиться, просматривая современные физические и гидродинамические журналы и материалы последних конференций по нелинейным процессам в физике и турбулентности. Особого упоминания заслуживает обзор [5], недавно опубликованный в «УФН» и посвященный лабораторному моделированию так называемых солитонов Россби и других явлений, наблюдаемых в атмосфере Юпитера и галактиках (см. также [6]).

Существуют различные причины, способствующие подавлению одной из составляющих поля скорости течения. К ним относятся вращение системы в целом, наличие постоянного магнитного поля, пронизывающего электропроводящую жидкость, сильная расслоенность по плотности (как, например, в океане), тонкость жидкого слоя, в котором развивается движение, или совокупность указанных факторов. Такого рода движения будем называть *квазидвумерными*. Для описания квазидвумерных течений нередко возникает соблазн привлечь теорию устойчивости строго двумерных движений, хорошо развитую к настоящему времени (см., например, [7]). Такие попытки, как правило, заканчивались неудачей, что отмечают и сами авторы подобных исследований (см., например, [8, 9]). Причина состоит в неустранимости трения о подстилающую поверхность (не учитываемого в классической теории, но практически всегда существующего в реальных системах). Оно играет решающую роль в развитии закритических вихревых течений, когерентных структур и турбулентности.

В настоящей работе излагаются теория устойчивости и закритических вихревых режимов квазидвумерных сдвиговых течений и применение ее к описанию природных и лабораторных течений, смоделированных с целью изучения крупномасштабных атмосферных процессов. Область приложения ограничивается главным образом атмосферой Земли, что связано со спецификой научных интересов авторов. Однако излагаемые теоретические и экспериментальные результаты можно использовать для описания процессов в атмосферах других планет, океане, плазме и в магнитной гидродинамике слабо проводящей жидкости, т. е. с этой точки зрения они имеют общезначимое значение. По существу, предлагаемый материал следует рассматривать, как самостоятельный раздел гидродинамики, не нашедший еще отражения в физической литературе.

## 1. Уравнения движения, внешнее трение, критерии подобия.

**1.1. Тонкие слои («мелкая вода»).** Напомним, что движение тонких горизонтальных слоев идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести описывается уравнениями мелкой воды (см., например, [10])

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \rho g H), \quad \frac{1}{H} \frac{dH}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1.1)$$

здесь  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t)$  — двумерное векторное поле скорости течения,  $H = H(x, y, t)$  — высота свободной поверхности жидкости,  $\rho$  — плотность и ускорение свободного падения, оператор  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \nabla$ . Условие «тонкости» слоя есть  $h \ll H_0 \ll L$ , где  $h$  — отклонение высоты свобод-

ной поверхности от ее среднего значения  $H_0$ ,  $L$  — характерный горизонтальный масштаб течения. Это позволяет не учитывать вертикальную составляющую скорости. Уравнения (1.1) совпадают с уравнениями двумерной гидродинамики баротропной <sup>(1)</sup> сжимаемой жидкости, роль плотности в которых играет  $H$ . Уместно отметить, что система (1.1) имеет лагранжев инвариант (примените операцию  $\text{rot}$  к первому уравнению (1.1) и подставьте результат в (1.2) с учетом второго уравнения (1.1))

$$I = \frac{\Omega}{H}, \quad \frac{dI}{dt} \equiv 0 \quad (\Omega = \text{rot}_z \mathbf{v}), \quad (1.2)$$

называемый потенциальным вихрем [11—13]. Применительно к общим уравнениям газовой динамики выражение для потенциального вихря, впервые найденное Эртелем [14, 15], записывается в виде

$$I = \frac{\Omega \text{ grad } S}{\rho}, \quad (1.3)$$

где  $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$ ,  $S$  — удельная энтропия. Его фундаментальное значение в теоретических и прикладных задачах геофизической гидродинамики подробно обсуждается в [16—19].

Система (1.1) описывает, в частности, процесс распространения гравитационных волн на мелкой воде, движущихся со скоростью  $c = (gH_0)^{1/2}$ , которая является аналогом скорости звука в газодинамических системах. Поэтому, согласно известному принципу [10], для описания медленных движений тонких слоев жидкости, для которых числа Маха  $\text{Ma} = v/c \ll 1$ , сжимаемостью можно пренебречь, полагая  $H = \text{const}$ . Условия несжимаемости выполняются, например, в лабораторных экспериментах [20, 21] по моделированию сдвиговой неустойчивости, где характерные значения скорости течений и толщины слоя порядка 1 см/с и 1 см соответственно, а  $c \approx 30$  см/с. Для правильного описания такого рода течений необходимо, однако, учитывать вязкость, что создает дополнительные трудности с применением теории мелкой воды из-за невозможности устранить придонное трение и, как следствие этого, нарушения условия строгой двумерности течений. В этом случае с учетом сделанных предположений медленные движения тонких слоев жидкости, строго говоря, описываются уравнениями, в которые зависимость от вертикальной координаты  $z$  входит в явном виде:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} + \mathbf{F}, \quad (1.4)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = u(x, y, z, t) \mathbf{i} + v(x, y, z, t) \mathbf{j}$$

с граничными условиями на твердой и свободной поверхностях

$$\mathbf{v}|_{z=-H} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad (1.5)$$

здесь  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\mathbf{F}$  — внешнее силовое поле. Вертикальная координата отсчитывается от свободной поверхности.

Систему (1.4), (1.5) после обезразмеривания с помощью характерных горизонтальных масштабов длины  $L$  и скорости  $U$  рассматриваемого течения можно записать в виде

$$\mathbf{N}(\mathbf{v}) \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} - \mathbf{F} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}, \quad (1.6)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_{z=-h} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0,$$

где  $\text{Re} = UL/\nu$  — число Рейнольдса,  $1 \gg h = H/L$  — малый параметр. Для безразмерных переменных новых обозначений не вводится.

Обозначим через  $\mathbf{v}_0(x, y, t) = \mathbf{v}|_{z=0}$  поле скорости течения на верхней свободной поверхности жидкости. Разлагая  $\mathbf{N}(\mathbf{v})$  по степеням  $z$  в окрестности  $z=0$  и два раза интегрируя первое равенство (1.6) по  $z$  с учетом граничных условий, легко получить главный член разложения  $\mathbf{N}(\mathbf{v}_0)$  по степеням параметра  $h$ :

$$\mathbf{N}(\mathbf{v}_0) = -\frac{2}{\text{Re} h^2} \mathbf{v}_0 + O(h^2).$$

Отсюда следует, что последнее равенство выполняется с точностью до членов  $O(h^2)$ , если размерное поле скорости на свободной поверхности  $\mathbf{u} = U\mathbf{v}_0$  удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} - \lambda_R \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (1.7)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \left( \lambda_R = \frac{2\nu}{H^2} \right). \quad (1.8)$$

Систему (1.7), (1.8) называют уравнениями гидродинамики с рэлеевским трением  $\mathbf{f}_R = -\lambda_R \mathbf{u}$ . Парадоксальность ситуации состоит в том, что несмотря на, казалось бы, узкую область их применения, они описывают широкий круг гидродинамических явлений, представляющих практический интерес, включая крупномасштабные процессы в океане и атмосферах вращающихся планет. Определяющим физическим параметром в них является коэффициент рэлеевского трения  $\lambda_R$ , выражение для которого не всегда совпадает с (1.8), а зависит от физики рассматриваемой гидродинамической системы.

**1.2. Приближение «мелкой воды» для вращающейся жидкости и в магнитной гидродинамике.**

1. Для описания глобальных процессов общей циркуляции земного океана и атмосфер вращающихся планет наибольший интерес представляют течения, для которых мало число Россби — Кибеля  $\varepsilon = U/2\Omega_0 L \ll 1$ ; здесь  $\Omega_0$  — угловая скорость вращения системы в целом,  $U$  и  $L$ , как и ранее, характерные скорость и геометрический масштаб течения. Такого рода течения находятся в так называемом квазигеострофическом равновесии, когда силы Кориолиса приближенно (с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$ ) уравновешиваются градиентом давления,

$$2[\Omega_0 \mathbf{v}] \approx -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.9)$$

Квазигеострофическое равновесие, известное метеорологам еще с прошлого века, является устойчивым состоянием глобальных движений. Всякое его локальное нарушение, как показано в [12, 22], приводит к излучению звуковых и гравитационных волн, в результате чего равновесие восстанавливается за счет приспособления поля давления к новому полю ветра.

Соотношение (1.9), в частности, означает, что перенос масс в атмосфере происходит, на первый взгляд, вопреки здравому смыслу, не поперек, а вдоль изобар. Именно по этой причине воздушные массы в окрестности центра пониженного (повышенного) давления вращаются вокруг этого центра по сходящимся к нему (расходящимся от него) спиральям, образуя крупномасштабный вихрь — циклон (антициклон). Из соотношения (1.9) непосредственно следует (примените к (1.9) операцию  $\text{rot}$ ) теорема Праудмена — Тэйлора (см., например, [13]), согласно которой

с той же точностью выполняется равенство

$$(\Omega_0 \nabla) \mathbf{v} \approx 0. \quad (1.10)$$

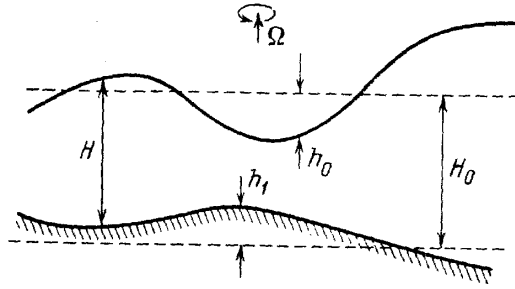
Это значит, что всюду перенос масс в направлении оси вращения практически отсутствует из-за непроницаемости стенок, ограничивающих жидкость. Это в свою очередь обеспечивает квазистатическое равновесие

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho \approx 0, \quad (1.11)$$

где  $z$  — координата в направлении оси вращения системы в целом.

Указанные фундаментальные свойства глобальных геофизических течений позволяют существенно упростить исходные гидродинамические

Рис. 1. Схематическое изображение слоя жидкости переменной глубины, вращающейся с частотой  $\Omega_0$



уравнения. Проиллюстрируем это на примере слоя невязкой несжимаемой жидкости переменной глубины со свободной поверхностью, вращающегося вокруг вертикальной оси (рис. 1). Пусть рельеф нижней границы слоя задается функцией  $z = h_1(y)$  одной из горизонтальных координат. Обозначим через  $h_0 = h_0(x, y, t)$  отклонение свободной поверхности от средней глубины слоя  $H_0$ , так что глубина слоя равна  $H = H_0 + h_0(x, y, t) - h_1(y)$ . Применительно к такой системе теорема Праудмена — Тэйлора означает, что вертикальными токами можно пренебречь, а согласно (1.11),  $p = \rho g(H - z)$ , если  $z$  отсчитывается от нижней границы слоя. Условия (1.9) геострофического равновесия записываются в виде

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi = \frac{g}{f} h_0, \quad f = 2\Omega_0 \quad (1.12)$$

( $\Psi$  — двумерная функция тока). Малость числа Россби — Кибеля  $\varepsilon \ll 1$  влечет за собой [13] малость отношения  $h_0/H_0 \sim \varepsilon L^2/L_0^2$ , если  $L$  не слишком превосходит  $L_0 = (gH_0)^{1/2}/f$  — масштаб Обухова — Россби, определяющий характерный горизонтальный размер глобальных вихревых образований. Воспользуемся теперь теоремой сохранения потенциального вихря (1.2), предварительно перейдя во вращающуюся систему отсчета. Тогда выражение для потенциального вихря после разложения по параметру  $\varepsilon$  записывается в виде

$$I = \frac{\omega_z + f^i}{H} = \frac{1}{H_0} \left( \nabla^2 \Psi - L_0^{-2} \Psi + \frac{f}{H_0} h_1 \right) + O(\varepsilon^2), \quad (1.13)$$

где  $\omega_z = \Delta \Psi$  — относительная завихренность вращающейся жидкости. Из условия сохранения потенциального вихря  $dI/dt = 0$  получается известное уравнение Обухова — Чарни [12, 22, 23]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Psi - L_0^{-2} \Psi) + [\Psi, \Delta \Psi] + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad (1.14)$$

$$\beta = \frac{df}{dy} + \frac{f}{H_0} \frac{dh_1}{dy} \quad (1.15)$$

(при наличии систематического искривления свободной поверхности за счет действия центробежных сил здесь следует учесть дополнительный член, аналогичный второму слагаемому в (1.15)). Это уравнение положено в основу динамической метеорологии и, что не менее интересно с точки зрения физических приложений, описывает дрейфовые волны в плазме, если входящим в него параметрам придать другой физический смысл. Подробнее об этом см. [24].

Подчеркнем, что для рассматриваемой модели параметр Кориолиса  $f = 2\Omega_0$  — величина постоянная, и так называемый бета-эффект, связанный с наличием в левой части (1.14) дополнительного линейного члена, достигается здесь за счет орографии ( $dh_t/dy \neq 0$ ). Применительно к океану и атмосфере Земли параметр  $f = 2\Omega_0 \sin \varphi$  есть удвоенная проекция угловой скорости вращения Земли на нормаль к ее поверхности и зависит от широтной координаты  $\varphi$ . В этом случае координаты  $x$  и  $y$  отсчитываются по долготе и широте на восток и север соответственно. Величину  $H_0$  следует трактовать как высоту гипотетически однородной атмосферы, значение которой определяется из условия  $c^2 = p_0/\rho_0 = gH_0$ , где  $p_0, \rho_0, c$  — приземное давление, плотность и скорость звука в окрестности земной поверхности ( $H_0 \approx 8$  км).

2. Соотношения (1.9) — (1.11), использованные при выводе уравнения Обухова — Чарни, служат своеобразным фильтром [22, 25–27], который позволяет исключить из рассмотрения быстрые звуковые и гравитационные волны, практически не влияющие на развитие глобальных "процессов, но существенно затрудняющие «охоту на крупного зверя». Иначе обстоит дело с медленными волнами планетарного масштаба, существование которых проще всего проиллюстрировать на модели бета-плоскости, когда параметр  $\beta$ , входящий в (1.14), считается постоянным, не зависящим от широтной координаты. Такая модель часто используется для описания океанских и атмосферных движений в средних широтах [13, 27]. Непосредственной подстановкой в (1.14) легко убедиться, что функция

$$\Psi = A \cos(kx + ly - \omega t) \quad (A = \text{const}) \quad (1.16)$$

является точным решением уравнения Обухова — Чарни, описывающим диспергирующие волны, распространяющиеся на запад с фазовой скоростью

$$c_R = \frac{\omega}{k} = -\beta(k^2 + l^2 - L_0^2)^{-1}. \quad (1.17)$$

Волновые решения с таким дисперсионным соотношением называются волнами Россби, а иногда, применительно к сферической Земле, волнами Россби — Гурвица (в этом случае они выражаются через сферические функции; см., например, [15]). Волны Россби — важный элемент общей циркуляции океана и атмосферы, оказывающий существенное влияние на характеристики макротурбулентности [28, 29] и неустойчивости глобальных течений. В частности, резонансное взаимодействие волн Россби в слоистых средах при определенных условиях приводит к интересному и еще недостаточно изученному явлению взрывной неустойчивости [30, 31], не улавливаемой линейной теорией. Особое место в семействе волн Россби занимают так называемые солитоны Россби, не охватываемые уравнением (1.14), но играющие существенную роль в процессах циклогенеза в океане и, возможно, в атмосферах больших планет (когда радиус планеты  $R$  много больше  $L_0$ ). Этому вопросу посвящен обзор [5], в котором, в частности, подробно излагаются методы и результаты лабораторного моделирования таких вихревых образований и проводится сопоставление с натурными наблюдениями.

Естественным «водоразделом» между солитонами Россби и рассматриваемыми здесь волнами и вихревыми структурами служит масштаб Обухова — Россби. Дело в том, что формально, согласно дисперсионному соотношению (1.17), максимальную скорость распространения  $c_{R\max} = \beta L_0^2 = c L_0 / R$  (в земных условиях  $L_0 \approx 2000—3000$  км) имеют сверхдлинные волны с длиной волны  $L = 2\pi/K \gg L_0$  ( $K = (k^2 + l^2)^{1/2} \rightarrow 0$ ). При этом  $c_{R\max}$  сопоставимо со скоростью звука  $c$ . Для таких скоростей и масштабов уравнение (1.14), еще применимое в окрестности  $L_0$ , перестает работать, так как главный член в разложении (1.13) не содержит квадратичных по  $\Psi$  слагаемых, которые в данном случае уже не малы. Учет этих членов приводит к появлению в (1.14) дополнительной нелинейности типа  $(\Psi^2)_x$  («скалярной» нелинейности по терминологии [5]), связанной не с адвекцией скорости ( $[\Delta\Psi, \Psi]$ ), а с возвышением свободной поверхности жидкости. Эта нелинейность, как показано в [32, 33], способна скомпенсировать диспергирующее влияние бета-эффекта на волновой пакет, благодаря чему в системе могут сформироваться уединенные антициклонические вихри — солитоны Россби (в циклонических вихрях компенсация дисперсии нелинейностью невозможна, в результате чего возникает наблюдаемая на таких масштабах существенная циклон-антициклонная асимметрия [5, 6]).

С точки зрения рассматриваемых ниже проблем это ограничение области применимости уравнений динамической метеорологии не принципиально, зато их использование позволяет освободиться от дополнительных технических трудностей при постановке эксперимента и в теории.

3. Развитие глобальных геофизических течений происходит, как правило, в условиях быстрого вращения, когда малы значения числа Экмана  $E = \nu / \Omega_0 H^2 \ll 1$ . В этом случае поперечная циркуляция жидкости сосредоточивается в относительно тонких экмановских (а при наличии вертикальных стенок или других резких неоднородностей — и в стюартсоновских) пограничных слоях [34—36], где и происходит главным образом диссипация кинетической энергии. Так, в земной атмосфере до 70% диссипации кинетической энергии приходится на экмановский планетарный пограничный слой. Поэтому, если речь идет о небольших временах развития, для движений вне пограничных слоев (в «свободной» атмосфере) можно использовать уравнение Обухова — Чарни, как это делается, например, при расчете краткосрочного прогноза погоды малой заблаговременности (на 1—2 дня). В противном случае необходим учет вязкости.

Напомним, что экмановский слой является своеобразным насосом, накачивающим или отсасывающим жидкость из свободной атмосферы со скоростью, пропорциональной завихренности на верхней его границе:

$$\omega_E = -\delta_E \xi, \quad \delta_E = \left( \frac{\nu}{f} \right)^{1/2}, \quad (1.18)$$

где  $\delta_E$  — эффективная толщина слоя Экмана,  $\xi = \text{rot}_z \mathbf{v}$ .

Яркой иллюстрацией принципа действия «экмановского насоса» может служить задача Кармана о движении жидкости в окрестности вращающегося плоского диска, точное решение которой приведено во многих гидродинамических учебниках (см., например, [10]).

С учетом (1.18) уравнения двумерных движений и сохранения массы свободной атмосферы записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho H}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho H}{\partial y} + \nu \Delta v,$$

$$\frac{d\rho(H - \delta_E)}{dt} + \rho(H - \delta_E) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho \omega_E; \quad (1.20)$$

здесь плотность  $\rho = \rho(x, y, t)$  не предполагается постоянной, чтобы в дальнейшем показать в явном виде, каким образом внешние притоки тепла создают завихренность в среде. В этом случае систему (1.19), (1.20) следует дополнить уравнением переноса тепла и уравнением состояния, в качестве которого можно воспользоваться приближением Буссинеска [37]

$$\rho' = \alpha \rho_0 T', \quad \frac{dT'}{dt} = \frac{Q}{c_p}; \quad (1.21)$$

здесь  $\rho'$  и  $T'$  — отклонения плотности и температуры от средних значений  $\rho_0$  и  $T_0$ ,  $\alpha$  — коэффициент объемного расширения,  $c_p$  — удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении,  $Q$  — приток тепла к единице массы.

Из (1.19), (1.20) следует, что уравнение сохранения потенциального вихря (1.2) заменяется теперь уравнением трансформации потенциального вихря (в наиболее общем виде уравнение трансформации потенциального вихря получено в [22, 38]):

$$\frac{d}{dt} \frac{\xi + f}{\rho(H - \delta_E)} = \frac{\nu}{\rho(H - \delta_E)} \Delta \xi + \frac{\xi + f}{\rho(H - \delta_E)^2} \omega_E. \quad (1.22)$$

Применяя к (1.22) с учетом (1.21) такую же процедуру, как при выводе уравнения Обухова — Чарни из теоремы сохранения потенциального вихря, получим следующее уравнение квазидвумерных геофизических течений с экмановским трением  $f_E = -\lambda_E u$  [39]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \Psi - L_0^{-2} \Psi) + [\Delta \Psi, \Psi] + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nu \Delta^2 \Psi - \lambda_E \Delta \Psi + q, \quad (1.23)$$

$$\lambda_E = \frac{\nu}{H_S^2}, \quad q = -\frac{f \alpha Q}{c_p}, \quad (1.24)$$

где, как и ранее,  $\Psi = -gh/f$ ,  $u = \partial \Psi / \partial y$ ,  $v = -\partial \Psi / \partial x$ , а  $H_S = (H_0 \delta_E)^{1/2} = H_0^{1/2} \nu^{1/4} f^{-1/4}$  — толщина внешнего слоя Праудмена — Стюартсона [34, 35].

Уравнение (1.23) используется далее в качестве основного математического инструмента для теоретического исследования устойчивости и вихревых структур квазидвумерных сдвиговых течений. В связи с этим полезно сразу сделать несколько замечаний, важных с точки зрения интерпретации и сопоставления лабораторных и натуральных гидродинамических объектов.

Во-первых, с математической точки зрения рэлеевское и экмановское трения одинаковым образом входят в уравнение движения тонких слоев жидкости (1.7) и глобальных геофизических течений (1.23). Они отличаются лишь выражениями для коэффициентов трения (1.8) и (1.24), из которых следует, что в последнем случае мерой эффективности внешнего трения служит не вся высота слоя  $H_0$ , а величина  $H_S$ , о которой подробно пойдет речь при рассмотрении вертикальной структуры квазидвумерных течений. Отметим лишь, что  $H_S$  — это минимальный возможный масштаб горизонтальной неоднородности геофизического течения. Если ширина фронта или сдвига встречных потоков существенно превышает  $H_S$ , то вертикальные скорости оказываются незначительными. Поэтому критерием двумерности геофизических течений служит соотношение  $L \gg H_S$ , а не (значительно более сильное)  $L \gg H_0$ .



Во-вторых, из выражения (1.24) для  $q$  видно, что внешние притоки тепла являются прямым (а не опосредованным через поле температуры) источником завихренности для сжимаемой вращающейся жидкости. Это позволяет в лабораторных условиях заменять нагревание механическим или каким-либо другим «приводом», создающим течение нужного профиля.

В-третьих, отметим возможность применения уравнений (1.23) для описания замагниченной слабоионизованной плазмы, где магнитное поле обеспечивает двумерность, а трение о нейтральную компоненту — рэле-евский член  $-\lambda \mathbf{v}$ .

И в-четвертых, нетрудно показать (см. также [40, 41]), что уравнения (1.23) описывают также квазидвумерные магнитогидродинамические течения слабо проводящей жидкости, находящейся в поперечном постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . В предположении малых магнитных чисел Рейнольдса  $Re_m = UL/v_m$  ( $v_m = c_0^2/4\pi\sigma$ ,  $\sigma$  — электрическая проводимость,  $c_0$  — скорость света в вакууме) и больших чисел Гартмана [42]  $G = H_0/\delta_G$  ( $\delta_G = c_0 B^{-1}(\rho v/\sigma)^{1/2}$ ) коэффициент придонного трения равен  $\lambda_G = \nu/H_G^2$ , где  $H_G = (H_0 \delta_G)^{1/2}$ . Таким образом, в этом случае толщина погранслоя Гартмана [42]  $\delta_G$  является аналогом толщины слоя Экмана, а магнитное поле действует аналогично силам Кориолиса.

Наконец, в последнее время уравнение Обухова — Чарни нашла применение в астрофизике в связи с описанием динамики галактических дисков. В этом случае, как было отмечено М. В. Незлиным, также необходимо учитывать внешнее трение, которое может быть обусловлена взаимодействием звезд с межзвездным газом.

**1.3. Критерии подобия и возможности лабораторного моделирования.** Применяя уравнение квазидвумерных течений (1.23) к описанию натуральных систем, таких как атмосфера и океан Земли, необходимо соблюдать определенные меры предосторожности. Прежде всего отметим важное ограничение, вызванное тем, что при выводе (1.23) не были учтены бароклинные эффекты. С энергетической точки зрения бароклинные эффекты связаны с преобразованием так называемой доступной потенциальной энергии [13, 43], накапливаемой в неоднородно нагреваемой жидкости за счет архимедовых сил, в кинетическую энергию вертикальных конвективных ячеек, которая в свою очередь преобразуется в кинетическую энергию горизонтальных течений из-за отклоняющего действия сил Кориолиса. Силы плавучести возникают при несовпадении изобарических и изотермических поверхностей, угол между которыми служит локальной мерой избытка потенциальной энергии. Благодаря этому в системе может развиваться конвективная или, как говорят метеорологи, бароклинная неустойчивость, обусловленная нелинейным взаимодействием полей скорости и температуры (адвекция температуры  $(\mathbf{v}\nabla)T$ ). Основной характеристикой конвективной неустойчивости глобальных геофизических течений является их вертикальный профиль скорости, причем вертикальный градиент скорости пропорционален горизонтальному градиенту температуры (так называемое соотношение термического ветра [13, 27]). Это легко получить из уравнения геострофического ветра (1.9), если записать его в приближении Буссинеска ( $\rho' = \rho_0 \alpha T'$ ) и продифференцировать по вертикальной координате.

Таким образом, натурные геофизические течения формируются под влиянием как баротропного (связанного с горизонтальным сдвигом скорости), так и бароклинного (связанного с вертикальным сдвигом скорости) механизмов неустойчивости, что служит существенным препятствием на пути построения теории общей циркуляции атмосферы и океана, не говоря уже о сложностях, вносимых орографической и взрывной

неустойчивостью. Именно поэтому важно знать вклад каждого из указанных механизмов в процесс циклогенеза, тем более что в лабораторных условиях любой из них можно при желании исключить. Благоприятным обстоятельством для применения баротропной модели служит также и то, что бароклинные процессы развиваются медленнее баротропных (например, характерное время усвоения солнечной радиации земной атмосферой порядка двух недель), имеющих характерное время развития порядка одних суток.

Исторически сложилось так, что бароклиной неустойчивости уделялось вначале большее внимание, и лишь в начале семидесятых годов в связи с проблемой предсказуемости атмосферных движений [44] «невязкая» теория баротропной неустойчивости стала предметом все возрастающего числа работ. Практически без внимания осталась «вязкая» теория, которая, как будет показано ниже, принципиально меняет представление о процессах циклогенеза.

Используя в качестве масштабов длины и скорости их характерные значения  $L$  и  $U$ , основное уравнение квазидвумерных течений (1.23) можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\Psi - \alpha^2\Psi) + [\Delta\Psi, \Psi] + B\frac{\partial\Psi}{\partial x} = R_v^{-1}\Delta^2\Psi - R_\lambda^{-1}\Delta\Psi + F; \quad (1.25)$$

здесь

$$\alpha^2 = \frac{L^2}{L_0^2}, \quad B = \frac{\beta L^2}{U}, \quad R_v = \frac{UL}{\nu}, \quad (1.26)$$

$$R_\lambda = \frac{U}{L\lambda} = \frac{UH_*^2}{Lv}. \quad (1.27)$$

Величину  $H_* = (H_0\delta_*)^{1/2}$  в дальнейшем будем называть эффективной толщиной квазидвумерного течения, где  $\delta_*$  совпадает с толщиной пограничного слоя Экмана  $\delta_E = (\nu/f)^{1/2}$  либо Гартмана  $\delta_G$  и по определению равна  $(1/2)H_0$  для обычной модели мелкой воды. Это позволяет унифицировать формулу для коэффициента внешнего трения  $\lambda = \nu/H_*^2$ . Величину  $\alpha^2$  называют параметром горизонтальной сжимаемости (при  $\alpha^2 = 0$  уравнение Обухова — Чарни (1.14) совпадает с уравнением движения несжимаемой двумерной пленки на бета-плоскости или сфере),  $B$  характеризует влияние бета-эффекта,  $R_v$  — обычное число Рейнольдса, а  $R_\lambda$  — удобно трактовать как число Рейнольдса по внешнему трению [45, 46], которое, что уместно подчеркнуть, скомбинировано из всех размерных характеристик  $(H_0, \nu, \delta_*, L, U)$  квазидвумерного течения. Заметим также, что априорное предположение о малости чисел Маха ( $M = U/(gH_0)^{1/2}$ ), Россби ( $\varepsilon = U/fL$ ) и Экмана ( $E = \nu/fH_0^2 = \delta_E^2/H_0^2$ ) обеспечивает автомодельность системы относительно этих параметров, которые не входят в (1.25).

Полное исследование решений уравнения (1.25), описываемых четырьмя внешними параметрами, — трудно обозримая задача. Поэтому для конкретизации направления теоретического анализа и постановки лабораторных экспериментов полезно иметь оценки значений указанных критериев подобия для реальных течений. В качестве примера в табл. I и II приведены значения размерных параметров земной атмосферы и критериев подобия для различных масштабов атмосферных движений. Следует отметить, что при оценке указанных величин в качестве  $\nu$  использовался коэффициент мелкомасштабной турбулентности, оказывающей диссипативное влияние на течения с масштабами порядка сотни и тысячи километров. Из таблиц, в частности, видно, что условия малости  $M$ ,  $\varepsilon$  и  $E$  хорошо выполняются всюду, исключая окрестность  $L = 100$  км, где  $\varepsilon \sim 1$ . Заметное влияние параметров  $\alpha^2$  и  $B$  можно ожи-

дать лишь для масштабов порядка 1000 км и более. Наконец, характерная особенность крупномасштабных атмосферных течений состоит в том, что для них  $R_v \gg R_\lambda$ .

В лабораторных экспериментах [21] с «мелкой водой» толщина  $H_0$  слоя жидкости, в качестве которой используется вода или ее солевые растворы ( $\nu \approx 0,01$  см<sup>2</sup>/с), обычно порядка 1 см, характерный горизон-

Т а б л и ц а I. Значения параметров земной атмосферы на широте  $\Phi_0 = 45^\circ$

$H_0$ , км	$L_0$ , км	$f$ , с <sup>-1</sup>	$\delta E$ , км	$H_*$ , км	$\beta$ , с <sup>-1</sup> м <sup>-1</sup>	$\nu$ , см <sup>2</sup> /с	$U$ , м/с	$M$	$E$
10	$3 \cdot 10^3$	$10^{-4}$	0,5	2,2	$1,6 \cdot 10^{-11}$	25	10	0,03	$2,5 \cdot 10^{-3}$

Т а б л и ц а II. Значения критериев подобия для различных масштабов атмосферных движений

$L$ , км	100	300	500	1000	3000
$\varepsilon = U/fL$	1	0,3	0,2	0,1	0,03
$\alpha^2$	0,001	0,01	0,03	0,1	1
$B$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	0,39	1,6	14
$R_v$	$4 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^6$
$R_\lambda$	20	6,7	4	2	0,7

тальный масштаб течения  $L \approx 3-5$  см, характерная скорость течения  $U \approx 0,1-2$  см/с. В экспериментах с вращающейся жидкостью [47-49]  $\Omega_0 \sim 1$  с<sup>-1</sup> ( $\sim 10$  об/мин),  $U \approx 0,5-3$  см/с и  $L \approx 2-10$  см. Легко убедиться в том, что в такого рода экспериментах также выполняются условия малости  $M$ ,  $\varepsilon$  и  $E$ . Значение параметра  $B$  в сопоставлении не нуждается, поскольку этим параметром в лабораторных условиях легко управлять с помощью рельефа дна (см. формулу (1.15)). Значения  $R_\lambda$ , как и в атмосфере, находятся в пределах от долей единиц до нескольких десятков единиц, а  $R_v \sim 10-10^3$ , т. е. на два-четыре порядка меньше, чем в атмосфере. Такое существенное различие лабораторных и натурных значений  $R_v$  ставит под сомнение возможность моделирования атмосферных процессов в лабораторных условиях и нередко служило серьезным аргументом против использования результатов лабораторных исследований для объяснения процессов общей циркуляции атмосферы. Заметим, что характерное лабораторное значение масштаба Обухова — Россби  $L_0 = (gH_0)^{1/2}/f \sim 50$  см, что также создает определенные трудности при моделировании течений, для которых  $\alpha^2 \sim 1$ . Для этого требуется либо существенно увеличивать скорость вращения [5, 6] ( $L_0 \sim 5$  см при 100 об/мин), либо использовать довольно крупные цилиндрические сосуды диаметром не менее 1 м. Таким образом, вопросы, связанные с лабораторным моделированием крупномасштабных атмосферных течений, нуждаются в дополнительной теоретической проработке, о чем, в частности, пойдет речь ниже.

**2. Линейная теория устойчивости.** Хорошо известно [7, 50] еще с прошлого века, что одной из главных причин гидродинамической неустойчивости является сдвиг скорости течения, то есть наличие в ее профиле точек перегиба. Например, в случае тангенциального разрыва (рис. 2) движение идеальной жидкости экспоненциально неустойчиво по отношению к любому волнообразному возмущению, инкремент которого зависит от волнового числа  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  — длина волны) и равен  $\gamma = kU$  ( $U$  — величина сдвига скорости). Для «размазанного разрыва» ширины  $D$  зависимость  $\gamma = \gamma(k)$  приведена на рис. 3, из которого видно,

что устранение разрыва скорости приводит к стабилизации течения по отношению к мелкомасштабным возмущениям. Эти примеры иллюстрируют не только сам факт неустойчивости сдвиговых течений, но и показывают, сколь осторожно нужно подходить к идеализации профиля реального течения, от которой существенно зависят характеристики устойчивости. Во всяком случае, наличие вязкости накладывает определенные требования на гладкость профиля скорости течения, без учета которой можно прийти к неправильным результатам.

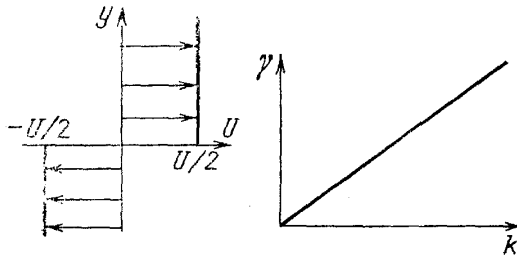


Рис. 2. Профиль скорости и дисперсионная кривая тангенциального разрыва

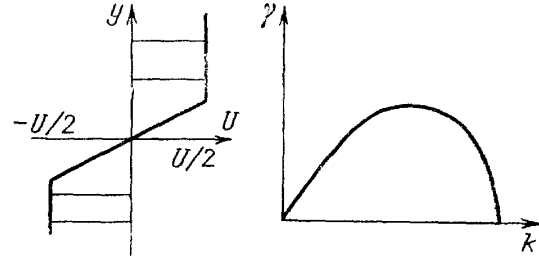


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, для «размазанного разрыва»

Вязкая и невязкая теория устойчивости строго двумерных сдвиговых течений к настоящему времени хорошо развита. Но, как упоминалось выше, она непосредственно не применима для описания квазидвумерных течений. Положение, однако, меняется, если ее результатам придать другой гидродинамический смысл. В связи с этим уместно коротко остановиться на основных результатах классической теории.

**2.1. Результаты классической теории устойчивости двумерных сдвиговых течений.** Классическая задача теории устойчивости для уравнения (1.23) ставится следующим образом. Пусть «сила»  $q$  зависит только от поперечной координаты  $y$  и направлена вдоль  $x$ . Тогда (1.23) имеет стационарное решение, описывающее «основное течение»  $\Psi_0(y)$  со скоростью  $U(y)$ , направленной вдоль  $x$  и зависящей только от  $y$ . Требуется исследовать устойчивость этого решения по отношению к малым возмущениям.

В отсутствие бета-эффекта, внешнего трения и «двумерной сжимаемости» ( $\beta=0$ ,  $\lambda=0$ ,  $L_0^{-1}=0$ ) линейная задача устойчивости сводится к задаче на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда [17, 50]

$$[U - (c_r + ic_i)](\varphi'' - \alpha\varphi^2) - U''\varphi = \frac{i}{\alpha R_v}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \quad (2.1)$$

с граничными условиями прилипания на боковых границах  $\alpha\varphi = \varphi' = 0$  при  $y = y_1, y_2$ ; здесь  $\varphi$  — безразмерная амплитуда гармонического возмущения с функцией тока

$$\psi = \varphi(y) \exp[i\alpha(x - ct)], \quad c = c_r + ic_i, \quad (2.2)$$

$\alpha$  — безразмерное волновое число,  $\gamma = \alpha c_i$  — инкремент, имеющий положительное значение для неустойчивых мод. Ограничиться двумерной постановкой задачи позволяет теорема Сквайра [7, 50], согласно которой наиболее опасными являются возмущения, расположенные в плоскости основного течения. Цель линейной теории устойчивости — получить дисперсионную зависимость  $\gamma = \gamma(\alpha)$  инкремента роста возмущения от волнового числа.

Большинство результатов линейной теории относится к частному случаю  $v=0$  — уравнению Рэлея

$$[U - (c_r + ic_i)](\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = 0 \quad (2.3)$$

с граничными условиями непротекания  $\alpha\varphi=0$  при  $y=y_1, y_2$ . Уравнение Рэлея в отличие от (2.1) инвариантно относительно операции комплексного сопряжения с точностью до изменения знака  $c_i$ . Поэтому существование решения с отрицательным  $c_i$  влечет существование комплексно сопряженного решения с  $c_i>0$ . Следовательно, любое  $c_i \neq 0$  означает неустойчивость в невязкой теории — свойство, которым не обладают решения уравнения Орра — Зоммерфельда. В связи с этим уместно напомнить важный результат Линя и Вазова [50, 51], согласно которому только нарастающие ( $c_i>0$ ) решения уравнения Рэлея являются пределами решений уравнения (2.1) при  $\nu \rightarrow 0$ . Некоторые типичные дисперсионные кривые, полученные разными авторами, приведены на рис. 4.

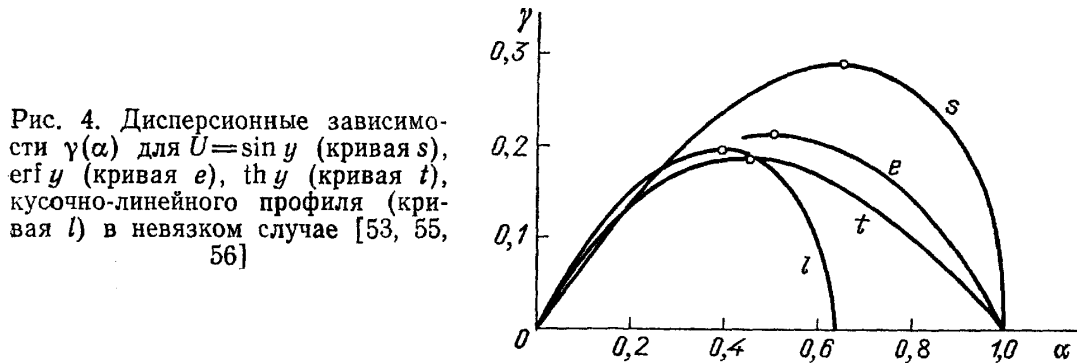


Рис. 4. Дисперсионные зависимости  $\gamma(\alpha)$  для  $U=\sin y$  (кривая  $s$ ),  $\operatorname{erf} y$  (кривая  $e$ ),  $\operatorname{th} y$  (кривая  $t$ ), кусочно-линейного профиля (кривая  $l$ ) в невязком случае [53, 55, 56]

Кривая ( $l$ ) на рис. 4 соответствует кусочно-линейному профилю

$$\begin{aligned} U &= y|y|^{-1} \text{ при } |y| \geq 1, \\ &= y \text{ при } |y| \leq 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

и описывается формулой, полученной еще Рэлеем (см., например, [52])

$$\gamma = \frac{1}{2} [e^{-4\alpha} - (1 - 2\alpha)^2]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Кривая ( $s$ ) для синусоидального профиля  $U=\sin y$  задается приближенной формулой

$$\gamma = \alpha \left( \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right)^{1/2}, \quad (2.6)$$

которую легко получить из результатов, приведенных в [53]. Дисперсионные кривые ( $e$ ) и ( $t$ ) для профилей  $U=\operatorname{erf}(y)$  и  $U=\operatorname{th} y$  получены численным интегрированием [54—56]. Отметим, что за редким исключением уравнение Рэлея не поддается точному аналитическому решению. Асимптотики для дисперсионных соотношений и собственных функций в окрестностях нейтральных точек  $\alpha=0$  и  $\alpha=\alpha_s \neq 0$  (в которых  $\gamma=0$ ) для различных профилей скорости можно найти в [50, 55, 7].

На рис. 5,  $a$  показаны дисперсионные кривые вязкой задачи, полученные в [54] (см. также [8]) для  $U=\operatorname{th} y$  численным интегрированием при различных значениях числа Рейнольдса  $R_\nu$ . На рис. 6 приведены нейтральные кривые  $R_\nu^*(\alpha)$  для того же профиля и для  $U=\sin y$  по формуле [53]

$$R_\nu^* = \sqrt{2} \frac{1 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^{1/2}}. \quad (2.7)$$

Легко понять, что в отличие от синусоидального профиля, для которого неустойчивость наступает при  $R_\nu > \sqrt{2}$ , профили ( $e$ ), ( $l$ ) и ( $t$ ) неустойчивы всегда, поскольку в окрестности  $\alpha=0$  длинноволновые моды воспринимают течение как поток Гельмгольца  $U=y/|y|$ . По той же причине

в окрестности  $\alpha=0$  поведение дисперсионных кривых на рис. 4 слабо-зависит от профиля основного течения. Кроме того, для однотипных профилей (e), (l) и (t) максимальные значения  $\gamma$  мало отличаются. Отме-

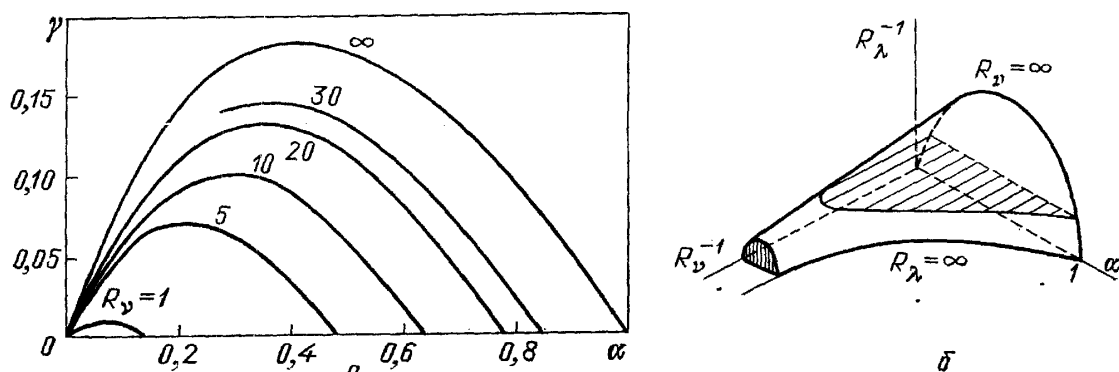


Рис. 5. а — Дисперсионная зависимость  $\gamma(\alpha, R_v)$  для  $U=\text{th } y$  [54]. б — Поверхность нейтральной устойчивости  $F(\alpha, R_\lambda, R_v)=0$  для  $U=\text{th } y$  [45]

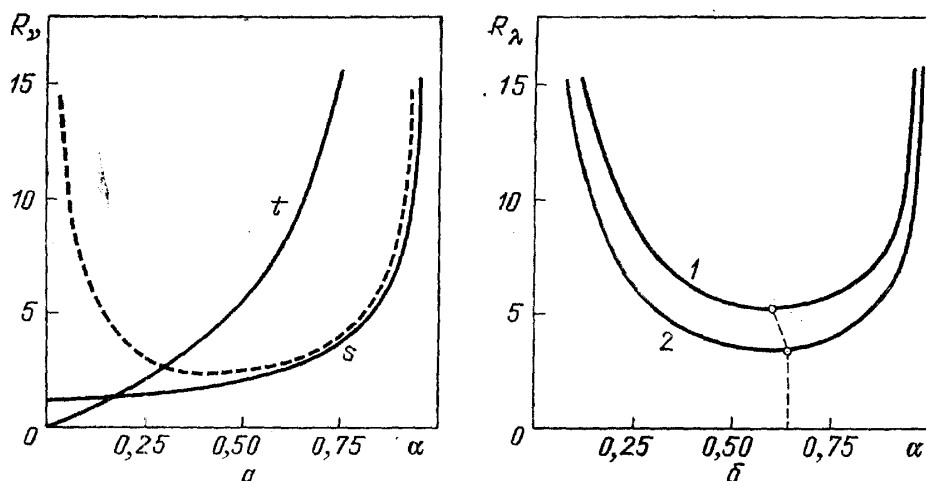


Рис. 6. а — Нейтральные кривые для  $U=\sin y$  (кривая s) и  $\text{th } y$  (кривая t) без внешнего трения, а также для  $U=\sin y$  при  $R_v/R_\lambda=0,1$  (штриховая). б — То же для  $U=\sin y$  при  $R_v/R_\lambda=1$  (кривая 1) и  $\infty$  (кривая 2)

тим наконец, что при превышении критического числа Рейнольдса первыми возбуждаются именно длинноволновые моды  $\alpha \rightarrow 0$ .

**2.2. Роль внешнего трения.** В гидродинамической литературе неоднократно указывалось на важность учета внешнего трения применительно к конкретным задачам. Так, в [9] учет диссипации в слое Экмана позволил согласовать теоретические и экспериментальные результаты по исследованию устойчивости сдвиговых течений вращающейся жидкости, а в [57—59] это было сделано для течения с синусоидальным профилем скорости в тонком слое жидкости. Следует особо отметить работу [60], в которой фактически построена слабонелинейная теория (подробнее об этом см. гл. 4). Однако в общем виде влияние внешнего трения на линейную устойчивость сдвиговых течений было проанализировано лишь в [45].

Вернемся к уравнению (1.23) при  $\lambda \neq 0$ . Простейшая оценка показывает, что член с  $\lambda$  преобладает над членом с  $\nu$ , если характерный горизонтальный масштаб течения  $L$  превышает величину  $L_{\min} = (\nu/\lambda)^{1/2} = H_*$  (см. п. 1.4). Но это условие является одновременно критерием двумерности течения! Значит, можно ожидать, что в квазидвумерных течениях основным механизмом диссипации является внешнее трение, а не внутренняя вязкость (иначе говоря, вертикальная, а не горизонтальная диф-

фузия импульса). Конечно, к этому выводу надо подходить с долей осторожности, поскольку, вообще говоря, выбрасывание из уравнения члена со старшей производной ( $v\Delta^2\Psi$ ) может быть опасно в области больших градиентов. Рассмотрим последствия введения внешнего трения в вязкое уравнение (1.23) (по-прежнему полагая  $\beta=0$ ,  $L_0^{-1}=0$ ).

Легко видеть, что с точки зрения линейной теории устойчивости внешнее трение лишь уменьшает (размерные) инкременты роста волновых возмущений на величину  $\lambda$ , не меняя формы дисперсионных кривых и собственных функций. В самом деле, для возмущения вида (2.2) уравнение Орра — Зоммерфельда принимает теперь вид

$$\left[ U - \left( c_{r\lambda} + ic_{i\lambda} + \frac{i}{\alpha R_\lambda} \right) \right] (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = \frac{i}{\alpha R_v} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi), \quad (2.8)$$

где вещественная и мнимая части комплексной величины  $c$  снабжены индексом  $\lambda$ , чтобы отличать их от случая  $\lambda=0$ . Это уравнение совпадает с уравнением (2.1) с точностью до замены  $c_{i\lambda} + (\alpha R_\lambda)^{-1} \rightarrow c_i$ . Вспоминая, что  $F = \alpha c_{i\lambda}$  есть инкремент роста возмущения, находим, что дисперсионное соотношение для уравнения (2.8) записывается в виде  $F(\alpha, R_\lambda, R_v) \equiv \gamma(\alpha, R_v) - R_\lambda^{-1}$ , где  $\gamma = \gamma(\alpha, R_v)$  — дисперсионная кривая уравнения (2.1). Теперь критическая кривая (кривая нейтральной устойчивости) задается равенством

$$F(\alpha, R_\lambda, R_v) \equiv \gamma(\alpha, R_v) - R_\lambda^{-1} = 0 \quad (2.9)$$

(инкремент неустойчивости равен декременту затухания определяемому внешним трением). Таким образом, для изучения влияния придонного трения на устойчивость сдвиговых течений достаточно воспользоваться известными результатами классической теории, которые тем самым получают новую гидродинамическую интерпретацию. В частности, дисперсионные кривые на рис. 4 и 5, а можно рассматривать теперь как кривые нейтральной устойчивости сдвиговых течений с учетом придонного трения, если вместо  $\gamma$  откладывать по оси ординат  $R_\lambda^{-1}$ . Из этого почти очевидного утверждения после некоторых дополнительных соображений следуют, однако, нетривиальные выводы.

Рассмотрим сначала два предельных случая критического условия (2.9) для задачи (2.8), соответственно при  $R_\lambda \rightarrow \infty$  и  $R_v \rightarrow \infty$  ( $R_\lambda$  и  $R_v$  являются независимыми безразмерными параметрами). Очевидно,  $\lim F = \gamma(\alpha, R_v)$  при  $R_\lambda \rightarrow \infty$  и  $\lim F = \gamma(\alpha) - R_\lambda^{-1}$  при  $R_v \rightarrow \infty$ , где  $\gamma = \gamma(\alpha)$  — дисперсионное соотношение задачи Рэлея (2.3). Последнее равенство следует из упомянутого выше результата Линя и Вазова [50, 51] для положительных собственных значений  $\gamma = \alpha c_i$ , роль которого выполняет  $R_\lambda^{-1}$ . Как видно из сопоставления рис. 4 и 6 с учетом новой интерпретации, нейтральные кривые, соответствующие указанным предельным случаям, принципиально различаются поведением в окрестности  $\alpha=0$  и расположением своих минимумов (максимумов). В сущности уже отсюда следует, что внешнее трение придает новое качество характеристикам устойчивости сдвиговых течений. Вопрос, однако, в том, является ли это новое качество следствием предельного перехода в дисперсионном соотношении для задачи (2.8) при  $R_v \rightarrow \infty$ , или, наоборот, потеря его есть следствие предельного перехода при  $R_\lambda \rightarrow \infty$ . Итак, задача сводится к изучению структурной устойчивости нейтральных кривых

$$R_\lambda^{-1} = \gamma(\alpha, R_v), \quad R_v = R_v(\alpha, R_\lambda), \quad (2.10)$$

задаваемых дисперсионным соотношением (2.9), в окрестности точек  $R_v^{-1} = 0$  и  $R_\lambda^{-1} = 0$  соответственно по отношению к малым изменениям этих параметров.

В общей постановке это весьма сложная математическая задача. Ограничимся поэтому эвристическими соображениями, основанными на результатах классической теории и подкрепленными конкретным примером и экспериментальными данными. В рассматриваемом случае множество точек нейтральной устойчивости, задаваемых дисперсионным соотношением (2.9), образует своеобразную коническую поверхность в пространстве параметров  $(\alpha, R_\lambda^{-1}, R_v^{-1})$ , изображенную на рис. 5, б для  $U = \operatorname{th} y$ . Указанную поверхность нетрудно построить, используя данные на рис. 5, а с учетом их новой интерпретации. Аналогичные поверхности нейтральной устойчивости, очевидно, имеют и другие упомянутые профили сдвиговых течений с тем лишь несущественным отличием, что для  $U = \sin y$  вершина конуса находится не на бесконечности, а на оси  $R_v^{-1}$  в точке  $R_v^{-1} = 1/\sqrt{2}$  (см. (2.7)). Горизонтальные и вертикальные сечения нейтральной поверхности совпадают с нейтральными кривыми (2.10) и, как видно из рис. 5, б, имеют подковообразную форму, за исключением единственной кривой в плоскости  $R_\lambda^{-1} = 0$  ( $\lambda = 0$ ), уходящей на бесконечность или пересекающей ось  $R_v^{-1}$  в точке  $R_v^{-1} = 1/\sqrt{2}$ .

Таким образом, с точки зрения новой постановки задачи классическая критическая кривая является особой кривой, структурно неустойчивой по отношению к включению внешнего трения. И наоборот, форма критических кривых с учетом внешнего трения не чувствительна к включению или исключению внутренней вязкости, т. е. характеристики устойчивости не испытывают качественных изменений при варьировании параметра  $R_v$ . Проиллюстрируем сказанное на примере конкретной дисперсионной зависимости для  $U = \sin y$

$$R_v = \left[ \frac{2(1 + \lambda_0 + \alpha^2)(\lambda_0 + \alpha^2)(1 + \alpha^2)}{\alpha^2(1 - \alpha^2)} \right]^{1/2} \quad \left( \lambda_0 = \frac{R_v}{R_\lambda} \right), \quad (2.11)$$

полученной в [57, 59]. Видно, что кривая

$$R_v(\alpha) \equiv R_v(\alpha, 0) = \frac{\sqrt{2}(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^{1/2}}$$

не является равномерным (по  $\alpha$ ) пределом кривой (2.11) при  $\lambda_0 \rightarrow 0$ .

Качественное изменение нейтральных кривых при включении внешнего трения сказывается, в частности, в том, что при превышении порога устойчивости первыми возбуждаются возмущения с конечным волновым числом, соответствующим максимуму нейтральной кривой, а не длинноволновые моды, как раньше. Наконец, учитывая сказанное в начале этого параграфа, можно утверждать, что в случае реальных квазидвумерных течений с достаточно большими горизонтальными масштабами ( $L \gg H_*$ ) влияние вязкости вообще пренебрежимо мало. Это значит, что переход к неустойчивости определяется только значением числа Рейнольдса по внешнему трению, а нейтральная кривая  $R_\lambda^* = R_\lambda^*(\alpha)$  находится из дисперсионной кривой уравнения Рэлея  $R_\lambda^* = \gamma(\alpha)^{-1}$ . В этом случае, опираясь на данные рис. 4, сразу можно предсказать ориентировочные значения критического числа Рейнольдса  $R_\lambda \sim 5$  и безразмерного волнового числа возмущения  $\alpha_0 = \alpha_{0d} L \sim 0,5$ , возникающего после потери устойчивости (индекс d обозначает размерную величину) течения со сдвиговым профилем скорости типа  $U = \operatorname{th} y$ .

Другое важное следствие [61] учета внешнего трения состоит в «исчезновении» критического слоя, поскольку особая точка  $y_c$  уравнения линейной устойчивости (2.8), в которой  $U(y_c) = c_\lambda + i/\alpha R_\lambda$  смещается в комплексную плоскость (критический слой — это окрестность точки  $y_c$ , в которой фазовая скорость нейтрального возмущения при  $\lambda = 0$  совпа-



дает со скоростью течения). Как мы увидим ниже, это существенно упрощает «нелинейный» анализ.

Наконец, отметим, что автомодельность задачи по  $R_v$  при больших  $R_v$  позволяет снять вопрос о соответствии лабораторных экспериментов атмосферным течениям и объяснить, почему на больших масштабах в атмосфере наблюдаются относительно регулярные вихревые структуры (рис. 7). Значения  $R_v$  для атмосферы порядка  $10^{12}$ , если в качестве  $\nu$  взять молекулярную кинематическую вязкость, и порядка  $10^6$ , если воспользоваться значением турбулентной вязкости. На первый взгляд это означает, что атмосфера должна быть турбулентным «кипящим котлом». Теперь, когда мы знаем, что система автомодельна по  $R_v$  и определяющим параметром является  $R_\lambda$ , надкритичность крупномасштабных течений следует оценивать по значению  $R_\lambda$ . Из таблицы 2 видно, что  $R_\lambda$  колеблется в окрестности критического значения.

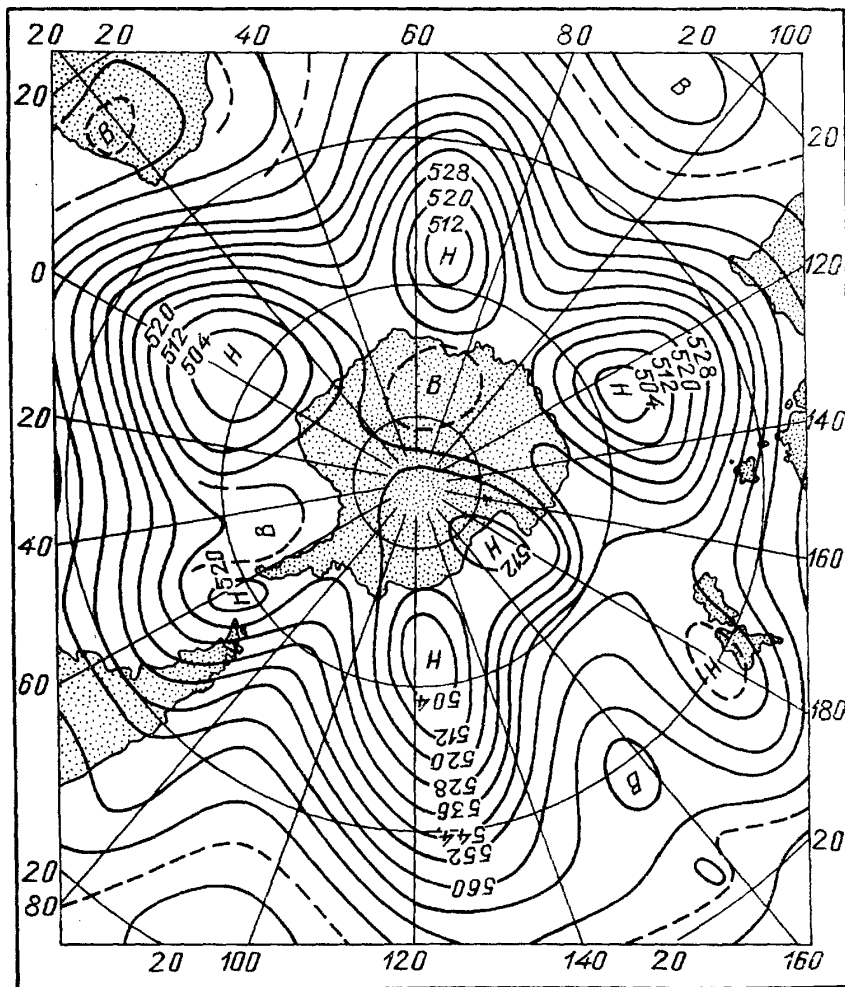


Рис. 7. Карта изобар над Южным полюсом

В заключение уместно заметить, что вывод о структурной неустойчивости результатов классической теории строго двумерных течений носит более общий характер. Аналогичная ситуация будет иметь место, если вместо внешнего трения на жидкость влияет стратификация, магнитное поле или вращение системы в целом. В частности, критическая кривая для невязкого сдвигового течения стратифицированной жидкости в плоскости параметров  $(Ri, \alpha)$  ( $Ri$ —число Ричардсона,  $Ri = gH\Delta\rho/\rho_0 U^2$ , где  $g$ —ускорение силы тяжести,  $\Delta\rho$ —характерная разность плотностей в жидкости,  $H$ —характерный вертикальный масштаб,  $U$ —величина сдвига и  $\rho_0$ —средняя плотность), как известно, имеет

подковообразную форму с максимальным значением  $Ri = Ri^* = 1/4$  (теорема Майлса [62, 63]). Легко понять, что поверхность нейтральной устойчивости для вязкого течения стратифицированной жидкости в пространстве параметров  $(Ri, R_v^{-1}, \alpha)$  также будет иметь вид, аналогичный рис. 5, б.

В связи с упомянутой аналогией полезно указать на одно на первый взгляд загадочное обстоятельство. Вспомним, что в отсутствие внутренней вязкости критическое значение  $R_{\lambda}^*$  для квазидвумерных течений однородной жидкости хотя и слабо, но зависит от формы профиля, тогда как для стратифицированных течений критическое число Ричардсона имеет универсальное значение для любого устойчивого профиля стратификации, равное  $Ri^* = 1/4$ . Этот факт имеет, однако, простое физическое объяснение, которое, как ни странно, практически не встречается в литературе.

Стратифицированную жидкость в определенном смысле можно рассматривать как гидродинамический аналог механического маятника [64, 65]. Состояние маятника будем считать «устойчивым», если он не достигает при движении верхнего положения равновесия. Тогда условие устойчивости можно сформулировать в виде неравенства  $2\Pi/K > 1$ , где  $2\Pi = 2mgh$  — потенциальная энергия верхнего положения равновесия относительно нижнего, а  $K = mv^2/2$  — кинетическая энергия маятника в нижней точке. Этот критерий можно еще интерпретировать как условие преобразования колебательного движения маятника во вращательное, а применительно к жидкости — волнового в вихревое.

Применим формально критерий устойчивости к жидкой частице, находящейся в стратифицированном сдвиговом потоке на расстоянии  $\Delta z$  от некоторой горизонтали  $z = z_0$ . Тогда с учетом действия силы Архимеда величину  $\Pi$  можно записать в виде  $\Pi = g\Delta z\Delta\rho$  ( $\Delta\rho = \rho_0 - \rho(z)$ ,  $\rho_0 = \rho(z_0)$ ), а величина  $K$  в системе отсчета, движущейся со скоростью жидкости в точке  $z = z_0$ , приближенно равна  $\frac{1}{2}\rho_0\Delta u^2 = \rho_0(u(z_0) - u(z))^2/2$ . Переходя теперь к пределу  $\Delta z \rightarrow 0$  и перенося двойки в правую часть неравенства, получим

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g\Delta\rho\Delta z}{\rho_0\Delta u^2} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g\Delta\rho/\Delta z}{\rho_0(\Delta I/\Delta z)^2} = \frac{gd\rho/dz}{\rho_0(du/dz)^2} \equiv Ri_t > \frac{1}{4},$$

где  $Ri_t$  — локальное число Ричардсона. Легко понять, что аналогичный критерий имеет место и для глобального числа Ричардсона, определенного выше. Таким образом, мы объяснили универсальность критического значения числа Ричардсона и то, почему  $Ri^*$  равно именно  $1/4$ .

### 3. Лабораторные эксперименты.

**3.1. Методы лабораторного моделирования.** Экспериментальные исследования неустойчивости сдвиговых течений имеют длительную историю. Однако значительная часть работ посвящена так называемым слоям смешения (см., например, обзоры [66, 67]), в которых неустойчивость развивается вниз по потоку. Здесь будут рассмотрены только эксперименты с постоянной по времени вынуждающей силой, в которых течения носят стационарный или (при больших надкритичностях) автоколебательный характер.

Квазидвумерные течения в таких экспериментах осуществляются либо в тонких слоях жидкости, либо во вращающейся жидкости (условимся называть жидкость вращающейся, если ее глубина существенно превышает толщину экмановского пограничного слоя), где, согласно теореме Праудмена — Тэйлора, вертикальные движения затруднены.

Как правило, эти эксперименты проводятся в цилиндрически симметричных установках. Жидкость, заключенная в цилиндрический или кольцевой сосуд, может приводиться в движение относительным вращением торцевых границ, объемной силой (например, силой Ампера) или источниками и стоками массы.

Во всех случаях течение обладает некоторыми общими чертами. Прежде всего, при малых скоростях сдвига, как правило, удается наблюдать устойчивый сдвиговый слой. При увеличении скорости он теряет устойчивость, и возникает регулярная цепочка вихрей типа «кошачьих глаз». Дальнейшее увеличение приводит к уменьшению числа вихрей, генерируемых сдвиговым течением, возникновению автоколебаний и неединственности вихревых режимов. Однако величина критического сдвига скорости и число вихрей  $n_0$ , возникающих сразу после потери устойчивости, однозначно определяются внешними параметрами течения и воспроизводятся. Таким образом, во всех экспериментах измеряются в первую очередь критические параметры — величина сдвига и число вихрей  $n_0$ . Во всех работах приводятся также зависимости числа вихрей (или полученного из него безразмерного волнового числа) от амплитуды сдвига.

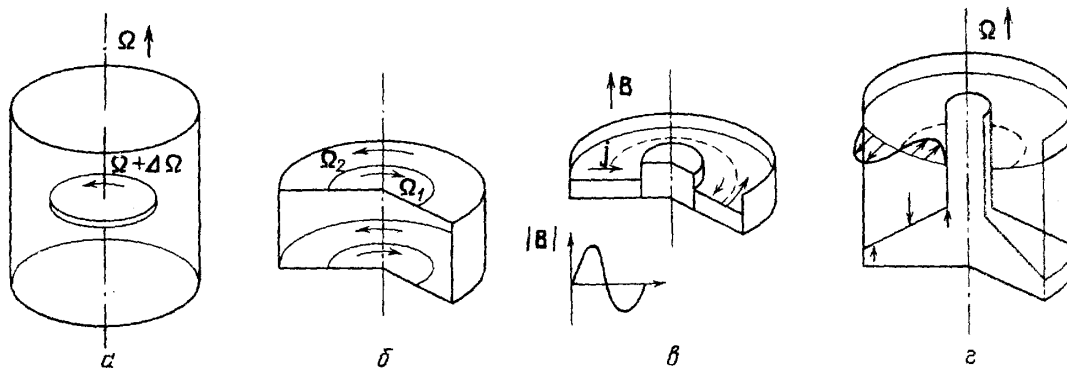


Рис. 8. Схемы основных типов установок, применяемых для моделирования вынужденных сдвиговых течений. *а* — По [68]. *б* — [70, 102]. *в* — МГД-метод [71 и др.] ( $B$  — магнитное поле,  $j$  — электрический ток). *г* — Метод источников и стоков [21 и др.] (жирными стрелками обозначено положение источников и стоков)

Одним из первых был эксперимент [68] по исследованию во вращающейся жидкости устойчивости вертикального сдвигового слоя (слоя Праудмена — Стюартсона). Течение создавалось во вращающемся баке за счет медленного относительного вращения диска меньшего радиуса, расположенного в толще жидкости (рис. 8, *а*). В эксперименте изменялись скорость вращения бака и радиус диска.

Аналогичная установка использовалась в [69] с тем отличием, что тонкий диск располагался на дне бака (конструкция позволяла генерировать как одиночный сдвиг, так и струйное течение). Изменяемым внешним параметром служила угловая скорость вращения бака.

В [70] исследовалась устойчивость сдвигового течения в узком зазоре между двумя вращающимися дисками. Каждый диск состоял из малого диска и кольца, вращающихся с разными угловыми скоростями (рис. 8, *б*). Угловые скорости малы, так что жидкость можно считать невращающейся. В эксперименте изменялась толщина слоя жидкости и радиус сдвига.

В работах [57, 71—78] для моделирования сдвиговых течений в тонком слое невращающейся жидкости применялся магнитогидродинамический метод (рис. 8, *в*). Он основан на том, что слабопроводящая жидкость, помещенная в вертикальное магнитное поле, при пропускании электрического тока в горизонтальном направлении начинает дви-

гаться под действием силы Ампера  $\mathbf{F}_A \propto [\mathbf{j}\mathbf{B}]$  ( $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле). Варьируя форму магнитного поля, можно получать различные профили скорости основного течения. Исследовались течения с синусоидальным профилем скорости в прямоугольной кювете [57, 75, 76] (течение Колмогорова [20, 53]) и в кольцевом канале [71—74], течения с узкой зоной сдвига [77] (типа  $U = \tanh y$ ) и струйные течения [78]. В экспериментах менялись ширина зоны сдвига (за счет изменения структуры магнитного поля) и толщина слоя жидкости. Уместно отметить, что во всех экспериментах значение числа Гартмана было мало, так что толщина слоя Гартмана существенно превышала глубину жидкости, и течение имело не гартмановский, а пуазейлевский вертикальный профиль скорости. Обратная ситуация рассматривалась в [40, 41].

Еще одна группа работ посвящена исследованию вращающейся жидкости с «топографическим» бета-эффектом, возникающим за счет наклона дна сосуда и/или свободной поверхности. В [80] струйное течение генерировалось узким кольцом, медленно вращающимся относительно сосуда. В [47—49, 80—82] применялся метод источников и стоков (рис. 8, г), основанный на том, что принудительная прокачка жидкости в радиальном направлении приводит к появлению азимутального течения в результате отклоняющего действия силы Кориолиса (подробнее об этом см. ниже). Отметим, что в [81, 82], в отличие от других работ, течение было турбулентным.

Наконец, в работах [5, 6] использовался сосуд параболической формы, что позволило изучать движение слоя постоянной толщины при больших скоростях вращения, когда масштабы течения превышают радиус Россби — Обухова. Сдвиг создавался независимым вращением колец, расположенных на дне сосуда, причем относительные скорости превышали скорость гравитационных волн, т. е. течения были «сверхзвуковыми».

В следующем разделе подробно описаны результаты экспериментов [77], которые были специально поставлены с целью исследования влияния внешнего трения.

**3.2. Сдвиговые и струйные течения в кольцевых каналах.** Сдвиговое течение в экспериментах [77] создавалось МГД-методом. Основой установки служит система кольцевых магнитов или электромагнитов, создающая азимутально симметричное магнитное поле, вертикальная компонента которого меняет знак по радиусу. Подробно установка и создаваемое ей магнитное поле описаны в [71—73]. На электромагнит сверху помещается круглая кювета с размещенными в ней кольцевыми электродами. В кювету заливается слой электролита (раствор  $\text{CuSO}_4$ ,  $\rho = 1,07 \text{ г/см}^3$ ,  $\nu = 0,012 \text{ см}^2/\text{с}$ ). Между электродами пропусклся (радиально направленный) электрический ток от стабилизированного источника. Под действием силы Ампера жидкость приходит в движение в азимутальном направлении, причем профиль скорости определяется профилем магнитного поля и расположением электродов.

Укажем, что в зависимости от расстояния до магнита радиальный профиль вертикальной компоненты магнитной индукции меняется от почти прямоугольного (вблизи) до близкого к синусоидальному (на удалении). Меняя конфигурацию электродов и расположение кюветы, можно получать профили азимутальной скорости различной формы. В экспериментах были реализованы: синусоидальный профиль с жесткими и импедансными (свободная жидкость) боковыми границами, течение с узкой зоной сдвига (типа  $U = \tanh y$ ) и струйное течение (рис. 9). Течение визуализировалось алюминиевой пудрой на поверхности жидкости. Все измерения скорости проводились по трековым фотографиям частиц ви-

зуализатора. В каждом эксперименте величина магнитного поля, глубина жидкости и расположение кюветы оставались постоянными, менялась лишь сила тока. Это позволяет считать профиль силы, действующей на жидкость, постоянной, а ее амплитуду однозначно связанной с силой тока. Эта амплитуда характеризуется безразмерным числом Рейнольдса «по напору»

$$R_f = \frac{IB_0 L_B^2}{2\pi \rho s H_0 \nu^2}, \quad (3.1)$$

где  $I$  — сила тока,  $B_0$  — характерная величина магнитной индукции,  $\rho$  — плотность жидкости,  $H_0$  — ее глубина,  $\nu$  — вязкость,  $s$  — скорость света

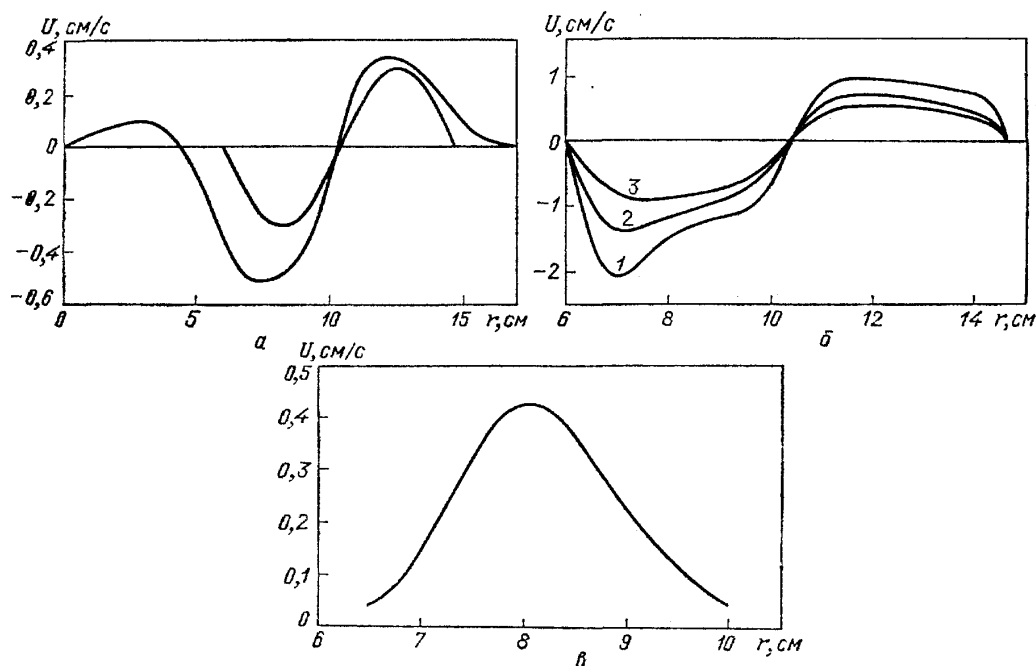


Рис. 9. Экспериментальные профили азимутальной скорости при критическом значении числа Рейнольдса для течений: типа  $U = \sin y$  в кольцевом канале [73] и с «импедансными» боковыми границами [74] (а); типа  $U = \text{th } y$  [77] для  $H_0 = 3$  мм (1), 4 мм (2) и 5 мм (3) (б). в — Струйное течение [78]

(в вакууме), а  $L_B$  — масштаб изменения магнитного поля [72, 73]. Как уже отмечалось, числа Гартмана в этих экспериментах были малы, т. е.  $\delta_G \gg H_0$ , поэтому в этом случае  $\lambda = 2\nu/H_0^2$ .

При малых значениях числа Рейнольдса течение жидкости азимутально-симметричное. Линии тока — концентрические окружности. При превышении критического значения  $R_f^*$  азимутальная симметрия нарушается, и возникает азимутально-периодическое вихревое или волнообразное (струя) течение с индексом симметрии  $n_0$ , зависящим от геометрических параметров (рис. 10). Для сдвиговых течений центры вихрей расположены на нейтральной линии магнитного поля ( $B_z = 0$ ), где находится точка перегиба профиля скорости (см. рис. 9).

В выражения для двух основных безразмерных критических характеристик — волнового числа и числа Рейнольдса по внешнему трению — входит характерная ширина сдвига  $L$ , которая может быть определена по-разному. Поэтому в качестве величин, характеризующих профиль, удобно выбрать однозначно определяемые из эксперимента  $U_0$  — характерное (максимальное) значение скорости — и  $U'(y_c)$  — производную профиля в точке перегиба  $y = y_c$ . Тогда масштаб длины  $L$  выразится формулой  $L = U_0/U'(y_c)$ , а выражения для числа Рейнольдса по

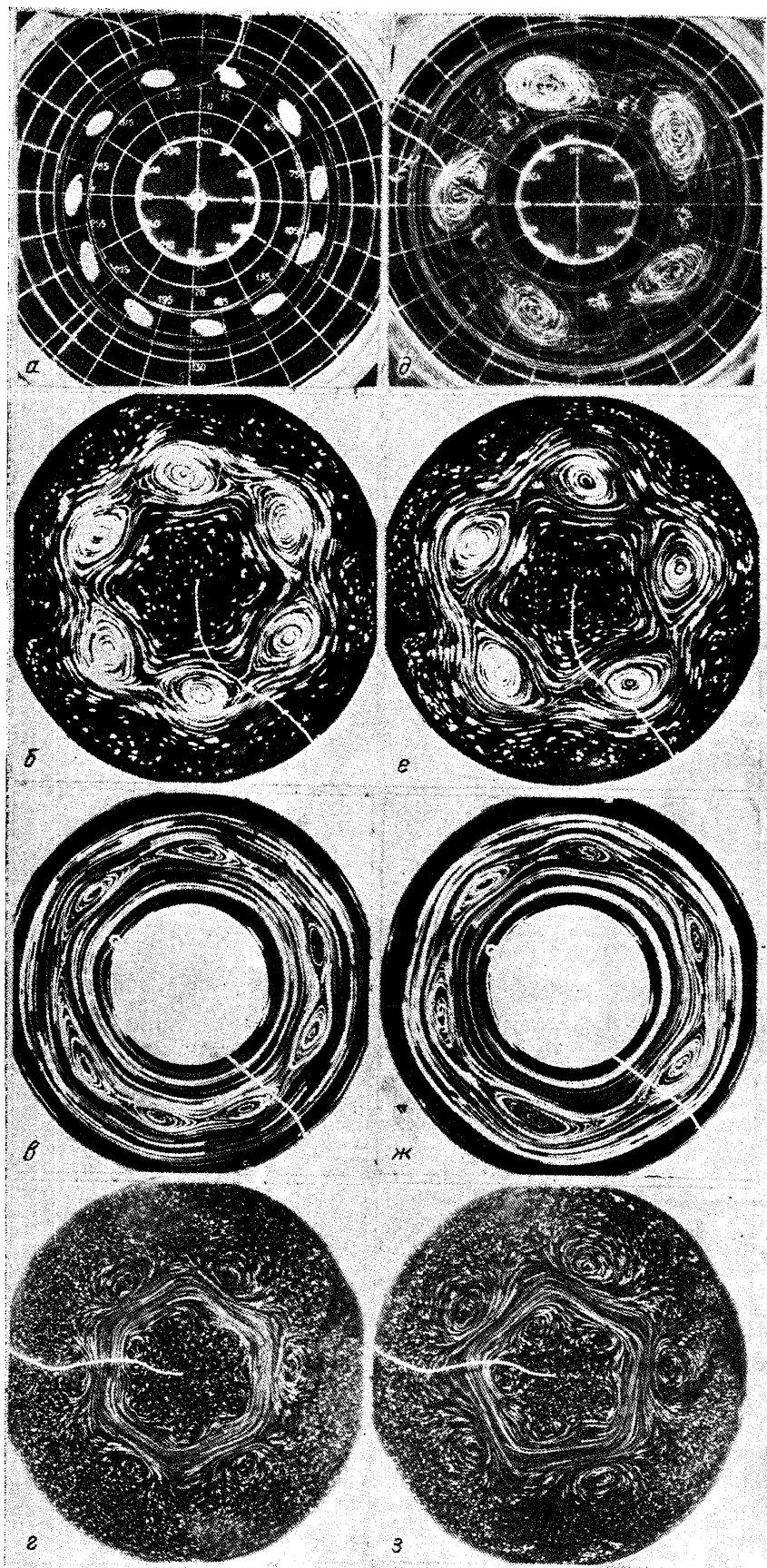


Рис. 10. Характерные фотографии закритических вихревых режимов течений для профилей скорости: типа  $\sin u$  в кольцевом канале (а, д) и с «импедансными» боковыми границами (б, е), типа  $\text{th } u$  (в, ж) и струйного (з, з)

внешнему трению и безразмерного волнового числа примут вид

$$R_\lambda = \frac{U'(y_c)}{\lambda} = \frac{U'(y_c) H_0^2}{2\nu}, \quad \alpha = \frac{nL}{R_0} \quad (3.2)$$

( $R_0$  — радиус точки перегиба профиля скорости или максимума скорости для струи).

Перейдем теперь к описанию результатов. В табл. III приведены критические значения параметров для течения с узкой зоной сдвига [77]. Изменение ширины сдвига  $L$  при одной и той же глубине  $H_0$  достигалось изменением положения кюветы над магнитом. Из таблицы видно, что в широком диапазоне значений  $H_0$  и  $\lambda$  величины  $R_\lambda^*$  и  $\alpha_0$  остаются приблизительно постоянными, тогда как  $R_v^*$  меняется от 32 до 125. Такое же постоянство  $R_\lambda^*$  и  $\alpha_0$  наблюдалось в экспериментах с синусоидальным течением со свободными границами [76]  $R_\lambda^* = 7 \pm 1$  и  $\alpha_0 = 0,5$  (в этих экспериментах менялась ширина слоя сдвига при постоянной глубине;  $R_v^*$  находилось в диапазоне от 10 до 40), и для струйного течения [78]  $R_\lambda^* = 7 \pm 1$ ,  $\alpha_0 = 0,7$ ,  $R_v^*$  менялось в пределах от 10 до 45.

Отметим результат, полученный в [73, 77]. В случае, когда ширина канала много больше  $H_0$ ,  $R_\lambda^*$  остается постоянным и приблизительно равным 7. Уменьшение ширины канала, когда она становится сравнимой с глубиной жидкости, приводит к росту  $R_\lambda^*$  (табл. IV). Это связано с увеличением роли трения о боковые стенки канала.

Кроме исследования критических параметров, в [77, 83] исследовались характеристики закритических режимов. Одной из важнейших таких характеристик является амплитуда возмущения  $A$  и ее зависимость от надкритичности. Поскольку, как следует из эксперимента, переход происходит в мягком режиме возбуждения, следует ожидать, что квадрат этой амплитуды пропорционален надкритичности  $s = (Re/Re^* - 1)$  (в данном случае неважно, как именно определяется число Рейнольдса).

По фотографиям вихревых течений при различных значениях числа Рейнольдса измерялись среднеквадратичное значение радиальной скорости  $\langle v_r^2 \rangle_\phi$  на нейтральной линии (на оси струи), а также ширина и угол наклона вихря. Линии тока вблизи центра вихря — замкнутые кривые, близкие по форме к эллипсам (см. рис. 10). Угол наклона определялся как угол наклона большей оси «эллипса» к нейтральной линии вблизи центра вихря. Следует отметить, что разные «эллипсы» вблизи центра вихря имеют фактически одинаковый угол наклона  $\phi$ . Под шириной вихря  $l$  понималось наибольшее расстояние по радиусу между линиями тока, которые огибают вихрь и проходят через гиперболические точки, разделяющие соседние вихри. Покажем, что эти величины характеризуют амплитуду возмущения.

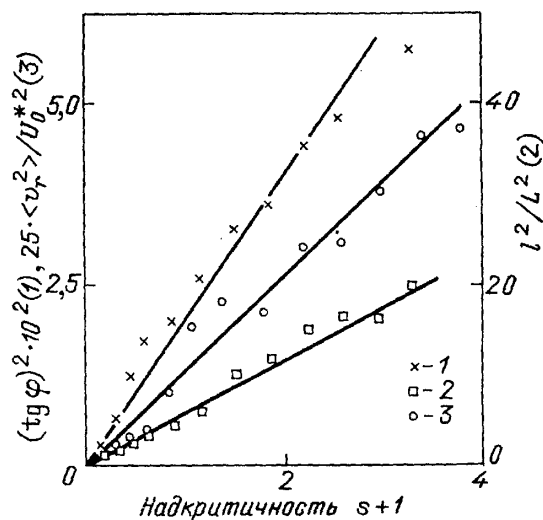


Рис. 11. Зависимости квадрата тангенса угла наклона вихря (1) и квадрата безразмерной ширины вихря (2), а также среднего квадрата поперечной скорости (3) от надкритичности для течения типа  $th y$

Пусть в первом приближении функция тока возмущения описывается формулой

$$\psi = \int U dy + (Ae^{i\alpha x}\psi_1(y) + \text{к. с.}). \quad (3.3)$$

Тогда для достаточно малых амплитуд можно получить следующие оценки тангенса угла наклона  $\text{tg } \varphi$  и  $\langle v_r^2 \rangle$ :

$$\text{tg } \varphi \approx 2\alpha A |\psi_1'(0)|, \quad \langle v_r^2 \rangle \approx \alpha^2 |A|^2 |\psi_1(0)|^2. \quad (3.4)$$

Эксперименты показали, что величины  $\text{tg}^2 \varphi$ ,  $l^2$  и  $\langle v_r^2 \rangle$  растут пропорционально надкритичности. Рис. 11 демонстрирует эту зависимость для те-

Т а б л и ц а III. Характеристики течения с узкой зоной сдвига ( $U = \text{th } y$ )

$H_0$ , мм	$L$ , см	$n_0$	$\alpha_0$	$R_v^*$	$R_\lambda^*$	$H_0$ , мм	$L$ , см	$n_0$	$\alpha_0$	$R_v^*$	$R_\lambda^*$
4	0,6	7	0,40	32	8	4	0,7	6	0,40	50	8
5	0,65	7	0,44	32	8	5	0,8	5	0,38	48	9
3	0,55	7	0,37	42	7	3	0,8	5	0,38	122	8
4	0,65	7	0,44	35	8	4	0,85	4	0,35	62	8
5	0,75	5	0,37	38	8	5	0,9	4	0,33	52	8
3	0,6	7	0,40	65	8						

Т а б л и ц а IV. Характеристики течения в кольцевом канале ( $U = \sin y$ )

$H_0$ , мм	$L$ , см	$n_0$	$\alpha_0$	$R_v^*$	$R_\lambda^*$
10	1,45	3	0,42	34	7
10	1,37	4	0,53	31	7
10	1,08	5	0,51	29	9
10	0,75	7	0,50	22	16
10	0,43	12	0,50	15	26

Т а б л и ц а V. Коэффициенты пропорциональности

	$U = \text{th } y(1)$	$U = \text{th } y(2)$	$U = \sin y$
$\eta = \frac{\langle v_r^2 \rangle}{U_0^{*2}s}$	0,06	0,25	0,15
$\Phi = \frac{\text{tg}^2 \varphi}{s}$	0,02	0,025	0,06
$\Lambda = \frac{l^2}{L^2s}$	5	6	14
$\frac{\Phi}{\eta}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{\Lambda}{\eta}$	$\sim 85$	$\sim 120$	$\sim 95$

чения с узкой зоной сдвига ( $l$  нормировано на  $L$ , а  $\langle v_r^2 \rangle$  — на квадрат характерной скорости течения при критическом числе Рейнольдса,  $U_0^*$ ). Рассчитанные по данным эксперимента коэффициенты пропорциональности для приведенных зависимостей приведены в табл. V.

Обращает на себя внимание слабая зависимость (относительное постоянство в пределах экспериментальных ошибок) отношений  $\Phi/\eta$  и  $\Lambda/\eta$  от формы профиля скорости течения. Это говорит о том, что угол наклона и ширина вихрей действительно могут служить мерой амплитуды возмущения.

На рис. 12 приведены зависимости  $\langle v_r^2 \rangle$  и амплитуды средней азимутальной скорости для струйного течения, также нормированные на  $U_0^*$ . Экспериментальное значение  $\eta$  составило 0,08. Следует обратить



внимание на излом в зависимости средней азимутальной скорости от  $Re$ . Он отражает перераспределение энергии от основного течения к возмущению и наблюдался в течениях с другими типами профиля скорости [73, 74].

Течение со струйным профилем скорости отличается наличием легко измеряемой характеристики — скорости дрейфа вихрей по азимуту

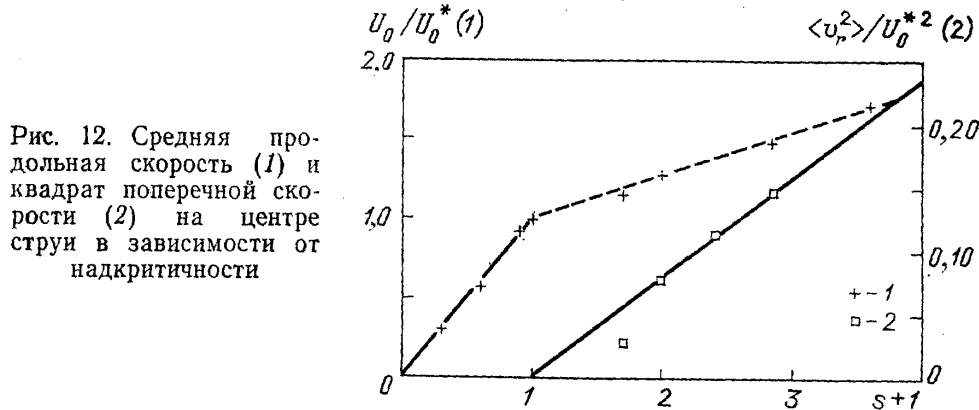


Рис. 12. Средняя продольная скорость (1) и квадрат поперечной скорости (2) на центре струи в зависимости от надкритичности

(рис. 13). Видно, что она также линейно зависит от надкритичности. Записывая скорость дрейфа в виде  $v_d = c_r + \omega_0 s / \alpha$  — суммы «линейной» скорости дрейфа и «нелинейной» добавки (см. п. 4.4), можно определить величины  $c_r = 0,38 \pm 0,5$  и  $\omega_0 / \alpha = 0,18 \pm 0,03$ .

Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к потере устойчивости течения с  $n_0$  вихрями и уменьшению числа вихрей. Подробно пе-

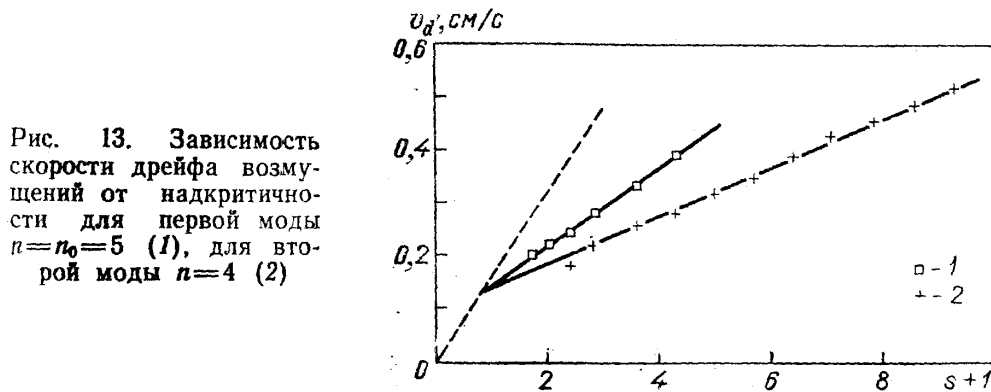


Рис. 13. Зависимость скорости дрейфа возмущений от надкритичности для первой моды  $n=n_0=5$  (1), для второй моды  $n=4$  (2)

реходы между течениями с различными индексами симметрии рассматриваются в п. 4.5. Кроме того, при больших надкритичностях (как правило, при  $s=10-20$ ) наблюдались колебательные режимы течения, связанные с одновременным существованием двух мод с разными  $n$ .

**3.3. Сравнение с линейной теорией.** Как следует из приведенных выше экспериментальных результатов, в частности из факта, что для всех описываемых течений  $R_v^* > R_\lambda^*$ , к данным экспериментам применима линейная теория квазидвумерных сдвиговых течений с внешним трением. Действительно, в экспериментах при различных параметрах течения критические значения  $R_\lambda^*$  и  $\alpha_0$  сохраняют свое значение, тогда как  $R_v^*$  изменяется в широком диапазоне. Измеренные значения  $R_\lambda^* \approx 7$  близки к полученному в линейной теории  $R_\lambda^* \approx 5$  и слабо зависят от формы профиля. Наиболее неустойчивым является возмущение с конечным волновым числом, причем экспериментальные значения  $\alpha_0 \approx$

$\approx 0,4$  ( $U = \tanh y$ ) и  $\alpha_0 \approx 0,5$  ( $U = \sin y$ ) хорошо согласуются с теоретическими.

Хорошее согласие как с результатами данных экспериментов, так и с линейной теорией было обнаружено в [77] при обработке экспериментальных результатов других авторов. Для течения Колмогорова  $R_\lambda^* = 8$ ,  $\alpha_0 = 0,64$ . Относительно экспериментов [68—70] следует прежде всего сказать, что они относятся к вырожденному случаю  $R_\lambda = R_v$ . Действительно, поскольку вынуждающее воздействие в них (сдвиг скорости на торцевых границах) имеет характер тангенциального разрыва и размывается в толще жидкости вязкими силами, характерная ширина профиля скорости равна минимальной  $L = L_{\min} = (\nu/\lambda)^{1/2}$  и значения  $R_\lambda$  и  $R_v$  всегда совпадают. Тем не менее оказывается, что теория работает и здесь, на границе области применимости.

В экспериментах [69] получено значение  $R_\lambda^* \approx 12$  для струйного течения и  $R_\lambda^* \approx 15$  для сдвигового. Волновые числа  $\alpha_0$  оказались меньше теоретических. Расчеты по линейной теории, проведенные в этой работе, показали, что увеличение  $R_\lambda^*$  и уменьшение  $\alpha_0$  связаны с влиянием внутренней вязкости.

В [70] критическое значение числа Рейнольдса составило  $R_\lambda^* \approx 10$ , а  $\alpha_0 \approx 0,4$ . Влияние внутренней вязкости, таким образом, сказывается и здесь, но в меньшей степени.

В [68] имеется дополнительный фактор, стабилизирующий течение, — конечная толщина диска, приводящего жидкость в движение. Действительно, в силу теоремы Праудмена — Тейлора, вертикальный столб жидкости стремится двигаться не меняя своей высоты, т. е., в частности, не пересекая цилиндрическую поверхность, построенную над краем диска. Возможно поэтому, значения  $R_\lambda^* \approx 30—40$  оказываются существенно выше. Однако они мало меняются при изменении внешних параметров, а значение  $\alpha_0$  составляет по-прежнему 0,4—0,5.

Таким образом, приведенные экспериментальные результаты показывают, что переход к неустойчивости определяется числом Рейнольдса по внешнему трению, причем  $R_\lambda^*$  и  $\alpha_0$  слабо зависят от формы профиля скорости основного течения. Отметим также, что в экспериментах по слоям смешения [66] получены близкие значения  $\alpha_0 \approx 0,38$ , а безразмерные инкременты роста возмущений  $\gamma \approx 0,2$  близки к получаемым в теории и экспериментах ( $\gamma = 1/R_\lambda^* \approx 0,1—0,2$ ).

#### 4. Нелинейная теория закритических вихревых режимов.

**4.1. Методы нелинейной теории применительно к вязким течениям.** 1. Мощным и универсальным методом практического решения задач математической физики является метод Галеркина. Он связан с приближенным представлением решения в виде линейной комбинации конечного числа функций из некоторого базиса с неопределенными коэффициентами и приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для этих коэффициентов. Напомним, что знаменитая система Лоренца [84] получена именно как галеркинская аппроксимация уравнений гидродинамики в задаче о валиковой конвекции.

Классическая формулировка метода для линейных задач подразумевает использование в качестве естественного базиса собственных функций стационарной краевой задачи, что сразу приводит к оптимальным значениям коэффициентов разложения и автоматически обеспечивает выполнение краевых условий. Выбор естественного базиса в нели-

нейных задачах требует специального рассмотрения. Основное эвристическое требование к выбору базиса состоит в том, чтобы в результате применения метода Галеркина получить динамическую систему минимального порядка при заданной точности описания. Следует отметить, что даже весьма упрощенные галеркинские динамические системы могут правильно отражать качественное поведение моделируемой системы (см. [59]). Например, устойчивость и закритические режимы сдвигового течения с синусоидальным профилем описываются в рамках динамической системы третьего порядка, о чем подробнее пойдет речь ниже.

Один из распространенных способов выбора базиса состоит в использовании набора собственных функций линейной задачи устойчивости (так, для задачи об устойчивости сдвигового слоя это будут собственные функции уравнения Рэлея). Заметим, что если взять в качестве основного состояния состояние покоя (как в случае конвекции), то естественным базисом для гидродинамических задач будет набор собственных функций оператора Лапласа. Этот базис часто используется, однако для задачи об устойчивости сдвиговых течений он все же приводит к необходимости учитывать большое число членов разложения и интегрировать получающуюся динамическую систему численно [58, 72]. Дело в том, что ни основное течение, ни профиль наиболее опасного возмущения, как правило, не принадлежат к числу базисных функций, по которым их приходится раскладывать. Имеется, однако специальный случай, когда обе эти функции весьма близки к базисным — это так называемое течение Колмогорова [53]  $U = \sin y$ . Применение к нему метода Галеркина в [59, 85, 86] позволило, как было упомянуто, свести задачу к динамической системе третьего порядка (триплет) и проследить влияние внешнего трения (см. ниже).

2. В применении к сдвиговым течениям нередко обращаются к методу Стюарта — Ватсона [87, 88], идея которого восходит к работам Пуанкаре и Ландау. Он не позволяет, как метод Галеркина, исследовать сильнозакритические режимы с автоколебаниями и неединственностью мод, зато не критичен к профилю скорости основного течения. Идея метода заключается в том, чтобы, рассматривая линейную задачу устойчивости как первый член разложения по степеням малой амплитуды возмущения  $A$ , продолжить это разложение и получить уравнение Ландау [10] для амплитуды

$$\dot{A} = \gamma A + K_L |A|^2 A, \quad A \sim \varepsilon \ll 1. \quad (4.1)$$

Линейная часть этого уравнения описывает рост возмущения за счет непосредственного взаимодействия с основным течением, а нелинейный член — самовоздействие возмущения, которое может ограничить или усилить рост его амплитуды в зависимости от знака константы Ландау  $K_L$ . Физически самовоздействие реализуется за счет того, что из-за нелинейности гидродинамических уравнений гармоническое возмущение порождает свою вторую гармонику и искажает средний профиль продольной скорости течения, а затем взаимодействует уже с этими вторичными возмущениями.

Технически задача сводится к получению и решению уравнений для возмущений до второго порядка малости включительно (при больших числах Рейнольдса  $R_v \gg 1$  они имеют вид уравнений Рэлея, но с правой частью). После этого эволюционное уравнение для амплитуды получается, как условие разрешимости уравнения третьего порядка. Его коэффициенты, включая константу Ландау, выражаются в виде определенных интегралов от возмущений первого и второго порядков.

В нашу задачу не входит обзор большого количества работ, посвященных методу Стюарта — Ватсона, его обоснованиям и приложениям

к строго двумерным течениям. Здесь будут приведены лишь наиболее общие соображения, существенные для дальнейшего.

Заметим, что если члены в уравнении Ландау (4.1) одного порядка малости ( $\sim \varepsilon^3$ ), то производная по времени и линейный инкремент  $\gamma$  должны быть порядка  $\varepsilon^2$ . Это означает, что такая слабонелинейная теория может описывать только медленно растущие моды с волновыми числами, близкими к нейтральным (при  $R_\lambda = 0$  ими являются  $\alpha = 0$ ;  $\alpha_s$  — левая и правая границы области неустойчивых волновых чисел; см. рис. 4). Но эволюция реальных течений происходит в первую очередь за счет наиболее неустойчивых мод (которые, вообще говоря, не являются «медленно растущими»), поэтому сопоставимых с экспериментом результатов таким образом получить не удастся (это отмечается в соответствующих работах; см., например, [8, 9]).

Сделать инкремент наиболее неустойчивого возмущения малым можно несколькими способами. Большая вязкость ( $R_\nu \sim 1$ ) подавляет коротковолновые возмущения (рис. 5, а), но усложняет задачу, повышая порядок уравнений, так как уже линейная задача устойчивости сводится к уравнению Орра — Зоммерфельда. Стратификация и бета-эффект, наоборот, оставляют неустойчивыми возмущения с волновыми числами, близкими к второму нейтральному  $\alpha \approx \alpha_s$ . Соответствующие амплитудные уравнения построены в [89, 90]. Еще один способ ограничить диапазон неустойчивых волновых чисел и уменьшить инкременты состоит в том, чтобы заключить течение в узкий канал, что тоже подавляет рост длинноволновых возмущений (не влияя на коротковолновые) [58, 91]. Наконец, в [92] рассмотрено течение в кольцевом канале, в условиях, когда только одно волновое число из дискретного ряда допустимых значений попадает в неустойчивый диапазон, и притом вблизи критического  $\alpha_s$ .

Внешнее трение также позволяет сделать малым инкремент наиболее неустойчивой моды, если число Рейнольдса  $R_\lambda$  близко к критическому. Однако в этом случае форма дисперсионной кривой не меняется, и наиболее неустойчивой остается мода с  $\alpha = \alpha_0$  (см. рис. 5, б). Это обстоятельство оказывается весьма важным для теории.

С близостью волнового числа исследуемого возмущения к критическому значению связана (при  $\lambda = 0$ ) основная техническая проблема метода Стюарта — Ватсона, проблема регуляризации критического слоя. С математической точки зрения критический слой — это особая точка  $y_c$  уравнения Рэлея (2.3), в которой знаменатель обращается в нуль. Если волновое число близко к критическому,  $c_i = 0$  (напомним, что  $c = c_r + ic_i$  — комплексная фазовая скорость возмущения), то критическая точка близка к действительной оси, и хотя для традиционно рассматриваемых антисимметричных профилей скорости  $U(y) = -U(-y)$  числитель  $U''(y_c)$  тоже обращается в нуль, особенность все равно проявляется в следующих порядках разложения. Чтобы сшить решение уравнения Рэлея справа и слева от особенности, в критическом слое строят специальные разложения различного вида, в зависимости от того, какой из членов уравнения преобладает — вязкий, нелинейный или нестационарный.

Напомним, что при наличии внешнего трения и  $R_\nu \gg 1$  правой частью (2.8) можно пренебречь, и в этом случае уравнение линейной устойчивости сводится к уравнению Рэлея

$$\left[ U - \left( c_{r\lambda} + ic_{i\lambda} + \frac{i}{\alpha R_\lambda} \right) \right] (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U' \varphi = 0, \quad (4.2)$$

Существенное отличие, вносимое внешним трением, заключается в том, что слагаемое  $i/\alpha R_\lambda$ , входящее в уравнение (2.8) или (4.2), смещает особую точку в комплексную плоскость, причем этот член не мал, если

$R_\lambda$  близко к критическому значению  $R_\lambda^*$ . В результате не возникает проблемы критического слоя. Вместе с тем, приходится решать уравнения Рэлея с правой частью и комплексными коэффициентами. Аналитически это можно сделать, вероятно, только для кусочно-линейного профиля скорости  $U(y)$ , а для других типов профилей должны применяться численные методы. Такие расчеты для течений с  $U = \tanh y$  и  $U = \sinh^{-2} y$  (с учетом бета-эффекта) были проведены в [60]. Сравнение с экспериментом в работе [69] показало хорошее согласие. Сравнивались, однако, только линейные характеристики устойчивости — критическое число Рейнольдса и волновое число наиболее неустойчивой моды. В [61] константа Ландау была вычислена для кусочно-линейного профиля и набора гладких профилей с целью сравнения с экспериментом [77], в котором впервые для квазидвумерных течений измерялся рост амплитуды возмущения в зависимости от числа Рейнольдса. Это позволило обнаружить новые эффекты, описанные в п. 4.3, 4.4.

**4.2. Описание закритических режимов течения Колмогорова.** Задача исследования устойчивости двумерного течения под действием пространственно-периодической силы (профиль скорости  $U = \sin y$ ,  $-\infty < y < \infty$ ) была поставлена А. Н. Колмогоровым на руководимом им семинаре [53]. Благодаря пространственной периодичности удалось развить теорию течения Колмогорова значительно дальше, чем это сделано для сдвиговых течений общего вида. Безразмерное уравнение для функции тока в случае отсутствия внешнего трения имеет вид

$$\Delta \dot{\Psi} + [\Delta \Psi; \Psi] = \frac{1}{R_v} (\Delta^2 \Psi + \cos y). \quad (4.3)$$

Представляя решение в виде суммы основного течения и малого возмущения, гармонического по продольной координате  $x$  с периодом  $2\pi/\alpha$ , получим уравнение Орра — Зоммерфельда для поперечной структуры возмущения. Далее, представляя возмущение в виде ряда Фурье по  $y$ , можно свести линейную задачу устойчивости к бесконечной системе алгебраических уравнений для коэффициентов этого ряда, которая поддается исследованию методами теории цепных дробей. В работах [53, 93] построена линейная теория течения Колмогорова, из которой, в частности, следует, что наиболее неустойчивыми являются возмущения с малыми волновыми числами  $\alpha \rightarrow 0$ , а при  $\alpha > 1$  неустойчивости нет. Критическое число Рейнольдса составляет, согласно [53, 93],  $R_v^* = 2^{1/2}$ , а компоненты ряда Фурье для возмущения быстро убывают при  $\alpha \rightarrow 0$ . Последнее обстоятельство позволяет ограничиться в первом приближении представлением решения в виде

$$\Psi = \Psi_0(t) \cos y + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \exp [i(ny + \alpha x)]. \quad (4.4)$$

Обозначив

$$\Psi_0(t) = U(t), \quad z_0 = i\alpha \psi_0, \quad z_+ = i\alpha(\psi_1 - \psi_{-1}), \quad z_- = \frac{i\alpha}{2}(\psi_1 + \psi_{-1}), \quad (4.5)$$

получим следующую динамическую систему [59, 85]:

$$\begin{aligned} \dot{U} + \frac{4}{\alpha} z_0 z_1 &= R_v^{-1} (1 - U), \\ \dot{z}_0 - \alpha U z_- &= \frac{\alpha^2 z_0}{R_v}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\dot{z}_- - \alpha \left( \frac{1}{2} - \alpha^2 \right) z_0 U = - \frac{(1 + \alpha^2) z_-}{R_v},$$

$$\dot{z}_+ = - \frac{z_+}{R_v}.$$

После исключения затухающей компоненты  $z_+$  остается простейшая система гидродинамического типа (СГТ) — триплет [59], имеющий при

$$R_v < R_v^* = \sqrt{2} \left( 1 + \frac{2}{3} \alpha^2 \right)$$

устойчивое стационарное решение  $U=1$ ,  $z_0=z_-=0$ , соответствующее

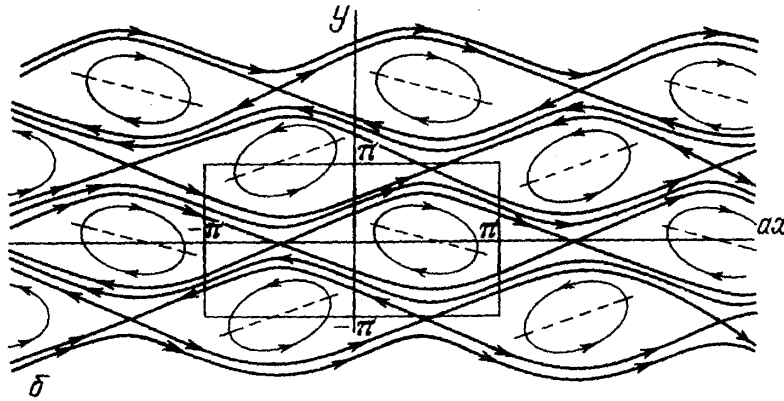
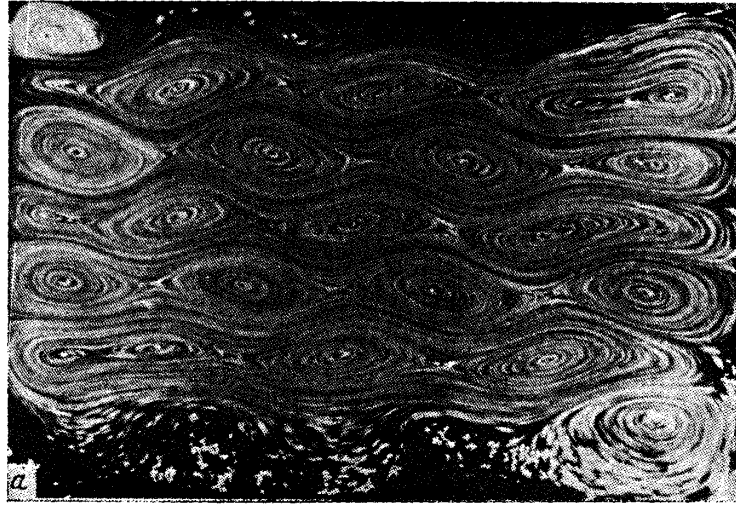


Рис. 14. Фотография закритического режима (а) [57] и рассчитанные методом Галеркина линии тока (б) [95] для течения Колмогорова

основному течению. При  $R_v > R_v^*$  оно теряет устойчивость и устанавливается вторичное течение с функцией тока:

$$\Psi = - \frac{R_v^*}{R_v} \cos y - \frac{[R_v^* (R_v - R_v^*)]^{1/2}}{\alpha R_v} \left( \sin \alpha x + \frac{2\alpha}{R_v^*} \sin y \cos \alpha x \right). \quad (4.7)$$

Используя метод теории ветвления, развитый в [94] для задачи об устойчивости пространственно периодических течений, можно показать, что (4.7) является первым членом асимптотического разложения точного решения в ряд по малому параметру  $(R_v - R_v^*)^{1/2}$  в окрестности  $R_v^*$ .

Свойства стационарного решения (4.7) исследованы в [95], где показано, что оно хорошо описывает качественную структуру течения, наблюдавшегося в эксперименте [57], если взять близкое к экспериментальному значение безразмерного волнового числа  $\alpha \approx 0,5$  (заметим, что линейная теория не дает достаточных оснований для такого выбора, так как наибольшая надкритичность приходится в отсутствие внешнего трения на малые волновые числа  $\alpha \rightarrow 0$ ). Однако имеется ряд несоответствий такой теории с экспериментом. Так, согласно теории, как уже говорилось, наиболее неустойчивыми должны быть весьма длинноволновые возмущения. Критическое число Рейнольдса, согласно экспериментальным данным, составляет  $R_v^* \approx 2000$ , а не  $2^{1/2} \approx 1,4$ . Наконец, в [85, 96] показано, что вторичные стационарные и автоколебательные режимы течения Колмогорова с малыми  $\alpha$  неустойчивы по отношению к более мелкомасштабным возмущениям. Интересны в этом отношении результаты прямого численного моделирования, выполненного в [97]. Они показывают, что в течении действительно сначала возбуждаются длинноволновые моды, которые затем сменяются более коротковолновыми.

Снять эти противоречия позволяет учет внешнего трения. Применение в [57, 59] методов линейной теории, разработанных в [53, 93], к уравнению (4.3) с дополнительным членом  $-\Delta \Psi / R_\lambda$  в правой части (где  $\lambda$  для тонкого слоя есть  $2\nu/H_0^2$ ) показало, что кривая нейтральной устойчивости имеет вид как на рис. 6 с минимумом, соответствующим наиболее неустойчивому волновому числу  $\alpha_0 \approx 0,64$ . Критическое число Рейнольдса, согласно исправленной теории, стало равным  $R_v^* \approx 1400$ , что также приближается к экспериментальному значению. В этом случае уравнения (4.6), дополненные линейными членами, которые учитывают внешнее трение (см. [59]), правильно описывают закритические режимы течения.

Следует, однако, отметить, что теперь галеркинское приближение и функция тока вторичного течения уже не могут считаться первыми членами точного асимптотического разложения, поскольку не выполнено условие  $\alpha \ll 1$ . Поэтому хорошее согласие наблюдаемого течения с вычисленными по (4.7) линиями тока (рис. 14 — по [95, 59]) есть результат счастливого случая, благодаря которому следующие члены разложения оказываются малы.

**4.3. Модельный пример с кусочно-линейным профилем скорости.** Выше уже упоминалось, что для исследования устойчивости сдвиговых течений общего вида более эффективен метод Стюарта—Ватсона. В связи с этим уместно рассмотреть известный пример, который позволяет проиллюстрировать этот метод аналитически и приводит к парадоксальному на первый взгляд результату.

Кусочно-линейные, или ломаные, профили скорости  $U(y)$  выделяются тем, что решение уравнение Рэлея для них сводится к решению элементарного уравнения  $\psi'' - \alpha^2 \psi = 0$  на участках линейности, где  $U'' = 0$  (что дает  $\psi = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}$ ), и определению произвольных постоянных  $C_{1,2}$  из условий сшивки в точках излома  $U(y)$ . На этом, в частности, основан метод решения уравнения Рэлея для гладких профилей с помощью приближения их последовательностью ломаных [98, 99]. Еще Рэлеем было получено решение линейной задачи устойчивости для антисимметричного профиля

$$\begin{aligned} U &= -1, & y < -1, \\ &= y, & |y| < 1, \\ &= 1, & y > 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

(см. рис. 4 и формулу (2.5)). В [100] исследовано влияние малой вязкости ( $R_v \gg 1$ ) на линейную устойчивость течения с профилем скорости (4.8). Из приведенных в [100] результатов следует, в частности, что (малая) вязкость не уменьшает, а увеличивает инкременты роста возмущений.

Поскольку метод Стюарта—Ватсона требует решения уравнений Рэлея, весьма привлекательным представляется аналитически исследовать этим методом течение с профилем (4.8) при наличии внешнего трения. Такое исследование было выполнено в [61], но прежде чем переходить к описанию его результатов, следует коротко остановиться на возникающих здесь математических трудностях.

Решение уравнения Рэлея (2.3) с профилем скорости (4.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= Ae^{\alpha y}, & y < -1, \\ &= Be^{\alpha y} + B^*e^{-\alpha y}, & |y| < 1, \\ &= A^*e^{-\alpha y}, & y > 1, \\ A &= i - (1 + c_i^2)^{1/2} - c_i, & B = ic_i A \end{aligned} \quad (4.9)$$

(звездочка обозначает комплексное сопряжение), где волновое число  $\alpha$  и фазовая скорость возмущения  $c = ic_i$  связаны дисперсионным соотношением (2.5) (в котором  $\gamma = \alpha c_i$ ). Функция (4.9) непрерывна, но уже ее производная терпит разрывы в точках  $y = \pm 1$ . В этих точках вторая производная  $U''(y)$  имеет вид дельта-функции:  $U''(y) = \delta(y+1) - \delta(y-1)$ , и эта сингулярность должна компенсироваться сингулярностью второй производной  $\varphi''(y)$ . Тем самым функция  $\varphi''$ , которая в явном виде входит в дальнейшие вычисления, должна записываться как сумма регулярной и сингулярной частей. Более того, выражаясь нестрого, можно сказать, что в выражения для  $\varphi''$  входит *та же самая* дельта-функция, которая описывает  $U''$ . Точнее это означает следующее.

Пусть  $\theta_n(y)$  — последовательность функций, сходящаяся к ступенчатой функции Хевисайда  $\theta(y) = y/|y|$ , а  $\delta_n = \theta'_n$ . Тогда все интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n \theta_n^k dy \quad (4.10)$$

определены и равны  $1/k$ . Поэтому можно считать, что определен и соответствующий интеграл  $\int \delta \theta^k dy$  для  $\theta$  и дельта-функции  $\delta$ , к которой сходится последовательность  $\delta_n$ . Это будет не так, если  $\delta$  и  $\theta$  определить несвязанными друг с другом последовательностями функций. Тогда выражения типа  $\int \delta \theta^k dy$  становятся «запрещенными», как в обычной теории обобщенных функций.

То обстоятельство, что  $U(y)$  и  $\varphi(y)$  связаны уравнением Рэлея и поэтому имеют «одинаковые» особенности, оказывается очень важным при построении слабонелинейной теории для кусочно-линейного профиля скорости (4.8). Дело в том, что функции возмущения старших порядков имеют особенности уже не только в виде изломов, но и разрывов и дельта-функций. В результате коэффициенты уравнения Ландау выражаются через интегралы от степеней дельта-функции. Однако интегрированием по частям с учетом уравнения Рэлея удастся привести их к виду  $\int \delta \theta^k dy$ , и все конечные выражения оказываются однозначно определенными.

Таким способом в [61] получено следующее выражение для критического числа Рейнольдса  $R_\lambda^*$  при наличии внешнего трения и малой



внутренней вязкости ( $R_v^{-1}$  порядка амплитуды возмущения)

$$R_\lambda^* = \alpha c_i [1 - 2\alpha R_v^{-1} (1 - c_i^3) c_i^{-1}], \quad (4.11)$$

а также уравнение Ландау без учета внутренней вязкости (напомним, что  $c_i$  задается соотношением (2.5), в котором  $\gamma = \alpha c_i$ ).

$$\dot{A} = \alpha c_i s A + 3c_i (1 + c_i^2)^{1/2} \frac{1 + [c_i/(1 + c_i^2)^{1/2}]}{(4 + c_i^2)(1 + c_i^2)^3} A |A|^2 \quad (c_i > 0), \quad (4.12)$$

$$s = \frac{R_\lambda - R_\lambda^*}{R_\lambda^*}.$$

Выражение (4.11) показывает, что малая внутренняя вязкость дестабилизирует течение ( $c_i < 1$ ). Подобное влияние диссипации известно и в других физических ситуациях, например в случае течения Пуазейля, профиль которого не имеет точек перегиба, и вязкость является единственным генератором неустойчивости. Здесь для нас важнее то, что константа Ландау в (4.12) оказывается положительной, так что нелинейность в этом приближении не стабилизирует рост неустойчивости. Это означает, что возбуждение неустойчивости должно быть жестким («докритическая неустойчивость»), и необходимо учитывать член пятого порядка. Однако в экспериментах [77, 78], описанных в п. 3.2, наблюдался мягкий режим возбуждения, что явно противоречит такому выводу. Расчеты, проведенные в [60] для профилей  $U = \text{th } y$  и  $\text{ch}^{-2} y$ , дали «правильный» знак константы Ландау. Это приводит к необходимости изучить зависимость константы Ландау от формы профиля скорости основного течения, поскольку, как мы видели, эффективность линейной теории для кусочно-линейного профиля не гарантирует сопоставимости результатов нелинейной теории с экспериментом.

**4.4. Характеристики закритических режимов струйных и сдвиговых течений.** Характеристики устойчивости для большого массива гладких профилей скорости сдвигового типа были вычислены в [61]. Сводка результатов приведена в табл. VI.

Таблица VI

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha_0$	0,46	0,45	0,43	0,40	0,45	0,65	0,38	0,57
$R_\lambda^*$	5,3	5,5	5,5	5,0	5,6	6,25	6,7	6,25
$\eta$	0,011	0,5	<0	<0	0,06	0,003	0,025	0,02

В этой таблице указаны значения  $R_\lambda^*$ ,  $\alpha_0$  и величины  $\eta$ , обратно пропорциональной константе Ландау (с обратным знаком) и измерявшейся в экспериментах [77] (см. п. 3.2). Цифрами обозначены соответствующие профили скорости:

1—4. Профили с линейным участком между отнормированными «хвостами» гиперболического тангенса: два предельных случая 1 —  $U = \text{th } y$  и 4 — кусочно-линейный и промежуточные 2 и 3.

5.  $U = \frac{3}{4} \left( \text{th } y + \frac{1}{3} \text{th}^{4/3} y \right)$  — профиль, для которого  $U'''(0) = 0$ , т. е. в определенном смысле близкий к кусочно-линейному.

6.  $U = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\pi}{2} y$ .

7. Профиль течения вязкой жидкости под действием кусочно-линейной силы.

8.  $U = \sin y$  с твердыми границами при  $y = \pm\pi$ .

Из этой таблицы видно, что линейные характеристики устойчивости, как и ожидалось, относительно слабо зависят от формы профиля. В то же время константа Ландау меняется сильно, вплоть до смены знака «в окрестности» кусочно-линейного профиля. Особенно показательно сравнение профилей 1 и 5, которые внешне очень близки (отличие не более 7%). Так же близки для них значения  $\alpha_0$  и  $R_\lambda^*$ , а вот константа Ландау отличается более чем в 5 раз. В чем причина такой «чувствительности», т. е. негрубости нелинейной теории по отношению к изменению профиля?

Формальная причина [61] состоит в том, что на результаты существенно влияет третья производная  $\phi'''$ , которая непосредственно связана с  $U'''$  (через уравнение Рэлея). Но для близких функций  $U(y)$   $U'''$  может весьма сильно отличаться, что и происходит в данном случае. Этому можно дать следующую физическую интерпретацию [101].

Вспомним, что в силу теоремы Гельмгольца жидкая частица в невязком двумерном потоке стремится сохранять свою завихренность. Для плоскопараллельного сдвигового течения это означает, что частица «привязана» к определенному значению завихренности  $\xi = U'$ . Это ограничение на поперечные смещения нарушается только на линии тока, на которой градиент завихренности обращается в нуль  $\xi' = U'' = 0$  (наличие такой линии тока служит поэтому необходимым условием неустойчивости течения — критерий Рэлея). Но амплитуда закритического режима, определяемая из нелинейной теории, зависит от того, насколько может сместиться частица от своей линии тока. А это определяется уже второй производной завихренности  $\xi'' = U'''$  в точке, где первая равна, нулю.

Эффект сильной зависимости константы Ландау от формы профиля скорости основного течения влечет несколько важных следствий. Во-первых, оказывается невозможным прямое сравнение теории с экспериментом, поскольку практически невозможно надежно определить фактический профиль скорости течения с точностью до третьей производной. Во-вторых, в ситуациях, в которых профиль скорости в силу тех или иных причин может слабо меняться, это может привести к существенному изменению интенсивности рождаемых неустойчивостью вихрей. Важно, что такая ситуация может реализовываться именно в существенно квазидвумерных течениях, когда унифицирующее влияние внутренней вязкости на профиль скорости минимально, и он полностью повторяет профиль действующей силы. Попутно отметим, что сильная зависимость интенсивности вихрей от формы профиля может служить одной из причин плохой предсказуемости погоды (см. п. 5.4). Наконец, приведенные в п. 3.2 экспериментальные данные [77] подтверждают полученный результат, поскольку для двух разных профилей скорости с линейными характеристиками устойчивости, отличающимися не более чем на 20%, значения  $\eta$  отличаются втрое и соответственно равны 0,05 и 0,15.

Экспериментальные значения  $\eta$  согласуются и по порядку величины с теоретическими. В частности, все они малы,  $\eta \ll 1$ , что объясняет неожиданно хорошую применимость *слабонелинейной* теории при весьма значительной надкритичности  $s = (Re - Re^*)/Re$  (до нескольких единиц). В самом деле, характерная величина безразмерной амплитуды возмущения есть  $A \sim (\eta s)^{1/2}$ , поэтому она остается малой, а это и служит условием применимости теории.

Аналогичные результаты получаются и для струйных течений [78]. Остановимся здесь только на нелинейных характеристиках. Кроме ам-

плитуды возмущения (теоретические значения  $\eta$  для трех исследованных профилей скорости лежат в диапазоне 0,025–0,05, экспериментальное 0,08), для струи имеется еще один параметр, легко измеряемый в эксперименте и допускающий сравнение с теорией. Это скорость дрейфа вихрей. Ее значение при  $R_\lambda = R_\lambda^*$  дает вещественную часть фазовой скорости возмущения по линейной теории, а производная по числу Рейнольдса определяется из нелинейной теории. Эта производная (в [78] она обозначена  $\omega_0/\alpha$ ) оказалась слабо зависящей от формы профиля  $\gamma$  равной 0,2, что хорошо согласуется с экспериментальным значением  $0,19 \pm 0,03$ .

Итак, можно констатировать, что построенная с учетом внешнего трения нелинейная теория устойчивости позволяет описать основные черты реальных сдвиговых течений.

#### 4.5. Смена вихревых мод и характерный размер вихря в развитых квазидвумерных течениях.

1. До сих пор речь шла о развитии лишь наиболее неустойчивой моды при сравнительно малых значениях надкритичности. Между тем, к числу общих черт для всех экспериментальных квазидвумерных течений относится и качественная картина поведения сильнозакритических течений, когда число вихрей начинает меняться. Происходит это, как правило, следующим образом. При квазистатическом увеличении числа Рейнольдса  $Re$  (здесь неважно, как именно оно определено) сначала лаблюдается устойчивая главная мода с числом вихрей  $n_0$ . При некотором  $Re = Re_{n_0}^{(2)}$  она теряет устойчивость, и возникает течение с числом вихрей  $n_1$ , которое в подавляющем большинстве случаев на единицу меньше:  $n_1 = n_0 - 1$ . При достижении числом Рейнольдса следующего критического значения  $Re_{n_1}^{(2)}$  она в свою очередь сменяется модой  $n_2 = n_0 - 2$ , и так далее, до возникновения автоколебаний. При обратном «движении» по числу Рейнольдса наблюдается гистерезис, то есть мода  $n_k$  сменяется предыдущей  $n_{k-1}$  при  $Re = Re_{n_k}^{(1)} < Re_{n_k}^{(2)}$ . Из диаграммы, показанной на рис. 15, видно, что гистерезис действительно имеет место, что влечет за собой неединственность, т. е. возможность существования режимов с разным числом вихрей при одном и том же числе Рейнольдса — в зависимости от предыстории течения и случайных факторов (см. ниже).

Следует отметить, что возможны и другие варианты. Так, в [76] автоколебания начинаются сразу после потери устойчивости основного течения, а в [74] области устойчивых стационарных режимов перемежаются переходными областями с автоколебаниями (число вихрей меняется во времени) <sup>(2)</sup>.

Экспериментально процессы смены мод изучены в [103], где показано, в частности, что возбуждение одного из возможных режимов при «ударном» включении силы носит вероятностный характер (см. рис. 15). Наибольший интерес представляют результаты, полученные при изучении распада моды, когда число Рейнольдса квазистатически выходит из области существования этой моды. В условиях эксперимента при  $Re = Re_7^{(2)}$  наблюдались моды  $n_1 = 6$  и  $n_2 = 5$ , а при  $Re = Re_5^{(1)}$  — моды  $n_0 = 7$  и  $n_1 = 6$  (см. рис. 15). Оказалось, что вероятности возбуждения  $n_1$  и  $n_2$  при распаде главной моды  $n_0$  ( $Re$ , увеличиваясь, переходит через  $Re_7^{(2)}$  (совпадают с вероятностями их возбуждения при ударном включении силы с  $Re = Re_7^{(2)}$ ). То же самое происходит при распаде моды  $n_2 = 5$  на левой границе области ее существования.

Эти результаты можно интерпретировать [103] как свидетельство того, что самостоятельными физическими объектами являются не от-

дельные вихри, а вихревые моды, которые рождаются и затухают как целое. При этом переходы между режимами с различным числом вихрей происходят не за счет слияния или дробления вихрей, а в результате развития новых неустойчивых мод из случайного шумового фона, а затем их нелинейной конкуренции и «выживания сильнейшей»<sup>(3)</sup>.

2. Естественно попытаться описать переходы между модами (по крайней мере первый — при  $Re_{n_1}^{(1)}$ ) как результат развития неустойчивости вторичного стационарного течения. Это можно сделать двумя способами. Во-первых, можно учесть медленное пространственное изме-

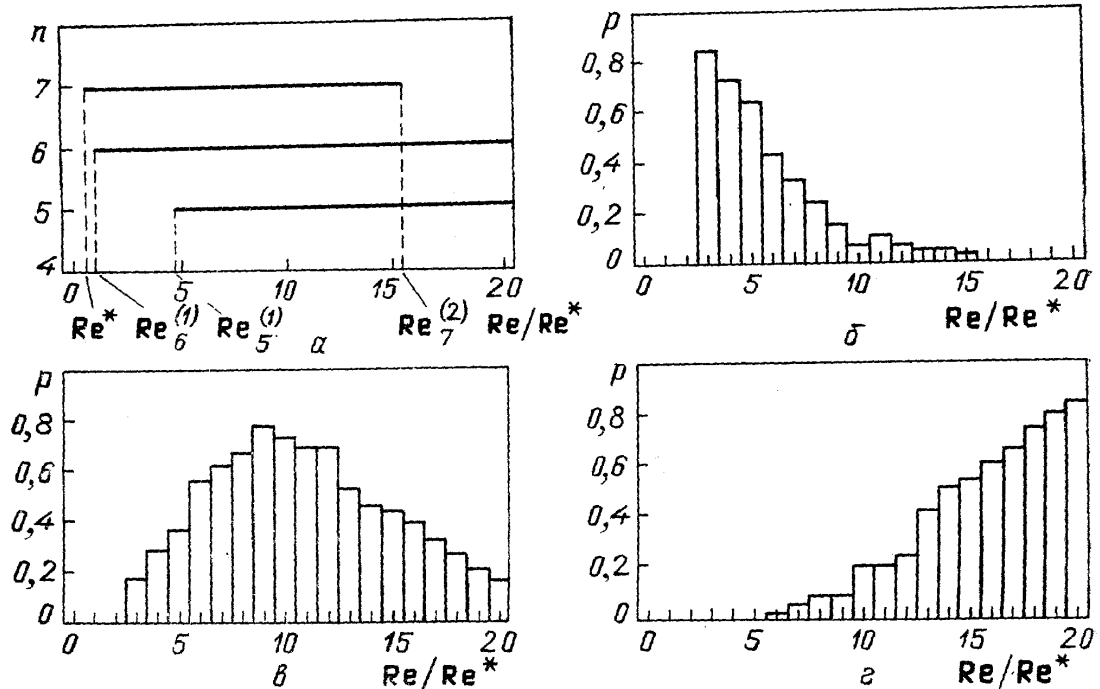


Рис. 15. Области существования вихревых режимов с различным индексом симметрии (а) и вероятности установления этих режимов при «ударном» включении силы ( $\delta - n = n_0 = 7$ ,  $\beta - n = 6$ ,  $\epsilon - n = 5$ ) [103]

нение амплитуды гармонического (по  $x$ ) возмущения [104]. В этом случае задача сводится к уравнению Ландау — Гинзбурга

$$\dot{A} = \gamma A + DA_{xx} + K_L |A|^2 A \quad (A = A(x, t)), \quad (4.13)$$

и можно изучить устойчивость стационарного решения  $A^2 = -\gamma/K_L$  относительно периодических возмущений (модуляционная неустойчивость).

Второй способ связан с другим обобщением теоретической схемы метода Стюарта—Ватсона, когда учитываются одновременно два возмущения с близкими волновыми числами и независимыми амплитудами  $A_1$  и  $A_2$ . Он приводит к системе двух связанных уравнений Ландау

$$\dot{A}_1 = \gamma_1 A_1 + K_{11} |A_1|^2 A_1 + K_{21} |A_2|^2 A_1, \quad (4.14)$$

$$\dot{A}_2 = \gamma_2 A_2 + K_{22} |A_2|^2 A_2 + K_{12} |A_1|^2 A_2.$$

По существу, оба метода эквивалентны, поскольку одно и то же возмущенное течение можно представить как результат слабой моду-

ляции или добавки другой моды:

$$e^{i\alpha x} + \varepsilon e^{i(\alpha+\Delta\alpha)x} = e^{i\alpha x} (1 + \varepsilon e^{i\Delta\alpha x}). \quad (4.15)$$

Не вдаваясь в детали, отметим лишь, что такой подход не позволяет описать важнейшую черту исследуемого явления, а именно, оказывается, что главная мода  $\alpha = \alpha_0$  действительно становится неустойчивой при некотором  $Re^{(2)}$ , однако величина  $(Re^{(2)} - Re^*)$  (где  $Re^*$  — критическое число Рейнольдса для основного течения) зависит квадратично от  $\Delta\alpha$  — волнового числа модуляции (первый метод) или разности волновых чисел возмущения и главной моды (второй метод). Тем самым переходы к модам с меньшим и большим волновым числом оказываются по теории равноправными. Но эксперимент, как уже отмечалось, почти всегда демонстрирует переход к моде с меньшим волновым числом. Можно показать [105], что только весьма специальное соотношение коэффициентов в системе (4.14), которого нельзя получить в рамках рассматриваемого приближения, могло бы обеспечить эту асимметрию. Неясно и то, как можно было бы модифицировать уравнение Ландау — Гинзбурга, чтобы оно правильно описывало процессы смены мод.

3. В [5, 69, 74, 77] эффект уменьшения числа вихрей с ростом числа Рейнольдса объясняется следующим образом. Обратное влияние вихрей на среднее продольное течение приводит к уширению («размыванию») профиля средней скорости (это уширение экспериментально продемонстрировано в [78] для струи). Но для более широкого профиля мода с наибольшим инкрементом имеет меньшее волновое число, что и приводит к смене режима. Это объясняет физические механизмы, но не позволяет построить теоретическую модель. Более плодотворным оказывается другой подход.

В [69] увеличение характерного размера вихря связывается с так называемым явлением обратного каскада энергии в двумерной турбулентности. В двумерной жидкости в результате наличия дополнительного интеграла движения — завихренности — передача энергии по спектру в инерционном интервале происходит от больших волновых чисел к малым, а не от малых к большим, как в трехмерном случае [106].

В работе [107] замечено, что влияние экмановского трения на вращающуюся двумерную турбулентность сводится к установлению левой границы инерционного интервала, иначе говоря — максимального размера вихрей в двумерном турбулентном течении. Этот размер есть [107]  $D_\lambda = \bar{u} \tau_E$ , где  $\bar{u}$  — среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, а  $\tau_E = H_0 / (\Omega \nu)^{1/2}$  — экмановское время. (Ясно, что можно писать  $D_\lambda = \bar{u} / \lambda$ , имея в виду обобщение на случай невращающейся квазидвумерной турбулентности). Можно выразить  $D_\lambda$  через удельную диссипацию турбулентной энергии  $\varepsilon$ , что дает [101]

$$D_\lambda = \left( \frac{\varepsilon^3}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

Аналогично внутреннему масштабу Колмогорова — Обухова в трехмерной турбулентности [108]  $d_v = (\nu / \varepsilon^3)^{1/4}$ , «внешний» масштаб  $D_\lambda$  определяет размер вихря, для которого характерное время одного оборота порядка времени диссипации, — более крупные (мелкие) вихри в двумерной (трехмерной) турбулентности просто не могут существовать. Однако левый конец (по волновому числу) инерционного интервала, в отличие от правого, энергосодержащий, и поэтому  $D_\lambda$  можно считать не просто максимальным, но характерным размером вихрей.

Заметим теперь, что скорость диссипации энергии на левом конце инерционного интервала ( $\varepsilon$ ) равна скорости ее генерации внешним источником, которую, как и в случае трехмерной турбулентности (см., на-

пример, [108]), можно оценить через число Рейнольдса. В результате получается следующая оценка для  $D_\lambda$  [109, 110]

$$D_\lambda \sim R_\lambda^{3/4} L \quad (4.16)$$

( $L$ , как и раньше, характерная ширина сдвига).

Вывод этой зависимости сводится к оценке членов в исходном уравнении (1.7) и не требует иных предположений, кроме наличия инерционного интервала (в котором несущественны генерация и диссипация энергии). Поэтому формулу (4.16) можно применить к не турбулентным сдвиговым течениям для описания роста вихрей с увеличением числа Рейнольдса. Данные экспериментов [68, 69, 77, 79, 80] подтверждают зависимость (4.16). В частности, на рис. 16 показана зависимость

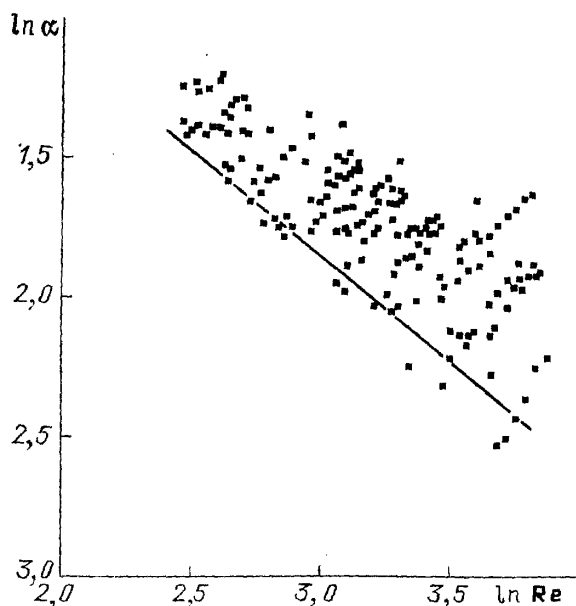


Рис. 16. Зависимость безразмерного волнового числа от числа Рейнольдса в эксперименте [69] в логарифмическом масштабе. Прямая имеет наклон  $-3/4$

безразмерного волнового числа от числа Рейнольдса по данным [69], пересчитанная в логарифмических координатах. Прямая на этом рисунке имеет наклон  $-3/4$ , что соответствует зависимости (4.16). Она проведена вдоль нижней границы «облака» экспериментальных точек, поскольку зависимость (4.16) описывает *максимальный* размер вихря, т. е. *минимальное* волновое число (см. также в п. 5.3 рис. 21). Таким образом, внешнее трение оказывается определяющим фактором не только для слабозакритических, но и для развитых квазидвумерных течений.

Приведем в заключение оценку [101] масштаба  $D_\lambda$  для атмосферы Земли. Если взять  $\varepsilon = 5 \text{ см}^2/\text{с}^3$  (см., например, [111]), то получим  $D_\lambda \approx 1500 \text{ км}$ , что близко к характерному размеру крупномасштабных атмосферных движений (см. также упоминаемое ниже примечание (6)).

## 5. Геофизические приложения.

**5.1. Влияние экмановского слоя на устойчивость волн Россби.** Как следует из критериев подобия, приведенных в п. 1.4, атмосферу Земли при определенных предположениях можно считать тонким слоем невязкой несжимаемой вращающейся жидкости. Существенную роль в крупномасштабных атмосферных движениях играет тот факт, что жидкость эта «налита» на поверхность шара. В результате эффективная частота вращения равна не  $\Omega_0 = 2\pi/\text{сутки}$ , а проекции на нормаль к земной поверхности  $\Omega_0 \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — географическая широта. В результате каждая жидкая частица, стремясь сохранить завих-

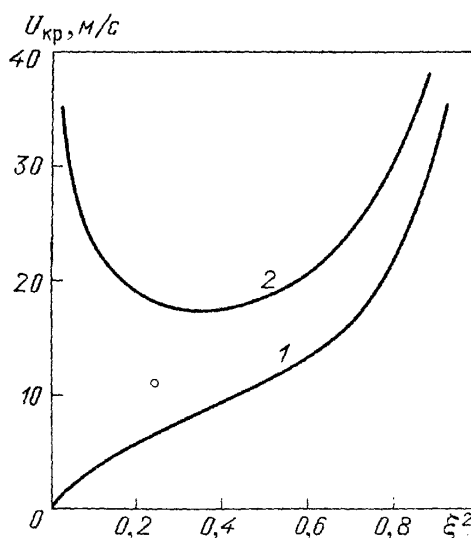
ренность, оказывается зафиксированной на своей параллели, и при ее отклонении вдоль меридиана возникает возвращающая сила. Таков механизм колебательного движения в волнах Россби.

Поскольку поперечные движения сосредоточены в небольшом диапазоне широт, для изучения устойчивости волн Россби можно ограничиться приближением бета-плоскости, в котором функция тока элементарной волны Россби (без учета двумерной сжимаемости,  $kL_0 \gg 1$ ) имеет вид

$$\psi = A \cos [k(x + ct)], \quad c = \frac{\beta}{k^2}. \quad (5.1)$$

Это решение уравнения Обухова — Чарни описывает сдвиговое периодическое течение, родственное течению Колмогорова, но с явной зависимостью от времени. Такое сдвиговое течение может оказаться баротропно неустойчивым, на что впервые обратил внимание Лоренц [44]

Рис. 17. Критические кривые для волны Россби с безразмерным волновым числом  $n=6$ : 1 — по невязкой теории [44], 2 — с учетом экмановского трения [39].  $\xi$  — безразмерное поперечное волновое число возмущения



в связи с проблемой предсказуемости атмосферных движений. В ряде последующих работ изучались распадный и параметрический механизмы в «невязкой» теории неустойчивости (см. ссылки в [39]). Остановимся здесь на вопросе о влиянии экмановского трения на баротропную неустойчивость волн Россби [39].

Как и в случае течения Колмогорова, уравнение линейной задачи устойчивости (линеаризация (1.23) относительно (5.1)) имеет периодические коэффициенты, что позволяет искать решение в виде ряда Фурье. Бесконечная система алгебраических уравнений для коэффициентов этого ряда решается методом цепных дробей, предложенным в [53] и обобщенным в [39] на случай комплексных коэффициентов (их мнимые части отличны от нуля за счет бета-эффекта). Исследовалась устойчивость волны относительно периодических по  $x$  и  $y$  возмущений с периодом по продольной координате  $x$ , кратным периоду самой волны. Порог устойчивости по амплитуде скорости задается формулой

$$v_{кр}^2 = A^2 k^2 = \frac{2[(l^2 + k^2)^2 \lambda^2 + c^2 k^2 l^4]}{l^2 (k^4 - l^4)},$$

где  $\lambda$  — коэффициент экмановского трения,  $l$  — поперечное волновое число наложенного возмущения.

Результат представлен на рис. 17 в виде нейтральных кривых в координатах «поперечное волновое число — амплитуда волны» с учетом и без учета внешнего трения (для параметров реальной земной атмосферы). Видно, что внешнее трение, как и в рассмотренных ранее слу-

чаях, не просто повышает порог устойчивости (в данном случае — от нуля до конечного значения), но и выделяет наиболее неустойчивое волновое число. Показательно, что волна Россби с амплитудой 12 м/с и глобальным волновым числом (число периодов, укладывающихся на широтном круге)  $n_0 = 6$ , приведенная Лоренцом [44] как типичная, сказывается неустойчивой в отсутствие внешнего трения и устойчивой при его учете (кружок на рис. 17). Следует заметить, что волны Россби, являющиеся крупномасштабным элементом общей циркуляции атмосферы, несут информацию о погоде. Поэтому учет экмановского трения при их описании весьма важен.

**5.2. Трехмерная структура квазидвумерных течений вращающейся жидкости.** Поскольку для атмосферы число Экмана  $E = \nu/\Omega H_0^2$  мало, структура течений в ней обладает рядом характерных особенностей, к которым прежде всего относится возникновение пограничных слоев на твердых поверхностях и над особенностями в граничных условиях (это могут быть нарушения гладкости ограничивающих поверхностей, резкие сдвиги скорости или локализованные источники и стоки массы). Различные примеры такого рода погранслоев можно найти в книге [36], а здесь мы сосредоточим внимание на вопросе о том, насколько действительно двумерным можно считать движение вращающейся жидкости. В связи с этим рассмотрим «тонкую структуру» стационарного зонального сдвигового течения вращающейся жидкости в традиционном предположении о малости чисел Россби  $Ro = U_0/L\Omega$  и Экмана.

В этом случае малость  $Ro$  позволяет линеаризовать уравнения Навье — Стокса относительно быстрого общего вращения. Малое же число Экмана появляется как коэффициент при членах со старшей производной (вязких), благодаря чему удается разделить задачу на две — для пограничного слоя на горизонтальных границах (на дне и, возможно, крышке, — это и есть слои Экмана) и для «свободной атмосферы» вне погранслоев. Тогда циркуляция в свободной атмосфере с учетом экмановского слоя описывается уравнениями (см., например, [36])

$$\begin{aligned} E\partial_y^2 u - 2\partial_z \chi &= 0, & E\partial_y^4 \chi + 2\partial_z u &= 0, \\ 2(\chi(y, 0) - \chi_v(y)) &= -E^{1/2}(u(y, 0) - u_v(y)), \\ 2(\chi(y, 1) - \chi_n(y)) &= -E^{1/2}(u(y, 1) - u_n(y)), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $u$  — продольная (зональная) скорость,  $\chi$  — функция тока поперечной циркуляции в меридиональной плоскости ( $y, z$ ) (не путать с горизонтальной функцией тока!),  $\chi_{v,n}$  и  $u_{v,n}$  — граничные значения на верхней и нижней границах, длины нормированы на глубину жидкости. Эти уравнения получены обычным методом сращиваемых асимптотических разложений. Они относятся к задаче, однородной по продольной координате  $x$ . Аналогично можно рассмотреть цилиндрически симметричный случай.

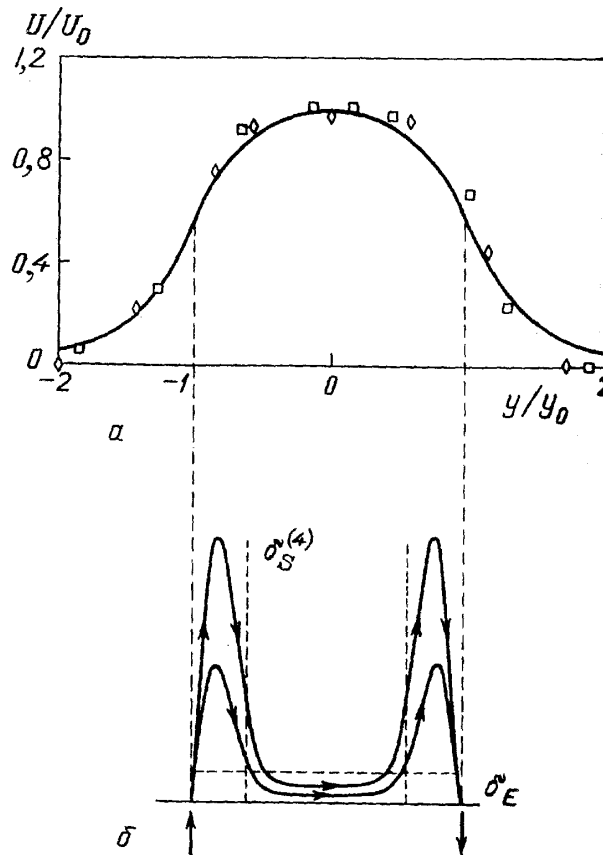
Заметим, что из вида граничных условий сразу следует, что возбуждать течение можно с равным успехом дифференциальным движением границ ( $u$ ) или источниками и стоками массы на границах ( $\chi$ ).

Анализ уравнений (5.2) показывает [34, 35], что имеется два характерных масштаба  $\delta_s^{(3)} = E^{1/3}$  и  $\delta_s^{(4)} = E^{1/4}$ . Если характерная длина изменения граничных условий существенно превышает больший из них ( $\delta_s^{(4)}$ ), то членами с малым параметром  $E$  в (5.2) можно пренебречь, и течение оказывается двумерным,  $\partial/\partial z = 0$ . Однако в лабораторных экспериментах гораздо удобнее иметь дело с разрывными граничными условиями — когда отдельные кольцевые участки дна движутся с различ-



ными скоростями или имеются источники и стоки массы, локализованные на окружностях (разрыв в граничных значениях  $u$  или  $\chi$  соответственно). В этом случае над разрывами возникают свободные слои Праудмена — Стюартсона. Они имеют двойную структуру: во внутреннем подслое  $\delta_S^{(3)}$  вязкие силы сглаживают разрыв вертикальной скорости, а во внешнем  $\delta_S^{(4)}$  — зональной. Таким образом, интенсивные вертикальные движения имеют место преимущественно в слоях Праудмена — Стюартсона, и вся поперечная циркуляция сосредоточена в экмановских и стюартсоновских пограничных слоях (на рис. 18, б приведена схема поперечной циркуляции для случая струйного течения, возбуждаемого между кольцевыми источником и стоком массы, как в [80]). При этом

Рис. 18. а — Теоретический (кривая) и экспериментальный (точки) профили скорости струи на рис. б [80]; скорость нормирована на максимальное значение, поперечная координата на положение источников и стоков. б — Схематическое изображение линий тока поперечной циркуляции для струи, возбуждаемой во вращающейся жидкости источником и стоком (стрелки). Показаны экмановский ( $\delta_E$ ) и стюартсоновский ( $\delta_S^{(4)}$ ) слои, в которых сосредоточена поперечная циркуляция



во внутреннем подслое существенно уже зависимость от вертикальной координаты. Чтобы выяснить, насколько она существенна, необходимо решить систему (5.2).

Решение системы (5.2) ищут с помощью преобразования Фурье по поперечной координате  $y$ . Затем получившиеся интегралы Фурье можно использовать для получения асимптотических (по  $E \rightarrow 0$ ) рядов [36, 69, 79], аппроксимирующих  $u(y, z)$  и  $\chi(y, z)$ . Однако эти ряды крайне плохо сходятся в интересующей нас области вблизи разрыва в граничном условии. Поэтому исследовать асимптотическое поведение решений в этой области лучше исходя непосредственно из их интегрального представления. Таким способом можно показать [80], что даже во внутреннем слое Праудмена — Стюартсона зависимость от вертикальной координаты существенна лишь в асимптотически малой области  $z < E^{1/3}$   $|y - y_0| < E^{3/8}$  ( $y_0$  — положение разрыва). Это позволяет считать течение в экспериментальной установке с очень хорошей точностью двумерным и вычислять его профиль. Сравнение теоретического и экспериментального профилей скорости по данным [80] приведено на рис. 18, а.

**5.3. Влияние дифференциального вращения.** Бета-эффект, приводящий к возникновению волн Россби, оказывает существенное влияние и на устойчивость широтных течений. В самом деле, теперь полная завихренность равна  $U' - f$ , где  $f$  — параметр Кориолиса (удвоенная эффективная скорость вращения системы в целом; знак минус связан с выбранным направлением осей и фактическим направлением вращения Земли), и для неустойчивости сдвигового течения теперь требуется, чтобы где-то обращалась в нуль сумма  $U'' - \beta$ , где параметр  $\beta = f'$  входит в уравнение (1.14). Это обобщение критерия Рэлея получено Го (Куо) в [112].

Очевидно, что бета-эффект может в принципе подавить неустойчивость сдвигового течения, если  $\beta > \max U''$  (4). Поэтому важно выяснить, какова роль внешнего трения сравнительно с бета-эффектом в реальной атмосфере. Это сделано в [101]; здесь можно ограничиться лишь качественным анализом.

Пусть профиль скорости  $U(y)$  основного широтного течения фиксирован, а меняются только его амплитуда  $U_0$  и ширина  $L$ :  $u(y) = U_0 U(y/L)$ . Будем считать, что профиль антисимметричный и нормирован так, что  $U'(0) = |U(\pm\infty)| = 1$ . Обозначим  $m \equiv \max U''$ . Выясним, какой вид имеет нейтральная кривая устойчивости в координатах  $(L, U_0)$ . В отсут-

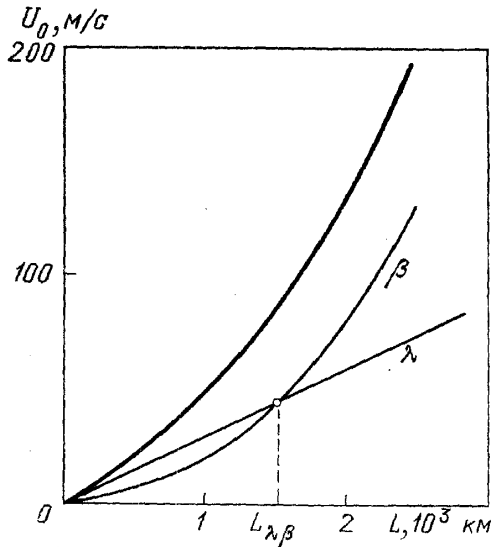


Рис. 19. Нейтральные кривые для сдвигового течения под влиянием внешнего трения (кривая  $\lambda$ ), бета-эффекта (кривая  $\beta$ ) и обоих факторов (жирная кривая) [101] при значениях  $\lambda$  и  $\beta$ , характерных для земной атмосферы

ствие внешнего трения устойчивость определяется модифицированным критерием Рэлея, в соответствии с которым критическая скорость выражается формулой

$$U_0^* = \frac{\beta L^2}{m} \quad (5.3)$$

(соответствующая парабола на рис. 19 помечена буквой  $\beta$ ). С другой стороны, в отсутствие бета-эффекта критическая скорость есть

$$U_0^* = R_\lambda^* \lambda L = \frac{\lambda L}{\gamma_0}, \quad (5.4)$$

где  $\gamma_0$  — максимальный линейный инкремент для профиля  $U(y)$ , получаемый из решения уравнения Рэлея (кривая  $\lambda$  на рис. 19). Очевидно, что полная нейтральная кривая с учетом обоих стабилизирующих факторов пройдет выше этих двух, асимптотически приближаясь к (5.3) при больших  $L$  и к (5.4) при малых. Иначе говоря, имеется характерный масштаб  $L_{\lambda\beta} = m\lambda/\gamma_0\beta$  (точка пересечения кривых (5.3) и (5.4)), такой что при  $L > L_{\lambda\beta}$  преобладает влияние бета-эффекта, а при  $L < L_{\lambda\beta}$  — внешнего трения. Для оценки возьмем величины  $\lambda$  и  $\beta$  для земной атмосферы в средних широтах, приведенные в п. 1, характерное значение  $\gamma_0 \approx 0.2$ , и заметим, что минимальное возможное значение  $m$  для антисимметричных монотонных профилей есть  $m_{\min} = 1/2$  (оно достигается на профиле с кусочно-постоянной второй производной; максимальное

$m = \infty$  соответствует кусочно-линейному профилю). Такая оценка дает

$$L_{\lambda\beta} = \frac{(1/2) \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}}{0.2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}} \approx 1000 \text{ км}, \quad (5.5)$$

причем, поскольку здесь взято минимальное значение  $\tau$ , это оценка снизу. Значит, в условиях земной атмосферы даже для самых крупномасштабных течений нельзя пренебрегать внешним трением<sup>(5)</sup>.

Экспериментально влияние бета-эффекта на устойчивость сдвиговых течений изучалось на примере струи в [80] (напомним, что бета-эффект возникает в жидкости с переменной по радиусу глубиной). Параметры установки позволяли создавать течение с  $L \geq L_{\lambda\beta}$ , и результаты, таким образом, ложатся в основном на кривую (5.3) (рис. 20; на

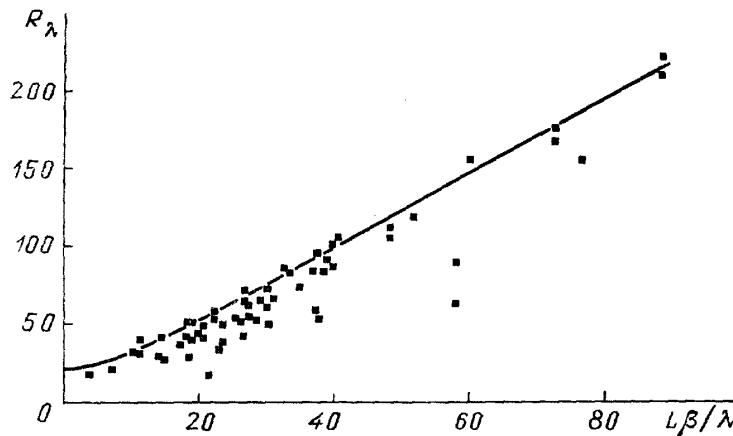


Рис. 20. Диаграмма устойчивости струйного течения [80]: точками обозначены наблюдавшиеся докритические режимы

этом рисунке точками показаны все наблюдавшиеся устойчивые режимы, а не только близкие к нейтральной кривой). Следует отметить, что хотя теоретический профиль скорости течения хорошо соответствует

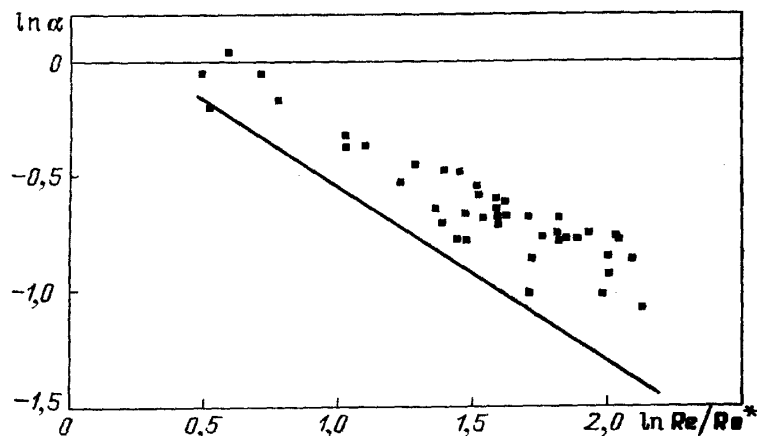


Рис. 21. Зависимость безразмерного волнового числа от числа Рейнольдса для закритических режимов струйного течения [80] в логарифмическом масштабе. Прямая имеет наклон  $-3/4$

экспериментальному (см. п. 5.2), значение безразмерного максимума второй производной  $m$ , вычисленное из экспериментальных данных по устойчивости с помощью формулы (5.3), составило  $m_{\text{эксп}} \approx 1/2$ , а не  $m = 2$ , как получается из теоретического профиля. Это лишний раз показывает, насколько чувствительными могут быть характеристики, зави-

сящие от старших производных, к «небольшим» отличиям экспериментального профиля от теоретического.

Бета-эффект влияет и на сильнозакритические, в том числе турбулентные, течения, поскольку при увеличении масштаба вихрей они начинают преобразовываться в волны Россби. В посвященных этому явлению работах ([28, 29] см. также обзор [113]) показано, что это происходит на масштабах порядка  $\epsilon^{-1/5}\beta^{-3/5}$  ( $\epsilon$  — удельная диссипация) и приводит к формированию из изотропной турбулентности структур, вытянутых в широтном направлении. Отсюда следует, что в присутствии бета-эффекта требует модификации формула для характерного размера вихрей в развитых квазидвумерных течениях (4.16). По-видимому, должны появиться два характерных размера — в широтном и долготном направлениях. Кроме того, в ограниченных сосудах необходимо учитывать альтернативный механизм диссипации — унос энергии волнами Россби на боковые стенки <sup>(6)</sup>.

Тем не менее формула (4.16) оказывается применимой и для экспериментов [79, 80], в которых моделировалась струя на бета-плоскости (график зависимости волнового числа от надкритичности, построенный в [109, 110] по результатам [80], приведен на рис. 21). Это объясняется тем, что волны Россби, которые могут распространяться только «на запад», были в этих экспериментах каналированы в «восточной» струе и не могли уносить энергию потока на боковые стенки. Поэтому главным механизмом диссипации оставалось внешнее трение.

**Заключение.** Основной физический вывод, следующий из проделанного анализа, состоит в том, что характеристики устойчивости квазидвумерных сдвиговых течений можно разделить на две группы: слабо зависящие от формы профиля (в частности, критическое число Рейнольдса, волновое число наиболее неустойчивой моды) и чувствительные к форме профиля (вторая константа Ландау, ответственная за интенсивность вихрей в закритических течениях). Это означает, что даже слабозакритические режимы квазидвумерных сдвиговых течений плохо предсказуемы, поскольку в натуральных условиях те или иные физические факторы всегда способствуют изменению профиля основного течения. В атмосфере, например, изменение профиля зональных течений вызывается прежде всего бароклинными эффектами, а также взаимодействием (хотя и слабым) движений в погранслое и в свободной атмосфере.

Если возникновение вихревых структур можно объяснить малой надкритичностью крупномасштабных течений, по отношению к которым мелкомасштабная турбулентность играет диссипативную роль, то их пространственно-временная изменчивость связана со слабым изменением профиля скорости основного течения. Поскольку при этом интенсивность вихрей варьирует значительно сильнее, чем их размер и форма, подобные образования можно отнести к когерентным структурам. Таким образом, проясняется один из возможных механизмов самоорганизации в турбулентных потоках.

В квазидвумерных движениях самоорганизации способствует также обратный каскад энергии по спектру, ограниченный сверху масштабом  $D_\lambda$ , в котором сосредотачивается основная часть кинетической энергии. По отношению к внешнему трению, обусловленному турбулентностью малых масштабов, такие движения являются слабозакритическими (именно потому, что диссипация на масштабе  $D_\lambda$  связана с внешним трением). Таким образом, фундаментальную роль в формировании многих реальных гидродинамических процессов играет внешнее трение, без учета которого нельзя достичь правильного их понимания.

Авторы благодарят М. В. Незлина за внимательное чтение рукописи и ряд ценных замечаний.

### ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

<sup>1</sup> Баротропной называют жидкость, уравнение состояния которой задается зависимостью  $p=p(\rho)$ , т. е. давление есть функция только плотности.

<sup>2</sup> Неожиданный результат получен в эксперименте [102]. Согласно [102], нижние границы областей существования мод  $Re_{n_k}^{(1)}$  в точности ложатся на нейтральную кривую  $Re(\alpha)$ . В экспериментах других авторов при квазистатическом уменьшении  $Re$  мода  $n_k$  теряет устойчивость раньше, чем достигается критическое число Рейнольдса, определенное по линейной теории для соответствующего волнового числа. Тем не менее, результат [102] кажется надежным, поскольку авторы этой работы наблюдали уменьшение амплитуды моды до полного ее исчезновения в момент, когда  $Re = Re_{n_k}^*$ , как и должно быть при достижении нейтральной кривой. Лишь после этого возбуждалась предыдущая мода  $n_{k-1}$ . Одно из возможных объяснений заключается в том, что тщательность изготовления установки, которой придавалось в [102] большое значение, сводит к минимуму случайные возмущения, необходимые для того, чтобы неустойчивость вторичного за критическое течение успела развиться за время наблюдения (характерное время этой неустойчивости может быть значительно больше, чем для неустойчивости первичного течения).

<sup>3</sup> Взгляд на вихри как на самостоятельные объекты может быть правомерным в иных физических ситуациях. Так, в условиях экспериментов [5] экранировка на радиусе Россби — Обухова эффективно изолирует вихри друг от друга. Возможно, аналогичную роль играет сильная турбулентность в [81, 82]. Заметим, что в обоих случаях удается наблюдать режимы с одним локализованным вихрем.

<sup>4</sup> Заметим, что и здесь существенную роль играет форма профиля скорости. Так, «угловатый» профиль типа кусочно-линейного не стабилизируется бета-эффектом.

<sup>5</sup> Интересно, что из результатов работы [92], в которой главным стабилизирующим фактором был бета-эффект, а внешнее трение учитывалось как малая поправка, следует, что даже в этом случае оно принципиально меняет поведение стационарных за критических режимов.

<sup>6</sup> Здесь следует отметить, что в реальной земной атмосфере присутствует целый ряд механизмов, способных так или иначе влиять на характерный размер вихрей. Замечательно, что соответствующие масштабы размерности длины — радиус Земли, масштаб Россби — Обухова, «внешний» масштаб турбулентности, упоминавшийся выше масштаб  $\varepsilon^{-1/3} \beta^{-3/5}$  — близки друг к другу по порядку величины. Этим, в частности, обусловлена крайняя сложность атмосферы как объекта исследования, в котором трудно выделить какой-либо механизм в чистом виде.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fultz D. // Compendium of Meteorology / Ed. J. F. Malone. — Boston: Am. Meteorol. Soc., 1951. — P. 1235.
2. Hide R. // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1953. V. 79, No. 339. P. 161.
3. Hide R., Mason P. T. // Adv. Phys. 1975. V. 24. P. 47.
4. Должанский Ф. В., Голицын Г. С. // Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана» («ФАО»). 1977. Т. 13. С. 795.
5. Незлин М. В. // УФН. 1986. Т. 150. С. 3, 665.
6. Незлин М. В., Снежкин Е. // Нелинейные волны: Структуры и бифуркации / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. — М.: Наука, 1987.
7. Drazin P. G., Reid W. H. Hydrodynamic Stability. — Cambridge: Univ. Press, 1981.
8. Huerre P. // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1980. No. 1408. P. 643.
9. Busse F. H. // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 577.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
- [11] Rossby C.-G. et al. // Bull. Am. Meteorol. Soc. 1937. V. 18. P. 201.
12. Обухов А. М. // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1949. Т. 13. С. 281.
13. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. — М.: Мир, 1984.
14. Ertel H. // Meteorol. Zs. 1942. Bd. 59. S. 277.
15. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963.
16. Обухов А. М. // Н. Е. Кочин и развитие механики. — М.: Наука, 1984. — С. 84.
17. Курганский М. В., Татарская М. С. // Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1987. Т. 23. С. 787.
18. McIntyre M. E., Norton V. A. // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 403.
19. Обухов А. М. // Наука и человечество. — М.: Знание, 1989. — С. 96.
20. —»—»— // УМН. 1983. Т. 38, вып. 4. С. 101.
- [21] Довженко В. А., Должанский Ф. В. // [6]. — С. 132.

22. Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы: — Л.: Гидрометеиздат, 1988.
23. Charney J. G.//Geophys. Publ. 1948. V. 17, No. 2. P. 1; перевод: Чарни Дж. Г.//Численные методы прогноза погоды/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеиздат, 1960.— С. 6.
24. Hasegawa A., McLennan C. G., Kodama Y.//Phys. Fluids. 1979. V. 22. P. 2122.
25. Монин А. С., Обухов А. М.//Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1958. № 11. С. 1360.
26. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики.— М.: Наука, 1965.
27. —»— Теоретические основы геофизической гидродинамики.— Л.: Гидрометеиздат. 1988.
28. Charney J. G.//J. Atmos. Sci. 1971. V. 28. P. 1087.
29. Миравель А. П., Монин А. С.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1980. Т. 16. С. 1011.
30. Воронович А. Г., Рыбак С. А.//ДАН СССР. 1978. Т. 239. С. 1457.
- [31] Романова Н. Н.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1987. Т. 23. С. 357.
32. Петвиашвили В. И.//Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 632.
33. Романова Н. Н., Цейтлин В. Ю.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1983. Т. 19. С. 796.
34. Proudman I.//J. Fluid Mech. 1956. V. 1. P. 505.
35. Stewartson K.//Ibidem. 1957. V. 3. P. 17.
36. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей.— Л.: Гидрометеиздат, 1975.
37. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1989.
38. Обухов А. М.//ДАН СССР. 1962. Т. 145. С. 1239.
39. Должанский Ф. В.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1985. Т. 21. С. 383.
40. Зиновьев А. Т., Штерн В. Н.//Магн. гидродинамика. 1987. № 1. С. 29.
- [41] Сергеев К. А., Штерн В. Н.//Ibidem. № 3. С. 39.
42. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
43. Лоренц Э. Природа и теория общей циркуляции атмосферы.— Л.: Гидрометеиздат, 1970.
44. Lorenz E. N.//J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. P. 258.
45. Должанский Ф. В.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1987. Т. 23. С. 348.
46. Dolzhanskii F. V.//Nonlinear and Eurbulent Processes in Physics: Proceedings of the III International Workshop. Kiev, April 13—26, 1987.—V. 2. P. 25.
47. Должанский Ф. В., Курганский М. В., Черноусько Ю. Л.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1979. Т. 15. С. 597.
48. Черноусько Ю. Л.//Ibidem. 1980. Т. 16. С. 423.
49. Должанский Ф. В.//Ibidem. 1981. Т. 17. С. 563.
50. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
- [51] Wasow W.//Ann. of Math. (2). 1948. V. 49. P. 852.
52. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
53. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г.//ПММ. 1961. Т. 25. С. 1140.
54. Betchov R., Szewczyk A.//Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 1391.
55. Drasin P. G., Howard L. N.//J. Fluid Mech. 1962. V. 14, pt. 2. P. 257.
56. Michalke A.//Ibidem. 1964. V. 19, pt. 4. P. 543.
57. Бондаренко Н. Ф., Гак М. З., Должанский Ф. В.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1979. Т. 15. С. 1017.
58. Пономарев В. М.//Ibidem. Сер. «Механика жидкости и газа» («МЖГ»). 1980. № 1. С. 3.
59. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение.— М.: Наука, 1981.
60. Niino H.//J. Meteor. Soc. Japan. 1982. V. 60. P. 1001.
- [61] Манин Д. Ю.//Изв. АН СССР. Сер. «МЖГ». 1989. № 2. С. 19.
62. Miles J. W.//J. Fluid Mech. 1963. V. 16, pt. 2. P. 209.
63. Howard L. N.//Ibidem. Pt. 3. P. 333.
64. Должанский Ф. В.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1977. Т. 13. С. 201.
65. Вишик С. М., Должанский Ф. В.//ДАН СССР. 1978. Т. 238. С. 1032.
66. Miksad R. W.//J. Fluid Mech. 1972. V. 56, pt. 4. P. 695.
67. Hussain A. K. M. F.//Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 2816.
68. Hide R., Titman C. W.//J. Fluid Mech. 1967. V. 29, pt. 1. P. 39.
69. Niino H., Misawa N.//J. Atmos. Sci. 1984. V. 41. P. 1992.
70. Rabaud M., Couder Y.//J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 291.
- [71] Довженко В. А., Новиков Ю. В., Обухов А. М.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО», 1979. Т. 15. С. 1199.
72. Довженко В. А., Обухов А. М., Пономарев В. М.//Ibidem. Сер. «МЖГ». 1981. № 4. С. 27.
73. Довженко В. А., Крымов В. А., Пономарев В. М.//Ibidem. Сер. «ФАО». 1984. Т. 20. С. 693.
74. Довженко В. А., Крымов В. А.//Ibidem. 1987. Т. 23. С. 14.
75. Батчаев А. М., Довженко В. А.//ДАН СССР. 1983. Т. 273. С. 582.
76. Батчаев А. М.//Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1988. Т. 24. С. 844.

77. Крымов В. А. //Ibidem. Сер. «МЖГ». 1989. №2. С. 12.
78. Крымов В. А., Манин Д. Ю. //Ibidem. Сер. «ФАО». 1989. Т. 25. С. 234.
79. Yamagata T., Kimura R. //J. Meteor. Soc. Japan. Ser. II. 1973. V. 51. P. 420.
80. Манин Д. Ю., Черноусько Ю. Л. //Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1990. Т. 26. С. 483.
- [81] Sommeria J., Meyers S., Swinney H. //Nature, London. 1988. V. 331. P. 689.
82. Sommeria J., Meyers S., Swinney H. //Ibidem. P. 689; 1989. V. 337. P. 58.
83. Довженко В. А., Крымов В. А. //Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1983. Т. 19. С. 534.
84. Lorenz E. N. //J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130.
85. Кляцкин В. И. //ПММ. 1972. Т. 36. С. 263.
86. Green J. S. A. //J. Fluid Mech. 1974. V. 62. Pt. 2.
87. Stuart J. T. //Ibidem. 1960. V. 9. P. 353.
88. Watson J. //Ibidem. P. 371.
89. Churilov S. M., Shukhman I. G. //Ibidem. 1987. V. 180. P. 1; 1988. V. 194. P. 187.
90. Чурилов С. М. Неустойчивость зонального сдвигового потока: мягкий режим возбуждения.— Препринт СибИЗМИР № 1-88.— Иркутск, 1988.
- [91] Huerre P. //J. Mec. Theor. y Appl. 1983. No. 2 (Numero special). P. 121.
92. Shukhman I. G. //J. Fluid Mech. 1989. V. 200. P. 425.
93. Юдович В. И. //Численные методы решения задач математической физики.— М.: Наука, 1966.
94. —»—»—»— //Изв. АН СССР. Сер. «МЖГ». 1973. С. 32.
95. Белоцерковский С. О., Мирабель А. П., Чусов М. А. //Ibidem. Сер. «ФАО». 1978. Т. 14. С. 11.
96. Непомнящий А. А. //ПММ. 1976. Т. 40. С. 886.
97. Nikolaenko B., She Z.-S. //Topological Fluid Mechanics: Proc. of IUTAM Symposium. Cambridge, England, August 13—18, 1989/Fds. H. K., Moffat, A. Tsinober — 1989.—P. 304.
98. Герцеништейн С. Я. //ДАН СССР. 1976. Т. 231. С. 1319.
99. Герцеништейн С. Я., Лезин Е. М., Шкадов В. Я. //П Всесоюзная конференция «Современные проблемы тепловой конвекции»: Тезисы докладов.— Пермь. 1975.— С. 50
100. Esch R. E. //J. Fluid. Mech. 1957. V. 3, pt 3. P. 289.
- [101] Манин Д. Ю. //Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1989. Т. 25. С. 802.
102. Chomaz J. M., Rabaud M., Basdevant C., Couder Y. //J. Fluid Mech. 1988. V. 187. P. 115.
103. Крымов В. А. //Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1988. Т. 24. С. 475.
104. Niino H. //J. Meteor. Soc. Japan. Ser. II. 1982. V. 60. P. 1024.
105. Манин Д. Ю. Теория устойчивости квазидвумерных зональных течений с учетом внешнего трения и эффектов вращения.— Автореферат диссертации... канд. физ.-мат. наук.— Москва, 1989.
106. Kraichnan R. H. //Phys. Fluids. 1967. V. 10, No. 7.
107. Hopfinger E. J. //J. Mec. Theor. y Appl. 1983. No. 2. (Numero special). P. 23.
108. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, Ч. 1, 1965; Ч. 2, 1967.
109. Манин Д. Ю. О характерном размере вихрей в развитых квазидвумерных течениях.— Препринт ИФА АН СССР № 6.— Москва, 1989.
110. —»—»— //Изв. АН СССР. Сер. «ФАО». 1990. Т. 26, № 6.
- [111] Голицын Г. С. Введение в динамику планетных атмосфер.— Л.: Гидрометеиздат, 1973.
112. Kuo H. L. //J. Meteorol. 1947. V. 6. P. 105.
113. Rhines P. B. //J. Fluid Mech. 1975. V. 69. P. 417..
114. Dolotin V. V., Fridman A. M. //Dynamics of Astrophysical Discs/Ed. J. Sellwood.— Cambridge: Univ. Press, 1989.— P. 178.