

538.941

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА СВЕРХТЕКУЧЕГО ГЕЛИЯ**С. К. Немировский**

(Институт теплофизики СО АН СССР, Новосибирск)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	51
1. Уравнения гидродинамики гелия II	53
1.1. Классическая двухскоростная гидродинамика. 1.2. Гамильтоновская форма уравнений движения.	
2. Одномерные нелинейные волны	56
2.1. Характеристическая форма уравнений нелинейной акустики. 2.2. Линейная акустика. 2.3. Инварианты Римана в нелинейном случае. 2.4. Нелинейный распад волны энтропии. 2.5. Эволюция интенсивных волн. 2.6. Затухающие волны. 2.7. Дисперсия второго звука. 2.8. Стационарные решения уравнений Бюргерса и КДФБ. 2.9. Кубически-нелинейные эффекты.	
3. Неоднородные волновые пакеты	71
3.1. Самофокусировка монохроматической волны. 3.2. Волновые пучки в квадратично-нелинейной среде.	
4. Устойчивость нелинейных волн	74
4.1. Нелинейное превращение первого звука во второй. 4.2. Устойчивость ударной волны давления.	
5. Стохастические нелинейные волновые процессы	79
5.1. Решение кинетических уравнений. 5.2. Акустические свойства турбулентного гелия.	
6. Экспериментальные исследования	85
6.1. Краткий обзор работ. 6.2. Экспериментальные приложения.	
Заключение	91
Примечания к тексту	93
Список литературы	93

Введение. В последнее время повысился интерес к исследованию интенсивных звуковых волн в сверхтекучем гелии. Связано это, на наш взгляд, с несколькими причинами. Прежде всего, теория нелинейных волн является интенсивно развивающейся областью, в ней появился ряд новых общих методов и результатов, которые могут быть перенесены на случай гелия II. Следующая причина заключается в том, что сверхтекучий гелий, как это широко сейчас обсуждается, может быть использован в качестве хладагента в различных криогенных устройствах: соленоидах, резонаторах и т. д. Это также стимулирует изучение гидродинамики и акустики HeII. Наконец, повышение интереса к нелинейным волнам обусловлено, так сказать, и «внутренними» причинами. Дело в том, что акустические методы занимают одно из главных мест в изучении свойств HeII. В этом смысле нелинейная акустика намного перспективнее, поскольку физика нелинейных явлений гораздо разнообразнее линейной теории, и большее число эффектов может быть связано со свойствами гелия. Заметим, кстати, что вопрос о применимости линейной теории последовательно может быть решен лишь в рамках нелинейной акустики.

В сверхтекучем гелии, как и во многих других средах, наблюдаются «стандартные» нелинейные волновые явления, такие, как укручение

профиля волны, образование разрывов, самофокусировка волновых пакетов и т. д. В то же время имеется ряд специфических черт, присущих лишь этой жидкости. Специфика HeII с точки зрения нелинейной акустики состоит прежде всего в том, что в нем имеются две связанные волновые моды, одна из которых — температурные волны — представляет собой уникальное явление, не имеющее аналогов в классических средах. Наличие двух или нескольких волновых мод, конечно, не является исключением. Такая же ситуация для волн в плазме, или, например, для волн в океане. Однако, в отличие от этих систем, волны в гелии в большом диапазоне температур практически не обладают дисперсией скорости звука. В некоторых ситуациях, например при рассмотрении одномерных волн, отсутствие дисперсии является упрощающим обстоятельством, так как распространение волн описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка (см. разделы 2.1—2.5). В других случаях, например при использовании гамильтоновских методов, отсутствие дисперсии затрудняет анализ, поскольку с дисперсией связан параметр малости, по которому строится теория возмущений.

К особенностям HeII следует отнести сильную зависимость его свойств от температуры. Поскольку акустические явления в конечном счете обусловлены «игрой» термодинамических величин (с формальной точки зрения), то они также сильно зависят от температуры. С одной стороны, это приводит к новым интересным эффектам, таким, как, например, укрупнение заднего фронта волн второго звука (см. раздел 2.5). С другой стороны, быстрое изменение акустических характеристик в зависимости от температуры требует строгого обоснования законности того или иного приближения в уравнениях движения.

Особенность гелия состоит также в том, что при некоторых вполне достижимых параметрах звуковых волн он резко меняет свои свойства вплоть до того, что становится неадекватной выбранная гидродинамическая модель. Например, достаточно мощные и длительные тепловые импульсы развивают в гелии вихревую структуру, описание которой отсутствует в классических уравнениях двухскоростной гидродинамики. Дальнейшее повышение амплитуды или (и) длительности может привести к тому, что в гелии II возникает пленка пара или HeI. Фазовый переход HeII — HeI может быть также осуществлен в интенсивной волне давления, поскольку λ -кривая имеет конечный наклон в p , T -координатах, порядка 110 ат/град. Разумеется, и в обычных средах сильные волны могут значительно менять свойства среды. Примером могут служить кавитационные явления в звуковых волнах в жидкости, или, скажем, ионизация газа в сильной ударной волне. Однако в этих случаях речь идет о чрезвычайно высоких, рекордных параметрах звуковых волн, в то время как в HeII обнаружена генерация квантовых вихрей в тепловых импульсах, которые, как еще недавно считалось, описываются безвихревыми уравнениями двухскоростной гидродинамики. Распространение звуковых импульсов, генерирующих вихри, изучено пока слабо, теоретические работы практически отсутствуют; в дальнейшем мы не будем касаться этих вопросов, ограничившись некоторыми замечаниями в заключительной части обзора.

Под нелинейной акустикой HeII в дальнейшем будем понимать теорию интенсивных звуковых волн, законы распространения которых могут быть объяснены в рамках классической двухскоростной гидродинамики. Предлагаемый обзор посвящен, в основном, теоретическим результатам. Причина этого не только и даже не столько в том, что автор является теоретиком, а скорее в том, что теория нелинейных волн в HeII представляет собой более или менее разработанную область, чего нельзя сказать об эксперименте. За немногим исключением, известные экспериментальные работы сконцентрированы вокруг относительно ча-

стного вопроса о динамике интенсивных импульсов второго звука. При этом чисто нелинейные эффекты, наблюдаемые в цитируемых работах, перепутаны с явлениями, связанными с квантовыми вихрями. Что касается других вопросов динамики нелинейных волн в HeII, то они практически не изучались экспериментаторами. Поэтому было сочтено целесообразным вопросы, связанные с экспериментальными исследованиями, вынести в отдельную главу. Она состоит из двух частей, первая из которых представляет по сути дела краткий обзор экспериментальных работ. Основная цель этого краткого обзора — описать, как развивались экспериментальные исследования, какие тенденции имеются в этом вопросе. Особое внимание уделено экспериментальным работам, иллюстрирующим теоретические результаты, описанные в первых главах статьи. Вторая часть этой главы носит, если можно так выразиться, «рекламный» характер. В ней предложен ряд экспериментов, которые либо представляют самостоятельный интерес, либо могут служить своего рода инструментом для изучения HeII методами нелинейной акустики.

Порядок изложения в обзоре следующий. В разделе 1 в справочных целях приведены уравнения гидродинамики HeII в обычной и гамильтоновской формулировках. В разделе 2 рассмотрены законы распространения одномерных нелинейных волн. Раздел 3 посвящен изучению эволюции слабонеоднородных волновых пакетов. В разделе 4 обсуждаются вопросы устойчивости нелинейных волн и приводится решение задачи об устойчивости ударной волны давления. В разделе 5 исследуются стохастические волновые процессы. Раздел 6, как уже говорилось, посвящен эксперименту.

1. Уравнения гидродинамики гелия II.

1.1. Классическая двухскоростная гидродинамика. В целях последовательности изложения, а также для введения обозначений выпишем уравнения гидродинамики HeII в обычных и гамильтоновских переменных. Гидродинамическое описание HeII осуществляется с помощью набора восьми переменных. Ими могут являться, например, плотность импульса $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, скорость сверхтекучей компоненты $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t)$, а также плотности массы $\rho(\mathbf{r}, t)$ и энтропии $S(\mathbf{r}, t)$.

С учетом диссипативных эффектов динамические уравнения для перечисленных величин имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} \right) + \delta_{ik} (\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n) \right], \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = \operatorname{div} \frac{\kappa \nabla T}{T} + \frac{R}{T}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) = \nabla [\zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n]. \quad (1.4)$$

Величины, входящие в левые части соотношений (1.1) — (1.4), могут быть определены с помощью выражения для плотности энергии E_0 в системе координат, где сверхтекучее движение отсутствует. Величина E_0 зависит от ρ , S и от плотности импульса \mathbf{j}_0 в сверхтекучей системе, связанного с вектором \mathbf{j} соотношением

$$\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s. \quad (1.5)$$

Дифференциал величины $E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)$

$$dE_0 = T dS + \mu d\rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, d\mathbf{j}_0). \quad (1.6)$$

Последнее слагаемое служит определением для скорости \mathbf{v}_n нормального движения. Оно выражает тот факт, что производная от энергии по импульсу равна, по определению, скорости. Кроме величины \mathbf{v}_n соотношение (1.6) определяет температуру T и химический потенциал μ .

Из соображений симметрии следует, что вектор \mathbf{j}_0 связан с относительной скоростью $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ следующим соотношением:

$$\mathbf{j}_0 = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad (1.7)$$

которое можно рассматривать как определение плотности нормальной компоненты ρ_n . Плотность сверхтекучей компоненты ρ_s соответственно равна $\rho_s = \rho - \rho_n$. Из (1.5) и (1.7) следует, что

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s. \quad (1.8)$$

Тензор плотности потока импульса определяется следующим образом:

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + p \delta_{ik}, \quad (1.9)$$

или, что эквивалентно,

$$\Pi_{ik} = \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + p \delta_{ik}; \quad (1.10)$$

здесь давление, равное, как обычно, производной от полной энергии по объему,

$$p = - \frac{\partial E_0 V}{\partial V} = -E_0 + TS + \mu \rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{j}_0). \quad (1.11)$$

Величины $T, \mu, p, \rho_s, \rho_n$ являются функциями ρ, S и вектора \mathbf{j}_0 . При небольших значениях относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ зависимость от \mathbf{j}_0 заменяется зависимостью от \mathbf{w} и может быть определена из соотношений Максвелла [1].

Бездиссипативные уравнения движения (1.1) — (1.4) приводят к закону сохранения энергии E , в лабораторной системе равной

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{v}_s \mathbf{j}_0 + E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0), \quad (1.12)$$

который имеет следующий вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0; \quad (1.13)$$

здесь \mathbf{Q} — плотность потока энергии, равная

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) \mathbf{j} + ST \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n \mathbf{j}_0). \quad (1.14)$$

В правой части соотношений (1.1) — (1.4) фигурируют члены, связанные с диссипацией. Обозначения следующие: η — коэффициент сдвиговой вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — коэффициенты второй вязкости, причем в силу принципа симметрии Онзагера имеет место равенство $\xi_1 = \xi_4$. Диссипативная функция R представляет собой квадратичную форму от градиентов введенных переменных с коэффициентами η, κ, ξ_i , явный вид для величины R приведен в [1].

1.2. Гамильтоновская форма уравнений движения. Альтернативным бездиссипативной системе (1.1) — (1.4) является представление уравнений движения в так называемой гамильтоновской форме. Метод гамильтоновского формализма является весьма эффектив-

ным для исследования нелинейных волн (см., например, [2, 3]). Для HeII гамильтоновское представление уравнений движения получено в работе [4]. Как показано в [4], гамильтоновскими переменными являются три канонически сопряженные пары (ρ, α) , (S, β) и так называемые переменные Клебша (f, γ) . Эти величины связаны с введенными ранее переменными следующим образом:

$$\mathbf{v}_s = \nabla \alpha, \quad \mathbf{j}_0 = S \nabla \beta + f \nabla \gamma. \quad (1.15)$$

В новых переменных уравнения движения HeII приобретают канонический вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\delta H}{\delta \alpha}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\delta H}{\delta \rho}, \quad \dot{S} = \frac{\delta H}{\delta \beta}, \\ \dot{\beta} &= -\frac{\delta H}{\delta S}, \quad \dot{f} = \frac{\delta H}{\delta \gamma}, \quad \dot{\gamma} = -\frac{\delta H}{\delta f}; \end{aligned} \quad (1.16)$$

здесь гамильтониан H есть энергия E (1.12), выраженная в канонических переменных. Непосредственным вычислением можно убедиться, что соотношения (1.16) совпадают с бездиссипативными уравнениями (1.1)–(1.4).

Канонические уравнения (1.16) могут быть обычным образом получены из лагранжевого формализма и принципа наименьшего действия для гидродинамики сверхтекучей жидкости, описанного в статье [5].

Для исследования задач по нелинейной акустике удобно перейти от переменных ρ, α, S, β к так называемым нормальным координатам, разделяющим в линейном случае первую и вторую звуковые моды ⁽¹⁾. Этот переход основан на том, что канонически сопряженные переменные вводятся неоднозначным образом, и существует целый класс преобразований, называемых каноническими [2], от одного набора к другому, при этом уравнения движения сохраняют гамильтоновскую структуру. В частности, можно перейти к переменным, в которых квадратичная часть гамильтониана H (отвечающая линейным уравнениям) будет диагональна по переменным, характеризующим первый и второй звуки. Переход от фурье-компонент величин ρ, S, α, β к нормальным координатам $a_k^v(t)$ (индексы $v = \pm 1, 2$ идентифицируют волновую моду, знак минус означает комплексное сопряжение) выполнен в работе [6] ⁽²⁾. Нормальные координаты $a_k^v(t)$, называемые еще комплексными амплитудами, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$i \frac{\partial a_k^v}{\partial t} = \text{sign } v \frac{\delta H}{\delta a_k^{-v}} \quad (v = \pm 1, 2). \quad (1.17)$$

Гамильтониан H представляет собой интегростепенный ряд по переменным a_k^v . С точностью до членов третьего порядка величина H имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= \int \omega_k^1 a_k^1 a_k^{-1} dk + \int \omega_k^2 a_k^2 a_k^{-2} dk + \\ &+ \sum_{v_i = \pm 1, 2} \int V_{k_1 k_2 k_3}^{v_1 v_2 v_3} a_{k_1}^{v_1} a_{k_2}^{v_2} a_{k_3}^{v_3} \delta \left(\sum_{j=1}^3 k_j \text{sign } v_j \right) dk_1 dk_2 dk_3; \end{aligned} \quad (1.18)$$

здесь $\omega_k^1 = c_1 |k|$, $\omega_k^2 = c_2 |k|$ — законы дисперсии звуков. Скорости звуков c_1 и c_2 обычным образом могут быть вычислены из линеаризованных уравнений (1.16), в которых гамильтониан H выражается через переменные $\delta \rho, \delta S, \alpha$ и β с точностью, квадратичной по этим величинам.

В пренебрежении величиной

$$\frac{c_1^2 c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} \frac{\beta_T^2}{\sigma_T}$$

(β_T — коэффициент расширения), малой практически во всем диапазоне температур, скорости c_1 и c_2 равны, соответственно

$$c_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\rho_s S^2}{\rho_n \rho} \frac{\partial T}{\partial S} \right)^{1/2}. \quad (1.19)$$

Коэффициенты $V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{v_1 v_2 v_3}$, содержащие всю информацию о нелинейном взаимодействии волн (в данном приближении), называются матричными элементами, или вершинными частями (вершинами). Регулярным образом они могут быть вычислены из разложения энергии $E(\rho, S, \mathbf{j}_0, \mathbf{v}_s)$ по отклонениям от равновесия и последующего перехода к величинам $a_{\mathbf{k}}^v$. Мы не будем выписывать здесь громоздкие выражения для вершин V , отметим лишь важное обстоятельство, что все они имеют одинаковую структурную зависимость от аргументов \mathbf{k} следующего вида:

$$V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{v_1 v_2 v_3} = (k_1 k_2 k_3)^{1/2} \left(P_1^{v_1 v_2 v_3} + P_2^{v_1 v_2 v_3} \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} + P_3^{v_1 v_2 v_3} \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{k_2 k_3} + P_4^{v_1 v_2 v_3} \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3}{k_1 k_3} \right), \quad (1.20)$$

т. е. являются однородными функциями степени 3/2. Для различных видов нелинейных процессов в дальнейшем будет использоваться терминология, введенная в [6]. Если два индекса v_j из трех равны ± 2 , то такие процессы называются распадными. Если два индекса v_j из трех равны ± 1 , то соответствующие процессы называются черенковскими. Если, наконец, все индексы равны ± 1 (или ± 2), то такие процессы называются собственными нелинейными процессами в первой (или второй) звуковых модах, соответственно.

2. Одномерные нелинейные волны.

2.1. Характеристическая форма уравнений нелинейной акустики. В этой главе будут рассмотрены законы распространения одномерных нелинейных волн. Начнем с простейшего случая бездиссипативных уравнений (1.1) — (1.4). Выберем направление распространения волн вдоль оси x . В качестве переменных выберем следующие величины: возмущение плотности ρ' , u — компоненту средней массовой скорости v_x ($\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$), возмущение энтропии единицы массы σ' , w — компоненту относительной скорости ω_x ($\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$). Такой выбор удобен тем, что в линейном случае первая пара ρ', u описывает первый звук, вторая пара σ', w — второй звук. С точностью до членов второго порядка по этим величинам (в этой главе мы ограничимся этой точностью везде, кроме п. 2.9) уравнения движения могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_j A_{ij}(\varphi) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4); \quad (2.1)$$

здесь φ — вектор-столбец, составленный из величин $\varphi_1 = \rho'$, $\varphi_2 = u$, $\varphi_3 = \sigma'$, $\varphi_4 = w$ (индекс x опускаем). Элементы матрицы $A_{ij}(\varphi)$ не более чем линейным образом зависят от переменных φ_k . В явном виде матрица $A_{ij}(\varphi)$ выписана в работе [7].

В линейном случае (см. раздел 2.2) матрица A_{ij} имеет клеточно-диагональный вид и система уравнений (2.1) распадается на две подсистемы, имеющие решениями волны, в которых колеблются либо величины

ρ' и v (первый звук), либо σ' и w (второй звук). Любое общее решение является суперпозицией этих двух звуков. В нелинейном случае матрица $A_{ij}(\varphi)$ не является клеточно-диагональной, звуки «перепутаны», пары ρ', v , а также σ', w уже не представляют «чистые» волновые моды и возбуждение любой из них приводит к колебаниям всех переменных. Интуитивно ясно, что при этом в гелии возникают оба типа волн, но что это за волны, что они переносят, как распространяются, взаимодействуют и т. д. — этот вопрос оставался открытым. Существенного продвижения в исследовании этой задачи удалось достичь с помощью метода инвариантов Римана, который здесь можно развить для волн, бегущих в одном направлении вдоль оси x .

Следуя [8], умножим уравнения (2.1) на левый собственный для матрицы $A_{ij}(\varphi)$ вектор-строку $l(\varphi)$, определяемый таким образом: $\Sigma l_j(\varphi) A_{ij} = \xi l_i$, где ξ — собственное число. Для различных собственных векторов $l^{(\mu)}(\varphi)$ имеем

$$\sum_i l_i^{(\mu)} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \xi^{(\mu)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = 0 \quad (i, \mu = 1, 2, 3, 4). \quad (2.2)$$

Чтобы в уравнениях (2.2) присутствовали члены не более чем второго порядка малости, нужно, чтобы элементы вектор-строки $l_i(\varphi)$ зависели не более чем линейным образом от величин φ_k . Приведенная запись уравнений движения отличается тем, что в каждом из четырех соотношений (2.2) все переменные дифференцируются в одном и том же направлении в x, t плоскости. Эти направления, называемые характеристиками, определяются равенствами $dx/dt = \xi^{(\mu)}(\varphi(x, t))$, $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Для различных собственных векторов $l^{(\mu)}(\varphi)$ характеристики $\xi^{(\mu)}(\varphi)$ имеют следующий вид:

$$\xi^{(1,2)} = v \pm \left(c_1 + \frac{1}{2c_1} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho^2} \rho' \right), \quad (2.3)$$

$$\xi^{(3,4)} = v + \left(\frac{2\rho_s}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho_n} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) w \pm \left(c_2 + \frac{\partial c_2}{\partial \sigma} \sigma' + \frac{\partial c_2}{\partial \rho} \rho' \right). \quad (2.4)$$

Если пфафова форма $\Sigma l_i^{(\mu)}(\varphi) d\varphi_i$ интегрируется, т. е. является полным дифференциалом некоторой величины $I_\mu(\varphi)$, то возможно дальнейшее упрощение уравнений (2.2):

$$\frac{\partial I_\mu}{\partial t} + \xi^{(\mu)} \frac{\partial I_\mu}{\partial x} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (2.5)$$

Замечательное свойство системы (2.5), делающее ее исключительно удобной для исследования конкретных задач, состоит в том, что каждое из уравнений (2.5) описывает закон сохранения величины $I_\mu(\varphi)$ вдоль характеристического направления. Величины $I_\mu(\varphi)$ называются инвариантами Римана (ИР). Если в начальный момент времени задан лишь один из ИР, то, как следует из (2.5), и в последующие моменты он будет один. Таким образом, возмущения, переносимые ИР, являются в этом смысле независимыми. Это обстоятельство, а также относительно простой вид системы (2.5) позволяют рассматривать волны, описываемые инвариантами Римана I_1, I_2 , а также I_3, I_4 , как аналоги первого и второго звуков.

2.2. Линейная акустика. В предельном случае бесконечно малых амплитуд, когда в величинах $l^{(\mu)}(\varphi)$ и $\xi^{(\mu)}(\varphi)$ можно пренебречь зависимостью от φ , пфаффовы формы представляют собой сумму дифференциалов $d\varphi_i$ с постоянными коэффициентами. Такие формы, разу-

меется, интегрируются. При этом линейные ИР I_μ^0 имеют такой вид:

$$I_{1,2}^0 = \rho' \pm \frac{\rho}{c_1} v, \quad I_{3,4}^0 = \sigma' \pm \frac{\rho_s \sigma}{\rho c_2} \omega. \quad (2.6)$$

Эволюция величин I_μ^0 описывается уравнениями (2.5), в которых $\xi^{(1,2)} = \pm c_1$, $\xi^{(3,4)} = \pm c_2$. Таким образом, мы пришли к классическому результату (см. [1]) о существовании в HeII двух типов звуковых волн. Из выражений (2.6) видно, что при начальном возмущении плотности ρ' и (или) скорости v жидкости распространяется одна волна первого звука. Наоборот, при начальном возмущении энтропии σ' и (или) относительной скорости ω в гелии будет распространяться одна волна второго звука. Таким образом, в пренебрежении членами, связанными с коэффициентом расширения β_T , волновые моды независимы.

Частный случай волн, бегущих в одну сторону, можно получить, положив ИР I_2^0 и I_4^0 равными нулю. В этом случае волны, бегущие влево вдоль оси x , отсутствуют, а в волнах, бегущих вправо, появляется «жесткая» зависимость между величинами ρ' и v в первом звуке, и σ' и ω во втором,

$$\rho' = \frac{\rho}{c_1} v, \quad \sigma' = \frac{\rho_s \sigma}{\rho c_2} \omega. \quad (2.7)$$

В линейном случае нетрудно включить в указанную схему, члены, содержащие β_T . Как показывают выкладки, для волн, бегущих вправо, ИР имеют следующий вид:

$$I_1^\beta = \rho' - \sigma' \frac{\partial \rho / \partial T}{\partial \sigma / \partial T}, \quad I_3^\beta = \sigma' + \frac{c_2^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \rho'. \quad (2.8)$$

Кроме ИР, на малые величины ($\propto \beta_T$) изменяются скорости звуков c_1 и c_2 . В отличие от (2.6) выражения (2.8) содержат перекрестные члены (например, в I_1^β входит переменная σ' , характеризующая второй звук), которые малы в меру малости β_T . Наличие этих перекрестных членов ведет к «зацеплению» звуков. Например, при выдвигании поршня можно, помимо обычной волны плотности, зарегистрировать волну энтропии, движущуюся со скоростью, близкой к c_2 . Причем сама волна плотности, движущаяся со скоростью, близкой к c_1 , содержит малую «примесь» возмущения энтропии σ' . Однако, корректнее говорить здесь не о зацеплении звуков, а об ином представлении звуковых мод. То есть независимыми являются не колебания плотности ρ' и энтропии σ' , а некоторые их комбинации, совпадающие, очевидно, с ИР. В связи с описанными результатами нужно отметить недавнюю работу [81], в которой предложен некоторый общий формализм для описания линейных «зацепленных» акустических систем, в частности, для HeII.

2.3. Инварианты Римана в нелинейном случае. В случае конечных (но малых) амплитуд пфаффовы формы представляют собой сумму четырех дифференциалов $d\phi_i$ с коэффициентами, зависящими от ϕ_k (не более чем линейно). Такие формы, вообще говоря, не интегрируются, и получить ИР в общем случае нельзя. Однако оказалось возможным выполнить это для волн, бегущих в одну сторону [7].

Напомним, что такое бегущие в одну сторону волны или, как их называют, простые волны в обычной газодинамике. Аппарат простых волн, разработанный Риманом, сыграл очень важную роль при решении различных газодинамических задач (см. [8, 9]). С математической точки зрения простые волны представляют собой частный случай решения уравнений Эйлера, при котором искомые переменные ρ' и v находятся

между собой в некоторой функциональной зависимости $v=v(\rho')$. Для получения эволюционных уравнений для простых волн применяется следующий прием. Зависимость $v(\rho')$ подставляется в уравнения Эйлера, при этом производные типа $\partial v/\partial t$ раскрываются как $(dv/d\rho)\partial\rho'/\partial t$ и т. д. В результате получается система алгебраических уравнений относительно производных $\partial\rho'/\partial t$ и $\partial\rho'/\partial x$. Условие совместимости этой системы позволяет определить функцию $v(\rho')$, с помощью которой легко получить эволюционное уравнение для величины $\rho'(x, t)$.

В случае сверхтекучего гелия аналогичным приемом воспользоваться нельзя. Действительно, как было показано в предыдущем пункте, в линейном случае в волнах, бегущих вправо, величины ρ' и v , а также σ' и w находятся между собой в функциональной зависимости такого вида (см. (2.7)):

$$v=v(\rho'), \quad w=w(\sigma'). \quad (2.9)$$

В нелинейном случае матрица $A_{ij}(\varphi)$ не является клеточно-диагональной, в ней присутствуют недиагональные элементы, вследствие чего в уравнениях движения появляются перекрестные члены, квадратичные по переменным φ_k . Естественно предположить поэтому, что в нелинейном случае соотношения (2.9) изменяются следующим образом:

$$v=v(\rho', \sigma'), \quad w=w(\sigma', \rho'), \quad (2.10)$$

причем зависимость от второго аргумента имеет второй порядок малости ⁽⁴⁾. Если, далее, функции $v(\rho', \sigma')$, $w(\sigma', \rho')$ искать из условия совместимости алгебраических уравнений (для переменных $\partial\rho'/\partial t$, $\partial\rho'/\partial x$, $\partial\sigma'/\partial t$, $\partial\sigma'/\partial x$), то мы получим одно условие на две функции, т. е. найти искомые зависимости подобным образом нельзя.

Посмотрим, что представляют собой простые волны с несколько более глубокой точки зрения. Для обычной газодинамики описанную выше схему получения ИР можно осуществить для изоэнтропических течений. Действительно, в этом случае имеется всего две переменных (ρ' , v) и пфаффовая форма всегда интегрируется. В результате в обычной газодинамике имеется два ИР, соответствующие двум различным характеристикам. Если один из них тождественно равен нулю, то оставшийся ИР описывает простую волну. Таким образом, два основных свойства волн, бегущих в одну сторону (тривиально следующих одно из другого в обычной газодинамике), следующие: это, во-первых, наличие функциональной зависимости между переменными, и во-вторых, тождественное исчезновение волны, бегущей в другую сторону. Эти два свойства могут быть использованы для обобщения аппарата простых волн на случай сверхтекучего гелия. Отсылая за подробностями вычислений к статье [7], выпишем окончательный результат.

Волны, распространяющиеся в положительном направлении вдоль оси x , могут быть описаны с помощью ИР I_1 и I_3 , которые равны

$$I_1=\rho'+\alpha_1(\rho')^2+\alpha_2(\sigma')^2, \quad (2.11)$$

$$I_3=\sigma'+\beta_1(\sigma')^2+\beta_2\rho'\sigma', \quad (2.12)$$

здесь использованы обозначения (2.13)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2c_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \right),$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\rho c_2}{\rho_s \sigma c_1} \right)^2 \left(\frac{2\rho_s \rho_n}{\rho} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_n}{\rho} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 T / \partial \sigma^2}{\partial T / \partial \sigma} + \frac{2\rho_n}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\rho_n}{\rho} \right),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4\rho} \left[\frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2} - \frac{c_2 \rho^2}{c_1 - c_2} \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_n} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_s}{\rho} \right]. \quad (2.13)$$

ИР I_1 и I_3 удовлетворяют уравнениям (2.5), в которых следует выразить характеристики $\xi^{(1)}$, $\xi^{(3)}$ через I_1 , I_3 .

Таким образом, в случае бегущих в одну сторону волн исходная система четырех уравнений (2.1) приводится к двум уравнениям типа (2.5), каждое из которых описывает закон сохранения величины I_1 (или I_3) вдоль характеристического направления $\xi^{(1)}$ (или $\xi^{(3)}$). Несимметричный характер зависимости ИР I_1 и I_3 от переменных ρ' и σ' является следствием того, что термодинамические величины зависят от относительной скорости w , а от среднemasсовой скорости v , разумеется, не зависят (см. раздел 1.1, а также [1]).

2.4. Нелинейный распад волны энтропии. Специальный вид уравнений движения, записанных в форме ИР, значительно упрощает исследование различных конкретных задач.

В качестве примера рассмотрим распространение волн в HeII в таких двух случаях: а) на границе $x=0$ создается возмущение плотности (движется поршень); б) на границе $x=0$ создается возмущение энтропии (нагревается стенка).

Прежде чем приступить к этой задаче, полезно явным образом выразить зависимость ρ' и σ' от ИР I_1 , I_3 . С удерживаемой точностью искомая зависимость будет следующей:

$$\rho' = I_1 - \alpha_1 I_1^2 - \alpha_2 I_3^2, \quad (2.14)$$

$$\sigma' = I_3 - \beta_1 I_3^2 - \beta_2 I_1 I_3. \quad (2.15)$$

В случае а) на границе $x=0$ имеем $\rho'(0, t) = \rho_0(t)$, $\sigma'(0, t) = 0$. В соответствии с формулами для ИР (2.11) — (2.12) в этом случае лишь один из ИР I_1 отличен от нуля. Этот инвариант в соответствии с первым из уравнений (2.5) остается постоянным вдоль характеристики $\xi^{(1)}$. Таким образом, он описывает волну, распространяющуюся со скоростью близкой к c_1 . В этой волне, как можно видеть из формул обращения (2.14) — (2.15), имеется лишь возмущение плотности ρ' , в то время как возмущение энтропии σ' равно нулю. Итак, при возмущении плотности на границе жидкости в объем гелия распространяется лишь волна плотности ρ' (и, разумеется, давления p' и скорости v).

В случае б) ситуация оказалась несколько интереснее. Если на стенке $x=0$ создавать возмущение энтропии $\sigma'(0, t) = \sigma_0(t)$ (при этом $\rho'(0, t) = 0$), то, как легко видеть, оба ИР отличны от нуля. Поскольку волны, связанные с I_1 , I_3 , распространяются с различными скоростями, то в x , t плоскости они разделяются, как показано на рис. 1. Вперед со скоростью $\xi^{(1)} \approx c_1$ убегает волна, несущая инвариант I_1 . В этой волне, как можно видеть из формул обращения (2.14) — (2.15), имеется возмущение плотности ρ' по порядку величины равное $\rho' \sim \alpha_2 \sigma'^2$, при этом возмущение энтропии $\sigma' = 0$. Вслед за волной, переносимой I_1 , движется со скоростью $\xi^{(3)} \approx c_2$ волна, переносимая I_3 . С величиной I_3 связано как возмущение плотности $\rho' \sim -\alpha_2 \sigma_0^2$, так и возмущение энтропии $\sigma' \sim \sigma_0$.

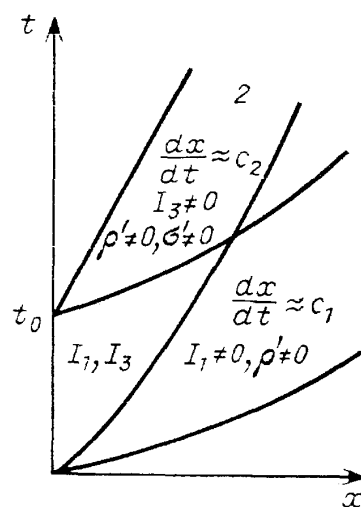
Таким образом, при импульсном нагреве стенки наблюдается следующая картина. От стенки со скоростью первого звука движется «предвестник» — волна плотности. Вслед за ней со скоростью второго звука распространяется «смесь» волны плотности и энтропии.

Оценим величину описанного эффекта. Из выражения (2.11) для ИР I_1 и формул обращения (2.14)—(2.15) видно, что количественно мера трансформации второго звука в «предвестник» определяется коэффициентом α_2 (см. (2.13)). Давление δp в «предвестнике», следовательно, будет следующим:

$$\delta p = \frac{W^2}{2(\rho_s \sigma T)^2} \left(\frac{2\rho_s \rho_n}{\rho} - \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho_n}{\rho} \right). \quad (2.16)$$

Численные оценки показывают, что второе слагаемое во второй скобке всегда больше первого (ср. с [12]). При импульсе тепла с амплитудой W порядка 10 Вт/см^2 ($T \approx 1,8$) давление в предвестнике будет величиной порядка $\delta p \approx -10^4 \text{ г/см} \cdot \text{с}^2$.

Рис. 1. Иллюстрация нелинейного распада импульса энтропии $\sigma'(\theta, t)$, возникающего при нагреве стенки в течение времени t_0 . Волна, переносящая ИР I_1 , распространяется вдоль характеристик, заполняющих полосу 1. В этой волне, как следует из (2.14), (2.15), отлично от нуля лишь возмущение плотности. Наклон полосы 1 равен $dx/dt = \xi^{(1)} \approx c_1$. Волна, переносящая ИР I_2 , распространяется по характеристикам, заполняющим полосу 2. В этой волне отличны от нуля как возмущение плотности, так и возмущение энтропии



Вопрос о рождении волны давления при накачке в систему второго звука обсуждался ранее в работе [12]. Однако метод последовательных приближений в той форме, которой пользовались авторы статьи [12], не позволил описать нелинейное искажение волны и разделение сигнала на «предвестник» и основной импульс.

Как показывает анализ, учет термической сжимаемости гелия β_T приводит к тому, что в обоих из рассматриваемых случаев возникают две волны, в которых имеются возмущения всех гидродинамических переменных [82]. При этом можно выделить два механизма передачи волновой энергии в «чужую» моду. Это, во-первых, термический распад, рассмотренный в разделе 2.2, а во-вторых, описанный в этом разделе нелинейный распад. При этом коэффициенты α и β , входящие в выражения (2.11)—(2.12) для ИР и описывающие нелинейный распад, изменяются на величины, пропорциональные β_T . В [82] показано, что при реальных условиях экспериментов важен учет обоих механизмов.

2.5. Эволюция интенсивных волн. Рассмотрим подробнее распространение нелинейных волн в соответствии с эволюционными уравнениями (2.5). Займемся сначала вторым звуком. Как было показано в предыдущем разделе, при возмущении энтропии на границе в гелии возникают две волны. В передней волне амплитуды возмущений малы, вследствие чего характеристика $\xi^{(1)}$ с удерживаемой точностью равна c_1 . В результате эволюция этой волны определяется первым из уравнений (2.5), в котором $\xi^{(1)} = c_1$, т. е. подчиняется обычной линейной теории. В задней волне, переносящей I_3 (в этой волне $I_1 = 0$), характеристика $\xi^{(3)}$ отлична от c_2 уже в пределах выбранной точности и зависит от значений колеблющихся переменных ρ', v, σ', w . Однако не все эти

переменные являются независимыми. Во-первых, имеются функциональные связи $v=v(\rho', \sigma')$, $w=w(\sigma', \rho')$ (см. (2.10)). Во-вторых, равенство нулю в задней волне ИР $I_3(\rho', \sigma')$ налагает связь между ρ' и σ' . Реально в такой волне имеется всего одна независимая переменная, например, $w(x, t)$. Удобнее, однако, иметь дело не с переменной w , а со связанной с ней величиной v_n . Выразив характеристику $\xi^{(3)}$ и ИР I_3 через v_n и подставляя их в третье из уравнений (2.5), мы придем к следующему результату:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + (c_2 + \alpha_2(T) v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0; \quad (2.17)$$

здесь $\alpha_2(T)$ — коэффициент нелинейности второго звука, равный

$$\alpha_2(T) = \frac{\sigma T}{c_1} \frac{\partial}{\partial T} \left(c_2^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_p. \quad (2.18)$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при начальном возбуждении плотности переднюю волну можно описывать единственной переменной $v(x, t)$, уравнение для которой имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_1 + \alpha_1(T) v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (2.19)$$

здесь

$$\alpha_1(T) = \left(1 + \frac{\rho}{2c_1^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho^2} \right) = 1 + \frac{\partial \ln c_1}{\partial \ln \rho}. \quad (2.20)$$

По сути дела, приведенные результаты совпадают с ранее полученными Халатниковым [11], который нашел нелинейные добавки к скоростям звуков (фактически вычислил $\alpha_1(T)$ и $\alpha_2(T)$), используя метод простых волн для исходной системы (2.1), т. е. предполагая, что все искомые переменные ρ' , v , σ' , w функционально связаны с одной из них. В методе ИР таких переменных две, однако в описываемом в этом пункте частном случае, когда один из ИР равен нулю, возникает дополнительная (к соотношениям (2.10)) связь между исходными переменными, в результате чего остается одна независимая функция. Другими словами, равенство нулю одного из ИР означает переход от простых волн ранга 2 (см. примечание ⁽⁴⁾) к обычным простым волнам.

Решение задачи с граничными условиями для уравнений вида (2.17) — (2.19) особого труда не представляет (см., например, [8, 9, 13]). Однако в целях большей наглядности мы опишем решение, исходя из качественных соображений. При бесконечно малых амплитудах (линейный случай) уравнения (2.17), (2.19) описывают распространение начальных возмущений как целого, со скоростями c_2 и c_1 соответственно. При конечных, но малых амплитудах выражения $\alpha_2(T) v_n$ (или $\alpha_1(T) v$) в уравнениях (2.17), (2.19) можно трактовать как добавки к скоростям распространения звуков c_2 (или c_1), которые, однако, зависят от местного значения колеблющейся величины v_n (или v). Это означает, что различные участки волнового импульса движутся с различными скоростями и волновой профиль (вид волны в координатах v_n , $x - c_2 t$ или v , $x - c_1 t$) деформируется. На нем возникает укрупнение и образуется ударный фронт, после чего уравнения перестают быть справедливыми и требуются дополнительные соображения о дальнейшей эволюции волн.

Случай первого звука вплоть до буквенных обозначений совпадает с обычной газодинамикой. Величина $\alpha_1(T)$ для гелия равна примерно четырем, т. е. является положительной. В результате импульс первого звука с положительным возмущением плотности $\rho' > 0$ ($v > 0$) ведет себя следующим образом. Более интенсивные участки движутся с большей

скоростью, горб догоняет основание волны, передний фронт становится круче и на нем образуется разрыв. Схематически эволюция импульсов изображена на рис. 2, а. Характерное время образования разрыва τ_p равно $\tau_p \sim (\alpha_1(T)vk)^{-1}$, где k^{-1} — пространственный размер возмущения. В случае отрицательного импульса ($\rho' < 0, v < 0$) горб отстаёт, и разрыв образуется на заднем фронте волны. В фурье-представлении этот процесс описывает рождение высших гармоник.

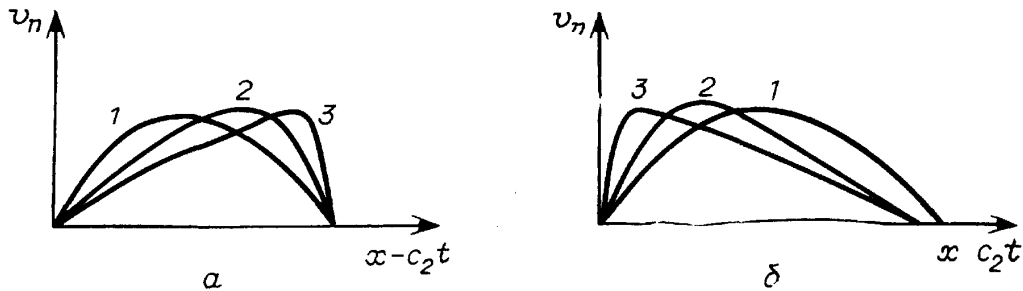


Рис. 2. Схематическое изображение эволюции импульса первого звука (а) и импульса второго звука при отрицательном коэффициенте нелинейности $\alpha_2(T) < 0$ (б). Волновые профили изображены в системах координат, движущихся с соответствующими скоростями звуков. Цифрами 1—3 изображены последовательные моменты времени

Несколько интереснее случай второго звука. Коэффициент $\alpha_2(T)$ является сложной функцией температуры (рис. 3). Из рисунка видно, что имеются области как положительных, так и отрицательных значений величины $\alpha_2(T)$. Если $\alpha_2(T) < 0$, то импульс энтропии с $\sigma' > 0$ ($v_n > 0$) укрупняется и образует разрыв на заднем фронте волны (рис. 2, б). Для положительных $\alpha_2(T)$ ситуация совпадает со случаем первого звука

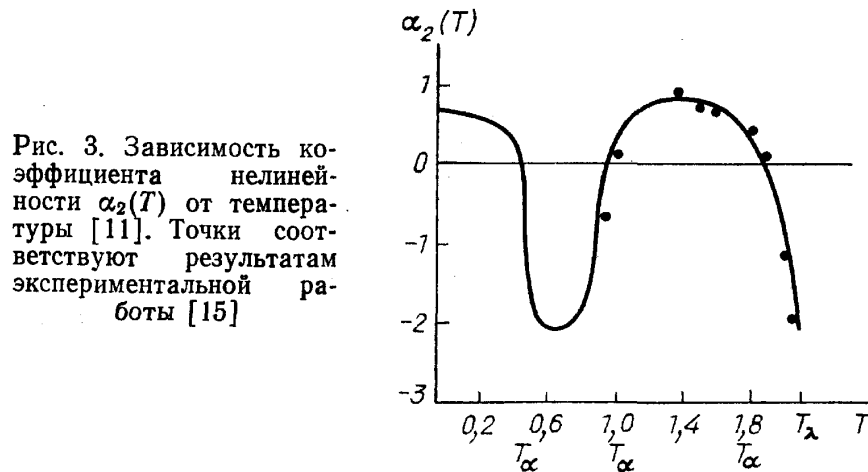


Рис. 3. Зависимость коэффициента нелинейности $\alpha_2(T)$ от температуры [11]. Точки соответствуют результатам экспериментальной работы [15]

(рис. 2, а). При температурах $T_\alpha \approx 1,88$ К, $T_\alpha \approx 0,9$ К величина $\alpha_2(T)$ равна нулю, квадратично-нелинейный член исчезает и эволюция импульсов происходит под влиянием членов следующего, третьего порядка малости (см. раздел 2.9). Образование разрывов на заднем фронте волны — явление специфическое для HeII.

После образования разрыва эволюцию импульса можно описать с помощью закона сохранения для величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_n dx,$$

который следует из уравнения (2.17) (для определенности возьмем случай второго звука). Из этого закона, в частности, следует, что разрыв

с амплитудой Δv_n движется со скоростью U_p , равной

$$U_p = c_2 + \frac{\alpha_2(T) \Delta v_n}{2}. \quad (2.21)$$

Качественно эволюция волны изображена на рис. 4. Поскольку разрыв движется (в сопровождающей системе) со скоростью $\alpha_2(T) \Delta v_n / 2$ (2.21), импульс увеличивает свою пространственную протяженность. Из закона сохранения для величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_n dx$$

следует, что амплитуда разрыва Δv_n должна уменьшаться. Асимптотически решение описывается треугольником, амплитуда которого затухает со временем как $t^{-1/2}$. Обратим внимание на то, что, несмотря на уменьшение амплитуды, все равно ни на каком этапе распространения

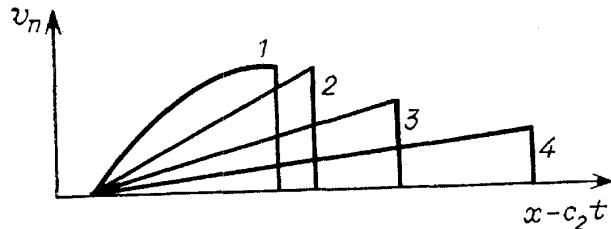


Рис. 4. Схематическое изображение распространения импульсов 2-го звука после образования разрыва. Коэффициент нелинейности $\alpha_2(T) > 0$

волны нельзя перейти к линейному случаю. Описанное поведение интенсивных тепловых импульсов наблюдалось во многих экспериментальных работах [13—19]. При этом получено хорошее количественное согласие для величины $\alpha_2(T)$ [15] и для времени пролета импульса, рассчитанного по уравнению (2.17) [13].

2.6. Затухающие волны. В этом пункте мы рассмотрим влияние диссипативных членов на распространение одномерных волн. Учесть диссипативные члены при выводе уравнений для бегущих волн можно в рамках теории возмущений, рассматривая их как малые добавки. Фактически необходимо, чтобы нелинейные и вязкие члены представляли величины одного порядка малости. Получим уравнение для волны второго звука. Дополняя диссипативными членами последние два уравнения системы (2.1), имеем

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + A_{33} \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + A_{34} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial x^2}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + A_{43} \frac{\partial \sigma'}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \omega}{\partial x} = b \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad (2.23)$$

здесь A_{ij} — элементы матрицы $A_{ij}(\varphi)$ (см. раздел 2.1), величина b равна

$$b = \frac{\rho_s}{\rho \rho_n} \left[\frac{4}{3} \eta - (\zeta_1 + \zeta_4) \rho + \zeta_2 + \zeta_3 \rho^2 \right].$$

В уравнениях (2.22) — (2.23) опущены члены, включающие ρ' и v , как имеющие третий порядок малости (см. раздел 2.5).

В отсутствии диссипативных членов уравнения (2.22) — (2.23) имеют решение в виде бегущей волны, в которой имеется функциональная связь между переменными $\omega = \omega(\sigma')$ (см. (2.10)); напоминаем, что $I_1(\rho', \sigma') = 0 \Rightarrow \rho' = \rho'(\sigma')$. При наличии диссипации это соотношение не выполняется. Можно, однако, предположить, что вязкость изменит это соотношение на некоторую величину $\psi(x, t)$, второго порядка малости,

т. е.

$$\omega = \omega(\sigma') + \psi(x, t). \quad (2.24)$$

Решения типа (2.24) называются квазипростыми волнами [20]. Функция $\psi(x, t)$ может быть найдена методами теории возмущений (см. [20]). Используя затем зависимость (2.24) в системе (2.22) — (2.23), можно прийти к следующему уравнению для величины v_n :

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + (c_2 + \alpha_2(T) v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x} = \mu_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \quad (2.25)$$

где

$$\mu_2 = \frac{\rho_s}{2\rho\rho_n} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 - 2\rho\zeta_1 + \rho^2\zeta_3 + \frac{\rho_n \kappa}{\rho_s C} \right).$$

Уравнение типа (2.25) часто встречается в теории нелинейных волн и называется уравнением Бюргерса. В движущейся со скоростью c_2 системе отсчета ($x \rightarrow x - c_2 t$) уравнение Бюргерса подстановкой

$$v_n = - \frac{2\mu_2}{\alpha_2(T)} \frac{\partial \ln \varphi}{\partial x}$$

приводится к уравнению теплопроводности

$$\varphi_t = \mu_2 \varphi_{xx}.$$

В результате задача об эволюции нелинейной волны в вязкой среде решается в замкнутом аналитическом виде (см. монографии [20, 21]).

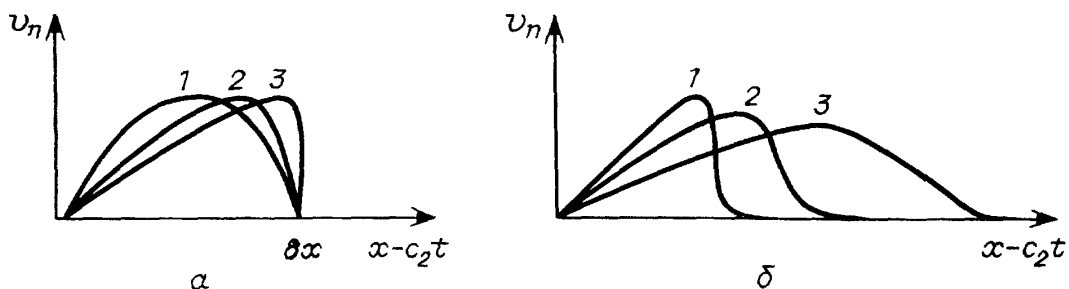


Рис. 5. Эволюция нелинейного импульса второго звука в диссипативной среде. На первом этапе (а) происходит укрупнение волнового профиля и образование «размытого» ударного фронта. На втором этапе (б) происходит увеличение длительности и соответствующее уменьшение амплитуд

Выкладки показывают, что первоначальное поведение волны близко к бездиссипативному случаю. Например, нелинейный член $\alpha_2(T) v_n \partial v_n / \partial x$ по-прежнему описывает укрупнение волнового профиля. Однако, в отличие от невязкого случая, это укрупнение не приводит к образованию разрыва. Действительно, по мере укрупнения, малый вначале диссипативный член $\mu_2 \partial^2 v_n / \partial x^2$ за счет роста градиента скорости возрастает и препятствует дальнейшему искажению волнового профиля. Сравнивая по порядку величины нелинейный и вязкий члены в (2.25), найдем, что характерная протяженность волнового фронта $\delta x \sim \mu_2 / \alpha_2(T) \Delta v_n$, где Δv_n — амплитуда импульса. Начальная стадия эволюции импульса изображена схематически на рис. 5, а. Дальнейшая эволюция волны происходит в соответствии с законом сохранения для величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_n dx$$

(см. раздел 2.5), который для уравнения Бюргерса также имеет место. Импульс увеличивает свою протяженность, а его амплитуда падает та-

ким образом, что площадь волнового профиля остается постоянной. По мере уменьшения амплитуды растет протяженность крутого фронта $\delta x \propto 1/\Delta v_n$. Заключительный этап эволюции, когда «размытие» фронта δx становится сравнимым с размером импульса, может быть описан в рамках линейной теории. Этим распространение затухающей волны отличается от бездиссипативного случая, где предельный переход к линейной теории отсутствует. Схематически эволюция импульса после укручения переднего фронта изображена на рис. 5, б.

2.7. Дисперсия второго звука. Линеаризованное уравнение Бюргерса (2.25) приводит к следующему закону дисперсии ω_k^2 для монокроматической волны, в которой $v_n \propto \exp[i(\omega_k^2 t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$:

$$\omega_k^2 = c_2 |\mathbf{k}| + i\mu_2 k^2. \quad (2.26)$$

Выражение (2.26) может быть рассмотрено как первые члены разложения частоты ω_k^2 по степеням волнового вектора \mathbf{k} . Второе слагаемое, описывающее затухание, является мнимой величиной. Следующий член разложения описывает дисперсию скорости звука. Запишем, с учетом дисперсии скорости, частоту второго звука ω_k^2 в таком виде:

$$\omega_k^2 = c_2 |\mathbf{k}| + iD_2 k^2 + D_3 k^3. \quad (2.27)$$

В отличие от (2.25) обозначим здесь коэффициент затухания через D_2 , имея в виду, что он может отличаться от величины μ_2 . Фактически дисперсия (как, впрочем, и затухание) связана с наличием внутренней структуры жидкости, временной или пространственной, и выражение (2.27) суть разложение величины $\omega_k^2/c_2 k$ по степеням безразмерного параметра kl , где l — внутренний масштаб системы. Например, в обычной акустике l определяется длиной свободного пробега молекул. При этом первое слагаемое в (2.27) соответствует приближению Эйлера, второе — приближению Навье — Стокса, третье учитывает Барнеттовские поправки. В гелии в низкотемпературной области в качестве l может выступить длина пробега квазичастиц.

Одной из областей, где возможно существенное влияние дисперсии, является окрестность λ -перехода. Вблизи T_λ дисперсия скорости второго звука обусловлена релаксационными эффектами и взаимодействием звуковой волны с развитыми флуктуациями термодинамических величин [1, 22, 23]. Согласно флуктуационной теории фазовых переходов, закон дисперсии второго звука является функцией от безразмерного параметра $k\xi$, где ξ — корреляционный радиус (см. [22, 23]). Перепишем с учетом сказанного выражение (2.27) в следующем виде:

$$\omega_k^2 = c_2 |\mathbf{k}| (1 + iA_2 \xi k + A_3 \xi^2 k^2). \quad (2.28)$$

Коэффициент A_2 может быть определен из измерений затухания второго звука [24—26], или экспериментов по рассеянию света [27] и составляет величину порядка $A_2 \sim 0,1$. Сложнее обстоит дело с определением величины A_3 . Дело в том, что дисперсия очень мала и прямое ее измерение методами линейной акустики практически невозможно. Действительно, даже такие рекордные для второго звука частоты как $\nu \sim 10^4$ Гц, приводят к относительному изменению скорости $\Delta c_2/c_2$, равному 10^{-6} при $T_\lambda - T \sim 1$ мК (при этом для оценки использовано, что A_3 порядка единицы). В нелинейном случае, как можно видеть из предыдущего изложения, в волне самопроизвольно возникают высокочастотные гармоники и дисперсия может сыграть существенную роль в эволюции звуковых импульсов.

С учетом дисперсии эволюционное уравнение для волны второго звука имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + (c_2 + \alpha_2(T) v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x} = D_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - D_3 \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3}. \quad (2.29)$$

Оно может быть получено подобно уравнению Бюргерса (2.25), в предположении, что члены в правой части не превосходят по величине нелинейное слагаемое [28]. Соотношение (2.29) также часто встречается в теории нелинейных волн и носит название уравнения Кортевега — де Фриса — Бюргерса (КДФБ).

Если параметры волны таковы, что первое слагаемое в правой части уравнения КДФБ существенно превосходит второе, то дисперсией можно пренебречь и эволюция волны происходит, как это описано в предыдущем пункте. В обратном случае, когда диссипация мала, соотношение (2.29) сводится к известному уравнению КДВ (см., например, [20, 21, 29]). Уравнение КДВ решается аналитически с помощью так называемого метода обратной задачи теории рассеяния (МОЗТР). Одним из наиболее ярких результатов МОЗТР является вывод о распаде начального импульса на ряд отдельных возмущений-солитонов, имеющих неизменную форму и движущихся с постоянными, зависящими от амплитуд скоростями. Подробности, связанные с МОЗТР и решением уравнения КДВ, можно найти в монографии [29].

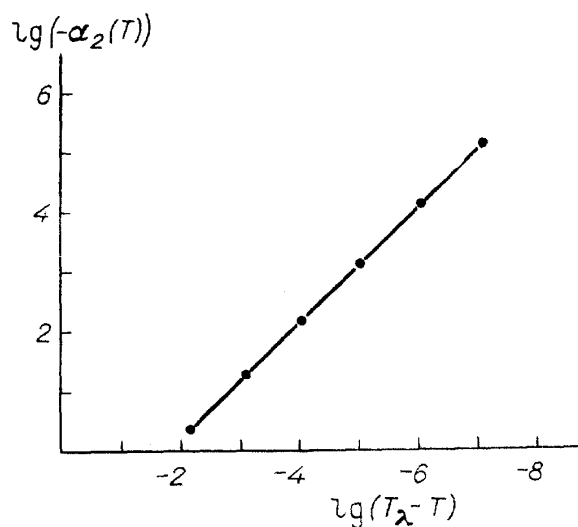


Рис. 6

Реально для гелия начальные импульсы, как правило, не содержат высоких гармоник, и их эволюция на первой стадии происходит в соответствии с уравнением Бюргерса. Однако по мере укрупнения профиля волны член с третьей производной в (2.29) растет, и дисперсия начинает влиять на эволюцию волны. Как показывают численные исследования уравнения КДФБ [20], профиль волны может приобрести солитонный вид, а фронт приобретает осциллирующую структуру. Критерий, при котором возможно образование этих солитонообразных всплесков, можно получить, сравнивая диссипативный и дисперсионный члены в уравнении КДВБ (2.29). Член со второй производной имеет величину порядка $D_2 \Delta v_n / (\delta x)^2$, где Δv_n — амплитуда импульса второго звука. Дисперсионный член равен $D_3 \Delta v_n / (\delta x)^3$. Выбирая в качестве δx величину «размытия» ударного фронта $\delta x \sim D_2 / \alpha_2(T) \Delta v_n$, получим, что дисперсионный и диссипативный члены сравнимы при условии

$$(\alpha_2(T) D_3 \Delta v_n)^{1/2} \sim D_2. \quad (2.30)$$

Более строгим образом критерий, при котором возможно наблюдение осциллирующей структуры фронта, может быть получен рассмотрением конкретного вида начального возмущения. Например, для стационарной ударной волны критерий типа (2.30) приведен в следующем разделе.

В связи с рассмотрением распространения второго звука в окрестности λ -перехода, представляется важным рассмотреть поведение нели-

нейного члена $\alpha_2(T)v_n \partial v_n / \partial x$ в зависимости от температуры. Из формулы (2.18) и соотношений скейлинга следует, что $\alpha_2(T) \propto (T_\lambda - T)^{-1}$, т. е. быстро возрастает по мере приближения к T_λ (рис. 6). В связи с этим нужно обсудить правомерность линейной постановки акустических задач вблизи λ -перехода. Скорость второго звука c_2 по мере приближения к T_λ уменьшается, $c_2 \propto |T_\lambda - T|^{1/3}$, следовательно, увеличивается (при постоянной амплитуде накачки Δv_n) параметр $\Delta v_n / c_2$, по которому производится формальная линеаризация уравнений. Но даже если условие $\Delta v_n / c_2$ выполняется, нелинейный член все равно может оказаться не малым из-за большой величины $\alpha_2(T)$. Это следует иметь в виду при изучении HeII в области фазового перехода акустическими методами. Вполне возможно, что завышенное значение коэффициента поглощения второго звука, полученное в работе [24], обусловлено незаконной линейной интерпретацией эксперимента.

2.8. Стационарные решения уравнений Бюргерса и КДФБ. Полученные в предыдущих разделах уравнения Бюргерса и КДФБ имеют стационарные решения в виде бегущей волны неизменного профиля, $v_n = v_n(x - Ut)$. Получим сначала такое решение для уравнения Бюргерса. Подстановкой $v_n = v_n(x - Ut)$ соотношение (2.25) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(-U + c_2 + \alpha_2(T)v_n)v_n' = \mu_2 v_n'' \quad (2.31)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу $\xi = x - Ut$. Интегрирование уравнения (2.31) при граничных условиях $v_n(\infty) = 0$, $v_n'(\infty) = 0$ приводит к следующему результату:

$$v_n(x, t) = \Delta v_n \left[1 + \left(\exp \frac{\alpha_2(T) \Delta v_n}{2\mu_2} \right) (x - Ut) \right]. \quad (2.32)$$

Решение (2.32) представляет собой ступеньку с «размытым» фронтом, движущуюся слева направо со скоростью U , и скачком Δv_n величины v_n , связанным с U следующим соотношением: $U = c_2 + \alpha_2(T) \Delta v_n / 2$ (ср. с (2.21)). Ширина переходной области δx равна $2\mu_2 / \alpha_2(T) \Delta v_n$ (ср. с разделом 2.6). Схематически решение изображено на рис. 7. При стремлении $\mu_2 \rightarrow 0$ решение переходит в ударную волну второго звука, описанную в [1]. Такой же результат без использования уравнения Бюргерса был получен в [83].

Выясним теперь, каким образом влияет дисперсия на структуру ударной волны. Подставляя решение $v_n = v_n(x - Ut)$ в уравнение КДФБ (2.29) и проинтегрировав его один раз при условии $v_n = v_n' = v_n'' = 0$ при $x \rightarrow \infty$, получим следующее уравнение второго порядка:

$$-D_3 v_n'' = \alpha_2(T) \frac{v_n^3}{2} + (c_2 - U)v_n - D_2 v_n'. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.34) в общем виде не решается, однако можно качественно исследовать решение, воспользовавшись механической аналогией, основанной на том, что (2.33) имеет вид уравнения движения частицы массы D_3 в поле с потенциалом $P(v_n)$, равным

$$P(v_n) = \alpha_2(T) \frac{v_n^3}{6} + (c_2 - U) \frac{v_n^2}{2}, \quad (2.34)$$

и силой трения $D_2 v_n'$ [20]. Вид потенциала $P(v_n)$ изображен на рис. 8. Роль времени при этом играет величина $-\xi = -x + Ut$. В момент времени $t \rightarrow -\infty$ ($\xi = \infty$), частица находится в начале координат ($v_n = 0$).

К моменту времени $t=\infty$ ($\xi=-\infty$) частица, совершив несколько колебаний, «упадет» на дно ямы.

Такое поведение соответствует решению $v_n(x-Ut)$, изображенному на рис. 9. Оно представляет собой ступеньку, имеющую скачок величины v_n , равный $\Delta v_n = v_n(-\infty) - v_n(\infty)$, который связан со скоростью распространения известным соотношением $U = c_2 + \alpha_2(T) (\Delta v_n/2)$. Ударный фронт этой ступеньки имеет осциллирующую структуру. При малом трении осцилляции представляют собой солитоны, имеющие амплитуду

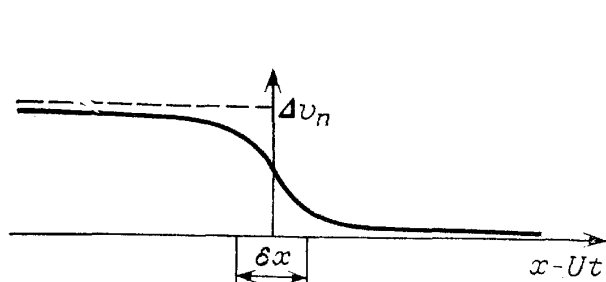


Рис. 7. Профиль ударной волны второго звука в диссипативной среде

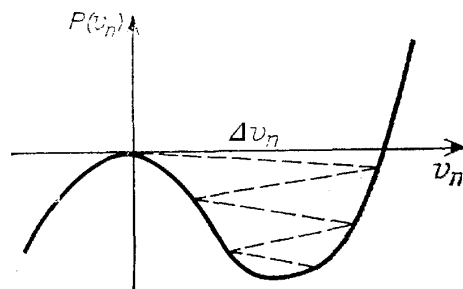


Рис. 8

$3\alpha_2(T)\Delta v_n/2$ и движущиеся, разумеется, со скоростью U . Если вязкость велика, движение частицы будет иметь аperiodический характер. Это означает, что фронт волны будет монотонным, как в чисто диссипативном случае. Значения $D_{2кр}$, разделяющие осциллирующий и монотонный случаи, можно, как и в предыдущем разделе, получить, сравнивая по порядку величины диссипативный и дисперсионный члены. Эта оценка дает, естественно, выражение типа (2.30). Более точные вычисления

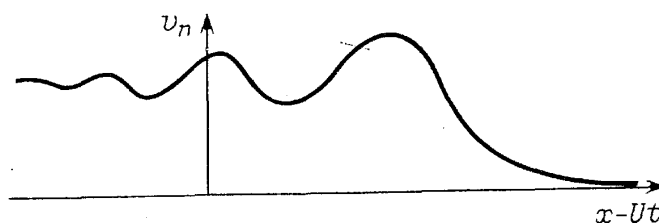


Рис. 9. Профиль ударной волны в диспергирующей среде при коэффициенте вязкости меньше критического

(см. [20]) изменяют эту оценку в $\sqrt{2}$ раз, и, таким образом,

$$D_{2кр} = (2\alpha_2(T)\Delta v_n D_3)^{1/2}. \quad (2.35)$$

Учитывая определения D_2 и D_3 (см. (2.27), (2.28)), получим, что соотношение (2.37) эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{A_2^2}{A_3} = 2\alpha_2(T) \frac{\Delta v_n}{c_2}. \quad (2.36)$$

Если правая часть в (2.36) меньше левой, то $D_2 > D_{2кр}$ и ударный фронт имеет монотонный вид. В противоположном случае $D_2 < D_{2кр}$ и можно наблюдать осцилляции на фронте ударной волны.

2.9. Кубически-нелинейные эффекты. Поведение нелинейных волн второго звука, как было показано ранее, существенно зависит от температуры. В зависимости от знака величины $\alpha_2(T)$ возможно укрупнение как переднего, так и заднего фронта волны. Особый интерес поэтому вызывает область температур, где обращается в нуль (см.

п. 2.5). В этом случае квадратично-нелинейные члены отсутствуют, и эволюция волны определяется следующими, кубическими членами в уравнениях движения. В этом приближении на распространение волны оказывают влияние рожденные ею возмущения плотности ρ' и скорости \mathbf{v} . Взаимодействие с этими возмущениями, а также нелинейные эффекты третьего порядка «внутри» второй звуковой моды определяют структуру волнового пакета. Кубически-нелинейная среда обладает одним замечательным свойством. В ней возможно существование нелинейных стационарных (т. е. не изменяющих своего профиля) монохроматических волн вида $\sigma' \propto \exp[i(\omega_{k_0}^2 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})]$, где $\tilde{\omega}_{k_0}^2$ — перенормированная за счет нелинейности частота. Напомним, что в квадратично-нелинейной среде первоначально синусоидальная волна деформируется и превращается в пилообразную.

Задачу о нелинейной монохроматической волне удобно решать в гамильтоновской форме (см. п. 1.2) для величины

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int a_{\mathbf{k}}^{\pm 2} \exp i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{r} d\mathbf{k},$$

которая имеет смысл комплексной огибающей волнового пакета. Переход от переменных $a_{\mathbf{k}}^{\pm 2}$ к функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ является каноническим, что позволяет, располагая гамильтонианом $H(\Psi)$, выписать непосредственно уравнения движения [30]. Величина H находится простым перебором всех вкладов в энергию в данном приближении. Например, вклад от взаимодействия исходной волны с рожденным ею первым звуком можно учесть следующим образом (ср. с [31]). В присутствии первого звука частота $\omega_{k_0}^2$ второго звука изменяется на величину $\delta\omega_{k_0}^2$, равную

$$\delta\omega_{k_0}^2 = \frac{\partial\omega^2}{\partial\rho} \rho' + \frac{\partial\omega^2}{\partial\mathbf{v}} \mathbf{v}. \quad (2.37)$$

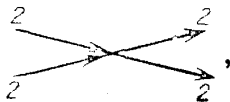
Последний член описывает доплеровское смещение и равен, очевидно, $\mathbf{k}_0 \mathbf{v}$. Изменению частоты $\delta\omega^2$ соответствует изменение квадратичной части гамильтониана такого вида:

$$\delta H = \int \delta\omega^2 a_{\mathbf{k}}^2 a_{\mathbf{k}}^{-2} d\mathbf{k} \underset{a_{\mathbf{k}}^{\pm 2} \rightarrow \Psi(\mathbf{r}, t)}{=} \int \delta\omega |\Psi|^2 d\mathbf{r}. \quad (2.38)$$

Перебрав подобным образом все возможные процессы, можно выписать гамильтониан $H(\Psi)$ и, по общим правилам, получить из него следующее уравнение для функции $\Psi(x, t)$:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega_{k_0}^2 \Psi + \left[V_{k_0} - \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} \right)^2 \frac{\rho}{c_1^2} - \frac{k_0^2}{\rho} \right] |\Psi|^2 \Psi; \quad (2.39)$$

здесь V_{k_0} — вершина процесса



равная

$$\left(\frac{c_2^2}{8} \frac{\partial^3 T / \partial S^3}{\partial T / \partial S} + \frac{\partial^2 S^2}{\partial S^2 \partial \rho_n} \right) k_0^2.$$

Уравнение (2.39) имеет, как легко видеть, такое решение:

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\tilde{\omega}_{k_0}^2 t}; \quad (2.40)$$

здесь $\tilde{\omega}_{k_0}^2$ — перенормированная частота, равная

$$\tilde{\omega}_{k_0}^2 = \omega_{k_0}^2 + \left[V_{k_0} - \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} \right)^2 \frac{\rho}{c_1^2} - \frac{k_0^2}{\rho} \right] |\Psi_0|^2. \quad (2.41)$$

Соотношение (2.44) описывает монохроматическую волну с волновым вектором k_0 и частотой $\tilde{\omega}_{k_0}^2$. Возмущение плотности ρ' и скорость v равны

$$\rho' = -\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{c_1^2} |\Psi_0|^2, \quad v = -\frac{k_0}{\rho} |\Psi_0|^2, \quad (2.42)$$

т. е. скорость v направлена навстречу волне. Скорость распространения волны $c_2 = \tilde{\omega}_{k_0}^2/k_0$ зависит от амплитуды. Численный анализ показывает, что нелинейная добавка к скорости звука Δc_2 при $T_\alpha \approx 1,885$ К равна

$$\Delta c_2 \approx -1,09 \frac{k_0}{\rho} |\Psi_0|^2. \quad (2.43)$$

Таким образом, нелинейная волна движется медленнее, чем линейная. Основной вклад в изменение скорости волны обусловлен доплеровским взаимодействием рассматриваемой волны с рожденным ею первым звуком. Таким образом, эффективное взаимодействие между квантами второго звука осуществляется через обычный звук. Эта ситуация напоминает теорию сверхпроводимости, где взаимодействие между электронами осуществляется через колебания решетки.

3. Неоднородные волновые пакеты.

3.1. Самофокусировка монохроматической волны. Во второй главе были рассмотрены некоторые нелинейные явления при распространении одномерных волн. Одномерность волны означает, что поверхности равной фазы представляют собой плоскости в y, z измерениях. Реально, разумеется, волны имеют конечный поперечный размер, вследствие чего возникает неоднородность в y, z направлениях. Для волн с бесконечно малой амплитудой учет поперечной неоднородности приводит к дифракционным явлениям. В случае конечных амплитуд может возникнуть ряд принципиально новых эффектов, связанных с совместным действием нелинейных и дифракционных членов в уравнениях движения. В этой главе будет рассмотрено распространение нелинейной волны второго звука, слабо промодулированной в поперечном направлении, т. е. в предположении, что нелинейные и дифракционные члены имеют один порядок малости.

Рассмотрим случай кубически-нелинейной среды (см. раздел 2.9), где было показано, что в окрестности температуры $T_\alpha \approx 1,88$ К возможно существование монохроматической нелинейной волны второго звука. Изучим влияние поперечной неоднородности на эволюцию такой волны.

Как и в разделе 2.9, будем вести описание в терминах функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$, которая, в отличие от ранее рассмотренного случая, зависит от пространственной координаты \mathbf{r} . Слабую зависимость функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ от величины \mathbf{r} можно представить как появление в основной волне гармоник с волновыми векторами \mathbf{k} , близкими к \mathbf{k}_0 . Это приводит к изменению квадратичной части гамильтониана H_2 , следствием чего является присутствие в уравнениях движения слагаемых, описывающих линейную дифракцию. Полный гамильтониан H может быть получен путем простого перебора, подобно тому, как это сделано в предыдущем пункте. Отсылая за подробностями вычислений к работе [30], выпишем урав-

нение для комплексной огибающей $\Psi(r, t)$ (в стационарном случае):

$$2ik_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Delta_{\perp} \Psi = \frac{2k_0}{c_2} \left[\left(\frac{k_0^2}{\rho} + \frac{\Omega'^2 \rho}{c_1^2} - V_{k_0} \right) |\Psi|^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} \frac{\Omega' \Omega'' \rho^2}{c_1^2} + W_{k_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_{k_0}}{\partial \rho} \frac{\Omega' \rho}{c_1^2} - \frac{k_0^2 \Omega'}{\rho c_1^2} \right) |\Psi|^4 \right] \Psi; \quad (3.1)$$

здесь W_{k_0} — матричный элемент шестиволнового процесса, Ω' , Ω'' — первая и вторая производные от частоты $\omega_{k_0}^2$ по плотности ρ .

Соотношение типа (3.1) было получено впервые для прохождения лазерного излучения через вещество (см. [20] и цитированную там литературу) и называется нелинейным параболическим уравнением. Оно исследовалось в ряде работ (см., например, [32]). Следуя результатам работы [32], опишем поведение исследуемой нами волны.

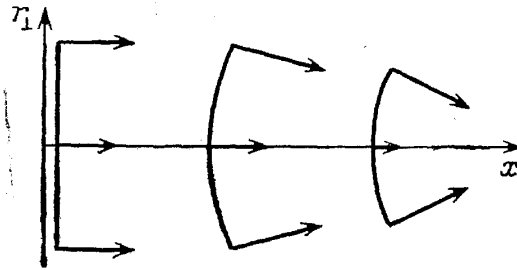


Рис. 10. Рисунок, качественно поясняющий возникновение самофокусирующего эффекта. Стрелками указано направление скорости движения волнового фронта. Разные длины стрелок соответствуют разным скоростям распространения участков волны

Коэффициент при члене $|\Psi|^2 \Psi$ (выражение в первой квадратной скобке) есть величина положительная и равная $\approx 2,18 k_0^3 / c_2 \rho > 0$. Положительность этой величины означает, что скорость распространения волны уменьшается с амплитудой (см. раздел 2.9). В результате на периферии волнового пакета, где амплитуда меньше, скорости движения волны больше, чем на оси пучка. Фронт волны изгибается, как это показано на рис. 10, начинается фокусировка пакета. За счет фокусирующего действия амплитуда на оси возрастает, что приводит к еще большей разнице в скорости распространения периферийных и центральных участков. Это еще более усиливает фокусирующий эффект. Таким образом, положительность коэффициента при $|\Psi|^2 \Psi$ обеспечивает нелинейную самофокусировку волнового пакета ⁽⁵⁾.

Дифракционный член $\Delta_{\perp} \Psi$ в уравнении (3.1) приводит (в отсутствие нелинейных эффектов) к расплыванию пакета в поперечном направлении. Поэтому для наблюдения самофокусировки необходимо превысить некоторое пороговое значение потока энергии $I_{кр}$. Вычисление приводит к результату $I_{кр} \approx 0,6 \cdot 10^7 \nu^{-2}$ Вт, где ν — частота звука в герцах (см. [30]). Заметим, что $I_{кр}$ может быть оценена из уравнения (3.1) сравнением по порядку величины дифракционного и нелинейного членов. Величина $I_{кр}$ может быть достигнута в эксперименте, и наблюдение самофокусировки вполне реально.

Таким образом, нелинейные члены четвертого порядка в гамильтониане описывают сжатие волнового пучка. В результате амплитуда на оси резко возрастает, и дальнейшее поведение зависит от членов более высокого порядка, в нашем случае шестого. Как показывают вычисления (см. [30]), коэффициент перед членом $|\Psi|^4 \Psi$ (выражение во вто-

рой квадратной скобке в (3.1)) отрицателен. Это эквивалентно положительности шестиволнового гамильтониана H_6 , что соответствует трехчастичному отталкиванию. Конкурируя с двухчастичным притяжением, последнее стабилизирует волновой пакет и не дает ему сколлапсироваться до нулевых размеров. Это качественное рассуждение подтверждается результатами численного решения уравнения вида (3.1) (см. [32]). В итоге пучок сжимается до некоторого размера, при котором дифракционные и нелинейные члены четвертого и шестого порядка «уравновешивают» друг друга, пакет, как говорят, входит в режим самоканализации. Размер канала δ может быть оценен из следующего соотношения:

$$k_0 \delta \sim \left(- \frac{\sigma_1 I}{I - I_{кр}} \right)^{1/2}; \quad (3.2)$$

здесь σ_1 — обезразмеренный коэффициент при члене $|\Psi|^4 \Psi$ в уравнении (3.1), $\sigma_1 \approx -2 \cdot 10^{-2}$. Условие (3.2) означает, что при значениях I , превышающих $I_{кр}$, пучок может сжаться до очень малых размеров. При этом на оси пучка сосредотачивается большая энергия, что может вызвать значительный перегрев и облегчить наблюдение эффекта.

3.2. Волновые пучки в квадратично-нелинейной среде. В этом пункте мы опишем поведение широких пучков второго звука в квадратично-нелинейных средах, где самофокусировочные явления сопровождаются укрупнением волны и образованием ударного фронта.

При распространении эволюции волны будем предполагать, что диссипативные и дифракционные эффекты одного порядка малости с нелинейными. Фактически необходимо чтобы параметр малости, связанный с поперечной неоднородностью, удовлетворял такому соотношению: $k_{\perp}^2/k_x^2 = O(\Delta v_n/c_2)$, где k_{\perp}^{-1} , k_x^{-1} — поперечный и продольный размеры волнового импульса, Δv_n — его амплитуда. В этих предположениях уравнение для эволюции звуковых импульсов в обычных средах получено в [33, 34]. Аналогичные выкладки приводят к такому эволюционному уравнению для неоднородных возмущений второго звука (в движущейся со скоростью c_2 системе отсчета):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \alpha_2(T) v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right) = \frac{c_2}{2} \Delta_{\perp} v_n. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) довольно слабо изучено, по сравнению с нелинейным параболическим уравнением (3.1). Одна из причин этого — отсутствие стационарных волн неизменного профиля. Действительно, нелинейный член $\alpha_2(T) v_n \partial v_n / \partial x$ описывает образование ударных фронтов, на которых происходит сильная диссипация, и амплитуда волны должна уменьшаться. Кроме того, если для уравнения (3.1) влияние нелинейного члена могло быть сведено (по крайней мере качественно) к изгибу фронта (см. рис. 10), то здесь ситуация более запутанная. Действительно, величина $\alpha_2(T) v_n$, играющая роль нелинейной добавки к скорости звука, различна в разных точках волны, вследствие чего будет происходить неравномерная деформация волнового профиля, усложненная к тому же дифракционными явлениями.

Имеется, однако, довольно много работ по численному решению уравнения (3.3). Подробный обзор этих работ выполнен в книге [35] (см. также [55]). Опишем, следуя [35], основные закономерности эволюции волны, имеющей характерный поперечный размер k_{\perp}^{-1} . Как показывают расчеты, одним из основных параметров, влияющих на эволюцию волн, является величина $N = L_n/L_p$; здесь $L_p = c_2/\alpha_2(T) \Delta v_n k_x$ — рас-

стояние по оси x , на котором возникает разрыв в одномерной волне (см. раздел 2.5), $L_d = k_x/k_\perp^2$ — характерная длина дифракционного расплывания пакета. При $N \leq 1$ волна успевает превратиться в расходящуюся волну прежде, чем нелинейные эффекты окажут какое-либо существенное влияние. Дальнейшая эволюция пакета проистекает как в нелинейной сферической волне (см. [55]). При увеличении N действие нелинейных эффектов проявляется раньше. Как и в одномерном случае, они приводят к деформации волнового профиля и образованию ударного фронта. Эта деформация, однако, происходит не одинаково для различных удалений от оси. Разрыв образуется прежде всего на оси пучка ($r_\perp = 0$). Затем включаются периферийные участки. Расстояние, на котором образуется ударный фронт на оси пакета, составляет величину порядка L_p , хотя в зависимости от N и начального распределения, несколько колеблется. После образования разрыва начинается интенсивная диссипация волновой энергии и пакет, также как и при малых N , превращается в расходящуюся волну. Следует отметить, что до образования ударного фронта наблюдается некое подобие самофокусировки, а именно, амплитуда на оси возрастает, причем для пучков с резкими краями происходит увеличение амплитуды в два и более раз, а поперечное распределение становится более узким, т. е. пучок сжимается. Однако этот процесс очень непродолжителен и стационарной самофокусировки, по видимому, в квадратично-нелинейной среде нет.

Аналогичные явления происходят с одиночными (положительными или отрицательными) импульсами (см. [55]). Они так же, как и периодические волны, испытывают неравномерное искажение профиля и образование ударного фронта. До момента образования ударного фронта происходит (при $\alpha_2(T) \Delta v_n < 0$) уменьшение ширины пакета и увеличение амплитуды на оси. Однако, как и для периодических волн, это не приводит к поперечному коллапсу. Действительно, характерная длина $L_{\text{кол}} = (-c_2/\alpha_2(T) \Delta v_n k_\perp^2)^{1/2}$, на которой происходит нелинейное сжатие пучка (см. [55]), удовлетворяет условию $L_{\text{кол}}^2 = L_p L_d$, т. е. либо $L_{\text{кол}} > L_d$, либо $L_{\text{кол}} > L_p$. В первом случае доминируют дифракционные эффекты, ведущие к расплыванию пакета. Во втором случае ударный фронт образуется раньше, чем пучок успеет сфокусироваться. После образования разрыва возникнет мощная диссипация, амплитуда упадет и волновой пакет, в соответствии с законами линейной акустики, превратится в расходящуюся волну.

4. Устойчивость нелинейных волн.

4.1. Нелинейное превращение первого звука во второй. В теории нелинейных волн важное место занимает изучение устойчивости решений. Это, во-первых, позволяет определить область параметров, при которых реализуется найденное решение. Во-вторых, возможная неустойчивость волны связана с нелинейным характером уравнений, и поэтому вопросы устойчивости идеологически примыкают к нелинейной теории. Исследование устойчивости проводится в рамках стандартной схемы (см. [36]). Переменные, описывающие систему, представляются в виде суммы двух частей, одна из которых является исходным решением, другая — малая добавка, связанная, например, с флуктуациями. Затем общие уравнения линеаризуются по этим малым добавкам, и задача, таким образом, сводится к исследованию системы линейных уравнений (с коэффициентами, зависящими как от исходного решения, так и от свойств среды). На этом этапе весьма существенным является вопрос о временной зависимости исходного решения. Для нестационарных решений задача оказывается очень сложной и может

быть решена в очень немногих случаях. Относительно простыми являются задачи, в которых исходные решения не зависят от времени (к этому случаю относятся также бегущие волны неизменного профиля, в которых переменные являются функциями от комбинации $x-Ut$). В этом случае коэффициенты линеаризованной системы не зависят от времени и уравнения имеют решения в виде суперпозиции экспонент $\sum_i e^{\lambda_i t}$, где

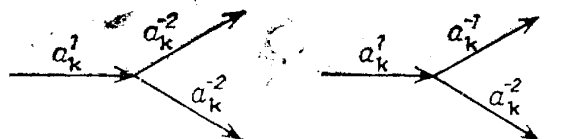
λ_i — функционалы от исходного решения и свойств системы. Если среди множества λ_i имеются такие, что $\text{Re } \lambda_i > 0$, то малые добавки экспоненциально нарастают, что означает неустойчивость исследуемого решения.

В вопросе устойчивости волн имеется еще один интересный аспект. Допустим, в гелии возбуждается волна первого звука. Допустим, далее, что малые возмущения, связанные со второй звуковой модой, неустойчивы в присутствии этого первого звука. Тогда они нарастают и могут быть зарегистрированы в эксперименте. Этот эффект можно трактовать как рождение второго звука первым ⁽⁶⁾. Именно в этом аспекте было проведено исследование устойчивости первого звука в работах [6, 56]. Пусть имеется исходная монохроматическая волна первого звука. В гамильтоновских переменных ее можно записать следующим образом:

$$a_k^1 = a \delta(k - k_0) e^{-i\omega_{k_0}^1 t}, \quad a_k^2 = 0. \quad (4.1)$$

Вообще говоря, решение вида (4.1) не удовлетворяет нелинейным уравнениям (1.17) с гамильтонианом (1.18) (см. начало следующего раздела). Тем не менее результаты, полученные в [6, 56], имеют большое значение для понимания процессов нелинейного взаимодействия между звуками, и рассматриваемая задача, таким образом, имеет модельный характер.

При учете трехволновых процессов возможны два механизма развития неустойчивости, связанные с появлением второго звука. Это распадные и черенковские процессы, схематическое изображение которых имеет следующий вид:



$$(4.2)$$

Из общих результатов (см. [2, 3]) известно, что неустойчивость развивается в условиях резонанса. То есть, кроме выполнения условия $k = k_1 + k_2$ (это условие является следствием пространственной однородности и обеспечивается δ -функциями в гамильтониане H (1.18)), требуется еще аналогичное условие для частот:

$$\omega_k^1 = \omega_{k_1}^2 + \omega_{k_2}^2, \quad \omega_k^1 = \omega_{k_1}^1 + \omega_{k_2}^2. \quad (4.3)$$

Одновременное выполнение условий на частоты ω_k^v и волновые вектора k разграничивает области в k -пространстве, разрешающие черенковский и распадный процессы, что дает основание рассматривать их отдельно.

Рассмотрим, например, распадный процесс. Условия резонанса запишем в следующем виде:

$$c_1 |k_0| = c_2 |k_1| + c_2 |k_2|, \quad k_0 = k_1 + k_2. \quad (4.4)$$

Отсюда видно, что импульсы k_1, k_2 излученных квантов находятся на поверхности эллипсоида вращения (рис. 11). Вследствие условия $c_2 \ll c_1$ соответствующий эллипс имеет малый эксцентриситет, и направления

импульсов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 почти противоположны. Уравнения для малых возмущений $\beta_{\mathbf{k}_1}^{(2)}$, $\beta_{\mathbf{k}_2}^{(2)}$ представляют собой систему двух обыкновенных дифференциальных линейных уравнений, имеющих решения вида $\beta_{\mathbf{k}}^{(2)}(t) \propto \exp(\nu^{\text{расп}} t - i\omega_{\mathbf{k}}^2 t)$, причем

$$\nu^{\text{расп}} = -\frac{\gamma_{\mathbf{k}_1}^{(2)} + \gamma_{\mathbf{k}_2}^{(2)}}{2} + \left(|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{1-2-2} a|^2 + \frac{\gamma_{\mathbf{k}_1}^{(2)} - \gamma_{\mathbf{k}_2}^{(2)}}{2} \right)^{1/2}; \quad (4.5)$$

здесь $\gamma_{\mathbf{k}}^{(2)}$ — затухание второго звука. Из соотношения (4.5) видно, что при превышении некоторой критической амплитуды $a > a^{\text{расп}}$ инкремент $\nu^{\text{расп}}$ приобретает вещественную положительную часть и возмущения экспоненциальным образом нарастают. Пороговое значение $a^{\text{расп}}$ равно

$$a^{\text{расп}} = \left(\frac{\gamma_{\mathbf{k}_1}^{(2)} \gamma_{\mathbf{k}_2}^{(2)}}{V_{\text{расп}}^2(\omega, \theta)} \right)^{1/2}; \quad (4.6)$$

здесь $V_{\text{расп}}(\omega, \theta)$ — вершина распадного процесса V^{1-2-2} , выраженная через исходную частоту и угол θ вылета кванта второго звука,

$$V^{\text{расп}}(\omega, \theta) = \left(\frac{2\omega^3}{\rho c_1^2} \right)^{1/2} \left(-\frac{\rho}{2\rho_s} - \cos^2 \theta - \frac{\rho_n \rho}{2\rho_s} \frac{\partial \rho_n^{-1}}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho / \partial \sigma^2}{\partial T / \partial \sigma} \right). \quad (4.7)$$

Пороговая амплитуда $a^{\text{расп}}$ зависит от направления излучения, минимальное значение достигается при $\theta=0$, т. е. происходит излучение вперед. Второй излученный квант движется в почти противоположном направлении.

Аналогичные выкладки и соотношения имеют место и для черенковского излучения. Резонансные условия имеют для этого процесса такой вид:

$$c_1 |\mathbf{k}_0| = c_1 |\mathbf{k}_1| + c_2 |\mathbf{k}_2|, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (4.8)$$

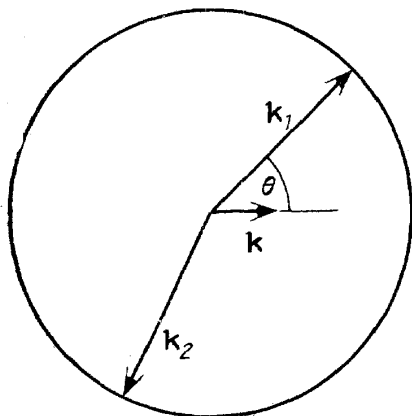


Рис. 11. Сечение поверхности, на которой находятся концы векторов \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , удовлетворяющих резонансным условиям (4.4) в распадном процессе

Поскольку скорость второго звука много меньше скорости первого, $c_2 \ll c_1$, то условия (4.8) выполняются, когда $|\mathbf{k}_0| \approx |\mathbf{k}_1|$, то есть концы векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 лежат на почти сферической поверхности (рис. 12). Обозначим угол между \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_1 через χ . В переменных ω и χ вершина

на черенковского процесса имеет вид [6]

$$V(\omega, \chi) = \frac{\omega^{3/2}}{2\rho^{3/2}} \frac{\partial \rho / \partial T}{(\partial \sigma / \partial T)^{1/2}} \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \frac{\chi}{2} \right)^{1/2} \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \ln \frac{\rho c_1^2}{\partial \rho / \partial \sigma} \right) + \cos \chi \right]. \quad (4.9)$$

Вершина черенковского процесса (4.9) зависит от угла χ . Ее максимальное значение достигается при χ , близких к π , т. е. квант первого звука излучается почти назад. Частота кванта второго звука при этом близка к $2\omega c_2 / c_1$. Пороговое значение амплитуды, при которой инкремент $\nu^{\text{чер}}$ приобретает положительную вещественную часть, удовлетворяет такому условию:

$$|V^{\text{чер}}(\omega, \chi) a_{\text{кр}}^{\text{чер}}| = \left[\gamma_1(\omega) \gamma_2 \left(\frac{i2\omega c_2}{c_1} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.10)$$

На рис. 13 изображено поведение отношения пороговых амплитуд в черенковском и распадном процессах $a_{кр}^{чер}/a_{кр}^{расп}$. Из рисунка видно, что за исключением узкого «окна» вблизи температуры $T \approx 1,15$ К черенковский процесс предшествует распаднему.

В недавно появившейся работе [84] проведено аналогичное исследование для смесей $^3\text{He} - ^4\text{He}$ (см. также [85]). В отличие от чистого

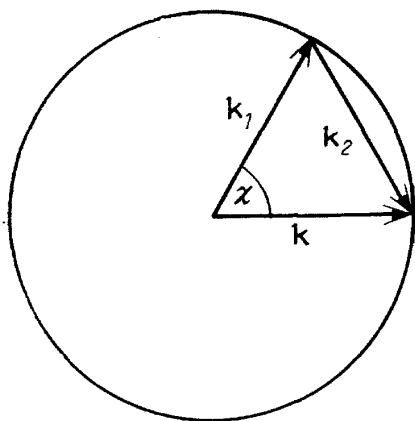


Рис. 12. Сечение поверхности, на которой находится конец вектора k_1 кванта первого звука при черенковском излучении. Поверхность задана соотношением (4.8)

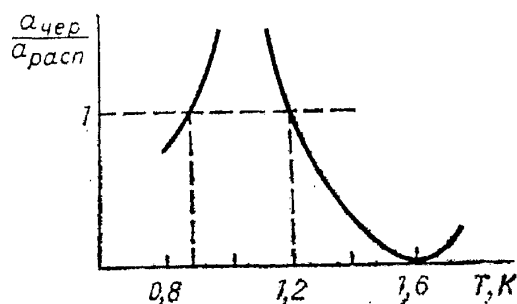


Рис. 13. Отношение пороговых амплитуд черенковского и распадного процессов $a_{чер}/a_{расп}$ в зависимости от температуры

^4He черенковский процесс оказывается в смеси $^3\text{He} - ^4\text{He}$ намного эффективнее. Автор предлагает использовать соответствующий нелинейный процесс для наблюдения специфического явления — обращения волнового фронта.

4.2. Устойчивость ударной волны давления. Как уже упоминалось, монохроматическая волна первого звука не является решением нелинейных уравнений движения. Напротив, первоначально синусоидальная волна укручается и превращается в пилообразную (с формальной точки зрения укручение является следствием неучтенных в [6, 56] нелинейных процессов «внутри» первого звука). Изучение условий, при которых эта пилообразная волна может излучать второй звук, представляет большой интерес. Однако соответствующая задача на устойчивость очень сложна; во-первых, потому, что исходное решение зависит от времени, а во-вторых, потому, что оно содержит особенности (разрывы).

Можно, тем не менее, перенести акценты в этой задаче и выяснить роль разрывов в устойчивости волны. Другими словами, поставить вопрос об устойчивости идеализированной ударной волны-ступеньки, движущейся слева направо и имеющей определенные значения переменных на ударном фронте. Этот вопрос представляет интерес еще по следующей причине. Дело в том, что при исследовании устойчивости ударных волн в обычных средах (см., например, [3, 37, 38]) важное место занимает уравнение переноса энтропии. В HeII, где перенос энтропии осуществляется, в отличие от остальных сред, волновым механизмом, могут возникнуть некоторые различия.

Вопрос об устойчивости ударной волны давления исследован в статье [39]. Решение задачи проведено на основе гамильтоновских уравнений движения в классе обобщенных функций для исходного решения и малых добавок. Это позволило, в отличие от традиционных методов (см. [37, 38]), исследовать устойчивость ударной волны не только от-

носителем слабых искажений ударного фронта («ряби»), но также относительно набегающих на разрыв возмущений. В идеализированной ударной волне — движущейся слева направо ступеньке — гидродинамические переменные пропорциональны функции единичного скачка $\theta(-x+Ut)$, где U — скорость движения разрыва. В гамильтоновских переменных такая ступенька описывается следующим соотношением [39]:

$$a_k^{\pm 1} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi \rho}{c_1 |k_x|} \right)^{1/2} \frac{\Delta v \delta(k_{\perp}) \theta(k_x) \exp(-ik_x U t)}{k_x \pm i0}, \quad a_k^{\pm 2} = 0; \quad (4.11)$$

здесь Δv — амплитуда разрыва, слагаемое $\pm i0$ в знаменателе дает правило обхода полюса, оно соответствует движущейся слева направо волне. Из-за малости черенковской вершины система уравнений для малых возмущений первой β_k^1 и второй β_k^2 звуковых мод разбивается на два идентичных по структуре соотношения следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_k^v}{\partial t} + i(\omega_k^v - U k_x) \beta_k^v + \frac{1}{\pi i} \int \frac{A_{kk_2}^{+v} \beta_{k_2}^v dk_{2x}}{k_{2x} - k_x + i0} + \\ + \frac{1}{\pi i} \int \frac{A_{kk_2}^{-v} \beta_{k_2}^{-v} dk_{2x}}{k_{2x} + k_x + i0} = 0 \quad (v = 1, 2); \end{aligned} \quad (4.12)$$

здесь $A_{kk_2}^{\pm}$ — некоторые функции \mathbf{k} и \mathbf{k}_2 , связанные с вершинами нелинейных процессов. Знаменатели $k_{2x} \pm k_x + i0$ формально возникли из фурье-представления ступенчатой функции (см. [39]). Специальными преобразованиями соотношения (4.12) приводятся к системе сингулярных интегральных уравнений с рациональными коэффициентами. Решение таких уравнений (см. [57]) связано с восстановлением кусочно-аналитической функции (комплексного переменного k_x) по ее разрыву на оси действительных значений величины k_x . Выполненные выкладки [39] приводят к следующему результату. Возникшие, например, вследствие флуктуационной «силы» $G(\mathbf{k}, t)$, возмущения $\beta_k^v(0)$ в дальнейшем развиваются по закону

$$\beta_k^v(t) \propto \int e^{\lambda_i t} \hat{F}(\lambda, \mathbf{k}) G(\mathbf{k}, \lambda) d\lambda;$$

здесь $G(\mathbf{k}, \lambda)$ — лаплас-образ функции $G(\mathbf{k}, t)$, а $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$ — линейный оператор, вид которого может быть определен из полного решения задачи. Соответственно, $\beta_k^v \propto e^{\lambda_i t}$, где λ_i — полюса этого оператора, и, таким образом, задача на исследование устойчивости сводится к нахождению полюсов оператора $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$. Исследования показывают, что имеется три ветви для λ_i , две из которых следующие:

$$\begin{aligned} \lambda = iUk_x \pm ic_v (k_x^2 + k_{\perp}^2)^{1/2}, \\ \lambda = i(U - \Delta v) k_x \pm i \left[\left(c_v^2 + \frac{\partial c_v^2}{\partial v} \Delta v \right) (k_x^2 + k_{\perp}^2) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Физический смысл найденных ветвей состоит в том, что они описывают колебание за и перед фронтом ударной волны (в системе координат связанной с разрывом). Величина $\text{Re } \lambda = 0$, т. е. найденные ветви к неустойчивости не приводят. Третья ветвь полюсов оператора $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$ дискретна (не зависит от k_x). Ее физический смысл состоит в том, что она описывает эволюцию возмущений на ударном фронте. Для возмущений типа второго звука оператор $\hat{F}(\lambda, \mathbf{k})$ не содержит полюсов указанного вида.

Что касается возмущений типа первого звука, то они, как известно (см. [9]), приводят к ускорению и искажению ударного фронта, создавая на нем «рябь», эволюция которой описывается исследуемой ветвью. Иными словами, указанная ветвь полюсов оператора описывает устойчивость ударной волны относительно слабых искажений поверхности разрыва. Такого рода постановка задачи совпадает с работами по устойчивости ударных волн в обычных жидкостях (см. [37, 38]). Выполненные в статье [39] выкладки приводят к такому простому результату. Начальные искажения $\xi(\mathbf{r}_\perp, t)|_{t=0}$ ударного фронта в дальнейшем убывают по экспоненциальному закону с декрементом $U_1 k_\perp$, ($U_1 = U - \Delta v$ — скорость течения жидкости позади разрыва), что означает абсолютную устойчивость ударной волны. Этот результат совпадает с выводами работ [37, 38], в которых исследовалась устойчивость ударных волн в обычных жидкостях.

Резюмируя результаты этого раздела, можно сказать, что ударные волны давления в HeII устойчивы относительно искажений поверхности разрыва, и представляют собой, как и в обычных средах, очень устойчивый тип течения.

Обратим внимание на то, что если задать конкретный вид начального возмущения $G(\mathbf{k}, t)$ (например, положить $G(\mathbf{k}, t) \propto \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \exp(i\omega_{\mathbf{k}_0}^\gamma t)$), то описанный в этом пункте метод может быть использован для описания взаимодействия этого возмущения (звука) с ударной волной.

5. Стохастические нелинейные волновые процессы.

5.1. Решение кинетических уравнений. В предыдущих разделах были рассмотрены некоторые вопросы распространения нелинейных волн на основе динамических уравнений движения. Несколько иной подход возникает в задаче, когда в HeII возбуждается волновой пакет, содержащий большое число нескоррелированных между собой гармоник. Реально такая ситуация может возникнуть вследствие неустойчивости волн, или, например, при случайной накачке импульсов (тепла, или давления) в объем жидкости.

Пусть имеется некоторый источник волновой энергии, рождающий гармоники с характерным волновым числом порядка k_+ . Обычно значения k_+ связывают (по порядку величины) с обратным размером системы, $k_+ \sim L^{-1}$. Вследствие нелинейных процессов в системе появляются гармоники с большими значениями k , которые, в свою очередь, рожают еще более высокие гармоники. При очень больших k , порядка k_- , в игру вступают вязкие члены в уравнениях движения, и волны с импульсами $k \gtrsim k_-$ быстро затухают. В итоге в \mathbf{k} -пространстве устанавливается некоторое распределение волн, характеризуемое потоком энергии от крупномасштабных движений к мелкомасштабным. Описанная картина типична для турбулентных явлений, и, поскольку речь идет о звуковых волнах, называется акустической турбулентностью (АТ).

В разделе 5 исследуется АТ в HeII, особенностью которого является то, что, кроме описанного взаимодействия волн, добавляется перекрестное взаимодействие между первым и вторым звуками. Последовательное описание стохастических волновых процессов может быть проведено в рамках неравновесной диаграммной техники (ДТ) [40, 41]. Для случая HeII ДТ развита в [42]. В предположении малого уровня нелинейности соотношения предлагаемые ДТ (уравнения Дайсона) сводятся к системе кинетических уравнений (КУ) для $n_{\mathbf{k}}^\gamma$, определяемых как $n_{\mathbf{k}}^\gamma \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \langle a_{\mathbf{k}}^\gamma a_{\mathbf{k}'}^{\gamma'} \rangle$, — парных корреляторов комплексных амплитуд или спектральных плотностей (спектров). В стационарном и пространст-

венно однородном случае система КУ имеет следующий вид [42] ⁽⁷⁾:

$$I_{st}^v \{n\} = \sum_{v_1, v_2=1,2} \int dk_1 dk_2 [D_{kk_1k_2}^{vv_1v_2} (n_{k_1}^{v_1} n_{k_2}^{v_2} - n_k^v n_{k_1}^{v_1} - n_k^v n_{k_2}^{v_2}) - \\ - D_{k_1k_2k}^{v_1v_2v} (n_{k_2}^{v_2} n_k^v - n_{k_1}^{v_1} n_{k_2}^{v_2} - n_{k_1}^{v_1} n_k^v) - \\ - D_{k_2kk_1}^{v_2vv_1} (n_k^v n_{k_1}^{v_1} - n_{k_2}^{v_2} n_k^v - n_{k_2}^{v_2} n_{k_1}^{v_1}) = 0] \quad (v = 1, 2); \quad (5.1)$$

здесь

$$D_{kk_1k_2}^{vv_1v_2} = \frac{\pi}{2} |V_{kk_1k_2}^{v-v_1-v_2}|^2 \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega_k^v - \omega_{k_1}^{v_1} - \omega_{k_2}^{v_2}).$$

Уравнения (5.1) совпадают с КУ, используемыми для описания фоновых систем (см. [36, 43]) с тем отличием, что в них опущены спонтанные процессы (из-за того, что $\hbar \ll n_k^v$). Обычным способом (см. [41]) можно убедиться, что КУ (5.1) имеют решение такого вида:

$$n_k^1 = \frac{\tilde{T}}{c_1 |k|}, \quad n_k^2 = \frac{\tilde{T}}{c_2 |k|}; \quad (5.2)$$

здесь \tilde{T} — некоторая константа, имеющая смысл температуры. Решение (5.2) есть равновесное распределение Рэля — Джинса, оно характеризуется отсутствием каких-либо потоков (в \mathbf{k} -пространстве) и, соответственно, не подходит для задачи об АТ.

В неравновесной ситуации постановка задачи о нахождении спектров АТ n_k^v предполагает, помимо уравнения (5.1), также наличие источника и стока волн. Вообще говоря, решение n_k^v зависит от конкретного вида источника (и стока). Однако, как это часто бывает, области влияния источника и стока сильно разнесены в \mathbf{k} -пространстве, т. е. $k_+ \ll k_-$. При этом в диапазоне волновых чисел k , удаленных как от k_+ , так и от k_- (т. е. $k_+ \ll k \ll k_-$), в так называемом инерционном интервале (ИИ) может установиться некоторое распределение n_k^v , не зависящее от вида источника (и стока) и определяемое лишь нелинейным взаимодействием между волнами.

Таким образом, задача о нахождении спектров АТ сводится к выявлению таких решений КУ (5.1), которые обеспечивают постоянство потока энергии P_k в \mathbf{k} -пространстве. Эта задача очень сложна, так как связана с решением системы нелинейных интегральных уравнений. Даже в более простом случае одной волновой моды точное решение удастся найти лишь в изотропной ситуации и при весьма жестких ограничениях на вид функций ω_k и $V_{kk_1k_2}$, а именно, при требовании, чтобы эти величины являлись однородными функциями своих аргументов. Это требование, а также условие $k_+ \ll k_-$, в силу которого можно положить $k_+ = 0$, $k_- = \infty$, приводит к предположению о масштабной инвариантности задачи, т. е. отсутствию характерных размеров для \mathbf{k} . Это позволяет предположить, что решение n_k имеет степенной вид: $n_k = A k^s$. Показатель степени s может быть вычислен с помощью так называемых преобразований Захарова (подробно об этом см. в [44]). С помощью этих преобразований удастся выполнить факторизацию подынтегрального выражения в КУ (5.1), при этом один из сомножителей приводит к решению $n_k \propto k^s$, характеризующему постоянным потоком энергии в \mathbf{k} -пространстве. В частности, таким путем Захаровым и Сагдеевым [45] был найден спектр АТ в обычной жидкости. Они нашли, что $s = -9/2$, и вычислили связь между амплитудой спектра A и мощностью источника волновой энергии P .

В HeII, ввиду наличия нескольких типов нелинейных процессов, выполнить факторизацию интеграла столкновений непосредственно не уда-

ется. Тем не менее, как сейчас будет показано, система (КУ) (5.1) имеет изотропное масштабно-инвариантное решение следующего вида:

$$n_k^1 = Ak^s, \quad n_k^2 = Bk^s \quad (5.3)$$

с одинаковым показателем степени s (см. [42]).

Доказательство этого утверждения может быть проведено следующим образом. Если подставить спектры (5.3) в КУ (5.1), то выяснится такое важное обстоятельство. В силу одинаковой степени однородности всех вершин $V_{k_1 k_2 k}^{v_1 v_2 v_3}$ (1.20), а также в силу линейности обоих законов дисперсии ω_k^v , внешний аргумент k входит во все слагаемые в виде множителя k^{5+2s} . В результате, после сокращения на k^{5+2s} , КУ (5.1)

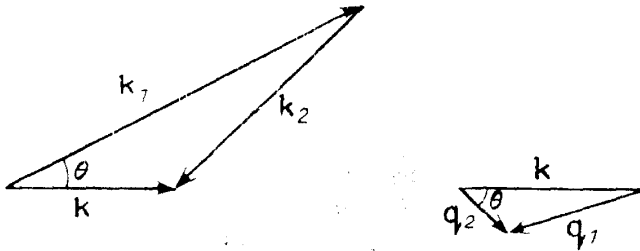


Рис. 14

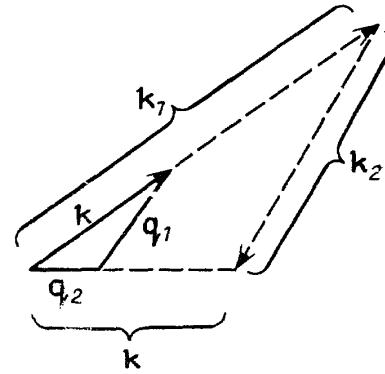


Рис. 15

редуцируется к системе алгебраических билинейных уравнений относительно величин A и B :

$$X_{AA}A^2 + X_{AB}AB + X_{BB}B^2 = 0, \quad Y_{AA}A^2 + Y_{AB}AB + Y_{BB}B^2 = 0. \quad (5.4)$$

Величины X, Y вычисляются из интегралов, входящих в КУ, они являются функциями параметра s . Будучи однородной (по A, B), система (5.4) имеет решения лишь при определенных значениях s , играющих роль собственных чисел. Ниже будет показано, что $s = -9/2$ является собственным числом системы (5.4).

Выпишем слагаемые в КУ (5.1), соответствующие распадным процессам (из изложения будет видно, что для черенковских процессов ситуация вполне аналогичная). Обозначив их J^{122}, J^{212} , где первый индекс указывает номер уравнения, а два остальных обозначают вид процесса, получим

$$J^{122} = \int D_{k_1 k_2 k}^{122} (n_{k_1}^2 n_{k_2}^2 - n_k^1 n_{k_2}^2 - n_k^1 n_{k_1}^2) dk_1 dk_2, \quad (5.5)$$

$$J^{212} = - \int D_{k_1 k_2 k}^{122} (n_{k_2}^2 n_k^2 - n_{k_1}^1 n_k^2 - n_{k_1}^1 n_{k_2}^2) dk_1 dk_2 - \\ - \int D_{q_2 q_1 k}^{122} (n_k^2 n_{q_1}^2 - n_{q_2}^1 n_k^2 - n_{q_2}^1 n_{q_1}^2) dq_1 dq_2. \quad (5.6)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (5.6). Законы сохранения, входящие в множитель $D_{q_2 q_1 k}^{122}$, требуют выполнения следующих условий:

$$c_1 |q_2| = c_2 |k| + c_2 |q_1|, \quad q_2 = k + q_1. \quad (5.7)$$

Аналогично, законы сохранения в интеграле J^{222} имеют вид

$$c_1 |k| = c_2 |k_1| + c_2 |k_2|, \quad k = k_1 + k_2. \quad (5.8)$$

Изобразим тройки векторов, связанных условиями (5.7) — (5.8) на рис. 14, причем треугольники выберем подобными. Повернем треугольник $q_2 k q_1$ таким образом, чтобы совместить направление k с направлением k_1 первого треугольника $k k_1 k_2$ и растянем его в k/k_1 раз, после чего оба треугольника совпадут, как это показано на рис. 15. Приведенные

операции эквивалентны следующей замене переменных:

$$q_1 = \frac{k}{k_1} k_2, \quad q_2 = \left(\frac{k}{k_1}\right)^2 k_1. \quad (5.9)$$

Используя подстановки (5.9) и воспользовавшись свойством однородности величин $V_{k_1 k_2 k_3}^{v_1 v_2 v_3}$, ω_k , n_k^v , приведем исследуемый член к выражению

$$\int \left(\frac{k}{k_1}\right)^{8+2s} D_{k k_1 k_2}^{122} (n_{k_1}^2 n_{k_2}^2 - n_k^1 n_{k_1}^2 - n_k^1 n_{k_2}^2) dk_1 dk_2, \quad (5.10)$$

которое отличается от J^{122} множителем $(k/k_1)^{8+2s}$ в подынтегральном выражении. Аналогичные выкладки показывают, что первое слагаемое в (5.6) приводится к виду J^{122} с множителем $(k/k_2)^{8+2s}$ под интегралом. Умножив далее J^{122} на c_1 , а J^{212} на c_2 и сложив их, получим

$$c_1 J^{122} + c_2 J^{212} = \int D_{k k_1 k_2}^{122} \left[c_1 - c_2 \left(\frac{k}{k_1}\right)^{8+2s} - c_2 \left(\frac{k}{k_1}\right)^{8+2s} \right] \times \\ \times (n_{k_2}^2 n_{k_1}^2 - n_k^1 n_{k_1}^2 - n_k^1 n_{k_2}^2) dk_1 dk_2. \quad (5.11)$$

Нетрудно видеть, что при $8+2s=-1$ (т. е. при $s=-9/2$), квадратная скобка в (5.11) совпадает с аргументом частотной δ -функции, входящей в D^{122} , в силу чего интеграл обращается в нуль. Таким образом, *вне зависимости* от амплитуды спектров A и B , при значении $s=-9/2$ величины J^{122} и J^{212} связаны между собой соотношением $c_1 J^{122} + c_2 J^{212} = 0$. В частности, если подобрать такое соотношение между A и B , чтобы J^{122} обращался в нуль, то J^{212} будет также равен нулю. В результате вклады в $I_{st}^v\{n\}$ от распадных процессов в обоих уравнениях системы (5.1) обращаются в нуль. Вклады от нелинейных процессов «внутри» каждой из волновых мод обращаются (при $s=-9/2$) в нуль автоматически, так как ситуация вполне аналогична AT в обычных средах, описанной в [45]. Таким образом, выбором соотношения между A и B (и положив $s=-9/2$) можно обратить в нуль оба интеграла столкновений в КУ (5.1), иными словами, получить решение вида (5.3). Связь между A и B может быть установлена с помощью любого из уравнений (5.4). Результаты вычислений представлены на рис. 16, где отношение A/B изображено как функция температуры. Обратим внимание на то, что по порядку величины A/B близко к величине $(1/2) (2c_2/c_1)^{9/2}$ (на рис. 16 последняя изображена пунктиром). Этому факту можно дать такое физическое объяснение. Как показывают вычисления, вклад в величины X , Y (см. (5.4)) от распадных процессов много больше вклада от черенковских. Но в распадных процессах, как показано в разделе 4.1, один квант первого звука с импульсом k распадается на два кванта второго звука с импульсами k_2 , k_1 , причем $k_1, k_2 \approx \frac{c_1 k}{2c_2}$. Таким образом, по порядку величины справедливо соотношение $2n_k^1 \sim n_{c_1 k/2c_2}^2$, из которого учитывая, что $n_k^v \propto k^{-9/2}$, получим

$$\frac{A}{B} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{2c_2}{c_1} \right)^{9/2}.$$

Изобразим схематически спектры первого и второго звуков, как функции волнового числа k (рис. 17). Область I — это область влияния источника, в области III существенны эффекты вязкого затухания волн. Область II представляет собой инерционный интервал, в котором реализуются найденные выше спектры n_k^1 , n_k^2 .

Оценим энергии $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, запасенные в волновых полях. Эти величины могут быть получены усреднением квадратичной части гамильто-

ниана H (1.18). Для величины $\varepsilon^{(4)}$ имеем

$$\varepsilon^{(1)} = \int \omega_k^1 n_k^1 dk = 4\pi c A \int k^{-3/2} dk \sim \frac{8\pi c_1 A^2}{k_+^{1/2}}. \quad (5.12)$$

Обрезание интеграла проведено на размере $k_+ \sim L^{-1}$, где L , повторяем, размер системы. Аналогично, для второго звука имеем $\varepsilon^{(2)} \sim 8\pi c_1 B/k_+^{1/2}$. Отношение энергий $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$ равно $\varepsilon^{(1)}/\varepsilon^{(2)} \sim (2c_2/c_1)^{7/2}$, т. е. энергия, запасенная во второй, более мягкой моде, значительно превышает энергию первого, более жесткого звука. Это является особенностью неравновесного распределения, так как для рэлеевского решения (5.2) энергии $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$ равны, что согласуется с законом равнораспределения (см. [46]).

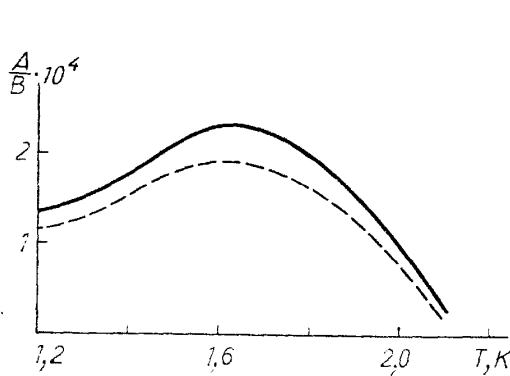


Рис. 16

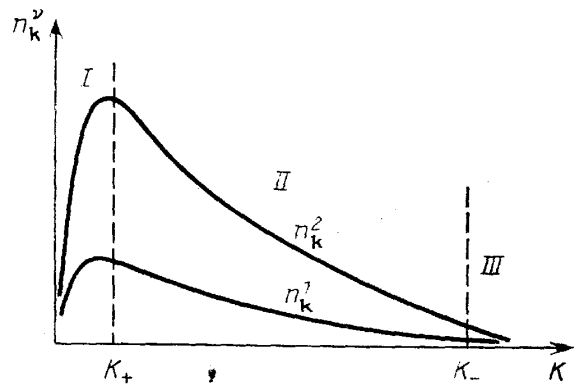


Рис. 17

Что касается потоков энергии, то выкладки показывают, что независимо от способа возбуждения волновой энергии потоки $P_k^{(1)}$ и $P_k^{(2)}$ вдоль спектра первой и второй мод распределены одинаковым образом и связаны с амплитудами спектров A и B следующими соотношениями:

$$P_k^{(1)} \approx \frac{6\alpha_1^2(T) c_1}{\rho} A^2, \quad P_k^{(2)} \approx \frac{6\alpha_2^2(T) c_2 \rho_s}{\rho \rho_n} B^2, \quad (5.13)$$

где $\alpha_1(T)$ и $\alpha_2(T)$ — коэффициенты нелинейности первого и второго звуков (см. раздел 2.5). Полный поток энергии $P^{(1)} + P^{(2)}$, разумеется, совпадает с энергией накачки (или диссипацией) в единице объема. Интересно отметить, что, несмотря на общую неравновесность, «газы» квантов первого и второго звуков находятся между собой в равновесии, общий поток энергии от одной моды к другой равен нулю.

5.2. Акустические свойства турбулентного гелия. Гелий II, в котором возбуждена АТ, обладает отличными от невозмущенной жидкости акустическими свойствами. Действительно, любая звуковая волна, распространяясь по турбулентному гелию, будет взаимодействовать с волновыми полями. Результатом этого взаимодействия является некоторое дополнительное затухание Γ_k и дисперсия Δ_k .

Методами ДТ (см. [41, 42, 47]) можно показать, что затухание Γ_k^v и дисперсия Δ_k^v волны v -моды являются мнимой и реальной частью следующего выражения ⁽⁸⁾:

$$\sum_{v_1, v_2 = \pm 1, 2} \int \frac{|V_{kk_1k_2}^{vv_1v_2}|^2 n_{k_1}^v dk_1 dk_2}{\omega_k^v + \omega_{k_1}^{v_1} \text{sign } v_1 + \omega_{k_2}^{v_2} \text{sign } v_2 + i0}. \quad (5.14)$$

Интегрирование в (5.14) следует выполнять в соответствии с формулой

$$\frac{1}{x + i0} = P \left(\frac{1}{x} \right) - \pi i \delta(x).$$

Проведем сначала вычисления для первого звука, т. е. положим $\nu=1$. Рассмотрим вклад в $\Gamma_{\mathbf{k}}^{111}$ и $\Delta_{\mathbf{k}}^{111}$ обусловленный взаимодействием с волновым полем первой моды, т. е. примем $\nu_1, \nu_2 = \pm 1$. Ход вычисления для затухания $\Gamma_{\mathbf{k}}^{111}$ и дисперсии $\Delta_{\mathbf{k}}^{111}$ (первый индекс указывает номер внешней моды, два остальных обозначают вид процесса, дающего вклад в исследуемую величину) практически совпадает с вычислениями этих величин для звука, распространяющегося по системе фононов с линейным законом дисперсии⁽⁹⁾. Отсылая за подробностями вычисления к работам [42, 43], приведем окончательный результат:

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{111} = \frac{\alpha_1^2(T) A}{2\pi\rho} \frac{k}{k_+^{1/2}}, \quad \Delta_{\mathbf{k}}^{111} = \frac{\alpha_1^2(T) A}{\pi^2\rho} \frac{k}{k_+^{1/2}} \ln \frac{c_1 k}{\Gamma_{\mathbf{k}}^1}. \quad (5.15)$$

При вычислении соотношений (5.15) было использовано, что спектры $n_{\mathbf{k}}^\nu$ имеют вид (5.3), и проведено обрезание интегралов на нижнем пределе $k_+ (\sim L^{-1})$.

Рассмотрим теперь вклад в $\Gamma_{\mathbf{k}}^1$, обусловленный распадному взаимодействию внешней волны, т. е. положим $\nu=-2, \nu_2=-2$ в формуле (5.14). Затухание $\Gamma_{\mathbf{k}}^{122}$ имеет следующий вид:

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{122} = \pi \int |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{1-2-2}|^2 n_{\mathbf{k}_1}^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1}^2 - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^2) d\mathbf{k}_1. \quad (5.16)$$

Вычисление интеграла (5.16) сводится к интегрированию по поверхности (4.4) (см. также рис. 4.1). Выполняя интегрирование и пренебрегая членами порядка $(c_2/c_1)^2$ по отношению к оставленным, получим

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{122} = \frac{\langle \alpha_p \rangle}{16\pi\rho} \left(\frac{2c_2}{c_1} \right)^{3/2} B k^{1/2}; \quad (5.17)$$

здесь $\langle \alpha_p \rangle$ — усредненное по углу выражение в квадратных скобках формулы (4.7). Оно представляет собой величину порядка единицы.

Перейдем к вычислению вклада распадных процессов в дисперсию первого звука $\Delta_{\mathbf{k}}^{122}$, равную

$$\Delta_{\mathbf{k}}^{122} = \oint |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{122}|^2 \frac{n_{\mathbf{k}_1}^2 d\mathbf{k}_1}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1}^2 - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^2}. \quad (5.18)$$

Интеграл в (5.18) понимается в смысле главного значения. Вблизи резонансной поверхности подынтегральное выражение имеет особенность типа $(k - k_{\text{рез}})^{-1}$ разного знака по обе стороны поверхности. Интеграл, тем не менее, оказывается отличным от нуля ввиду того, что имеется быстроспадающая функция $n_{\mathbf{k}_1}^2 \propto k_1^{-9/2}$ в подынтегральном выражении. Оценим приближенно дисперсию $\Delta_{\mathbf{k}}^{122}$, пренебрегая зависимостью матричного элемента V^{1-2-2} от направления, т. е. полагая $V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{1-2-2} = \text{const} \cdot (k_1 k_2 k_3)^{1/2}$. В этом случае удастся выполнить в аналитическом виде интегрирование по углу между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 . В результате интегрирования особенностей вида $(k - k_{\text{рез}})^{-1}$ расщепляется на две особенности логарифмического типа. Основной вклад в интеграл вносит инфракрасная область $k_1 \rightarrow 0$, а также области вблизи логарифмических особенностей. Первая (инфракрасная) область приводит к следующему

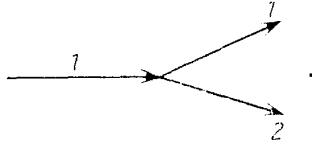
(по порядку величины) выражению для дисперсии:

$${}^1\Delta_{\mathbf{k}}^{122} \sim \frac{B}{\pi^2 \rho} \frac{k}{k_+^{1/2}}. \quad (5.19)$$

Оценки, проведенные для областей с логарифмическими особенностями, приводят к такому выражению для ${}^2\Delta_{\mathbf{k}}^{122}$:

$${}^2\Delta_{\mathbf{k}}^{122} = \frac{\langle \alpha_p \rangle}{8\pi \rho c_1} B k^{1/2}. \quad (5.20)$$

Вклады черенковских процессов в затухание $\Gamma_{\mathbf{k}}^{122}$ и в дисперсию $\Delta_{\mathbf{k}}^{112}$ вычисляются аналогично. В качественном отношении результаты схожие, т. е. величины $\Gamma_{\mathbf{k}}^{122}$ и $\Delta_{\mathbf{k}}^{122}$ имеют, подобно распадным, корневую зависимость от волнового числа \mathbf{k} . Однако количественно эти величины много меньше распадных из-за того, что черенковские вершины малы, а также мал фазовый объем интегрирования в процессах



Перейдем к задаче о вычислении корреляционных характеристик второго звука. По аналогии с первым звуком здесь имеются вклады $\Gamma_{\mathbf{k}}^{222}$ и $\Delta_{\mathbf{k}}^{222}$, связанные с нелинейными процессами внутри второй моды и равные

$$\Gamma_{\mathbf{k}}^{222} = \frac{\alpha_2^2(T) \rho_s B}{2\pi \rho \rho_s} \frac{k}{k_+^{1/2}}, \quad \Delta_{\mathbf{k}}^{222} = \frac{\alpha_2^2(T) \rho_s B}{\pi^2 \rho \rho_n} \frac{k}{k_+^{1/2}} \ln \frac{c_2 k}{|\Gamma_{\mathbf{k}}^2|}. \quad (5.21)$$

Аналогично случаю первого звука, имеются вклады в затухание и дисперсию от перекрестных нелинейных процессов. Однако, как показывают выкладки (см. [42]), эти вклады малы по сравнению с $\Gamma_{\mathbf{k}}^{222}$, $\Delta_{\mathbf{k}}^{222}$, и ими можно пренебречь.

Кратко резюмируем полученные результаты. Волна первого звука, распространяясь по турбулентному HeII, испытывает дополнительные затухание и дисперсию. Наибольший вклад здесь дают распадные процессы ($\Gamma_{\mathbf{k}}^{122} \gg \Gamma_{\mathbf{k}}^{111}$, $\Delta_{\mathbf{k}}^{122} \gg \Delta_{\mathbf{k}}^{111}$). Затухание $\Gamma_{\mathbf{k}}^{122}$ имеет корневую зависимость от волнового числа k и может быть легко экспериментально обнаружено. Дисперсия состоит из двух частей (см. (5.19), (5.20)). Первая из них линейна по волновому числу k и сводится, таким образом, к перенормировке скорости звука. Вторая часть имеет корневую зависимость от k и приводит к «истинной» дисперсии скорости звука, причем $\Delta c_2^{122} \propto k^{-1/2}$. Затухание и дисперсия второго звука обязаны прежде всего нелинейным процессам, происходящим «внутри» второй волновой моды.

Величины $\Gamma_{\mathbf{k}}^{222}$ и $\Delta_{\mathbf{k}}^{222}$ пропорциональны волновому числу k . Дисперсия $\Delta_{\mathbf{k}}^{222}$ приводит к перенормировке скорости звука, $\Delta c^{222} = \Delta_{\mathbf{k}}^{222}/|k|$. Что касается затухания, то оно, во-первых, превосходит вязкое затухание $\gamma_{\mathbf{k}}^{(2)} \propto k^2$, во-вторых, отличается от последнего зависимостью от величины k и также может быть обнаружено в эксперименте.

6. Экспериментальные исследования.

6.1. Краткий обзор работ. Как упоминалось во введении, экспериментальное изучение нелинейных волн не столь развито по сравнению с теоретическими. Основная масса работ относится к динамике

интенсивных импульсов второго звука. Важно отметить, что в ходе выполнения этих работ интерес исследователей постепенно смещался в сторону наблюдения явлений, связанных с квантовыми вихрями, такими как критические скорости, динамика вихревого клубка, перегрев, вскипание и т. д. Упомянутые явления несомненно важны и интересны, но с одной стороны их описание выходит за рамки нелинейной акустики (и даже за рамки классической двухскоростной гидродинамики), а с другой стороны, они, смешиваясь с чисто нелинейными эффектами, усложняют общую картину. Поэтому при описании работ мы будем акцентировать внимание лишь на той части результатов, которая связана с чисто нелинейными процессами.

Далее, хотя динамика нелинейных тепловых импульсов несомненно интересна с точки зрения нелинейных волн, она, как видно из предыдущего, представляет собой лишь небольшую часть нелинейной теории. Большинство других вопросов и эффектов, предсказанных теорией, остались вне поля зрения экспериментаторов. Учитывая сказанное, представляется целесообразным разбить главу, посвященную эксперименту, на две части. Первая часть будет посвящена известным экспериментальным работам и обсуждению полученных в них результатов с точки зрения теории. Вторая часть (см. раздел 6.2) — это предложение экспериментов, которые либо представляют самостоятельный интерес, либо посвящены изучению свойств HeII (фазовый переход, диссипация, скачок Капицы и т. д.) методами нелинейной акустики.

Классическим экспериментом, послужившим толчком к изучению нелинейных волн в HeII, следует считать, по-видимому, эксперимент Осборна [14]. Он первым увидел эффект укручения заднего фронта волны второго звука — явление, не имеющее в то время аналога в классической газодинамике ¹⁰. В работах Халатникова [5, 11] было дано объяснение этому эффекту в несколько измененном виде. Эти результаты изложены в разделах 2.5—2.6. Экспериментальное изучение нелинейных волн было продолжено Десслером и Фэйрбэнком [15]. Основной целью работы было измерение коэффициента нелинейности $\alpha_2(T)$ (см. раздел 2.5), теоретическое вычисление которого проведено Халатниковым. Авторы [15] использовали оригинальную методику для измерения величины $\alpha_2(T)$. На основной импульс второго звука, имевший прямоугольную форму, подавался сверху короткий импульс-«наездник». В зависимости от температуры «наездник» перемещался по основному импульсу вперед или назад со скоростью, пропорциональной амплитуде последнего. Коэффициент пропорциональности, очевидно совпадающий с величиной $\alpha_2(T)$, представлен на рис. 2. Следует отметить, что эксперимент имел довольно низкую точность.

Цитированные работы относятся к середине пятидесятих годов. После почти десятилетнего перерыва интерес к этой теме возобновился. Одним из первых был цикл работ, выполненный Гуляевым. Подробно его результаты изложены в статье [65]. Используя метод шлирен-фотографии, Гуляев получил теневые картины звуковых возмущений в HeII при импульсном выделении тепла на плоском и цилиндрическом нагревателях. Одним из главных результатов является вывод о возникновении двух типов волн, распространяющихся со скоростями c_1 и c_2 (ср. с разделом 2.4). Правда, теневой метод, основанный на регистрации изменений плотности, не позволяет детально идентифицировать структуру возмущений. Сам автор считает, что волны, бегущие со скоростью c_1 — это волны давления, возникающие вследствие вскипания жидкости и образования пленки. На этом основании он подвергает сомнению результаты работ [11, 14, 15], считая, что наблюдаемое там искажение формы волн второго звука связаны с кипением, а не с нелинейными эффектами. В 1979 г. появилась работа Померанца [66], который также

регистрировал две волны при импульсном выделении тепла на источнике. Он регистрирует обе волны с помощью термометра. Передняя волна имеет вид импульса охлаждения, из чего автор делает вывод об отрицательности коэффициента расширения.

Со второй половины семидесятых годов число экспериментальных и теоретических работ начинает резко возрастать. Это обусловлено как повышением интереса к нелинейным эффектам в HeII, так и более широкими экспериментальными возможностями. Так Каммингс, Шмидт и Вагнер [16] использовали для регистрации коротких температурных волн довольно необычный по тем временам датчик. Он представлял собой напыленную на кварцевую подложку пленку из сверхпроводящего материала. Сверхпроводящий переход в такой системе растянута по температуре, и подобное устройство может служить чувствительным и, что очень важно, малоинерционным термометром. В работе [16] приведены осциллограммы нелинейных импульсов, имеющие четкую форму характерных Бюргерсовских треугольников с крутым передним или задним фронтами. С целью сравнения своих экспериментов с теоретическими предсказаниями авторы измеряют время пробега нелинейной волны между двумя датчиками. Малая инерционность позволяет сделать это с высокой точностью. Средняя скорость пробега, которую авторы называют нелинейной скоростью сигнала, зависит от поданной мощности, но отнюдь не по линейному закону, что, казалось бы, противоречит теории (см. соотношение (2.21)). Полученное противоречие разрешено в экспериментальной работе Цоя с соавторами [13]. В этой работе было обращено внимание на то, что, хотя соотношение (2.21) верно на разрыве волны, динамика отдельного импульса, в частности его скорость и время пробега, подчиняется более сложным зависимостям (ср. с разделом 2.5, см. также [73]). Рассчитанное время пробега хорошо согласуется с измеренным. В этой работе обращается внимание на то, что для более интенсивных импульсов ($W \geq 20$ Вт/см²) появляются систематические отклонения от предсказанной теории. Располагая расчетной методикой для зависимости времени пробега, Цой экспериментально решил задачу об измерении коэффициента нелинейности $\alpha_2(T)$ [67]. Полученные результаты определяют искомую величину с точностью, намного превышающей точность, достигнутую в работе Десслера и Фэйрбэнка. В частности, с высокой точностью определена температура T_α , при которой $\alpha_2(T)$ обращается в нуль. Как уже упоминалось, в работе [13] было отмечено, что для очень больших интенсивностей имеются отклонения от классической нелинейной теории. Было высказано предположение, что эти отклонения связаны с рождением квантовых вихрей. Нужно сказать, что раннее возникновение вихрей наблюдали лишь в стационарных течениях (или переходных). Характерные тепловые потоки были порядка долей Вт/см², а время развития вихревой структуры порядка десятков или сотен секунд. Представляется, что при значительном увеличении тепловых потоков эти времена могут уменьшиться до миллисекунд. Это предположение было подтверждено экспериментально в работе [49]. Интересно отметить, что дополнительное затухание зондирующей волны, обязанное наличию вихрей, регистрировалось методами нелинейной акустики (использована зависимость времени пробега от амплитуды волны).

Большой цикл экспериментальных исследований нелинейных волн был выполнен в работах Изнанкина и Межова-Деглина [17, 18]. В этих работах качественно обнаружено увеличение ширины импульса, предсказанное теорией (см. раздел 2.5). Авторы наблюдали интересное явление возникновения отрицательного импульса температуры позади основного сигнала. Этот эффект, связанный с непланарностью волны, аналогичной волне разрежения в обычной акустике (см., например,

[9]), был впервые обнаружен для второго звука. Теоретически задача о сферическом нелинейном импульсе второго звука исследована Аткинсом и Фоксом [72]). В цитируемых работах проведено основательное исследование динамики волн при импульсном выделении тепла в HeII в большом диапазоне интенсивностей и длительностей. Показано, что при умеренных интенсивностях имеется хорошее согласие динамики волн с теоретическими предсказаниями. В частности, наблюдается укрупнение импульсов на заднем или переднем (в зависимости от температуры) фронтах. Показано, что форма импульса сохраняется при T_α . Зарегистрированы также волны, распространяющиеся со скоростью первого звука. Как и в [13], также наблюдается отклонение от теоретических предсказаний при сильных мощностях. Примерно в это же время появилась работа Китаботак и Савады [68]. В ней экспериментально исследована динамика импульса второго звука и показано, что она согласуется с уравнением Бюргерса (ср. раздел 2.6). В цикле работ Цветкова с соавторами [69–71], относящемся к тому же периоду, исследованы нелинейные волны как первого так и второго звуков. В отличие от традиционных методов возбуждение звуков было получено с помощью оптической накачки погруженного в HeII кристалла германия. Параметры звуковых волн при этом были рекордными, например, длительность была порядка 10 нс. Неясно, возможно ли для второго звука очень большой интенсивности и малой длительности вообще пользоваться гидродинамическими уравнениями. Что касается первого звука, то показано, что скорость распространения ударных волн первого звука пропорциональна корню из подаваемой мощности, т. е. линейна по скачку давления (ср. с разделом 2.5). Коэффициент пропорциональности близок к задаваемому соотношением (2.20).

Нужно отметить, что в этот период интересы исследователей постепенно смещаются от чисто нелинейных эффектов в сторону явлений, происходящих в закритических (относительно вихреобразования) режимах. В таком духе выполнен цикл работ в Калифорнийском технологическом институте (например, Тюрнером [74, 75]). В этих работах автор наблюдает типичные нелинейные явления, такие как укрупнение заднего и переднего фронтов или рождение волны давления при тепловом возбуждении (ср. с разделами 2.2–2.4). Например, для интенсивности накачки порядка 10 Вт/см^2 он регистрирует импульс давления $\Delta p \sim -0,1$ бар, что согласуется с формулами (2.8), (2.16). Далее, Тюрнер, повышая амплитуду накачки, наблюдает отклонение от теории, на основании чего он делает вывод о существовании предельной интенсивности тепловой волны, которую он связывает с «внутренней критической скоростью». Работы Торцинского [51, 76] посвящены той же теме. Интересен эксперимент со сходящейся ударной волной второго звука. Такая постановка задачи позволила получить очень большие интенсивности в волне, что опровергает выводы Тюрнера о существовании предельных амплитуд. Представляется, что Тюрнер наблюдал дополнительное затухание волны второго звука, вызванное затуханием на вихрях, ею же рожденных.

Аналогичный цикл исследований был проведен в последнее время в Институте Макса Планка (Гёттинген) (см. [77, 78]). Авторы исследовали динамику очень мощных тепловых импульсов в плоской и цилиндрической геометриях. Они показали, что экспериментальные результаты хорошо описываются нелинейной теорией, в которую введены добавочные члены, обязанные возникающим в волне вихрям (уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности (см. также [48, 60])). Интересно отметить, что для калибровки температурного датчика они использовали нелинейную волну второго звука с известными параметрами.

Чисто нелинейным эффектам посвящена недавняя работа Борисенко, Ефимова и Межова-Деглина [79]. В ней экспериментально изучаются нелинейные волны второго звука в резонаторе, однако теоретически вопрос не рассматривался. Однако, если отвлечься от процессов нелинейной трансформации волн первого и второго звуков, то следует ожидать, что динамика волн будет близкой к нелинейным волнам обычного звука в резонаторе. Действительно, авторы наблюдали пилообразные волны, но не стоячие (как в линейном случае), а бегущие вдоль резонатора. Такая картина соответствует теоретическим предсказаниям Честера [80]. В зависимости от температуры пики имели разную ориентацию. Интересно, что при T_α форма волн была синусоидальной. Это означает, что коэффициент нелинейности $\alpha_2(T)$ обращается в нуль не только для бегущих, но также и для стоячих волн.

Среди других экспериментов представляется нужным выделить недавнюю работу Данильченко с соавторами, в которой мощные импульсы второго звука в HeII изучаются с помощью отраженных в глубь нагревателя фононных сигналов [86]. Авторы этой статьи приходят к неожиданному выводу, что механизм теплообмена на границе гелий — твердое тело одинаков для HeI и HeII. Также с точки зрения эксперимента интересна работа Коцубы и Свифта [87], в которой интенсивный второй звук, в отличие от традиционных методов, получается продавливанием жидкости через пористую перегородку.

6.2. Экспериментальные приложения. Краткий обзор экспериментальных работ показывает, что основная масса экспериментов посвящена динамике интенсивных импульсов второго звука. Между тем, как это следует из содержания обзора, физика нелинейных явлений в HeII намного «богаче» и разнообразнее. В этом разделе статьи мы обсудим, какого рода эксперименты следует провести, чтобы обнаружить предсказанные теорией эффекты.

Одним из важнейших результатов теоретического рассмотрения является вывод о нелинейном распаде первоначальных возмущений температуры или давления и определение количественных характеристик этого процесса (см. разделы 2.4–2.5). Вообще говоря, эффект образования двух видов волн при импульсном выделении тепла наблюдался многими авторами (см. предыдущий пункт), хотя интерпретация этого явления была разная. Однако экспериментальные методы регистрации волн не позволяли определить детально структуру возмущений. По всей видимости, необходимо в эксперименте одновременно использовать калиброванные датчики давления и температуры, которые позволят количественно определить все величины, переносимые в образовавшихся волнах. Другим интересным, на наш взгляд, результатом является вывод о самофокусировке нелинейной монохроматической волны второго звука при температуре $T_\alpha \approx 1,885$ К (см. раздел 3). Для наблюдения такого эффекта необходим плоский нагреватель с неоднородным выделением тепла по его поверхности и перемещаемый в пространстве датчик температуры. Теория предсказывает сужение ширины волнового пучка по мере удаления от нагревателя и одновременно усиление амплитуды на оси пакета. Интересным было бы наблюдение также одиночных тепловых импульсов конечной ширины при других температурах. Здесь также возможна поперечная деформация пакета и частичная самофокусировка (см. раздел 3.2).

Классическими в нелинейной теории являются вопросы распада и слияния монохроматических волн вследствие неустойчивости в резонансных условиях (см. раздел 4.1). Несомненно, было бы интересным наблюдать рождение второго звука при прохождении в HeII монохроматической волны давления. Подобный эксперимент можно было бы осу-

шествить и в обратной постановке. Например, два почти противоположных пучка второго звука должны слиться в одну волну первого с частотой примерно в пять раз меньшей. В разделе 4.2 описана задача взаимодействия малых возмущений звуковой природы с ударной волной давления. Представляется интересным эксперимент по определению законов преломления и отражения волн второго звука на поверхности разрыва.

Существование степенных законов для корреляторов гидродинамических величин в турбулентных явлениях всегда было довольно интригующим. Особенно интересно проявление этих законов в акустически «зацепленных» системах, каковым является HeII. Волновую турбулентность, описанную в разделе 5, в принципе можно создавать стохастической накачкой низкочастотных первого и второго звуков. Корреляционные функции могут непосредственно измеряться датчиками температуры и давления известными в теории турбулентности методами. Косвенное определение этих величин может быть осуществлено путем измерения дополнительного затухания звуков (см. раздел 5).

Предложенные выше эксперименты непосредственно касаются предсказанных теорией нелинейных эффектов. Другой аспект экспериментальных приложений связан с использованием методов нелинейной акустики для изучения свойств сверхтекучего гелия.

Приведем ряд примеров того, какие из полученных результатов могут быть использованы для этой цели.

Одна из главных особенностей нелинейной теории состоит в том, что амплитуда волн оказывается связанной с другими акустическими характеристиками, такими как скорость распространения волн, размер волнового канала, затухание и т. д. Это очень существенно, потому что непосредственные измерения температуры (особенно в нестационарных случаях) связаны с серьезными, зачастую непреодолимыми трудностями. Соотношения нелинейной акустики позволяют перейти от измерения возмущений температуры δT к измерению других характеристик, например, времени пролета интенсивного импульса на заданном расстоянии, что представляет собой более легкую задачу. Например, в работе [48] был предложен следующий, принципиально новый метод измерения сопротивления Капицы R_K . Анализ граничных условий показывает, что при нагревании поверхности, граничащей с HeII, на стенке происходит релаксационный процесс с характерным временем $\tau = R_K C$, где C — теплоемкость единицы поверхности. Поэтому, если, например, на стенке выделяется тепло с интенсивностью W в течение времени $t < \tau$, то оно не все поступает в гелий, часть тепла задерживается в подложке. В результате амплитуда теплового импульса Δv_n будет меньше ожидаемой $\Delta v_n^0 = W/ST$, причем уменьшение амплитуды функционально связано с сопротивлением Капицы R_K . Поскольку, далее, время пролета нелинейного импульса зависит от амплитуды, то оно также будет функционально связано с величиной R_K . Таким образом, в результате эксперимента по распространению теплового импульса в HeII можно определить сопротивление Капицы R_K . Другим примером такого подхода может служить зондирование HeII, содержащего вихревые нити, нелинейным вторым звуком. Здесь также можно связать время пролета нелинейного сигнала с характеристиками вихревого клубка (см. [49, 50]). Подобным образом времяпролетная методика может быть использована для измерения параметров каких-либо процессов, например, для определения тепла, выделившегося на каких-либо нагреваемых поверхностях. Данная идеология может найти применение в вопросах метрологии. В частности, в работе [59] предложено использовать в качестве реперной температурной точки величину $T_\alpha = 1,885$ (см. раздел 2.9). Процедура уста-

новления этой реперной точки связана с тем свойством, что время пробега нелинейного импульса второго звука (при $T=T_\alpha$) с большой точностью не зависит от его амплитуды.

Далее, в разделе 2.4 было показано, что при импульсном нагреве стенки в гелии, помимо волн энтропии, распространяется «предвестник» — волна давления. По амплитуде δp этого «предвестника» можно определить интенсивность теплового импульса, выделившегося на стенке. Это может оказаться полезным в прикладных задачах, например, при создании контрольной системы в криогенных устройствах.

Нелинейная акустика дает новые возможности для изучения затухания второго звука. Например, это затухание может быть определено по «размытию» ударного фронта нелинейного импульса (см. разделы 2.6, 2.7). Пороговые амплитуды распадного и черенковского процессов связаны с коэффициентами вязкости, и последние могут быть определены из измерений пороговых амплитуд. Подобным образом измеряют затухание спиновых волн в ферромагнетиках (см. [3]).

Многие количественные соотношения, приведенные в обзоре, могут служить основой для измерения термодинамических величин. Заметим, кстати, что хорошее совпадение экспериментально определенной величины $\alpha_2(T)$ (см. [13, 15]) и рассчитанной по формуле (2.27) подтверждают найденную зависимость термодинамических величин от относительной скорости $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$. В связи с этим еще раз обратим внимание на результаты разделов 2.7–2.8. Коэффициенты $\alpha_2(T)$, D_2 , D_3 , μ_2 , входящие в уравнение (2.29), являются величинами, несущими богатейшую информацию о таких фундаментальных процессах в HeII, как взаимодействие квазичастиц, динамика флуктуаций и т. д. Сопоставление найденного аналитического решения с экспериментально наблюдаемой динамикой тепловых импульсов позволяет таким образом важные черты этих процессов. На этом пути возможно измерение кинетических индексов термодинамических величин вблизи T_λ , определение их абсолютных значений и т. д. Перечисленные примеры в известной степени иллюстрируют утверждение о широких возможностях методов нелинейной акустики для изучения свойств сверхтекучего гелия.

Как упоминалось во введении, HeII является уникальной акустической системой. Такие свойства, как существование двух мод, имеющих различную физическую природу, что позволяет отдельно регистрировать оба звука, сильная зависимость акустических параметров (таких, как коэффициенты нелинейности, вязкости, дисперсии, скорость второго звука и пр.) от температуры, укручение заднего и переднего фронта, существование монохроматической волны в недиспергирующей среде — все это делает HeII исключительно интересным объектом с точки зрения нелинейной теории волн. Такое разнообразие его свойств позволяет моделировать в эксперименте большое число различных экзотических ситуаций для распространения и взаимодействия нелинейных волн.

Заключение. Содержание представленного обзора охватывает практически все традиционно исследуемые вопросы теории нелинейных волн, вследствие чего можно говорить о некоторой завершенности предмета. Однако при экспериментальных исследованиях динамики интенсивных волн возникает новый ракурс. Нелинейная акустика сверхтекучего гелия, изложенная в настоящем обзоре, базируется на классических уравнениях двухскоростной гидродинамики, и, как следствие, справедлива лишь в рамках предположений, при которых получены эти уравнения. В реальных ситуациях, например, при исследовании мощных импульсов большой длительности, или, наоборот, волн с длинами, сравнимыми с длиной пробега квазичастиц, эти предположения не выполняются, и возможен ряд выходов за рамки используемой модели.

Одна из таких возможностей, которую мы хотим обсудить здесь, связана с вихреобразованием в интенсивных импульсах второго звука. В таких импульсах имеется большое значение относительной скорости $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$, способное за короткое время развить вихревую структуру (см. [18, 49, 51, 52]).

Рожденные вихри оказывают влияние на породившую их волну, вследствие чего эволюция последней будет происходить по-другому, нежели это описано в обзоре (см. раздел 6.1). Ряд экспериментальных работ по исследованию мощных тепловых импульсов в HeII действительно указывает на расхождение наблюдаемых эффектов с предсказаниями нелинейной теории. К таким расхождениям можно отнести отличие формы импульса от бюргеровского треугольника (см. разделы 2.5, 2.6), или количественное несовпадение измеренной и вычисленной нелинейной добавок к скорости второго звука. К расхождениям можно также отнести наблюдаемый эффект образования паровой пленки при кратковременном сильном нагреве стенки. Действительно, по формулам акустики (см. раздел 2), даже в очень сильных импульсах (до 100 Вт/см²), амплитуда температуры в них не превышает величину порядка 0,05 К. Этой величины зачастую бывает недостаточно, чтобы просто достичь кривой равновесия HeII—пар (в p , T -координатах), в то время как известно, что для образования паровой пленки необходимы гораздо большие (до 2 К) перегревы. Не объясняются в рамках классической двухскоростной гидродинамики также эксперименты [53, 54], имеющие дело с не очень сильными (до 1 Вт/см²), но очень длительными тепловыми импульсами ⁽¹¹⁾. Представляется, что наблюдавшиеся в цитируемых работах явления могут быть объяснены в рамках уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности, т. е. уравнений движения HeII, содержащего беспорядочно ориентированные вихревые нити. Некоторые результаты этой теории изложены в работах [50, 60].

Вихреобразование в звуковых волнах является одним из примеров того, когда описание эволюции тепловых возмущений невозможно в рамках классической гидродинамики сверхтекучей жидкости. Другим примером могут служить задачи, связанные с очень малыми длительностями или масштабами длин, сравнимыми с длиной пробега квази-частиц. В этом случае корректное описание динамики тепловых возмущений возможно лишь в рамках кинетического приближения. Сказанное особенно касается нелинейных волн, так как в процессе их эволюции существенно уменьшаются масштабы, на которых происходит изменение параметров. Примером может служить описанное в разделе 2 укручение профиля волны и образование ударного фронта. С привлечением кинетической теории следует, по-видимому, решать задачи о распространении тепловых возмущений вблизи твердых поверхностей, в частности, вопрос о приграничной тепловой волне (см., например, [61]).

В процессе эволюции поля температуры при распространении тепловых возмущений в HeII последний может нагреться до температур, близких к T_λ . Окрестность T_λ является областью, в которой следует проявить осторожность при использовании классической двухскоростной гидродинамики. Помимо того, что из-за сингулярностей термодинамических величин задачи акустики становятся весьма специфичными (вспомним, например, расходимость $\alpha_2(T)$ в разделе 2.7 и рис. 3), сама гидродинамика может стать неприменимой из-за роста корреляционного радиуса. В этом случае методы исследований возмущений связаны с очень сложными и тонкими вопросами динамики флуктуаций или с применением Ψ -теории сверхтекучести (см. [62]).

Ряд принципиально новых задач, возникающих при исследовании тепловых возмущений,— это изучение волн, в которых выполняются

условия фазовых переходов HeI—HeII, HeII—пар или HeII—HeI—пар. Эти задачи являются аналогами задачи Стефана для HeII и практически не изучались (см., однако, [63, 64]).

Таким образом, можно высказать предположение, что дальнейшее изучение динамики тепловых возмущений в HeII должно проводиться вне «рамки» обычной двухскоростной гидродинамики, а описание их методами классической нелинейной акустики представляет собой завершённый этап.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность И. М. Халатникову и В. В. Лебедеву за многочисленные обсуждения и ряд полезных замечаний. Автор также благодарен за подборку и обсуждение экспериментальных работ А. Н. Цюю.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

¹ Переменные γ , \hat{f} описывают непотенциальные течения нормальной компоненты и могут быть положены равными нулю для задач акустики.

² Везде далее в переменных a_k^y , ω_k^y , а также n_k^y , Γ_k^y , Δ_k^y (см. раздел 5) величины y , ± 1 , ± 2 — это индексы (не степени)!

³ В работе [7] излагаемая ниже задача по вычислению инвариантов Римана решена в пренебрежении членами, содержащими коэффициент расширения $\beta_T = -\rho^{-1} \times \partial \rho / \partial T$, что справедливо в диапазоне $0,8 \text{ К} < T < 1,6 \text{ К}$. С учетом членов, связанных с β_T , эта задача может быть решена в частном случае, когда в качестве граничных условий задано либо только возмущение плотности ρ' , либо только возмущение энтропии σ' . Однако соответствующие выкладки чрезвычайно громоздки, и в обзоре мы ограничимся изложением результатов работы [7].

⁴ Решение системы n квазилинейных уравнений, в котором $n-2$ переменных функционально связаны с двумя (из n) переменными, называется простой волной ранга 2 [10]. Соответственно, волны, описанные Риманом, называются простыми волнами ранга 1.

⁵ Этому факту можно придать иную интерпретацию. Положительность исследуемой величины означает, что гамильтониан четвертого порядка H_4 отрицателен, т. е. двухчастичное взаимодействие между квантами второго звука носит характер притяжения, что и приводит к самофокусировке волны.

⁶ Этот процесс рождения второго звука первым, связанный с неустойчивостью волн, следует отличать от нелинейного распада волн энтропии и плотности (см. раздел 2.4), который был следствием того, что переменные ρ' и σ' не описывают «чистые» волновые моды.

⁷ Это уравнение может быть также получено путем непосредственного подсчета изменения числа звуковых квантов в нелинейных процессах [58].

⁸ Нижеследующее соотношение для затухания Γ_k^y может быть также получено из системы КУ (см. [36, 43]).

⁹ С тем отличием, что вид спектра $n_k^{1,2}$ отличается от распределения Планка.

¹⁰ Недавно аналогичное явление обнаружено в классических средах вблизи критической точки [89].

¹¹ Подробный обзор цитируемых и аналогичных работ представлен в статье [88].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Халатников И. М. Теория сверхтекучести.— М.: Наука, 1971.
2. Захаров В. Е.//Изв.вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1974. Т. 16. С. 431.
3. Львов В. В. Лекции по физике нелинейных явлений.— Новосибирск, 1977.
4. Покровский В. Л., Халатников И. М.//Письма ЖЭТФ. 1976. Т. 23. С. 653.
5. Халатников И. М.//ЖЭТФ. 1952. Т. 23. С. 169.
6. Покровский В. Л., Халатников И. М.//ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 1974.
7. Немировский С. К.//ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 2091.
8. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений.— М.: Наука, 1988.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
10. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
- [11] Халатников И. М.//ЖЭТФ. 1952. Т. 23. С. 253.
12. Putterman S., Garret S.//J. Low Temp. Phys. 1977. V. 27. P. 543.

13. Луцет М. О., Немировский С. К., Цой А. Н. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 249.
14. Osborne D. V. // Proc. Phys. Soc. Ser. A. 1951. V. 64. P. 114.
15. Dessler A. I., Fairbank W. M. // Phys. Rev. 1956. V. 104. P. 10.
16. Cummings J. C., Schmidt D. W., Wagner W. // Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 71.
17. Изнанкин А. Ю., Межов-Деглин Л. П. // Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 28, вып. 12.
18. —»—»— // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 1378.
19. Цой А. Н., Луцет М. О. // Инж.-физ. ж. 1986. Т. 51. С. 5.
20. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
- [21] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
22. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1982.
23. Hohenberg P. C., Halperin B. I. // Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 435.
24. Tyson J. // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 21. P. 1235.
25. Ahlers G. // Ibidem. 1979. V. 43. P. 1417.
26. Крукс М., Робинсон В. // Приборы для науч. исслед. 1983. Т. 54. С. 16.
27. Viney W. F., Hurd D. L. // Adv. Phys. 1978. V. 27. P. 533.
28. Немировский С. К. Нелинейные волны второго звука в HeII вблизи T_λ .— Препринт ИТФ АН СССР 08-76.— Новосибирск, 1976.
29. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов, метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
30. Немировский С. К. // ФНТ. 1978. Т. 4. С. 1229.
- [31] Захаров В. Е., Рубенчик А. М. // ЖПМТФ. 1972. № 5. С. 84.
32. Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 136.
33. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. // Акуст. ж. 1969. Т. 15. С. 40.
34. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. // ДАН СССР. 1973. Т. 208. С. 794.
35. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков.— М.: Наука, 1982.
36. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
37. Дьяков С. Я. // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 288.
38. Иорданский С. В. // ПММ. 1957. Т. 21. С. 465.
39. Немировский С. К. // ФНТ. 1985. Т. 11. С. 787.
40. Wylđ Я. W. // Ann. of Phys. 1961. V. 14. P. 143.
- [41] Захаров В. Е., Львов В. С. // Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1975. Т. 17. С. 1470.
42. Немировский С. К. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 2023.
43. Гуревич В. Л. Кинетика фононных систем.— М.: Наука, 1980.
44. Кадомцев Б. Б., Конторович В. М. // Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1975. Т. 17. С. 432.
45. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З. // ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 297.
46. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1971.
47. Гуревич В. Л., Лайхтман Б. Д. // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 1978.
48. Цой А. Н., Немировский С. К. // ФНТ. 1980. Т. 6. С. 671.
49. Немировский С. К., Цой А. Н. // Письма ЖЭТФ. 1982. Т. 31. С. 229.
50. Немировский С. К., Лебедев В. В. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 1729.
- [51] Torczynski J. R. // Phys. Fluids. 1984. V. 10. P. 2418.
52. Liepmann H. W., Lagipa G. A. // Ann. Rev. Fluid Mech. 1984. V. 16. P. 139.
53. Пешков В. П., Ткаченко В. К. // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 1427.
54. Van Stiver S. W. // Cryogenics. 1979. V. 19. P. 385.
55. Руденко О. В., Солуян С. Н. Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.
56. Пушкина Н. И., Хохлов Р. В. // Письма ЖЭТФ. 1976. Т. 19. С. 672.
57. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений.— М.: Наука, 1970.
58. Немировский С. К. // ФНТ. 1978. Т. 4. С. И.
59. Цой А. Н. // Квантовая метрология и фундаментальные физические константы: Тезисы докладов.— Л., 1982.— С. 120.
60. Немировский С. К. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1363.
- [61] Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости.— М.: Мир, 1978.
62. Гинзбург В. Л., Собянин А. А. // УФН. 1976. Т. 120. С. 153.
63. Oniki A. // J. Low Temp. Phys. 1984. V. 55. P. 309.
64. Пешков В. П. // ЖЭТФ. 1956. Т. 41. С. 581.
65. Гуляев А. И. // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 59.
66. Romerantz M. // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26. P. 362.
67. Цой А. Н. // Гидрогазодинамика и теплообмен в конденсированных средах.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.— С. 8.
68. Kitabatake S., Sawada Y. // J. Phys. Soc. Japan. Lett. 1978. V. 45. P. 345.
69. Кавецкая И. В., Сибельдин Н. Н., Стопчанский В. Б., Цветков В. А. // ДАН СССР. 1979. Т. 244. С. 559.
70. Цветков В. А. и др. // Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 272.
- [71] Сибельдин Н. Н., Стопчанский В. Б., Цветков В. А., Этьен Б. // Ibidem. 1982. Т. 32. С. 224.
72. Atkin R. J., Fox N. // J. Phys. Ser. C. 1986. V. 18. P. 1585.

73. —»—»—//Ibidem. P. 6963.
74. *Turner T. N.*//Physica. Ser. B. 1981. V. 107. P. 701.
75. —»—»—//Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 3227.
76. *Torczynski J. R.*//Ibidem. 1984. V. 27. P. 1138.
77. *Fiszdon W., Peradzynski Z., Stamm G.*//Ibidem. 1989. V. 5. P. 881.
78. *Schwerdtner M. V., Poppe W., Schmidt D. M.*//Cryogenics. 1989. V. 29. P. 132.
79. *Борисенко И. Ю., Ефимов В. Б., Межов-Деглин Л. П.*//ФНТ. 1988. Т. 14. С. 1123.
80. *Chester W.*//J. Fluids Mech. 1964. V. 18. P. 44.
[81] *Chee-Seng L.*//Wave Motion. 1987. V. 9. P. 349.
82. *Немировский С. К.*//ФНТ. 1989. Т. 15. С. 1011.
83. *Atkin R. J., Fox N.*//J. Phys. Ser. C. 1987. V. 20. P. 1937.
84. *Пушкина Н. И.*//ФНТ. 1988. Т. 14. С. 794.
85. *Лебедев В. В.*//ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 1224.
86. *Danilchenko B. A., Lutset M. O., Poroshin V. N.*//Cryogenics. 1989. V. 29. P. 444.
87. *Kotsubo V., Swift G. W.*//Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 2604.
88. *Nemirovskii S. K., Tsoi A. N.*//Cryogenics. 1989. V. 29. P. 985.
89. *Borisov A. A., Borisov Al. A., Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E.*//J. Fluid. Mech. 1983. V. 126. P. 59.