

530.145.6+535.51

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФАЗЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
И ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ****С. И. Виноцкий, В. Л. Дербов, В. М. Дубовик,
Б. Л. Марковски, Ю. П. Степановский**(Объединенный институт ядерных исследований, Дубна;
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского;
Харьковский физико-технический институт АН УССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	2
2. Топологические фазы в квантовой механике	3
2.1. Адиабатический подход Борна — Фока. 2.2. Адиабатическая фаза Берри. 2.3. Фаза Берри при эволюции спина $1/2$ в магнитном поле. 2.4. Фаза Берри при эволюции произвольного спина в магнитном поле. 2.5. Неабелева адиабатическая фаза Вильчека — Зи. 2.6. Факторизация решений линейных эволюционных систем и геометрическая фаза Берри. 2.7. Геометрическая фаза Ааронова — Анандана. 2.8. Модельный пример комплексного проективного пространства $\mathcal{CP}_n$ — прямой подход. 2.9. Геометрическое построение фазы Ааронова — Анандана. 2.10. Модельный пример комплексного проективного пространства $\mathcal{CP}_n$ — канонический подход. 2.11. Параметризация лучей в терминах матрицы плотности. Пример: спин $1/2$. 2.12. Геометрическая фаза для нелинейных эволюционных уравнений. 2.13. Геометрическая фаза Панчаратнама. 2.14. Геометрическая фаза при наличии инвариантов.	22
3. Топологические фазы в поляризационной оптике	
3.1. Фаза Берри спиральных фотонов и параллельный перенос вектора линейной поляризации при последовательности скользящих отражений. 3.2. Закон параллельного переноса Рытова и фаза Владимирского в геометрической оптике неоднородных сред. 3.3. Экспериментальные наблюдения фазы Рытова — Владимирского. 3.4. Вращение плоскости поляризации излучения в спиральном волоконном световоде. 3.5. Особенности описания геометрических фаз при отказе от требования адиабатичности. 3.6. Геометрическая фаза при многократном отражении света неплоской системой идеальных зеркал. 3.7. Геометрическая фаза при циклическом изменении состояния поляризации прямолинейных световых пучков (фаза Панчаратнама). 3.8. Представление поляризационных состояний на сфере Пуанкаре и вычисление фазы Панчаратнама. 3.9. Эксперименты по измерению фазы Панчаратнама на лазерных интерферометрах. 3.10. Фаза Панчаратнама в оптически активной среде. 3.11. Одновременное наблюдение фаз Рытова — Владимирского и Панчаратнама в одном эксперименте.	41
4. Заключение	42
5. Приложение. Исторический экскурс и перспективы	46
Примечания к тексту	47
Список литературы	47

1. Введение. Недавно М. Берри на ряде примеров квантовой механики удалось остро поставить вопрос об условиях возникновения топологической фазы волновой функции, описывающей шредингеровскую эволюцию при времязависящем гамильтониане. Это вызвало большой интерес как теоретиков, так и экспериментаторов, работающих в самых разных областях физики. Данная проблематика имеет глубокие корни в нашем столетии (см. историческую часть приложения к обзору) и связана с современными математическими методами (см. разделы 2.9, 2.10 и обсуждение в заключении — п. 4). Выяснилось, что в экспериментальном отношении следствия существования топологических фаз в Квантовомеханических системах наблюдались давно. В этой связи достаточно вспомнить полуполные орбитальные моменты молекул (Ван-Флек, 1929), фазы волновой функции заряженной частицы в поле монополя или соленоида (Дирак, 1931; Ааронов — Бом, 1959). Однако только в последнее время началось целенаправленное изучение геометрических (топологических) фаз.

Попробуем проследить логику и хронологию рассуждений, приведших к современному пониманию топологических фаз в квантовой механике и поляризационной оптике. Хорошо известно, что Квантовомеханические системы описываются векторами состояния или матрицами плотности, удовлетворяющими динамическим уравнениям Шрёдингера и Лиувилля соответственно. Эволюция начального состояния очень проста, когда оператор Гамильтона не зависит явно от времени, так как уравнения движения приводят к появлению фазы, линейным образом зависящей от времени. Для гамильтонианов общего вида, однако, картина становится не проще, чем для общих линейных динамических систем. В этом случае решение набирает фазу, которая содержит информацию нестационарного характера (см. раздел 2.6). Например, если рассмотреть класс гамильтоновых эволюций $H(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^n$, векторов состояний квантовой системы, задавая явную зависимость $\{\lambda(\tau)\}$ от времени, оказывается, что фаза волновой функции является суммой двух членов $\gamma + \delta$. Одна часть фазы γ обязана своим существованием тому, что пространство параметров Λ непросто связано. Другими словами, имеются контуры в пространстве параметров, которые нельзя стянуть непрерывным образом в точку. Эта часть фазы γ имеет геометрический характер, так как не зависит от деталей зависимости параметров от времени, т. е. она не зависит от динамики, задаваемой отдельным гамильтонианом, а отражает свойства семейства гамильтонианов. Эта конструкция, в рамках адиабатического приближения, приводит к так называемой абелевой фазе Берри (см. разделы 2.1—2.4). Более общая ситуация возникает, когда параметрически задаваемое семейство гамильтонианов обладает вырожденным дискретным спектром. Тогда геометрические фазовые множители, которые набегают во время эволюции векторов состояний, соответствующих вырожденному собственному значению, задают неабелеву фазу Берри или фазу Вильчека — Зи (см. разделы 2.5, 2.6). Нетрудно заметить, что, по сути дела, времязависящее семейство гамильтонианов не обязательно задавать параметрическим образом, так как при выводе геометрической фазы используется только факт наличия подходящих замкнутых контуров $\{\lambda(0)\} = \{\lambda(\tau_c)\}$ в параметрическом пространстве Λ . Это обстоятельство позволило Ааронову и Анандану пойти дальше и выделить топологическую фазу волновой функции без предположения об адиабатичности и при более слабых ограничениях на семейство гамильтонианов. В этих целях они рассматривают класс времязависящих гамильтонианов, на который наложено условие цикличности эволюции, т. е. векторы состояния за время эволюции должны переходить сами в себя с точностью до унитарного произвола. Полученная при этом геометрическая фаза (фаза Ааронова — Анандана) обсуждается в разделах 2.7—2.11. Далее было

замечено, что пространство состояний само обладает келеровой метрикой и что перенос состояний по геодезической в этой метрике приводит к появлению фазы топологического характера — фазе Панчаратнама (2.13). Подобные свойства фаз в квантовой механике можно усмотреть и в ее «алгебраической формулировке», т. е. если задавать согласованным образом времязависящую алгебру наблюдаемых и характеризовать векторы состояний квантовыми числами, которые соответствуют коммутирующей подалгебре. Об одной модели такого рода мы упоминаем в разделе 2.14. В разделе 2.12 приведена также модель топологической фазы, набегающей в нелинейной системе, описывающей распространение света в керровской среде (см. также раздел 3.10). Здесь причина возникновения фазы связана с наличием инвариантов эволюции.

Поскольку появление топологических фаз, как уже отмечалось, является свойством любой динамической системы, то поляризационная оптика в надлежащей параметризации дает новую область поисков этих объектов. Фазы, связанные с поворотом вектора поляризации при перемещении вдоль искривленных лучей света, — явление, предсказанное еще С. М. Рытовым (1938) и В. В. Владимирским (1941), является прототипом фаз Берри и Панчаратнама. Этому вопросу посвящены разделы 3.1, 3.2.

В обзоре основное внимание уделяется общей картине топологических фаз в задачах квантовой механики и оптики. В нашем изложении Квантовомеханические примеры имеют методический и иллюстративный характер по сравнению с задачами из поляризационной оптики (разделы 3.3—3.11). Последние имеют самостоятельную ценность, а также служат источником глубоких аналогий и наглядных моделей. В обзоре мы рассмотрели далеко не все аспекты проблематики топологических фаз. Дополнительную информацию о недавно появившихся работах, содержащих новые результаты, мы постарались дать в приложении (см. раздел 5).

2. Топологические фазы в квантовой механике. При переходе от теории квантов Планка и Эйнштейна к квантовой механике де Бройля — Гейзенберга — Борна — Шрёдингера — Дирака большую роль сыграла адиабатическая гипотеза П. Эренфеста (1913 г.): всякое определенное с точки зрения квантовой теории состояние переходит при адиабатическом изменении параметров системы снова в определенное состояние с теми же квантовыми числами, которые, таким образом, являются адиабатическими инвариантами. В рамках квантовой механики адиабатическая гипотеза Эренфеста была доказана для невырожденных Квантовомеханических систем в 1928 г. М. Борном и В. А. Фоком [1]. С тех пор этот вопрос казался исчерпанным, однако в 1984 г. М. Берри [2] вновь привлек внимание к адиабатической теореме. Он указал, что волновая функция системы при циклическом изменении параметров в общем случае приобретает фазовый множитель, содержащий кроме динамической еще и дополнительную топологическую фазу.

2.1. Адиабатический подход Борна — Фока. В своей работе [1] Борн и Фок, решая уравнение Шрёдингера ($\hbar=1$)

$$i\dot{\psi} = H(\tau)\psi \quad (2.1)$$

с гамильтонианом $H(\tau)$, медленно изменяющимся со временем, ввели полный набор ортонормированных собственных функций $\varphi_n(\tau)$ гамильтониана

$$H(\tau)\varphi_n(\tau) = E_n(\tau)\varphi_n(\tau) \quad (2.2)$$

в предположении, что спектр $E_n(\tau)$ не вырожден. Фазы функций $\varphi_n(\tau)$ были ими выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$(\varphi_n, \dot{\varphi}_n) = 0. \quad (2.3)$$

Далее они представили решение уравнения Шрёдингера (2.1) с начальным условием $\psi(0) = \varphi_n(0)$ в виде

$$\psi_n(\tau) = \sum_m c_m^{(n)}(\tau) \varphi_m(\tau) \exp\left(-i \int_0^\tau E_m(\tau') d\tau'\right) \quad (2.4)$$

и, с учетом (2.3), получили следующее уравнение для определения величин $c_m \equiv c_m^{(n)}$:

$$\dot{c}_n = \sum_{m \neq n} c_m (\varphi_n, \dot{\varphi}_m) \exp\left[i \int_0^\tau (E_n(\tau') - E_m(\tau')) d\tau'\right]. \quad (2.5)$$

Используя уравнение (2.2), выражение (φ_n, φ_m) при $m \neq n$ можно переписать в виде

$$(\varphi_n, \dot{\varphi}_m \Delta\tau_{nm}) = - \frac{(\varphi_n, \dot{H} \Delta\tau_{nm} \varphi_m)}{E_n - E_m}, \quad (2.6)$$

где $\Delta\tau_{nm}$ — время перехода между состояниями. Эволюция волновой функции (2.4) считается адиабатической, если правая часть (2.6) по модулю много меньше единицы. Тогда из системы уравнений (2.5) следует, что в адиабатическом пределе $c_m \equiv c_m^{(n)} = \delta_{mn}$, т. е. функции

$$\varphi_n(\tau) \exp\left(-i \int_0^\tau E_n(\tau') d\tau'\right)$$

удовлетворяют уравнению Шрёдингера (2.1), причем оставшийся произвол в фазе $\varphi_n(\tau)$ фиксируется условием (2.3).

2.2. Адиабатическая фаза Берри. В работе Борна и Фока подразумевалась явная зависимость гамильтониана H от времени τ . Следуя Берри, будем считать, что гамильтониан H зависит от времени τ через набор функций $\{\lambda^j(\tau)\}_{j=1}^N = \lambda(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_c]$. Введем базис ортонормированных собственных функций $\chi_n(\lambda)$ мгновенного гамильтониана $H = H(\lambda)$:

$$H(\lambda) \chi_n(\lambda) = E_n(\lambda) \chi_n(\lambda), \quad (2.7)$$

с произвольными, но фиксированными фазами. В предположении о невырожденности спектра $E_n(\lambda)$ эти функции каждый момент времени $\tau \in [0, \tau_c]$ совпадают с точностью до калибровочного преобразования с собственными функциями (2.2):

$$\varphi_n(\tau) = \mathcal{U}(\lambda) \chi_n(\lambda) = \exp(i\Theta^n(\lambda)) \chi_n(\lambda). \quad (2.8)$$

Из условия (2.3) следует уравнение для фазы

$$\dot{\Theta}^n = i(\chi_n, \dot{\chi}_n) = A_j^n \dot{\lambda}^j, \quad (2.9)$$

здесь

$$A_j^n = i\left(\chi_n, \frac{\partial \chi_n}{\partial \lambda^j}\right) \quad (2.10)$$

имеет смысл «индуцированного калибровочного поля», поскольку при калибровочных преобразованиях

$$\chi_n \rightarrow \exp(i\alpha_n(\lambda)) \chi_n \quad (2.11)$$

величина A_j^n преобразуется как векторный потенциал в электродинамике:

$$A_j^n \rightarrow A_j^n + \frac{\partial \alpha_n}{\partial \lambda^j}. \quad (2.12)$$

Решение уравнения (2.9) имеет вид

$$\Theta^n(\tau_c) = \int_0^{\tau_c} \dot{\Theta}^n d\tau = \oint_C A_j^n d\lambda^j = \Theta^n(\lambda(\tau_c)) - \Theta^n(\lambda(0)). \quad (2.13)$$

Рассмотрим теперь замкнутый контур C в пространстве параметров λ , т. е. $\lambda(\tau_c) = \lambda(0)$. Тогда изменение фазы $\Theta^n(\tau)$ за время τ_c характеризует эволюцию функции $\varphi_n(\tau)$ относительно начального условия $\varphi_n(0)$:

$$\varphi_n(\tau_c) = \exp(i\Theta^n(\tau_c)) \varphi_n(0). \quad (2.14)$$

Как следует из (2.13), фаза $\Theta^n(\tau_c)$, равная

$$\Theta^n(\tau_c) = \Theta_c^n = \oint_C A_j^n d\lambda^j, \quad (2.15)$$

не зависит от времени эволюции, а определяется только замкнутым контуром C , по которому происходит эволюция квантовой системы с гамильтонианом $H(\lambda)$.

Используя теорему Стокса, можно записать выражение для фазы Θ_c^n , которую принято называть *фазой Берри*:

$$\Theta^n \equiv \Theta_c^n = \int_{\Sigma} F_{jk}^n ds^{jk}; \quad (2.16)$$

здесь ds^{jk} — элемент ориентируемой поверхности Σ , натянутой на контур C , а величина

$$F_{jk}^n = \frac{\partial A_k^n}{\partial \lambda^j} - \frac{\partial A_j^n}{\partial \lambda^k} \quad (2.17)$$

— «тензор калибровочного поля» (2.10). Из калибровочной инвариантности тензора F относительно (2.12) явно следует, что фаза Берри не зависит от выбора базиса (2.7) и однозначно определяется соотношением (2.16).

Отметим, что условие Борна — Фока (2.3), фиксирующее фазы базиса (2.7), можно трактовать как условие горизонтальности в проективном гильбертовом расслоении над пространством лучей, используемое в работе Б. Костанта [3]. Таким образом, с учетом параметрической зависимости функции $\chi(\lambda)$ возникает естественная топологическая интерпретация фазы Берри, как элемента группы голономии $\mathcal{U}(1)$ связности (2.10) (см. Б. Саймон [4]).

2.3. Фаза Берри при эволюции спина 1/2 в магнитном поле. Проиллюстрируем введенные выше понятия на ставшей уже классической модели эволюции спина 1/2 в магнитном поле, зависящем от времени τ . Здесь гамильтониан является матрицей 2×2 , зависящей от трех параметров $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\} = \lambda(\tau)$. Запишем его в наиболее общем виде [5]:

$$H = (B\lambda) + (\lambda G\sigma), \quad (2.18)$$

где G — некоторая невырожденная 3×3 -матрица, σ — стандартные матрицы Паули, $B \in \mathfrak{R}^3$.

Сделаем замену в пространстве параметров $\lambda \rightarrow p$:

$$\lambda = G^{-1}p. \quad (2.19)$$

Собственные значения $\varepsilon_{\pm}$ мгновенного гамильтониана $H = H(p)$, которые, как обычно, находим из уравнения

$$\det (H - \varepsilon) = 0, \quad (2.20)$$

и собственные векторы $\varphi_{\pm}$ равны соответственно

$$\varepsilon_{\pm} = BG^{-1}p \pm |p|, \quad (2.21)$$

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{(2|p|)^{1/2}} \begin{pmatrix} \pm \frac{p_{\pm}}{(|p| \mp p_3)^{1/2}} \\ (|p| \mp p_3)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

где $p_{\pm} = p_1 \pm ip_2$. Введем стандартные сферические координаты $\{|p|, \vartheta, \varphi\}$ в пространстве параметров $p \in \mathbb{R}^3$. Тогда собственные векторы примут вид

$$\varphi_{+} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{-} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Компоненты индуцированного калибровочного поля (2.10) в этом случае равны

$$A_{+} = i \langle \varphi_{+} | \nabla_p \varphi_{+} \rangle = (A_{+}^p, A_{+}^{\vartheta}, A_{+}^{\varphi}) = \left(0, -\frac{i}{2|p|} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}, 0 \right), \quad (2.24)$$

$$A_{-} = i \langle \varphi_{-} | \nabla_p \varphi_{-} \rangle = (A_{-}^p, A_{-}^{\vartheta}, A_{-}^{\varphi}) = \left(0, -\frac{i}{2|p|} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, 0 \right).$$

Соответствующая форма кривизны (2.17) имеет вид

$$F_{\pm} = \operatorname{rot} A_{\pm} = \mp \frac{p}{2|p|^3}. \quad (2.25)$$

Фаза Берри, согласно определению (2.16), равна

$$\Theta_{\pm} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} A_{\pm} \, ds. \quad (2.26)$$

Окончательное выражение для $\Theta_{\pm}$ следует из известной формулы [6] об отображении Гаусса, индуцированном заменой переменных (2.19):

$$\Theta_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \operatorname{sign} (\det G) \Omega_C; \quad (2.27)$$

здесь Ω_C — телесный угол:

$$\Omega_C = \int_{S_C^2} \frac{d\Omega}{|p|^2}, \quad (2.28)$$

который опирается на контур C , лежащий на сфере $\mathcal{S}^2$ радиуса $|p|$ с центром в начале координат пространства параметров $p \in \mathbb{R}^3$, совпадающем с исходным в пространстве параметров $\lambda \in \mathbb{R}^3$. В частности, для контура C , лежащего в плоскости $\lambda_3 = 0$, телесный угол $\Omega_C = 2\pi$, т. е.

$$\Theta_{\pm} = \mp \operatorname{sign} (\det G) \pi. \quad (2.29)$$

Перейдем к частной параметризации гамильтониана (2.18)

$$H = \kappa H_s, \quad (2.30)$$

описывающей эволюцию волновой функции частицы со спином $1/2$ во внешнем медленно меняющемся магнитном поле $\mathbf{H}(\tau)$, где $\mathbf{s}$ — оператор спина, κ — константа, включающая гиромагнитное отношение. Пусть в начальный момент времени задана проекция спина $m = \pm 1/2$ на направление магнитного поля $\mathbf{t} = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$:

$$i\dot{\psi} = \kappa \mathbf{H} \mathbf{s} \psi. \quad (2.31)$$

При циклическом изменении магнитного поля $\mathbf{H}(\tau_c) = \mathbf{H}(0)$ функция $\varphi_m(\tau)$, согласно (2.14), приобретает геометрический множитель:

$$\varphi_m(\tau_c) = \exp(i\Theta^m) \varphi_m(0). \quad (2.32)$$

Здесь топологическая фаза Θ^m вычисляется из равенства (2.16) и в соответствии с (2.27), (2.28) (при $B = 0$, $G = \kappa H$) равна

$$\Theta^m = -m\Omega(C), \quad m = \pm \frac{1}{2}, \quad (2.33)$$

где $\Omega(C)$ — телесный угол, который вектор $\mathbf{t}$ прочерчивает на единичной сфере, пробегаая замкнутый контур C в пространстве параметров $\mathbf{t} \in \mathcal{P}^2$. Экспериментальное измерение фазы (2.33) при $m = 1/2$ проведено Биттером и Дабберсом [7] для поляризованных нейтронов в спиральном магнитном поле.

2.4. Фаза Берри при эволюции произвольного спина в магнитном поле. Рассмотрим обобщение формулы (2.33) для частицы с произвольным спином в медленно меняющемся магнитном поле $\mathbf{H}(\tau)$. При этом для вычисления фазы Берри Θ^m воспользуемся методом подвижного репера Френе $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Уравнение для собственных функций мгновенного гамильтониана $H(\tau)$ имеет вид

$$(\mathbf{st}) \varphi_m = m \varphi_m, \quad (2.34)$$

где проекция спина m — адиабатический инвариант, а фазы φ_m фиксируются условием Борна — Фока — Саймона (2.3). Дифференцируя (2.34) по времени τ , имеем тождество

$$(\dot{\mathbf{st}}) \varphi_m + (\mathbf{st} - m) \dot{\varphi}_m = 0. \quad (2.35)$$

Из (2.35) ввиду свойств оператора спина находим, что $\dot{\varphi}_m$ есть суперпозиция вида

$$\dot{\varphi}_m = \alpha \varphi_{m+1} + \beta \varphi_m + \gamma \varphi_{m-1}, \quad (2.36)$$

поскольку $(\dot{\mathbf{tt}}) = 0$. Тогда из (2.3) следует, что $\beta = 0$, т. е.

$$\dot{\varphi}_m = \alpha \varphi_{m+1} + \gamma \varphi_{m-1}. \quad (2.37)$$

Далее в результате тождественных преобразований получим

$$\dot{\varphi}_m = -(\mathbf{st} - m)(\dot{\mathbf{st}}) \varphi_m. \quad (2.38)$$

Наконец, с учетом коммутационных соотношений операторов спина

$$(\mathbf{st})(\dot{\mathbf{st}}) - (\dot{\mathbf{st}})(\mathbf{st}) = i[\mathbf{tt}] \mathbf{s}$$

находим эволюционное уравнение в привычной записи

$$\dot{\varphi}_m = -is[\mathbf{tt}] \varphi_m. \quad (2.39)$$

Введем теперь контур $\lambda = \lambda(s)$ в пространстве параметров $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, от которых зависит мгновенный гамильтониан $H(\lambda)$ так, что танген-

циальный вектор

$$\mathbf{t} = \frac{d\lambda}{ds} \quad (2.40)$$

совпадает с $\mathbf{H}/|\mathbf{H}|$, а векторы нормали $\mathbf{n}$ и бинормали $\mathbf{b}$ определены стандартным образом для кривой $\lambda(s)$ с естественной параметризацией по длине дуги s .

Заменяя дифференцирование по τ в (2.39) дифференцированием по длине дуги s и используя формулы Френе

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\mathbf{t}}{R} - \frac{\mathbf{b}}{T}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{T}, \quad (2.41)$$

где R и T — кривизна и кручение кривой $\lambda(s)$, получаем уравнение

$$\frac{d\varphi_m}{ds} = -i \frac{(\mathbf{s}\mathbf{b})}{R} \varphi_m; \quad (2.39')$$

здесь $\mathbf{b}/R$ — угловая скорость прецессии спина по отношению к неподвижной системе координат. Угловая скорость прецессии трехгранника Френе относительно этой неподвижной системы равна $(\mathbf{b}/R) - (\mathbf{t}/T)$. Поэтому в подвижной системе координат, связанной с трехгранником Френе, спин прецессирует с угловой скоростью $\mathbf{t}/T$. Следовательно,

$$\frac{d\varphi_m}{ds} = -i \frac{(\mathbf{s}\mathbf{t})}{T} \varphi_m = -i \frac{m}{T} \varphi_m. \quad (2.42)$$

Полагая по аналогии с (2.32)

$$\varphi_m(s) = \exp(i\Theta^m(s)) \varphi_m(0),$$

находим из (2.42) уравнение для фазы $\Theta(s)$:

$$\frac{d\Theta^m}{ds} = -\frac{m}{T}. \quad (2.43)$$

Тогда для фазы Берри (2.15) имеем выражение

$$\Theta^m(\tau_c) \equiv \Theta^m(s_c) = -m \int_0^{s_c} \frac{ds}{T}. \quad (2.44)$$

Используя известный результат Гаусса — Бонне (см., например, [6])

$$\int_0^{s_c} \frac{ds}{T} = \Omega(C), \quad (2.45)$$

получаем обобщение формулы Берри (2.33) для произвольного спина s с проекцией m (ср. с результатами из [8]):

$$\Theta^m = -m\Omega(C). \quad (2.33')$$

Отметим, что приведенный вывод остается справедливым и при рассмотрении движения безмассовой частицы с произвольным спином, обладающей спиральностью t , если спиральность является адиабатическим инвариантом.

2.5. Неабелева адиабатическая фаза Вильчека — Зи. Борн и Фок доказали адиабатическую теорему при условии, что спектр гамильтониана не вырожден и не вырождается в процессе эволю-

ции. Их доказательство обобщается и на случай, когда спектр гамильтониана вырожден, но в процессе эволюции состояния, относящиеся к различным уровням энергии, не перемешиваются⁽¹⁾. Согласно адиабатической теореме, дополнительные квантовые числа a , характеризующие вырожденное состояние φ_{na} , не изменяются. При этом система не обязательно возвращается к исходному состоянию, а подвергается некоторому унитарному преобразованию, обобщающему абелево $U(1)$ -преобразование Берри (2.14). Так, например, если состояние вырождено по угловому моменту, то проекция момента при адиабатической эволюции не изменяется, но ось квантования может изменить свое направление. Неабелево обобщение фазы Берри было найдено Ф. Вильчеком и А. Зи [9], показавшими, как при описании адиабатической эволюции простых квантовых систем возникают неабелевы калибровочные поля, обобщающие векторный потенциал (2.10).

Как показал Фок [10], ортонормированные собственные функции φ_{na} всегда можно подчинить условию, обобщающему условие (2.3)

$$(\varphi_{na}, \dot{\varphi}_{nb}) = 0 \quad (2.46)$$

при любых a и b . Соблюдение условия (2.46) приводит к тому, что при адиабатической эволюции собственные функции

$$\varphi_{na}(\tau) \exp \left(-i \int_0^\tau E_n(\tau') d\tau' \right) \quad (2.47)$$

удовлетворяют уравнению Шрёдингера. Вводя базисный набор ортонормированных собственных функций $\chi_{na}(\lambda)$ мгновенного гамильтониана $H(\lambda)$, можно определить неабелев калибровочный потенциал

$$(A_i^n)_{ab} = i \left(\chi_{nb}, \frac{\partial \chi_{na}}{\partial \lambda^i} \right), \quad (2.48)$$

обобщающий векторный потенциал (2.10). Переход к другому базису в (2.48)

$$\chi'_{na} = \Lambda_{ab} \chi_{nb} \quad (2.49)$$

приводит к неабелеву калибровочному преобразованию (для упрощения записи опустим матричные индексы)

$$A_i^{n'} = \Lambda A_i^n \Lambda^{-1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda^i} \Lambda^{-1}. \quad (2.50)$$

Теперь решения уравнения Шрёдингера $\varphi_{na}(\tau)$ связаны с базисными функциями унитарным преобразованием

$$\varphi_{na}(\tau) = \mathcal{U}_{ab}^n(\lambda(\tau)) \chi_{nb}(\lambda(\tau)). \quad (2.51)$$

В результате формула (2.9) обобщается следующим образом:

$$\dot{\mathcal{U}}_{ab}^n = -\mathcal{U}_{ab}^n (A_i^n)_{ca} \dot{\lambda}^i. \quad (2.9')$$

Вместо же (2.13) получим неабелево обобщение множителя Берри в виде P -экспоненты

$$\mathcal{U}^n(C_{\tau_c}) = P \exp \left(i \oint A_i^n d\lambda^i \right). \quad (2.52)$$

Тензор напряжений F_{ij} , соответствующий векторному потенциалу (2.48), получается обычным способом, как в калибровочных теориях:

$$F_{ij}^{ab} = \partial_i A_j^{ab} - \partial_j A_i^{ab} + [A_i A_j]^{ab} \quad (i, j = \overline{1, N}). \quad (2.53)$$

В настоящее время имеется обширная литература, относящаяся к неабелевым обобщениям фазы Берри (см., например, [11–16]).

Спин 1/2 и изоспин 1/2 во внешнем поле. В качестве примера, иллюстрирующего общую теорию, изложенную в этом разделе, рассмотрим гамильтониан [11]

$$H = B_{i\alpha} \sigma^i \otimes \sigma^\alpha, \quad (2.54)$$

где матрицу $B_{i\alpha}$ будем предполагать параметризованной трехмерным вектором адиабатических параметров $B_{i\alpha} = \varepsilon_{i\alpha k} \lambda_k$. Переписывая явно гамильтониан в виде матрицы 4×4 , находим его собственные значения: $E_1 = -2|\lambda|$, $E_2 = 0$ (дважды вырождено) $E_3 = 2|\lambda|$. Вырождение уровней постоянно в пространстве параметров, кроме точки $\lambda = 0$, и тем самым $\Lambda \sim \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Собственные векторы соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle E_1 | &= \frac{1}{2|\lambda|} (\omega, -|\lambda| + \rho, |\lambda| + \rho, \bar{\omega}), \\ \langle E_{2,1} | &= c_0 (-2\rho, \omega, \omega, 0), \\ \langle E_{2,2} | &= \frac{c_0}{|\lambda|} (-\omega^2, -\rho\omega, -\rho\omega, \lambda^2 + \lambda_3^2), \\ \langle E_3 | &= \frac{1}{2|\lambda|} (\omega, |\lambda| + \rho, -|\lambda| + \rho, \bar{\omega}), \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$c_0 = [2(\lambda^2 + \lambda_3^2)]^{-1/2}, \quad \rho = i\lambda_3, \quad \omega = \lambda_2 - i\lambda_1.$$

Существование глобального базиса (т. е. заданного в каждой точке многообразия Λ) гарантируется (см. [5]) тем, что гомотопическая группа $\pi_2(U(4)/U(2))$ тривиальна. Для вырожденного уровня E_2 вычисления связности A и кривизны b_j проводятся по стандартным формулам (2.48), (2.53). В результате «компоненты кривизны» определяются как

$$- \varepsilon_{ikl} F_{kl}^{ab} = (b_i)^{ab} \quad (a, b = 1, 2).$$

Непосредственные вычисления дают следующие выражения для векторных величин b :

$$b_i = \frac{\lambda_i}{|\lambda|(\lambda^2 + \lambda_3^2)} \begin{pmatrix} -2i\lambda_3 & \frac{(\lambda_2 - i\lambda_1)^2}{|\lambda|} \\ -\frac{(\lambda_2 + i\lambda_1)^2}{|\lambda|} & 2i\lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Видно, что кривизна регулярна везде на Λ . При стремлении $|\lambda| \rightarrow \infty$ b_i ведет себя как $1/|\lambda|^2$, что соответствует неабелеву магнитному монополю (см., например, [17]). Интересно вычислить топологический инвариант, «считывающий» монополярный заряд. Для этой цели обозначим матричную часть равенства (2.56) через $\Delta(n)$ и введем параметризацию $\beta = \beta \sigma$:

$$b_i = -i\lambda_i \frac{\Delta(n)}{|\lambda|^3} = -\frac{i\lambda_i}{|\lambda|^3} \beta^\alpha \sigma^\alpha.$$

В случае монополя имеем $\beta^2 \rightarrow \text{const}$. Тогда можно ввести координаты $e(\lambda) = \hat{\beta}/|\beta|$ на единичной сфере и определить регулярное отображение $\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$. Вычислим его степень отображения [6] по стандартной формуле:

$$m[e] = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \varepsilon_{ikl} e^i \frac{\partial e^k}{\partial \theta} \frac{\partial e^l}{\partial \varphi} d\theta d\varphi. \quad (2.57)$$

Подставляя единичный вектор

$$e(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda_3^2)^{-1} \begin{pmatrix} 2\lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \\ 2|\lambda| \lambda_3 \end{pmatrix}$$

в формулу (2.57) для топологического заряда и переходя к сферическим координатам в интеграле для $m[e]$, находим $m[e] = -2$, что соответствует двухмонопольному случаю [18].

2.6. Факторизация решений линейных эволюционных систем и геометрическая фаза Берри. До сих пор мы рассматривали фазу Берри, которая возникает в рамках адиабатического подхода ⁽²⁾. В связи с существованием геометрической фазы, сопровождающей циклическую эволюцию изолированных систем [19], возникает вопрос, как выделить множитель Берри в полном решении эволюционного уравнения. Предположим, что существует непрерывная производная по времени от выбранного нами набора функций $\{|n, k(t)\rangle\}$, которые образуют полный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве решений произвольного линейного эволюционного уравнения $i\partial_\tau \psi = H\psi$ с самосопряженным H . Тогда из оператора Коши для этого уравнения можно выделить часть геометрического происхождения в виде операторного множителя. Эта часть оператора Коши при циклической эволюции базиса $|n, k(\tau)\rangle$ приобретает вид абелева (2.14) или неабелева (2.52) фазового множителя.

Введем полный ортонормированный базис функций $|n, k\rangle$ и представим решение эволюционного уравнения $i\partial_\tau \psi = H\psi$ в общем виде:

$$\psi(t) = \sum c_{nk}(t) |nk, \tau\rangle \equiv \sum c_M |M(\tau)\rangle,$$

где n — главное квантовое число. Формальное решение систем уравнений для коэффициентов разложения c_{nk} задается выражением

$$\langle nk | T \exp \left(-i \int_0^\tau H(\tau') d\tau' \right) | \psi(0) \rangle. \quad (2.58)$$

Введем эволюционные операторы $\hat{U}$ и $\vec{U}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$i \frac{d\hat{U}(b, a)}{db} = H(b) \hat{U}(b, a),$$

$$i \frac{d\vec{U}(a, b)}{db} = \vec{U}(a, b) H(b), \quad \vec{U}(a, a) = \hat{U}(b, b) = 1;$$

здесь $\hat{U}$ и $\vec{U}$ — соответственно левый и правый эволюционные операторы, записанные в виде упорядоченных экспонент.

Доказаны следующие утверждения:

1) Решение (2.58) задачи Коши для эволюционного уравнения начальным условием $\psi(0) = \varphi(x)$ можно представить в виде

$$\psi(\tau, x) = \tilde{U}_{-A}(\tau, 0) \tilde{U}_{-\hat{E}}(\tau, 0)_{NM} \langle M(x, 0) | \varphi(x) \rangle | N(x, \tau) \rangle,$$

где матрицы A и $\hat{E}$ заданы соотношениями

$$A \equiv A_{NM} = \left\langle N \frac{dM}{d\tau} \right\rangle, \quad \hat{E} \equiv \tilde{U}_A(0, \tau)_{nk; mj} \langle mj | H | mj \rangle \tilde{U}_{-A}(\tau, 0)_{mj; nl}.$$

На языке упорядоченных экспонент решение можно записать в привычной форме

$$\psi(x, \tau) = \left[P \exp \left(- \int_0^\tau A \right) \right]_{NM} \left(P \exp \int_0^\tau \hat{E} \right)_{ML} \langle L(0) | \varphi \rangle | N(\tau, x) \rangle. \quad (2.58')$$

2) Пусть гамильтониан H такой, что переходные вероятности $\langle N(\tau) | M(\tau') \rangle \equiv Q_{NM}$ представимы в квазидиагональном виде:

$$\gamma_N \delta_{nm} + \delta_{n-1, m} a_N + \delta_{n, m-1} b_N,$$

причем недиагональные члены малы по сравнению с диагональными: $|a_N/\gamma_N|, |b_N/\gamma_N| \ll 1, \forall N$. Тогда выражение (2.58') можно разложить в ряд по теории возмущений по порядку малости членов, содержащих a_n, b_n (подробности см. [20]).

Рассмотрим теперь эволюцию системы, при которой гамильтониан H и базис $|n, k(\tau)\rangle$, связанный с этим гамильтонианом, зависят от времени через параметры $\lambda(\tau)$ так, что за время $\tau \in [0, \tau_c]$ вектор состояния возвращается в исходное положение. Тогда в решении задачи Коши (2.58') для уравнения эволюции первый множитель приобретает вид неабелевой фазы Берри (2.52). Если недиагональными членами в Q_{NM} можно пренебречь, то получаем абелеву фазу. Видно, что для вероятностей переходов Q_{NM} общего вида эволюция смешанного начального состояния будет включать неадиабатические процессы.

Результаты этого раздела обобщают постадиабатическое приближение, предложенное в [21], и согласуются с результатами работы [22].

2.7. Геометрическая фаза Ааронова — Анандана. После появления работ Берри [2] и Саймона [4] сразу встал вопрос об исследовании топологических фаз вне рамок адиабатического приближения. В математической формулировке Саймона, где естественной структурой является гильбертово расслоение с конечномерной базой адиабатических параметров, калибровочные трансформации (2.11) и связности (2.10) описываются операторами в гильбертовых слоях. Это обстоятельство усложняет анализ топологической структуры пространства решений. Поэтому, пользуясь методом индуцированных расслоений (см., например, [6], § 27), можно свести постановку Саймона к исследованию универсальных расслоений типа комплексных проективных пространств, где в качестве базы используется пространство лучей. Свойства этих пространств позволили получить классификационные теоремы [5] и привели к обобщению фазы Берри, которое состоит в следующем.

Рассмотрим изолированную квантовую систему, которая описывается вектором состояния $\psi(\tau)$ и гамильтонианом $H(\tau)$ на временном интервале $[0, \tau_c]$. Введем новое состояние $\Phi(\tau)$, выделяя динамическую фазу

$$\psi(\tau) = \exp \left(- i \int_0^\tau Q(\tau') d\tau' \right) \Phi(\tau) = \exp(-i\delta) \Phi(\tau), \quad (2.59)$$

которая с учетом тождества $\text{Re}\langle\psi|d\psi\rangle=0$ равна

$$\delta = \int_0^\tau Q = \int_0^\tau \text{Re} \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} d\tau'. \quad (2.60)$$

Тогда уравнение Шрёдингера для вектора состояния $|\Phi\rangle$ приобретает вид

$$i \frac{d\Phi}{d\tau} = (H - Q) \Phi. \quad (2.61)$$

Усреднение по $\langle\Phi|$ приводит нас к уравнению

$$\text{Im} \left\langle \Phi \left| \frac{d\Phi}{d\tau} \right. \right\rangle = 0, \quad (2.62)$$

которое совпадает по форме с условием параллельного переноса (2.3), появляющимся в адиабатической картине, но записано для векторов состояния со «смещенным спектром» (2.61).

Введем понятие циклической эволюции квантовой системы на интервале $[0, \tau_c]$, понимая под этим следующее: за время эволюции τ_c по кривой s в пространстве состояний $\mathcal{H}$ вектор $\psi(\tau_c)$ возвращается к исходному с точностью до фазы ϕ , т. е.

$$|\psi(\tau_c)\rangle = e^{i\phi} |\psi(0)\rangle, \quad (2.63)$$

$$\|\psi(\tau_c)\| = \|\psi(0)\|,$$

если кривая s проецируется на замкнутый контур C в пространстве лучей $\mathcal{R}$. Здесь фаза ϕ характеризует калибровочное преобразование, необходимое для замыкания s в $\mathcal{H}$. Определим калибровку $\psi \rightarrow \psi e^{-if(\tau)} = \tilde{\psi}$ так, чтобы для $\tilde{\psi}$ выполнялось условие периодичности на интервале $[0, \tau_c]$: $\tilde{\psi}(\tau_c) = \tilde{\psi}(0)$. Тогда для калибровочного преобразования, генерируемого функцией f , получаем следующее ограничение:

$$f(\tau_c) - f(0) = \phi \pmod{2\pi m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.64)$$

Используя равенства (2.60) и (2.61), условие цикличности (2.63) записываем в виде

$$\psi(\tau_c) = \exp(i\gamma) \exp\left(-i \int_0^{\tau_c} Q dt\right) \psi(0) = \exp(i\phi) \psi(0), \quad (2.65)$$

где

$$\gamma = i \int_0^{\tau_c} \langle\tilde{\psi}|\dot{\psi}\rangle d\tau = i \oint_C \langle\tilde{\psi}|d\tilde{\psi}\rangle. \quad (2.66)$$

Отметим, что полная фаза ϕ волновой функции (2.65) определяется суммой геометрической фазы γ и динамической фазы δ :

$$\phi = \gamma - \delta. \quad (2.67)$$

При этом геометрическая фаза γ , введенная Аароновым, Ананданом [19], на первый взгляд, совпадает по форме с адиабатической фазой Берри (2.15). Однако она получена без предположения об адиабатичности и реализована в проективных расслоениях над базой лучей $\mathcal{R} = \mathcal{H}/\sim$ [3], тогда как адиабатическая фаза Берри интерпретируется как элемент группы голономии гильбертова расслоения с базой параметрического пространства Λ , определяющего гамильтониан незамкнутой квантовой системы. В последующих трех разделах мы убедимся, что наличие келе-

ровой метрики в проективном пространстве приводит к естественному параллельному переносу по геодезической и этот перенос не связан с динамикой.

2.8. Модельный пример комплексного проективного пространства $\mathcal{CP}_n$ — прямой подход. Остановимся подробнее на модельном квантовомеханическом примере [23] с самосопряженным матричным гамильтонианом H и вектором состояния $\{z_\alpha\}_{\alpha=0}^n \in \mathcal{C}_{n+1}$. Уравнение Шрёдингера имеет стандартный вид

$$i\dot{z}_\alpha = H_\alpha^\beta z_\beta, \quad \tau \in [0, \tau_c], \quad z^\alpha(\tau_c) = e^{i\phi} z^\alpha(0). \quad (2.68)$$

Потребуем условие цикличности эволюции вектора состояния $\mathbf{z}(\tau)$ в виде (2.63). Динамическая фаза, согласно формуле (2.60), равна

$$\delta = \int_0^{\tau_c} \frac{\bar{z}_\alpha H^{\alpha\beta} z_\beta}{|\mathbf{z}|^2} d\tau.$$

Геометрическую фазу γ найдем в соответствии с выражением (2.66). Для этого явно построим ψ и $\bar{\psi}$. Пусть вектор состояния ψ задается в виде

$$|\psi\rangle = \frac{1}{(|\mathbf{z}|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Перейдем к проективным координатам, полагая, например, что $z_0 \neq 0 \forall \tau \in [0, \tau_c]$. В этих координатах вектор состояния выглядит следующим образом:

$$|\psi\rangle = \frac{\exp(i \arg z_0)}{(1 + |\omega|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

где $w_i = z_i/z_0$. Произвольная фаза $\arg z_0$ отражает явную $U(1)$ -калибровочную свободу при переходе к проективным координатам. Отметим, что условие цикличности (2.63) в применении к ненормированному состоянию $|\psi\rangle$ означает, что $\|\psi(0)\| = \|\psi(\tau_c)\|$. Однако на языке проективных координат в условие (2.63) к дополнительным ограничениям не приводит.

Условие периодичности для волновой функции ψ дает уравнение для фаз

$$-\frac{i}{2} \ln \frac{z_0(\tau_c)}{\bar{z}_0(\tau_c)} - f(\tau_c) = -\frac{i}{2} \ln \frac{z_0(0)}{\bar{z}_0(0)} - f(0),$$

или, с учетом ограничения на калибровочную функцию f (2.64),

$$-\frac{i}{2} \ln \frac{z_0(\tau_c) \bar{z}_0(0)}{\bar{z}_0(\tau_c) z_0(0)} = \phi. \quad (2.70)$$

Для геометрической фазы γ из равенства (2.67) имеем

$$\gamma = \phi + \delta = -\frac{i}{2} \ln \frac{z_0(\tau_c) \bar{z}_0(0)}{\bar{z}_0(\tau_c) z_0(0)} + \int_0^{\tau_c} \operatorname{Re} \frac{\bar{z} H \mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^2} d\tau. \quad (2.71)$$

Используя тождество $\operatorname{Re}(\bar{z} H \mathbf{z}) = (i/2)(\bar{z} d\mathbf{z} - \mathbf{z} d\bar{z})$, которое выполняется

на решениях уравнения (2.68) для γ , получаем выражение

$$\gamma = -\frac{i}{2} \ln \frac{z_0(\tau_c) \bar{z}_0(0)}{\bar{z}_0(\tau_c) z_0(0)} + \frac{i}{2} \int_0^{\tau_c} \frac{\bar{z} dz - z d\bar{z}}{|z_0|^2 + |z|^2}.$$

Предполагая существование производных $|\psi(\tau)\rangle$ в окрестности τ_c , находим 1-форму, порождающую фазу γ :

$$\dot{\gamma} d\tau = -\frac{i}{2} \left(\frac{dz_0}{z_0} - \frac{d\bar{z}_0}{\bar{z}_0} \right) + \frac{i}{2} \frac{\bar{z}_0 dz_0 - z_0 d\bar{z}_0}{|z_0|^2 (1 + |w|^2)} + \frac{i}{2} \frac{\bar{z}_i dz^i - z_i d\bar{z}^i}{|z_0|^2 (1 + |w|^2)}.$$

Теперь сузимся на сфере $\mathcal{P}^{2n+1}$: $|z|^2 = 1$ нормированных решений уравнения (2.68). Учитывая правила вычислений с зависимыми дифференциалами для формы $\gamma d\tau$, получаем

$$\dot{\gamma} d\tau = \frac{i}{2} \frac{\bar{w}_i dw^i - w_i d\bar{w}^i}{1 + |w|^2}. \quad (2.72)$$

Электромагнитный тензор, соответствующий потенциалу $\gamma(\cdot)$, имеет вид [24]

$$F = i \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{1 + |w|^2} + \frac{w \otimes \bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} \\ \frac{1}{1 + |w|^2} - \frac{\bar{w} \otimes w}{(1 + |w|^2)^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

2.9. Геометрическое построение фазы Ааронова — Анандана. Проведем теперь, следуя [25], геометрическое построение фазы Ааронова — Анандана в терминах проективных пространств, затем перейдем к конкретным параметризациям.

Рассмотрим исходное гильбертово пространство состояний $\mathcal{H}$ как линейное векторное расслоение $E(\mathcal{H}, \mathcal{R}, \pi)$ с базой пространства лучей $\mathcal{R}$ и стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Локально любой элемент расслоения $|\psi\rangle$ параметризуется в виде

$$|\psi\rangle = \xi |w\rangle, \quad (2.74)$$

где $\xi \in \mathcal{C}_1$ — координата слоя, а $|w\rangle$ — элемент базы $\mathcal{R}$ (рис. 1). Выделим в тангенциальном пространстве TE вертикальное подпространство $T_v E$, реализующее разбиение $TE = T_h E + T_v E$, где $T_h E$ — горизонтальное подпространство TE . С этой целью вводится «вертикальная» вариация вектора $|d_v \psi\rangle$ согласно

$$d_v |\psi\rangle = \omega |w\rangle; \quad (2.75)$$

здесь 1-форма ω , как обычно, фиксируется условием ортогональности горизонтального подпространства $T_h E$ к слою (см. рис. 1), т. е.

$$\langle \psi | d_h \psi \rangle = 0. \quad (2.76)$$

Вводя локальные координаты (2.74) в условие (2.76), получаем два уравнения ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} \xi \langle w | d\xi + \bar{\xi} \langle dw | - \omega \langle w | | w \rangle &= 0, \\ \bar{\xi} (d\xi \langle w | w \rangle + \xi \langle w | dw - \omega \langle w | w \rangle) &= 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

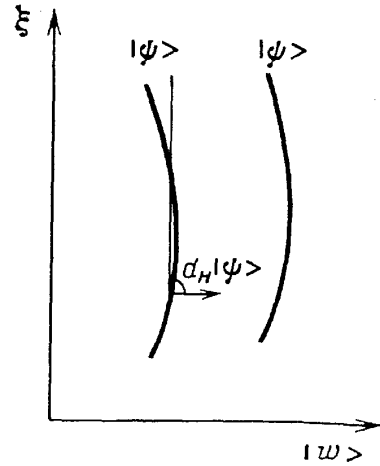


Рис. 1. Выделение горизонтальных подпространств в линейном векторном расслоении

которые согласованы и определяют форму ω следующим образом:

$$\omega = d\xi + \xi \frac{\langle w dw \rangle}{\langle ww \rangle} = d\xi + \theta\xi. \quad (2.78)$$

Отсюда параллельный перенос определяется условием $\omega = 0$. Соответственно компоненты горизонтальных векторов $|d_H\psi\rangle$ равны:

$$d_H\psi = \xi |dw\rangle - \xi \frac{\langle w dw \rangle}{\langle ww \rangle} |\psi\rangle. \quad (2.79)$$

При калибровочных преобразованиях G_η форма $d_H\psi$ преобразуется ковариантным образом, т. е. как удлиненная производная

$$G_\eta |d_H\psi\rangle = \eta |d_H\psi\rangle. \quad (2.80)$$

Иными словами, горизонтальное подпространство определяется занулением формы ω или тем, что вертикальные вариации выражаются через горизонтальные:

$$\frac{d\xi}{\xi} = -\frac{\langle w dw \rangle}{\langle ww \rangle} = -\theta. \quad (2.81)$$

Таким образом, из геометрической конструкции получаем правило параллельного переноса (2.76) или (2.81).

Введенное линейное комплексное векторное расслоение допускает эрмитову метрику k в слое, которая задается в виде

$$k = |\xi|^2 h(w, \bar{w}), \quad (2.82)$$

где $h \neq 0$ — вещественная функция комплексных аргументов $w, \bar{w}$.

Введенная метрика k должна быть согласована с разбиением тангенциального пространства на $T_V E$ и $T_H E$, что сводится к условию ее ковариантной постоянности

$$dk = 0, \quad (2.83)$$

где d — внешнее дифференцирование: $d = \partial + \bar{\partial}$. Условие (2.83) в локальных координатах (2.74) приобретает вид

$$(\bar{\xi} d\xi + \xi d\bar{\xi}) h + |\xi|^2 dh = 0, \quad (2.84)$$

где подстановка вертикальных дифференциалов из (2.81) дает уравнение, выражающее условие ковариантной постоянности функции

$$dh - (\theta + \bar{\theta}) h = 0. \quad (2.85)$$

Здесь в предположении, что комплексная форма θ является $(1, 0)$ -формой, получаются следующие выражения для θ -формы:

$$\theta = \partial \ln \bar{h}, \quad \bar{\theta} = \bar{\partial} \ln h. \quad (2.86)$$

Форма связности, которая соответствует вещественному векторному потенциалу, обычно выбирается в виде разности форм θ и $\bar{\theta}$:

$$A = \frac{i}{2} (\theta - \bar{\theta}) = -\text{Im } \theta = i\theta - \frac{i}{2} d \ln h. \quad (2.87)$$

Ей соответствует 2-форма кривизны F , получающейся по стандартному правилу:

$$F = dA. \quad (2.88)$$

Если выразить F через метрику h , то имеем

$$F = \frac{i\bar{\partial} \wedge \partial h}{h} = \frac{i}{h} \left(\bar{\partial} \wedge \partial h - \frac{\bar{\partial} h \wedge \partial h}{h} \right). \quad (2.89)$$

Уравнение для геодезических в метрике k по определению [24] имеет вид

$$|d_H d_H \psi\rangle = 0. \quad (2.90)$$

2.10. Модельный пример комплексного проективного пространства $\mathcal{CP}_n$ — канонический подход. Вернемся опять к примеру линейного расслоения над $\mathcal{CP}_n$ из предыдущего абзаца. Покажем, как, независимо от динамики, задаваемой гамильтонианом H , можно получить фазу Ааронова — Анандана. Для этой цели рассмотрим метрику $k = \langle \psi | \psi \rangle$ и $TE \sim \mathcal{CP}_{n+1}$. Она индуцирует метрику в горизонтальных подпространствах $\langle d_H \psi | d_H \psi \rangle$. Согласно формуле (2.68) она задается в локальных координатах (карты U_0 , например) в виде

$$k = |\xi|^2 (1 + |w|^2).$$

Отсюда $h = 1 + |w|^2$ и для A из формулы (2.86) получаем выражение ⁽⁴⁾

$$A = \frac{i}{2} \frac{\bar{w} dw - w d\bar{w}}{1 + |w|^2}, \quad (2.72')$$

которое совпадает с найденным ранее (2.72). Прямое вычисление 2-формы кривизны dA дает величину

$$F = \frac{i}{1 + |w|^2} \left(\sum_i d\bar{w}_i \wedge dw_i - \frac{\sum_i w_i d\bar{w}_i \wedge \sum_i \bar{w}_i dw_i}{1 + |w|^2} \right). \quad (2.73')$$

Если выделить коэффициенты 2-формы F в «базисе» $d\bar{w} \wedge dw$, то совпадение (2.73) с (2.73') становится очевидным. Отметим, что форма (2.73') определяет так называемую метрику Фубини — Штуди (см., например, [24]). Эта метрика в локальных координатах из U_0 определяет элемент длины вида

$$ds^2 = \left[\frac{1}{1 + |w|^2} \mathbf{1} - \frac{\bar{w} \otimes w}{(1 + |w|^2)^2} \right] \frac{dw}{dl} \otimes \frac{dw}{dl} dl^2. \quad (2.91)$$

Найденная форма связности A (или кривизны F) позволяет заключить, что в рассматриваемой модели линейного векторного расслоения каноническая связность полностью определяет фазу Ааронова — Анандана [26].

2.11. Параметризация лучей в терминах матрицы плотности. Пример: спин $1/2$. В ряде случаев удобно воспользоваться явной параметризацией пространства лучей с помощью элементов матрицы плотности чистых состояний

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|, \quad \text{или} \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\text{tr } \rho}. \quad (2.92)$$

Очевидно, что ρ не меняется при калибровочной трансформации, а $\tilde{\rho}$ инвариантно также при умножении ψ на функцию времени. В параметризации (2.92) метрика в пространстве матриц плотностей отличается от индуцированной метрики $\langle d_H \psi | d_H \psi \rangle$ несущественным множителем и задается, согласно работе [27], формулой

$$(\text{tr } \rho)^{-1} \text{tr} (d\rho d\rho) - \frac{1}{2} \text{tr}^2 d\rho = k. \quad (2.93)$$

Можно убедиться непосредственной подстановкой (2.92) в (2.93), что в результате получается выражение, пропорциональное (2.73').

Вернемся к классическому примеру эволюции спина $1/2$ в магнитном поле в формулировке, использующей проективное расслоение $\mathcal{CP}_1$. В качестве типичного представителя луча (ψ) выбираем (для проекции

$m=1/2$):

$$|\omega\rangle = e^{i\varphi/2} U(R(\theta, \varphi)) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (2.94)$$

где $R(\theta, \varphi)$ задает поворот на угол θ относительно оси y и на угол φ относительно оси z . Матрицу плотности ρ параметризуем следующим образом:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{p}\sigma), \quad (2.95)$$

где

$$\mathbf{p} = \text{Sp}(\rho\sigma) = \langle \omega\sigma\omega \rangle$$

— вектор поляризации.

Используя параметризацию (2.94), получаем, что для спина $1/2$

$$z_1 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad z_2 = \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi}.$$

Пользуясь общей формулой (2.81) для вычисления формы связности θ , имеем с учетом нормировки

$$\theta = \bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2 \quad (|z|^2 = 1),$$

$$i \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi = \frac{i}{2} (1 - \cos \theta) d\varphi,$$

θ фиксировано.

Если замкнутый контур C в пространстве лучей (или в пространстве поляризаций $\mathbf{p}$) реализует циклическую эволюцию, интеграл от 1-формы связности θ приводит к следующей фазе Ааронова — Анандана:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \oint_C (1 - \cos \theta) d\varphi. \quad (2.96)$$

Затем, используя опять (2.81), получаем формулу, выражающую геометрическую фазу γ Ааронова — Анандана, через телесный угол, описываемый концом вектора поляризации на сфере $\mathcal{S}^2$, который опирается на контур C :

$$i\gamma = \log \frac{\xi(\tau_c)}{\xi(0)} = -\frac{i}{2} \Omega(C). \quad (2.97)$$

Вспомним условие цикличности (2.63). Из него следует, что $\xi(\tau_c) = e^{i\phi} \xi(0)$ и $|\xi(\tau_c)| = |\xi(0)|$, потому полная фаза равна геометрической

$$\log \frac{\xi(\tau_c)}{\xi(0)} = i\phi = i\gamma. \quad (2.98)$$

2.12. Геометрическая фаза для нелинейных эволюционных уравнений. В некоторых случаях методы, связанные с получением: фазы Ааронова — Анандана, применимы к нелинейным эволюционным уравнениям. Класс таких уравнений можно ввести, как в [28], — методом функций Лагранжа. Чтобы не усложнять понимание механизма возникновения геометрической фазы, ограничимся здесь нелинейностями рационального вида.

1) Пусть уравнение

$$id_\tau \psi = \mathcal{H}(\psi, \bar{\psi}, \nabla \psi, \nabla \bar{\psi}) \quad (2.99)$$

инвариантно относительно глобальной калибровки:

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi. \quad (2.100)$$

2) Пусть решение уравнения (2.99) удовлетворяет условию цикличности за время эволюции

$$\psi(\tau_c) = e^{i\hat{H}\tau_c} \psi(0).$$

Как и в (2.63), калибровочным преобразованием сводим цикличность для ψ к периодичности для функции $\tilde{\psi} = e^{-i\gamma} \psi$: $\tilde{\psi}(\tau_c) = \tilde{\psi}(0)$. Из уравнения (2.99) можем получить инвариант $q = \int \tilde{\psi} \psi d\tau$. На самом деле, из равенства

$$(i d_\tau \tilde{\psi}, \psi) = (\psi, \mathcal{H}) - (\mathcal{H}, \psi), \quad (2.101)$$

учитывая рациональность гамильтониана $\mathcal{H}$ и его глобальную калибровочную инвариантность:

$$\mathcal{H}(e^{i\alpha} \psi, e^{-i\alpha} \bar{\psi}, e^{i\alpha} \nabla \psi, e^{-i\alpha} \nabla \bar{\psi}) = e^{i\alpha} \mathcal{H}(\psi, \bar{\psi}, \nabla \psi, \nabla \bar{\psi}),$$

нетрудно убедиться, что правая часть равенства (2.101) зануляется, что и требовалось доказать. Теперь, выбирая локальную калибровку

$$\tilde{\psi}(\tau) = e^{-i f(\tau)} \psi(\tau),$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned} \gamma &= i \frac{\langle \psi d\psi \rangle}{\langle \psi \psi \rangle} = \int \dot{f} d\tau + \frac{1}{\langle \psi \psi \rangle} \int (\tilde{\psi}, \tilde{\mathcal{H}}) d\tau = \\ &= f(\tau_c) - f(0) + \frac{1}{\langle \psi \psi \rangle} \int (\tilde{\psi}, \tilde{\mathcal{H}}) d\tau = \phi + \frac{1}{\langle \psi \psi \rangle} \int (\tilde{\psi}, \tilde{\mathcal{H}}) d\tau, \end{aligned}$$

т. е. воспроизводим формулу (2.67) Ааронова — Анандана для полной фазы ϕ : $\phi = \gamma - \delta$, где динамическая фаза δ в соответствии с формулами (2.59), (2.60) задается интегралом

$$\delta = \frac{1}{\langle \psi \psi \rangle} \int (\tilde{\psi}, \tilde{\mathcal{H}}) d\tau.$$

2.13. Геометрическая фаза Панчаратнама. До сих пор мы рассматривали ситуации адиабатической или циклической эволюции, соответствующие возврату к начальному лучу за время эволюции. Однако можно поставить вопрос о сравнении относительной фазы двух различных лучей (ψ_1) и (ψ_2) , что соответствует отказу от предположения о цикличности эволюции. Панчаратнам [29] определил разность фаз χ между состояниями $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ следующим образом:

$$e^{i\chi} = \frac{\langle \psi_1 \psi_2 \rangle}{|\langle \psi_1 \psi_2 \rangle|}. \quad (2.102)$$

Пусть через (ψ_1) и (ψ_2) обозначены $\pi(|\psi_1\rangle)$ и $\pi(|\psi_2\rangle)$ соответственно, где π — проекция на базу проективного векторного расслоения. Определим вслед за авторами работ [27, 30] разность фаз χ_p , полученную параллельным переносом вектора состояния $|\psi_1\rangle$ по геодезической, которая связывает (ψ_1) с (ψ_2) в базе расслоения. Наметим доказательство того, что так определенная фаза χ_p совпадает с разностью фаз векторов состояний $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$. Иными словами, если контур эволюции не замкнут в пространстве состояний и в проективном пространстве, то мы рассматриваем «контур», составленный из ломаных, включающих контур динамической эволюции l_d , контур кратчайшей геодезической l_g в

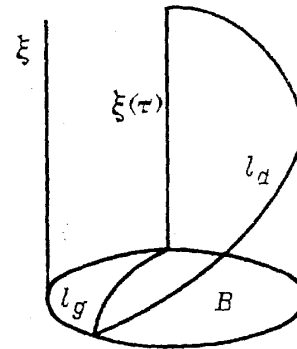


Рис. 2. Обобщенный замкнутый контур на линейных векторных расслоениях. l_d — динамический путь, l_g — кусок кратчайшей геодезической, $\xi(\tau)$ — лифт

базе между (ψ_1) и (ψ_2) и вертикального лифта $\xi(\tau_c)$ (рис. 2). Доказательство проводится в несколько шагов. Первый шаг состоит в проверке того, что параллельный перенос векторного поля $|\psi(\tau)\rangle$ по динамическому контуру не дает вклад в геометрическую фазу. Второй шаг состоит в вычислении параллельного переноса на кратчайшей геодезической. Третий шаг — в замыкании контуров с помощью вертикального лифта. Наконец, доказательство заканчивается вычислением вклада от переноса по контуру C , пользуясь явным видом уравнений (90) для геодезической.

Отметим, что фаза Панчаратнама находит применение в описании процедуры измерения в соответствии с копенгагенской интерпретацией квантовой механики и, более конкретно, — в измерениях, которые осуществляются методом фильтрации. Если имеется смесь двух или более чистых состояний, то для выбора одного из них достаточно поглотить остальные состояния (например, с помощью поляризатора с фиксированной поляризующей пластинкой). Иными словами, если

$$|\psi\rangle = P_1 |\psi\rangle + P_2 |\psi\rangle,$$

где P_1 и P_2 — проекторы на состояния $|\xi_1\rangle$ и $|\xi_2\rangle$ соответственно, для того чтобы попасть в состояние $|\xi_1\rangle$, фильтрующий прибор экспериментатора должен абсорбировать состояние $|\xi_2\rangle$. Фаза амплитуды полученного состояния

$$|\psi_1\rangle = |\xi_1\rangle \langle \xi_1 | \psi \rangle = |\xi_1\rangle |\langle \xi_1 | \psi \rangle| e^{i\chi},$$

очевидно, выражается через фазу Панчаратнама χ (2.102).

2.14. Геометрическая фаза при наличии инвариантов. Наличие инвариантов у эволюционирующей квантовой системы позволяет решать уравнения движения, если известны собственные функции инвариантов, и тем самым отделять в явном виде динамическую фазу от геометрической. Напомним, что динамическое уравнение для любого инвариантного оператора $I(\tau)$ в представлении Гейзенберга имеет вид [31]

$$\frac{dI}{d\tau} = \frac{\partial I}{\partial \tau} + i[I, H] = 0 \quad (I^+ = I). \quad (2.103)$$

Если ввести полный ортонормированный набор собственных функций $\{\varphi_{na}\}$ при фиксированных квантовых числах a и собственных значений λ_n для оператора I , то решение уравнения Шрёдингера $(i\partial_\tau - H)\psi = 0$ с начальным условием $\psi(0) = \psi_n(x)$ отличается фазой от $\varphi_{na}(\tau)$ [32]

$$\psi_n(\tau) = e^{i\phi_n} \varphi_{na}(\tau), \quad (2.104)$$

где фаза ϕ задается выражением

$$\phi_n = \int_{\tau_0}^{\tau} \overline{\varphi_{na}}(\tau') (i\partial_{\tau'} - H) \varphi_{na}(\tau') d\tau' \quad (2.105)$$

и является разностью геометрической и динамической фаз.

Таким образом, уравнение Шрёдингера для функции $\psi_n(\tau)$ заменяется уравнением (2.103). Будем искать решение последнего в предположении, что H и I построены из наборов N операторов $\{Q_i\}_{i=1}^N$ в виде линейных комбинаций [33]

$$I(\tau) = \sum_i \alpha_i(\tau) O_i, \quad H = \sum_i h_i O_i. \quad (2.106)$$

Для параметров $\alpha_i(\tau)$ из [103] следует система дифференциальных

уравнений первого порядка

$$\dot{\alpha}_i + i \sum g_{ij} \alpha_j = 0, \quad (2.107)$$

где g_{ij} — заданные функции от времени такие, что эволюция алгебры генерированной $\{Q_\alpha\}$ замыкается.

$$[HO_i] = \sum g_{ij} O_j.$$

Рассмотрим опять академический пример частицы со спином $1/2$ в постоянном магнитном поле $\mathcal{H} = \text{const}$. Гамильтониан $H = -\mu \mathcal{H} \sigma_3$. Ясно, что топологическая фаза не адиабатического типа, так как внешнее поле может быть произвольно большим. Согласно общей формуле (2.106) будем искать инвариант I в виде

$$I(\tau) = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3.$$

Для функций $\{\alpha_i\}$ имеем следующие уравнения движения:

$$\dot{\alpha}_3 = 0, \quad \dot{\alpha}_1 = 2\mu \mathcal{H} \alpha_2, \quad \dot{\alpha}_2 = -2\mu \mathcal{H} \alpha_1. \quad (2.107')$$

Отсюда находим постоянные во времени комбинации

$$\alpha_3, \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Перейдем к сферической параметризации

$$\alpha_3 = \cos \theta, \quad \alpha_1 = \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad \alpha_2 = \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

(где θ — интеграл движения) и выберем $\varphi(\tau) = 2\mu \mathcal{H} \tau$; $\tau \in (0, \pi/\mu \mathcal{H})$. Тогда собственные векторы инварианта I имеют вид

$$|\varphi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad |\varphi_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя затем геометрическую фазу

$$\Phi^g = i \int_C \langle \varphi_\pm | d\varphi_\pm \rangle,$$

получаем

$$\Phi^g = -\pi (1 \mp \cos \theta).$$

Динамическая фаза $\Phi^d = \mp \pi \cos \theta$.

Очевидно, что условие $\partial I / \partial \tau \approx 0$ соответствует переходу к адиабатическому случаю, т. е. I становится адиабатическим инвариантом. При этом из уравнения движения (2.103) следует, что собственные функции операторов I и H совпадают. Тогда геометрическая фаза

$$i \int_C \langle \varphi_\pm | d\varphi_\pm \rangle d\tau$$

совпадает и по смыслу с адиабатической фазой Берри (2.16). Рассмотренный пример еще раз иллюстрирует отмеченный в разделе 2 факт «независимости» геометрической фазы от динамики.

Отметим, что недавно была предложена алгебраическая конструкция (2.106) частного вида, в которой само конфигурационное пространство является однородным пространством G/H . При этом инварианты I строятся как элементы из картановской подалгебры K , а собственные функции инвариантов выражаются через когерентные состояния (соответствующие ссылки даны в разделе 5).

3. Топологические фазы в поляризационной оптике.

3.1. Фаза Берри спиральных фотонов и параллельный перенос вектора линейной поляризации при последовательности скользящих отражений. Об электромагнитных волнах с круговой поляризацией можно говорить как о совокупности фотонов с определенной спиральностью. Как известно, спиральность фотона есть собственное значение проекции спина фотона на его импульс и может принимать значения ± 1 . Соответствующая задача на собственные значения имеет вид

$$\frac{sp}{p} \mathbf{u}_{\pm} = \pm \mathbf{u}_{\pm}, \quad \mathbf{u}_{\pm} \in L^2, \quad (3.1)$$

где $\{\mathbf{s}_i\}_{il} = -i\epsilon_{ikl}$ — оператор спина фотона, а ϵ_{ikl} — полностью антисимметричный тензор $\epsilon_{123} = 1$ [34]. Таким образом, с одной стороны полная волновая функция свободного фотона

$$\psi_{\pm} = \mathbf{u}_{\pm} \exp[\hbar^{-1}(ipx - i\mathcal{E}\tau)], \quad \mathcal{E} = |\mathbf{p}|,$$

с определенной спиральностью удовлетворяет вытекающему из (3.1) уравнению

$$i \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial \tau} = \pm \text{rot } \psi_{\pm}. \quad (3.2)$$

С другой стороны, оставаясь полностью в рамках классической электродинамики, можно представить уравнения Максвелла для электромагнитных волн в среде с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ в форме, аналогичной (3.2):

$$i \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial \tau} = \pm \frac{1}{(\epsilon\mu)^{1/2}} \text{rot } \psi_{\pm}, \quad \text{div } \psi_{\pm} = 0, \quad (3.3)$$

где $\psi_{\pm} = \epsilon^{1/2} \mathbf{E} \pm i\mu^{1/2} \mathbf{H}$. Уравнения (3.3) описывают распространение электромагнитных волн, поляризованных по кругу. Если среда неоднородна, эти уравнения следует дополнить не сохраняющими круговую поляризацию членами, содержащими градиенты ϵ и μ . При условии малости этих градиентов круговую поляризацию (соответственно спиральность фотонов) можно считать приближенно сохраняющейся. В этом смысле спиральность — адиабатический инвариант данного процесса.

Кроме того, спиральность фотонов, так же, как и спиральность любой безмассовой частицы, — релятивистский инвариант. Известно, что состояние безмассовой частицы с определенной спиральностью полностью определяется импульсом частицы⁽⁵⁾. Если импульс частицы подвергается последовательности собственных преобразований Лоренца и возвращается к исходному значению, то частица также возвращается в исходное состояние, волновая функция которого определена с точностью до фазового множителя. В работе [35] показано, что в случае непрерывных преобразований эта геометрическая фаза совпадает с фазой Берри [36]. В отличие от этих работ мы рассмотрим сейчас дискретную последовательность преобразований Лоренца, которая переводит $\mathbf{p}_1$ в $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_2$ в $\mathbf{p}_3$, ... и $\mathbf{p}_n$ снова в $\mathbf{p}_1$. Каждое преобразование $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_{i+1}$ представляет собой лоренцевский буст $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i+1}$ и вращение $\hat{k}_i \rightarrow \hat{k}_{i+1}$, где $\hat{k} = \mathbf{p}/\mathcal{E}$, а $\mathcal{E}$ — энергия частицы. Лоренцев буст не меняет фазы волновой функции, поэтому достаточно рассмотреть последовательность вращений $\hat{k}_1 \rightarrow \hat{k}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \hat{k}_n \rightarrow \hat{k}_1$. При вращении $\hat{k}_i \rightarrow \hat{k}_{i+1}$ любой вектор $\mathbf{a}_i$, ортогональный $\hat{k}_i$, преобра-

зуется согласно формуле

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i - 2(\mathbf{a}_i, \hat{\mathbf{k}}_{i+1}) \frac{\hat{\mathbf{k}}_i + \hat{\mathbf{k}}_{i+1}}{(\hat{\mathbf{k}}_i + \hat{\mathbf{k}}_{i+1})^2}. \quad (3.4)$$

Дискретным преобразованиям Лоренца (3.4) можно поставить в соответствие преобразование вектора поляризации электромагнитной волны при скользящем отражении от границы двух сред

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{e}_1, \hat{\mathbf{k}}_2) \frac{\hat{\mathbf{k}}_1 + \hat{\mathbf{k}}_2}{(\hat{\mathbf{k}}_1 + \hat{\mathbf{k}}_2)^2}, \quad (3.5)$$

где $\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2$ — единичные векторы в направлении падающей и отраженной волн. Соотношение (3.5) является следствием формул Френеля [38], которые в случае полного внутреннего отражения на границе двух диэлектриков или отражения от идеального металлического зеркала можно записать в виде

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1, \hat{\mathbf{k}}_2) (\alpha \hat{\mathbf{k}}_1 + \beta \hat{\mathbf{k}}_2) [1 - (\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2)^2]^{-1}, \quad (3.6)$$

$$\alpha = e^{i\chi} - (\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2), \quad \beta = 1 - e^{i\chi} (\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2).$$

При скользящем падении, когда угол падения стремится к $\pi/2$, величина χ стремится к нулю, и из (3.6) получается (3.5).

Таким образом, мы показали, что последовательность преобразований Лоренца находит свой аналог в оптике в случае последовательности скользящих отражений лучей. Формула (3.5) имеет простой геометрический смысл, связанный с параллельным переносом вектора $\mathbf{e}$ по контуру, образованному точками $\hat{\mathbf{k}}_i$ на единичной сфере и дугами больших кругов, соединяющими эти точки (рис. 3).

В качестве примера рассмотрим три последовательных отражения $\hat{\mathbf{k}}_1 \rightarrow \hat{\mathbf{k}}_2 \rightarrow \hat{\mathbf{k}}_3 \rightarrow \hat{\mathbf{k}}_1$. Тогда формула (3.5) определяет параллельный перенос вектора поляризации $\mathbf{e}$ по контуру сферического треугольника с углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Угол поворота Θ вектора $\mathbf{e}$ при этом равен Ω , где

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i).$$

С точностью до 2π имеем $\Omega = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -S_\Delta$, где S_Δ — площадь сферического треугольника. Это означает, что вектор поляризации повернулся против часовой стрелки на угол Θ , равный телесному углу Ω , ограниченному сферическим треугольником, который очерчивает конец вектора $\hat{\mathbf{k}}$ на единичной сфере. Заменим теперь треугольник многоугольником с произвольно большим числом сторон. Очевидно, что параллельный перенос вектора $\mathbf{e}$ вдоль сторон этого многоугольника определяется следующей из (3.5) формулой

$$\delta \mathbf{e} = -(\mathbf{e}, \delta \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}} \quad (3.7)$$

и сопровождается поворотом вектора поляризации на угол $\Theta = \Omega$. Этот поворот вектора линейной поляризации, который можно наблюдать на опыте, позволяет фактически измерить фазу Берри, приобретаемую спи-

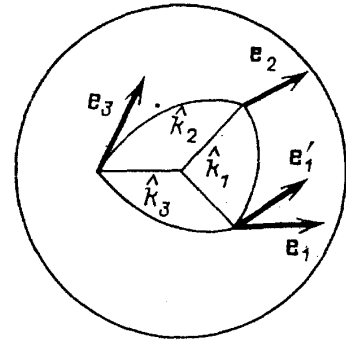


Рис. 3. Параллельный перенос вектора поляризации $\mathbf{e}$ по контуру, который очерчивает волновой вектор $\hat{\mathbf{k}}$ на единичной сфере при трехкратном отражении

ральным фотоном в результате последовательности скользящих отражений света с круговой поляризацией.

Действительно, пусть волновой вектор $\mathbf{k}$ в момент времени $\tau=0$ направлен по оси z , а вектор линейной поляризации $\mathbf{e}(0)=\mathbf{e}$ направлен по оси x

$$\mathbf{e}(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-),$$

где

$$\mathbf{e}_\pm = \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$$

— векторы круговой поляризации. При циклическом изменении волнового вектора $\mathbf{k}$: $\mathbf{k}(\tau_c) = \mathbf{k}(0)$,

$$\mathbf{e}(\tau_c) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_+ e^{-i\Omega} + \mathbf{e}_- e^{i\Omega}) = \mathbf{e}_1 \cos \Omega + \mathbf{e}_2 \sin \Omega.$$

Таким образом, топологическая фаза Берри, появляющаяся у поляризованных по кругу фотонов, отвечает повороту вектора линейной поляризации на угол

$$\Theta = \Omega. \quad (3.8)$$

Измеряя поворот вектора поляризации света при последовательности скользящих отражений, можно, как мы видим, наблюдать соответствующую фазу Берри. Однако неверно считать, что при произвольных отражениях так же наблюдается фаза Берри. Так, в часто упоминаемой работе [39] рассматривается последовательность трех отражений света под углом падения 45° . В этом случае поворот угла поляризации на 90° является случайным и отношения к фазе Берри не имеет, поскольку в этом случае формулы Френеля (3.6) не приводят к правилу параллельного переноса (3.5). Если вектор поляризации исходного луча, рассматриваемого в статье [39], повернуть на 45° по отношению к рассмотренному там, то никакого поворота вектора поляризации в результате трех отражений наблюдаться не будет.

3.2. Закон параллельного переноса Рытова и фаза Владимирского в геометрической оптике неоднородных сред. Открытие закона параллельного переноса векторов $\mathbf{e} = \mathbf{E}/E$ и $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ электрического и магнитного поля, характеризующих поляризацию электромагнитной волны в среде с медленно меняющимся показателем преломления, восходит к работе С. М. Рытова «О переходе от волновой к геометрической оптике», выполненной в 1938 г. [40]. С. М. Рытов показал, что для луча света, имеющего форму неплоской кривой, происходит поворот векторов $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ относительно естественного трехгранника $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, образованного векторами касательной $\mathbf{t}$, нормали $\mathbf{n}$ и бинормали $\mathbf{b}$ к искривленному лучу:

$$\mathbf{e} = \mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi,$$

$$\mathbf{h} = -\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{b} \cos \varphi.$$

При этом производная угла поворота φ по длине дуги s равна кручению кривой

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}, \quad (3.9)$$

где T — радиус кручения луча. Эта формула известна как «закон Рытова» [41] и может быть получена из условия поперечности световой волны:

$$(\mathbf{e}\mathbf{t}) = 0, \quad \mathbf{e}^2 = 1. \quad (3.10)$$

Дифференцируя эти соотношения, имеем

$$(\dot{\mathbf{e}}\mathbf{t}) + (\mathbf{e}\dot{\mathbf{t}}) = 0, \quad (\mathbf{e}\dot{\mathbf{e}}) = 0. \quad (3.11)$$

Разложим $\dot{\mathbf{e}}$ по полному набору векторов, ортогональных $\mathbf{e}$,

$$\dot{\mathbf{e}} = \alpha \mathbf{t} + \beta [\mathbf{t}\mathbf{e}]. \quad (3.12)$$

Считаем, что среда негиротропна, т. е. что $\beta = 0$. Используя (3.11), получаем «закон Рытова»

$$\dot{\mathbf{e}} = -(\mathbf{e}\mathbf{t}) \mathbf{t}, \quad (3.13)$$

совпадающий с законом параллельного переноса (3.7) вектора $\delta\mathbf{e}$. Дифференцируя по длине дуги s луча и используя формулы Френе (3.6), приходим к формуле (3.9).

Как было отмечено в последующей работе В. В. Владимирского [30] ⁽⁶⁾: «хотя мгновенная угловая скорость трехгранника $\mathbf{t}$, $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ направлена всегда перпендикулярно лучу и, следовательно, никакого вращения векторов поля вокруг луча не происходит, плоскость поляризации не будет в общем случае возвращаться к своему исходному положению всякий раз, когда касательная луча совпадает со своим исходным направлением, так как ось вращения $\mathbf{b}$ все время изменяет свою ориентацию в пространстве, если луч обладает кручением» (рис. 4). Работа В. В. Владимирского «О вращении плоскости поляризации в искривленном световом луче» была выполнена в 1941 г. и практически оставалась

неизвестной. Однако именно в ней на основе закона Рытова был предсказан глобальный (топологический) эффект: «угол поворота Θ плоскости

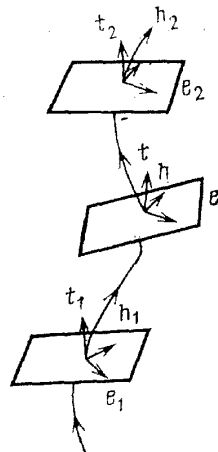


Рис. 4. Трехгранник $\{\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{h}\}$, движущийся вдоль искривленного луча света; $\mathbf{t}$ — касательный вектор, $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ — единичные векторы электрического и магнитного полей

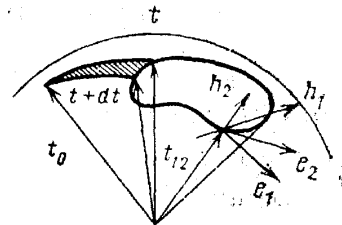


Рис. 5. Сферический сегмент, вырезанный единичным касательным вектором $\mathbf{t}$, когда его конец прочерчивает контур C на сфере $\mathcal{P}_2$

поляризации светового луча, путь которого в оптически неоднородной среде представляет собой неплоскую кривую, равен интегралу от гауссовой кривизны по области, ограниченной контуром C , который прочерчивает конец вектора $\mathbf{t}$ на единичной сфере (рис. 5). Угол Θ равен телесному углу Ω , заключенному внутри конуса, описываемого вектором $\mathbf{t}$; знак Θ определяется направлением обхода телесного угла

$$\Theta = \Omega. \quad (3.8')$$

Таким образом, когда касательная к лучу возвращается к своему исходному направлению, плоскость поляризации поворачивается на угол, равный телесному углу, описанному касательной. Если луч пред-

ставляет собой плоскую кривую, то $\Theta=0$, и при возвращении луча к исходному направлению векторы поля принимают прежнее положение. Угол между электрическим полем и касательной плоскостью будет в этом случае сохраняться вдоль всего луча, так как кривая при этом совпадает с геодезической линией — дугой большого круга, лежащего в плоскости луча...».

«Если касательные к лучу в начальной и конечной точках имеют различные направления, то векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ для этих точек лежат в разных плоскостях и состояния поляризации не могут сравниваться непосредственно. Целесообразно условиться приводить луч при сравнении поляризации к прежнему направлению с помощью плоской кривой или посредством отражения от идеального зеркала, не изменяющего поляризации. Кривая при этом замкнется дугой большого круга, и угол поворота плоскости поляризации может быть снова получен по формуле $\Theta=\Omega$ ».

Таким образом, в цитируемой работе Владимирского [30] содержится не только правильное выражение для угла поворота плоскости поляризации искривленного луча, но и правило замыкания контуров, соответствующих нециклическим эволюциям. Поворот плоскости поляризации эквивалентен различному набегу фазы для двух круговых компонент поля, вращающихся навстречу друг другу. Поэтому справедливо назвать дополнительную фазу, приобретаемую циркулярно поляризованным светом при распространении вдоль неплоской кривой, *фазой Рытова — Владимирского*.

Для демонстрации аналогии между фазой Рытова — Владимирского в оптике искривленных лучей и фазой Берри в квантовой механике удобно воспроизвести рассуждения С. М. Рытова, исходя из уравнений (3.3), описывающих волны, поляризованные по кругу. Будем искать решение этих уравнений в виде

$$\Psi_{\pm} = \mathbf{e}_{\pm} \exp(-i\omega\tau + iR). \quad (3.14)$$

Подстановка (3.14) в (3.3) дает

$$(\epsilon\mu)^{1/2}\omega\mathbf{e}_{\pm} = \pm i[\text{grad } R, \mathbf{e}_{\pm}] + \text{rot } \mathbf{e}_{\pm}. \quad (3.15)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{t} = \frac{\text{grad } R}{\omega(\epsilon\mu)^{1/2}} \quad (3.16)$$

и перепишем (3.15) в виде

$$\mathbf{e}_{\pm} \mp i[\mathbf{t}\mathbf{e}_{\pm}] = \frac{1}{\omega(\epsilon\mu)^{1/2}} \text{rot } \mathbf{e}_{\pm}. \quad (3.17)$$

В первом приближении можно пренебречь правой частью соотношения (3.17), что дает

$$\mathbf{e}_{\pm} \mp i[\mathbf{t}\mathbf{e}_{\pm}] = 0. \quad (3.18)$$

Из соотношения (3.18) следует, что

$$\mathbf{t}^2 = 1, \quad (3.19)$$

а следовательно, согласно (3.16), справедливо уравнение эйконала

$$(\text{grad } R)^2 - \epsilon\mu\omega^2 = 0. \quad (3.20)$$

Учет следующего рассмотренного Рытовым приближения в разложении по $1/\omega$ приводит к соотношению $(\hat{\mathbf{e}}_{\pm} \equiv \mathbf{e}_{\pm}/(\mathbf{e}_{\pm}^* \mathbf{e}_{\pm})^{1/2})$

$$(\mathbf{t}\nabla)\hat{\mathbf{e}}_{\pm} = -\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_{\pm}, (\mathbf{t}, \nabla)\mathbf{t}). \quad (3.21)$$

Умножая скалярно обе части равенства (3.21) на $\hat{\mathbf{e}}_{\pm}^*$, получаем

$$(\hat{\mathbf{e}}_{\pm}^* \hat{\mathbf{e}}_{\pm}) = 0, \quad (3.22)$$

где точкой обозначено дифференцирование по направлению

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_{\pm} = (t\nabla) \hat{\mathbf{e}}_{\pm},$$

т. е. по длине дуги, отсчитываемой вдоль луча.

Соотношение (3.18) представляет собой не что иное, как условие (2.34) для спина 1

$$(st) \hat{\mathbf{e}}_{\pm} = \pm \hat{\mathbf{e}}_{\pm}, \quad (3.23)$$

где оператор спина s определяется выражением (3.1). В то же время соотношение (3.22) можно рассматривать как условие Борна — Фока — Саймона (2.3). Таким образом мы пришли к задаче о движении спина 1 в магнитном поле, изложенной в разделе 2.4.

3.3. Экспериментальные наблюдения фазы Рытова — Владимирского. Работы С. М. Рытова [40] и В. В. Владимирского [30] опередили развитие экспериментальной техники и, как это часто бывает, оказались практически забытыми. Интерес к поляризационным свойствам искривленных световых пучков возродился с появлением волоконной оптики. В ряде недавних работ (см., например, [42, 43]) сообщалось о наблюдении поворота плоскости поляризации в изогнутых световодах.

Таким образом, открытие фазы Берри в квантовой механике явилось толчком для повторного «открытия» фазы Рытова — Владимирского в поляризационной оптике. Основой здесь послужила аналогия между адиабатическим изменением волнового вектора фотона в искривленном пучке света и адиабатическим изменением направления спина частицы в медленно меняющемся магнитном поле. Отметив эту аналогию, Чао и Ву [44] предложили предельно простой эксперимент по проверке соотношения $\Theta = \Omega(C)$, который был немедленно реализован в работе Томиты и Чао [45].

Вследствие этого явление поворота плоскости поляризации в искривленном луче из частной проблемы оптики неоднородных сред превратилось в пример наглядной интерпретации фундаментальных геометрических аспектов теории поля. Появился ряд публикаций [46—48], популяризирующих эксперимент [45] и его связь с общими проблемами. Возникла дискуссия [49] о необходимости квантовой (фотонной) трактовки явления. В ряде работ [50—52] появились свои варианты классической теории опытов Томиты и Чао. В частности, Сегерт [50] отметил, что поворот плоскости поляризации имеет место для любой поперечной волны при условии, что ее направление распространения адиабатически меняется, например, для поперечных колебаний изогнутого металлического стержня.

Обобщение фазы Берри на неадиабатические эволюции квантовых систем, данное Аароновым и Ананданом [19], стимулировало эксперименты, в которых неплоские траектории лучей формируются с помощью серии последовательных отражений [53, 54].

Количественные измерения соответствующих дополнительных фаз были выполнены на неплоском интерферометре Маха — Цендера [53]. Здесь остановимся на более подробном рассмотрении эксперимента [45], который соответствует условиям адиабатической эволюции.

3.4. Вращение плоскости поляризации излучения в спиральном волоконном световоде. Принципиальная схема эксперимента Томиты и Чао [45] включает два поляризатора, меж-

ду которыми находится изогнутый волоконный световод, играющий роль оптически активной среды (рис. 6). Световод располагается на поверхности круглого цилиндра длиной p и радиуса r в виде спирали различной формы, причем концы световода остаются параллельными. С помощью поляризаторов измеряется угол поворота плоскости поляризации излучения. С другой стороны, для каждой сложной спирали можно рассчитать телесный угол, описываемый касательным вектором $\hat{k}$. Рассмотрим плоскую развертку витка неравномерной спирали, показанную на рис. 7, а. Если через ϕ обозначить угол поворота вокруг оси цилиндра, а через $\theta(\phi)$ — угол между касательной к спирали и образующей цилиндра, то телесный угол можно найти по формуле

$$\Omega(C) = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta(\phi)) d\phi, \quad (3.24)$$

где, как видно из рис. 7, а,

$$\theta(\phi) = \arctg \left(r \frac{d\phi}{dz} \right).$$

Функция $z(\phi)$, определяющая форму развертки спирали на рис. 7, а, задавалась в виде сумм различного числа гармоник, после чего легко рассчитывался телесный угол (3.24). В частном случае равномерной

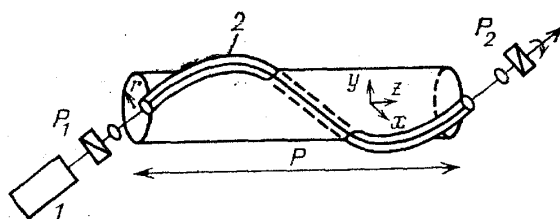


Рис. 6. Схема установки Томиты и Чао [45]. 1 — He—Ne-лазер, $P_{1,2}$ — поляризаторы; 2 — одномодовый волоконный световод, намотанный на цилиндр длиной p

спирали рис. 7, б $z(\phi) = (p/2\pi r)\phi$, очевидно, что $\Omega(C) = 2\pi[1 - [p/L]]$, где $L = [p^2 + (2\pi r)^2]^{1/2}$ — длина спирали. Наряду с ожидаемым эффектом, поворот плоскости поляризации могут вызвать торсионные напряжения и собственная оптическая активность волокна. Для уменьшения торсионных напряжений волокно помещалось в тефлоновую трубку так, что при намотке на цилиндр его выходной конец мог свободно вращаться. Собственная оптическая активность волокна в опыте Томиты и Чао была достаточно большой ($\Theta_0/L = (\omega/2c)(n_+ - n_-) = 0,436$ рад/м, где $n_{\pm}$ — показатели преломления для правой и левой круговых компонент) и учитывалась при обработке результатов так, что

$$\Omega(C) = \Theta_n - \Theta_0, \quad (3.25)$$

где Θ_n — наблюдаемый угол поворота.

Каждой форме спирального световода соответствует замкнутая кривая C , описываемая на единичной сфере вектором $\hat{k}$, на которую опирается телесный угол $\Omega(C)$ (рис. 8). Равномерной спирали соответствует горизонтальная окружность. Плоским контурам световода соответствует движение по экватору; телесный угол $\Omega(C)$ при этом равен 2π , так что добавочная фаза является тривиальной.

Отметим, что основная цель эксперимента Томиты и Чао состояла не в проверке соотношения (3.25) при изменении шага равномерной

спирали (это уже было сделано в [42, 43]), а в демонстрации инвариантности этого соотношения относительно деформаций спирали, не меняющих телесного угла. Результаты измерений (рис. 9) подтвердили предсказание теории. Действительно, кружки, квадраты и треугольники, соответствующие спиралям различной формы, хорошо ложатся на прямую $\Theta_n - \Theta_0 = \Omega$.

В экспериментах Томиты и Чао использовался одномодовый световод со ступенчатым профилем показателя преломления. Известно, что геометрическая оптика неприменима для описания распространения электромагнитной волны в таком световоде. Вместе с тем, теория Рыто-

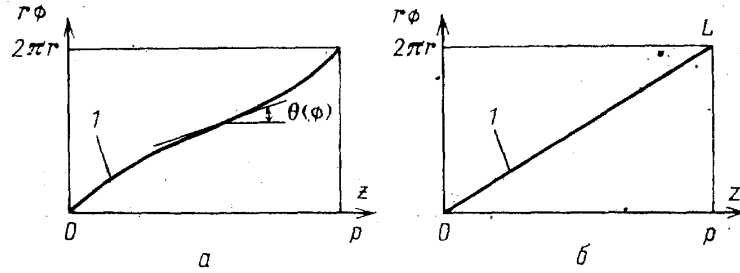


Рис. 7. 1 — развертка цилиндра на плоскость, позволяющая вычислить телесный угол, прочерчиваемый вектором $\hat{k}_1$ при неравномерной намотке (а) и при равномерной для световода длиной L (б)

ва — Владимирского, изложенная выше, построена в пределе геометрической оптики. Интуитивно кажется ясным, что природа геометрической фазы связана лишь с изменением направления распространения поперечной волны, так что предельный переход $\lambda \rightarrow 0$, присущий геометрической оптике, не меняет сути дела. Это же следует из чисто геометрических рассуждений (см. [50]). В таком случае закон $\Theta = \Omega(C)$ должен получаться и непосредственно из уравнений Максвелла, описывающих распространение волнового пучка в световоде. То, что это действительно так, показал Берри [52].

Используя идеи связанных локальных мод и приближение слабонаправляющего световода [55], Берри записывает электрическое поле световой волны в виде

$$E(\rho, s) = e^{i\beta s} f(\rho) (C_n(s) \mathbf{n}(s) + C_b(s) \mathbf{b}(s)), \quad (3.26)$$

где ρ — радиальная координата (расстояние до оси), s — продольная координата, отсчитываемая вдоль оси световода; β — константа распространения; $f(\rho)$ — функция радиального распределения амплитуды поля; $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ — векторы нормали и бинормали к оси волновода (рис. 10).

Плавность изгиба световода позволяет выбрать величины β и $f(\rho)$ теми же, что и для прямого световода. В результате подстановки (3.26) в уравнения Максвелла, Берри приходит к основному уравнению эволюции для коэффициентов $c_n(s)$, $c_b(s)$, аналогичному уравнению Шрёдингера:

$$i \frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} c_n(s) \\ c_b(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k^2(s)}{2\beta} & i\tau(s) \\ -i\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n(s) \\ c_b(s) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

где $\tau(s)$ и $k(s)$ — кручение и кривизна световода. При получении (3.27) не учитывались радиационная утечка, связь с отраженными модами и эластооптические эффекты.

Поскольку $\beta = 2\pi/\lambda$, а k^{-1} и τ^{-1} — порядка радиуса изгиба, то член $k^2/2\beta$ мал по сравнению с кручением τ . Пренебрежение $k^2/2\beta$ соответ-

вует адиабатическому характеру эволюции (сохранению типа круговой поляризации). Если первоначальный свет имел линейную поляризацию и вектор $\mathbf{E}$ образовывал угол φ_0 с нормалью $\mathbf{n}$, то

$$\frac{c_b(s)}{c_n(s)} = \operatorname{tg} \varphi(s) = \operatorname{tg} \left(\varphi_0 - \int_0^s \tau(s') ds' \right). \quad (3.28)$$

Такой закон параллельного переноса для $\mathbf{E}$ приводит после полного оборота спирали к повороту плоскости поляризации на угол Θ , равный телесному углу

$$\Omega = \int_0^L \frac{ds}{T(s)}, \quad (3.29)$$

где $T = \tau^{-1}$ — радиус кручения световода. Как мы видим, этот же результат был получен В. В. Владимирским (3.8') с помощью закона Рытова (3.9).

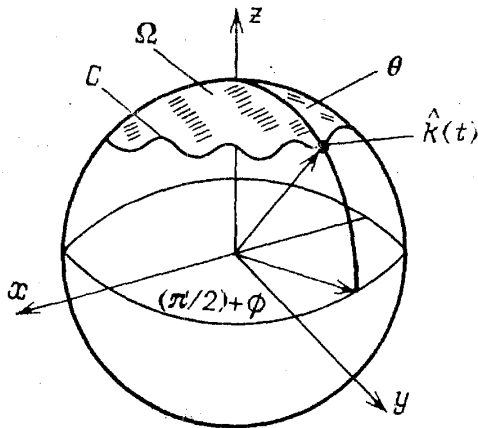


Рис. 8. Движение вектора $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ на единичной сфере $\mathcal{P}^2(\theta, \Phi)$ при распространении излучения по витку световода сложной формы

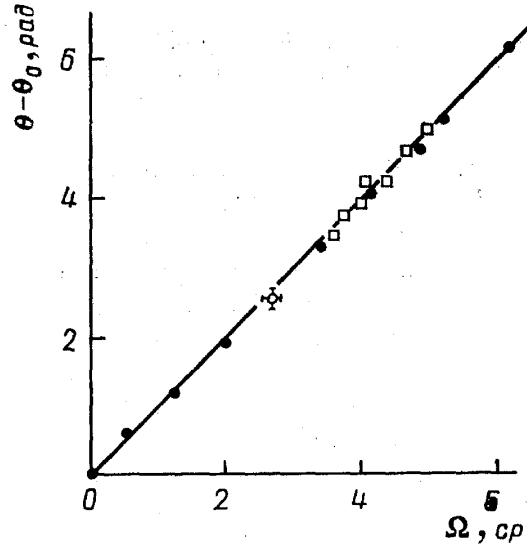


Рис. 9. Результаты измерения угла поворота плоскости поляризации $\Theta - \Theta_0$ при различных телесных углах Ω [45]. Значки соответствуют спиральям различной формы, прямая линия — предсказание теории

Учет члена $k^2/2\beta$ в уравнении (3.27) позволяет описать неадиабатические переходы⁽⁷⁾. В первом порядке малости он приводит к следующему выражению для вероятности $P(+ \rightarrow -)$ изменения характера круговой поляризации:

$$P(+ \rightarrow -) = \left| \int_0^L ds k^2(s) \exp \left(2i \int_0^s \tau(s') ds' \right) \right|^2 (16\beta^2)^{-1}. \quad (3.30)$$

Для спирали, равномерно намотанной на цилиндр радиуса r , имеем

$$P(+ \rightarrow -) = \left\{ \frac{\Omega}{2\pi [2 - (\Omega/2\pi)]} \right\}^2 \sin^2 \frac{\Omega}{1 - (\Omega/2\pi)} (16\beta^2 r^2)^{-1};$$

даже при $r \sim 1$ мм величина $P(+ \rightarrow -)$ не превышает $\sim 10^{-8}$. Отметим, что для плоских изгибов волокна $\tau = 0$ вращение плоскости поляризации не возникает.

3.5. Особенности описания геометрических фаз при отказе от требования адиабатичности. В случае отказа от адиабатических ограничений циклическая эволюция системы должна рассматриваться не в пространстве параметров, а в проективном гильбертовом пространстве (см. разделы 2.7, 2.11). Удобная модель получается на языке матрицы плотности $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ чистых состояний ψ [56]. Цикличность тогда означает возврат к начальным значениям всех средних значений физических величин

$$\langle A \rangle_\psi = \text{Sp}(\rho_\psi A),$$

характеризующих рассматриваемую систему. Каждому элементу ρ_ψ «проективного пространства» соответствует множество чистых состояний ψ , отличающихся фазой,—луч в гильбертовом пространстве.

Как и в адиабатическом случае, геометрическая фаза оказывается равной интегралу от гауссовой кривизны по поверхности, ограниченной замкнутым контуром, но не в пространстве параметров, а в пространстве лучей. Практическое вычисление этого интеграла, естественно, включает в себя некоторую конкретную параметризацию абстрактного пространства $\{\rho_\psi\}$.

3.6. Геометрическая фаза при многократном отражении света неплоской системой идеальных зеркал. В рассмотренных до сих пор примерах фазы Рытова—Владимирского (изогнутый световод, последовательность скользящих отражений) спиральность фотонов представляет собой адиабатический инвариант. Неплоский путь светового луча можно реализовать посредством серии отражений, что представляется гораздо более простым как в смысле практической реализации, так и в смысле явного теоретического описания. Однако для демонстрации геометрической фазы этот случай более сложен. Хорошо известно [38], что при отражении как от металла, так и от диэлектрика в общем случае происходит изменение поляризации, зависящее от комплексного показателя преломления отражающей среды, угла падения и состояния поляризации падающего луча. Это означает, например, что фотон, имевший определенную спиральность, после отражения переходит в состояние, описываемое линейной комбинацией собственных функций проекции спина с коэффициентами, зависящими от перечисленных факторов. Спиральность такого фотона уже не имеет определенного значения.

Сказанное означает, что в результате серии отражений общего вида возможны сложные изменения поляризации (в частности, повороты плоскости или эллипса поляризации), вклад в которые дает как изменение направления луча, так и поляризующее действие отражателей, не имеющее отношения к рассматриваемой геометрической фазе.

Значительно более простой случай—отражения от поверхности идеально проводящих зеркал—был исследован рядом авторов [39, 52, 53, 57]. При каждом идеальном отражении спиральность фотона просто меняет знак, оставаясь вполне определенной. Берри [52] называет такую эволюцию «антиадиабатической». На классическом языке это означает, что эллипс поляризации сохраняет свою форму, меняется лишь направление вращения электрического вектора относительно направления луча.

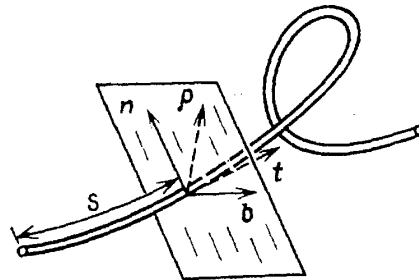


Рис. 10. Сопровождающий трехгранник Френе для спирально изогнутого оптического световода

Главный результат экспериментальных и теоретических исследований, выполненных Чао с соавторами [53, 57], заключается в следующем: основное соотношение для фазы Берри — Рытова — Владимирского

$$\Theta^m = -m\Omega(C) \quad (m = \pm 1 \text{ — спиральность}), \quad (3.31)$$

остаётся справедливым при наличии идеальных отражений, если придерживаться следующих правил: 1) контур C и телесный угол $\Omega(C)$ строить не на сфере направлений распространения $\hat{k}$, а на единичной сфере направлений спина $\langle \hat{s} \rangle$ (см. раздел 2.11); 2) точки, отображающие дискретную последовательность положений спина на $\langle \hat{s} \rangle$ -сфере,

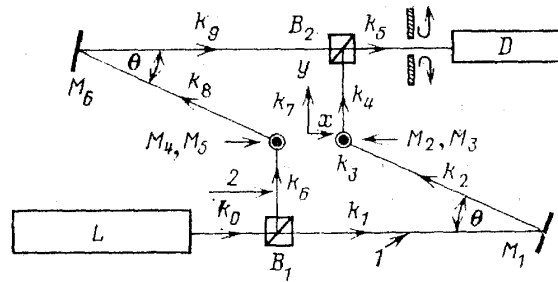


Рис. 11. Схема неплоского интерферометра Маха — Цендера, использованного в эксперименте [53] (вид сверху). L — лазер, D — приемник излучения

соединять геодезическими, т. е. дугами больших кругов. При адиабатической эволюции направление спина жестко фиксируется направлением $\hat{k}$, поэтому рассмотрения на $\hat{k}$ и $\langle \hat{s} \rangle$ -сферах в этом случае эквивалентны. Сфера направлений спина, согласно [53, 57], и есть та поверхность, на которой следует рассматривать циклическую эволюцию по Ааронову — Анандану [19] для фотонов, меняющих направление распространения.

Эксперимент [53, 57] проводился на неплоском интерферометре Маха — Цендера (рис. 11). Жирными точками показаны вертикальные участки лучей, проходящих по плечам $\alpha = \langle 1 \rangle$ и $\beta = \langle 2 \rangle$ в виде неплоских ломаных, симметричных друг другу относительно центра O . В плече единичный вектор направления спина принимает следующую последовательность значений:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_1 \rangle &= (1, 0, 0), \\ \langle \hat{S}_2 \rangle &= (\cos \theta, -\sin \theta, 0), \\ \langle \hat{S}_3 \rangle &= (0, 0, 1), \\ \langle \hat{S}_4 \rangle &= (0, -1, 0), \\ \langle \hat{S}_5 \rangle &= (1, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Этот результат непосредственно виден из рис. 11, если учесть переворот спина при каждом из четырех отражений от глухих зеркал M_1 — M_4 и полупрозрачного зеркала B_2 . Соответствующий контур на сфере направлений спина (рис. 12) имеет вид ломаной $ABCD A$. Телесный угол, опирающийся на этот контур, показан штриховкой на рис. 12 и равен $\Omega = (\pi/2) - \theta$.

В плече β фотон проходит на сфере направлений спина тот же путь, но в противоположном направлении. Фазы, приобретаемые фотонами с правой (r) и левой (l) поляризацией при прохождении плеч α и β , равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha r} &= \Omega + \delta_\alpha, & \Phi_{\alpha l} &= -\Omega + \delta_\alpha, \\ \Phi_{\beta r} &= -\Omega + \delta_\beta, & \Phi_{\beta l} &= \Omega + \delta_\beta, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $\delta_{\alpha, \beta}$ — динамические фазы и $\Omega = (\pi/2) - \theta$. Интерференционная картина, создаваемая на выходе правополяризованными фотонами, будет определяться разностью фаз

$$\Delta\Phi_r = \Phi_{\alpha r} - \Phi_{\beta r} = 2\Omega + (\delta_\alpha - \delta_\beta), \quad (3.34)$$

а левополяризованными — разностью фаз

$$\Delta\Phi_l = \Phi_{\alpha l} - \Phi_{\beta l} = -2\Omega + (\delta_\alpha - \delta_\beta). \quad (3.35)$$

Чтобы исключить динамические фазы, достаточно измерить сдвиг интерференционной картины при замене правополяризованного излучения на левополяризованное, определяемый разностью фаз

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_r - \Delta\Phi_l = 4\Omega. \quad (3.36)$$

В реальном эксперименте [53, 57] на вход интерферометра подавалось *неполяризованное* излучение, а выделение правой и левой круговых компонент производилось на выходе с помощью двух фильтров, состоящих из пластинки $\lambda/4$ и поляроида. Обе интерференционные картины наблюдались одновременно в двух половинках поля зрения, и сдвиг

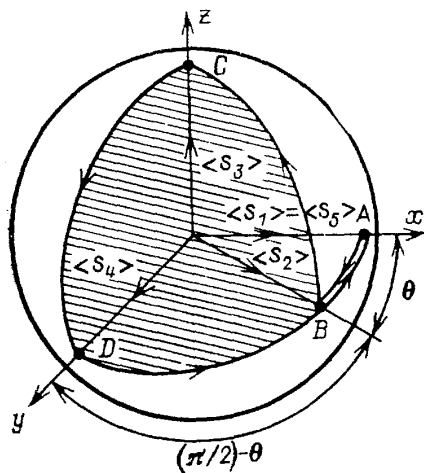


Рис. 12. Единичная сфера направлений вектора спина $\langle s \rangle$ фотона

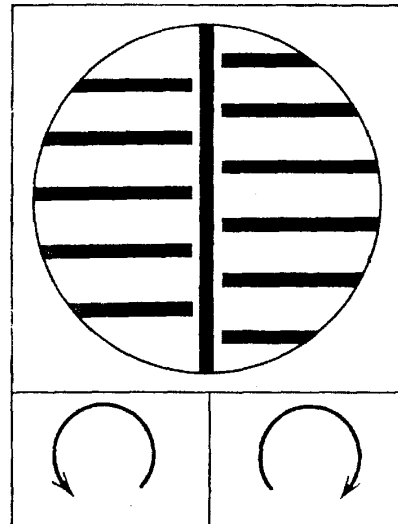


Рис. 13. Интерферограмма для левой и правой круговой поляризации излучения при $\theta = 45$

полос определялся непосредственно (рис. 13). Такой способ регистрации был выбран с целью уменьшения систематических ошибок, связанных с неидеальностью системы. Как отмечалось выше, при реальных отражениях результирующий набег фазы зависит от начального состояния поляризации. Использование естественного света означает усреднение по начальным состояниям поляризации. В результате этого проявление неидеальности отражений в значительной мере сводится лишь к понижению контрастности интерференционной картины, слабо сказываясь на положении полос.

В заключение данного раздела отметим некоторые важные моменты теории этого эксперимента. Если заданы направление падающего луча и его поляризация, а также материал и расположение всех зеркал в пространстве, то, очевидно, направление и поляризация выходного луча определены однозначно и могут быть непосредственно найдены из закона отражения и формул Френеля. Такой расчет, играющий в данной ситуации ту же роль, что и явные расчеты Рытова и Владимирского в ситуации с искривленными лучами, был выполнен авторами [57]. Удобный аппарат для этой цели представляют матрицы Джонса [58], пре-

образующие двухкомпонентные векторы поляризационных состояний

$$\begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix}.$$

При идеальных отражениях компонента E_p , лежащая в плоскости падения, не меняется, а перпендикулярная ей компонента E_s меняет знак. Учитывается также, что при переходе от одного зеркала к другому происходит поворот локальных осей s и p , связанных с лучом, на угол, равный углу между плоскостями падения. Перемножение соответствующих матриц Джонса, явный вид которых взят из работы [58], приводит авторов [57] к выражению для геометрической фазы, в точности совпадающему с (3.31).

3.7. Геометрическая фаза при циклическом изменении состояния поляризации прямолинейных световых пучков (фаза Панчаратнама). Рассмотрим плоскую световую волну, состояние поляризации которой циклически изменяется посредством ряда оптических элементов (пластинки $\lambda/4$ и $\lambda/2$, поляроиды, оптически активные среды и т. п.). При этом пусть направление распространения волны остается постоянным. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования [54, 56, 59—63] показывают, что при этом волна приобретает дополнительную фазу, аналогичную фазе Берри. Эта фаза равна половине телесного угла, опирающегося на замкнутый контур, который отображает циклическую эволюцию поляризационного состояния волны на сфере Пуанкаре. Топологически инвариантный характер этой фазы проявляется в том, что она, как и фаза Берри, не меняется при деформациях эволюционного контура, оставляющих неизменной величину телесного угла.

В работах [59, 64] была впервые отмечена тесная связь между фазой Берри в квантовой механике и добавочной фазой, обнаруженной в 50-е годы Панчаратнамом [29] при исследовании интерференции поляризованных световых волн. В настоящее время термин «фаза Панчаратнама» широко используется в литературе для обозначения геометрической фазы, возникающей, когда поляризационное состояние волны циклически меняется, а направление распространения неизменно [27].

3.8. Представление поляризационных состояний на сфере Пуанкаре и вычисление фазы Панчаратнама. Следуя Ааронову и Анандану [19], будем рассматривать циклическую эволюцию в проективном гильбертовом пространстве. Чистые состояния поляризации плоской электромагнитной волны описываются двухкомпонентными векторами Джонса

$$|E\rangle = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad \langle E| = (E_1^*, E_2^*), \quad (3.37)$$

где E_1^* и E_2^* — комплексные составляющие вектора электрического поля вдоль двух взаимно ортогональных поперечных направлений $x_{1,2}$. В этом случае

$$\rho_E = |E\rangle \langle E| = \begin{pmatrix} E_1 E_1^* & E_1 E_2^* \\ E_1^* E_2 & E_2 E_2^* \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

представляет собой хорошо известную поляризационную матрицу плотности или поляризационный тензор [34] чистого состояния $|E\rangle$. Матрицу ρ_E принято нормировать таким образом, чтобы выполнялось соотно-

шение $\text{Sp } \rho_E = 1$. Эта нормировка сохраняется, если постоянна интенсивность волны.

Разложим ρ_E по базису матриц Паули

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Тогда для ρ_E получается выражение [34, 56]

$$\rho_E = \frac{1}{2}(I + (\hat{n}\sigma)), \quad (3.40)$$

где вектор $\hat{n}$, компоненты которого называются параметрами Стокса [34, 38] и вычисляются по формуле

$$\hat{n}_i = \text{Sp}(\rho_E \sigma_i), \quad (3.41)$$

должен быть действительным в силу эрмитовости ρ_E . Для чистых нормированных состояний он должен быть еще и единичным, что следует из соотношений $\det \rho_E = 0$, $\text{Sp } \rho_E = 1$. Таким образом, каждому элементу ρ_E проективного гильбертова пространства в данном случае взаимно однозначно соответствует точка на сфере единичного радиуса в обычном трехмерном пространстве, которая называется сферой Пуанкаре [38, 56]. Пусть a и b — большая и малая полуоси эллипсополяризации, $0 \leq \xi \leq \pi$ — угол между большой полуосью и осью x_1 , $-\pi/4 \leq \eta \leq \pi/4$ — эллиптичность, определяемая соотношением $\text{tg } \eta = \pm b/a$, причем знаки «+» и «-» соответствуют правой и левой поляризациям. В этих обозначениях имеем [56]

$$|E\rangle = A e^{i\delta} \begin{pmatrix} \cos \xi \cdot \cos \eta - i \sin \xi \cdot \sin \eta \\ \sin \xi \cdot \cos \eta + i \cos \xi \cdot \sin \eta \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

где A и δ — вещественные постоянные. Тогда соотношение (3.41) дает для $\hat{n}$ выражение

$$\hat{n} = (\cos 2\xi \cdot \cos 2\eta, \sin 2\xi \cdot \cos 2\eta, \sin 2\eta), \quad (3.43)$$

из которого видно, что величина 2η играет роль широты, а 2ξ — долготы на сфере Пуанкаре. Экватор соответствует состояниям линейной поляризации, северный и южный полюсы — правой и левой круговой, остальные точки — эллиптической поляризации. Точка пересечения сферы Пуанкаре с осью x_1 соответствует линейной поляризации вдоль оси x_1 , а с осью x_2 — под углом 45° к оси x_1 . При полном обходе сферы по параллели эллипс поляризации поворачивается на угол π ; диаметрально противоположные точки соответствуют взаимно ортогональным поляризациям (рис. 14).

При повороте сферы Пуанкаре вокруг некоторого направления $\hat{n}_0$ на угол α матрица плотности $\rho_E(\hat{n}_0)$, естественно, не меняется, сам же вектор состояния $|E(\hat{n}_0)\rangle$ приобретает дополнительную фазу, равную $\alpha/2$. Легче всего убедиться в этом, рассматривая поворот вокруг вертикальной оси. В этом случае $\hat{n}_0 = (0, 0, 1)$, $\eta = \pi/4$, и (3.43) приводит к выражению

$$|E\rangle = A \exp[i(\delta - \xi)] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Изменение долготы 2ξ на α (поворот на α) меняет фазу компонент поля на $\alpha/2$.

Описание состояний поляризации двухкомпонентными векторами Джонса (3.37) полностью аналогично описанию движения частицы со спином $1/2$ в квантовой механике (см. раздел 2.11). Матрицы σ_i (3.39) с точностью до множителя $1/2$ совпадают с компонентами оператора

спина. Поэтому выражение (3.41) определяет единичный вектор направления спина. Итак, для частицы со спином $1/2$ в роли сферы Пуанкаре выступает сфера направлений вектора спина⁽⁸⁾. Продолжая аналогию, заметим, что адиабатическому изменению состояния поляризации световой волны соответствует адиабатический поворот спина, который можно реализовать, например, в магнитном поле, адиабатически меняющем свое направление. Тогда формула Берри (2.33), в которой нужно положить $m=1/2$, дает результат

$$\Theta = -\frac{1}{2}\Omega(C), \quad (3.45)$$

который должен быть справедлив и для фазы Панчаратнама, если телесный угол брать на сфере Пуанкаре.

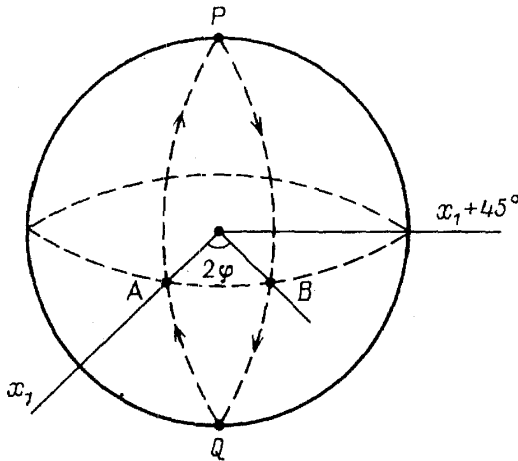


Рис. 14. Представление поляризационных состояний на сфере Пуанкаре. Точки A и B на экваторе изображают линейные поляризации. Северный и южный полюсы P и Q соответствуют правой и левой круговым поляризациям

Для произвольной эволюции поляризационных состояний (не обязательно адиабатической) соотношение (3.45) может быть выведено различными способами [56, 59, 66]. Так, например, авторы [56] построили явный вид гамильтониана и явно проинтегрировали соответствующие уравнения эволюции для операторов, преобразующих вектор состояния $|E\rangle$ при перемещении вектора $\hat{n}$ на сфере Пуанкаре по заданной траектории. Этот вывод является, по-видимому, наиболее непосредственной реализацией подхода [19] в рассматриваемой задаче. Изящный, причем чисто геометрический вывод соотношения (3.45) вытекает из теоремы Джордана [66] о вращениях. Пусть единичный вектор $\hat{n}_0$ подвергается последовательности поворотов $R_{\hat{N}_1}(\theta_1)$, $R_{\hat{N}_2}(\theta_2)$, ..., $R_{\hat{N}_k}(\theta_k)$, переводящих его в положения $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \dots, \hat{n}_k = \hat{n}_0$, где $R_{\hat{N}_i}(\theta)$ обозначает матрицу поворота на угол θ , равный углу между $\hat{n}_{i-1}$ и $\hat{n}_i$, вокруг оси $\hat{N}_i$, перпендикулярной плоскости, в которой лежат $\hat{n}_{i-1}$ и $\hat{n}_i$. При такой серии поворотов конец вектора $\hat{n}$ прочерчивает на единичной сфере контур C , составленный из дуг больших кругов. Теорема Джордана утверждает, что произведение указанных поворотов эквивалентно одному повороту вокруг исходного направления $\hat{n}_0$ на угол, равный телесному углу, опирающемуся на контур C . Если применить теорему Джордана к сфере Пуанкаре и учесть, что при вращении на угол α вокруг направления $\hat{n}$ соответствующее состояние приобретает фазу $-\alpha/2$, то соотношение (3.45) доказано.

3.9. Эксперименты по измерению фазы Панчаратнама на лазерных интерферометрах. Две общие задачи, возникающие в различных экспериментах по наблюдению и измерению

фазы Панчаратнама [54, 57, 60, 61, 62], состоят в следующем. Во-первых, требуется организовать циклическое изменение состояния поляризации и убедиться, что при этом не меняется динамическая фаза, определяемая оптической длиной пути. Во-вторых, нужно измерить геометрическую фазу, отделив ее от динамической.

Для организации циклического изменения поляризации использовались различные комбинации полуволновых и четвертьволновых пластинок и поляроидов. На рис. 15 показаны упрощенные схемы использованных в [54, 57, 60, 61] интерферометров и расположение указанных элементов в них. На рис. 14 показаны соответствующие траектории на

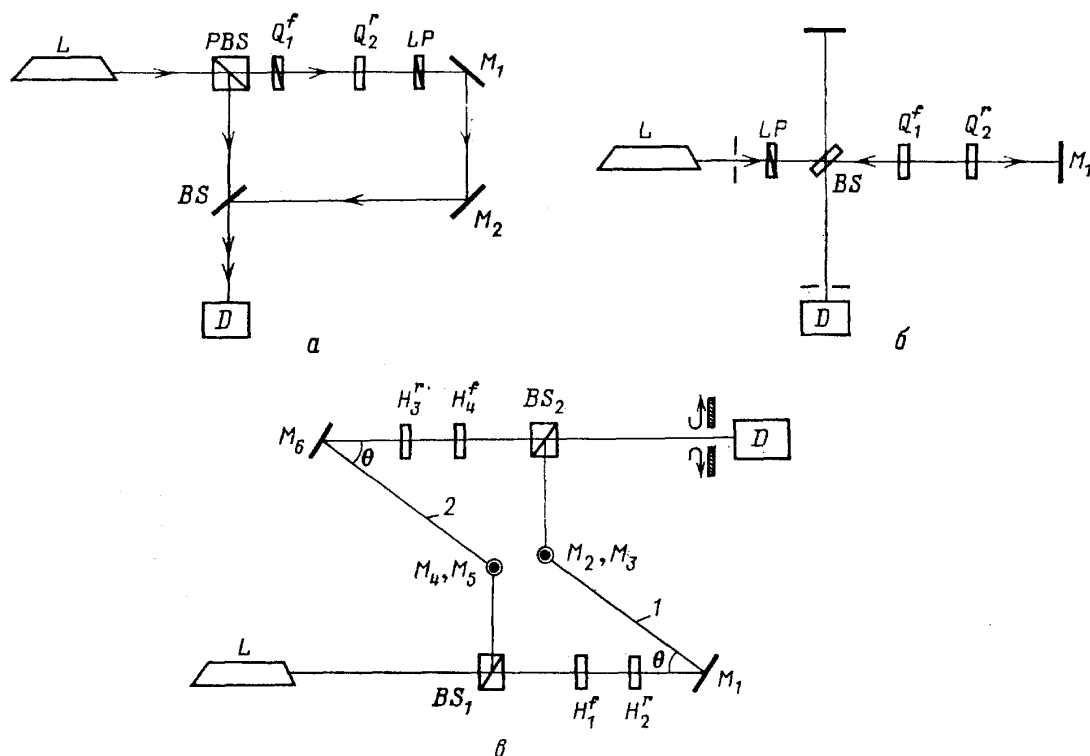


Рис. 15. Упрощение схемы лазерных интерферометров, использованных для измерения фазы Панчаратнама в работах [54] (а), [61] (б) и [57] (в). L — лазер, M_i — зеркала, BS_i — делители луча, PBS — линейно полярирующий делитель, LP — линейные поляризаторы, $Q_i^{f,r}$, $H_i^{f,r}$ — подвижные и неподвижные фазовые $\lambda/4$ - и $\lambda/2$ -пластинки соответственно, D — приемник излучения

сфере Пуанкаре. В схеме Бхандари и Сэмюэла [54], показанной на рис. 15, а, начальное состояние линейной поляризации A (см. рис. 14) преобразуется в состояние правой круговой поляризации P пластинкой $(\lambda/4)_1^{ix}$. Вторая пластинка $(\lambda/4)_2^{rot}$, повернутая на угол ϕ относительно первой вокруг направления луча, возвращает изображающую точку на экватор в положение B . С помощью поляроида LP осуществляется возврат в исходное состояние $A^{(9)}$. Телесный угол, опирающийся на контур $APBA$, равен 2ϕ . Отличие работы [60] от [54] состоит в замене второй (подвижной) пластинки $(\lambda/4)_2^{rot}$ на полуволновую пластинку $(\lambda/2)_2^{rot}$, которая переводит состояние P в состояние Q по пути PBQ (см. рис. 14). Результирующий контур $ABPQA$ стягивает телесный угол величиной 4ϕ .

Авторы работы [61] использовали интерферометр Майкельсона (см. рис. 15, б), в котором пробный луч отражался от идеального зеркала M_1 и проходил систему двух четвертьволновых пластинок дважды. Идеальное отражение соответствует инверсии обычной сферы Пуанкаре,

у которой ось x_3 совпадает с направлением волнового вектора. При этом условия построения замкнутого контура эволюции и применимости соотношения (3.45) нарушаются. Эта трудность легко преодолевается, если ось x_3 сферы Пуанкаре направлять не вдоль волнового вектора, а вдоль направления спина фотона. Авторы работы [57] называют такую сферу обобщенной сферой Пуанкаре. Именно ее используют фактически и авторы [61], когда говорят о задании поляризации в пространственно-фиксированной системе осей. На обобщенной сфере Пуанкаре схема [61] перемещает изображающую точку по тому же контуру $ABQA$, что и в работе [60], но в четыре приема. Достоинством схемы с отражением является отсутствие полярOIDов, что обеспечивает унитарность эволюции и соответствует условиям проверяемой теории.

Джао и сотрудники [57] использовали тот же интерферометр Маха — Цендера, который уже подробно обсуждался выше. При $\theta = \pi/2$ (см. рис. 15, б) фаза Рытова — Владимирского равна нулю. В плечо α помещались две пластинки $\lambda/2$, повернутые друг относительно друга на угол φ , а в плечо β — такие же пластинки, но в обратном порядке. Исходный фотон, поляризованный по правому кругу, в плече α пройдет по сфере Пуанкаре путь $PBOAP$, а в плече β путь $PAQBP$, отличающийся направлением обхода.

Итак, во всех случаях телесный угол на сфере Пуанкаре, фигурирующий в (3.45), пропорционален углу между осями соответствующих фазовых пластинок и легко контролируется на практике.

Ассортимент контуров эволюции, реализуемых на сфере Пуанкаре в рассматриваемых экспериментах, достаточно беден и, строго говоря, не позволяет убедиться в топологической инвариантности фазы Панчаратнама на практике. В недавних работах [56, 67] развиты методы синтеза простых оптических устройств, состоящих из набора полуволновых и четвертьволновых пластинок и обеспечивающих преобразование любого заданного начального состояния поляризации в любое наперед заданное конечное состояние. С помощью таких преобразователей поляризации на сфере Пуанкаре можно организовать «путешествие» по заданному маршруту сложной формы. Меняя эту форму так, чтобы телесный угол, опирающийся на контур, оставался постоянным, можно будет экспериментально доказать топологическую инвариантность фазы Панчаратнама.

Если по способам преобразования поляризации работы [54, 57, 60—62] почти не отличаются, то способы регистрации набег фазы более разнообразны. Бхандари и Сэмюэл [54, 60] используют серийную интерферометрическую систему, предназначенную для определения изменений оптической длины пути в широком диапазоне (от $\lambda/40$ до $10^7\lambda$). В этой системе используется лазер. Частота биений двух волн, прошедших через плечи интерферометра, сравнивается с частотой биений опорного сигнала. Изменение фазы пробной волны, вызванное поворотом фазовой пластинки, приводит к сдвигу частоты биений, который регистрируется системой в каждый момент времени. Сама же фаза определяется посредством интегрирования мгновенного значения частотного сдвига по времени на компьютере. Такой способ регистрации позволяет, во-первых, выделить геометрическую фазу на фоне большой постоянной динамической фазы, обусловленной значительной разностью хода лучей в плечах интерферометра. Во-вторых, можно непрерывно проследить за изменением фазы, не ограничиваясь интервалом 2π . В работе [60] продемонстрировано, что геометрическая фаза Θ линейно «следит» за поворотом пластинки на угол φ от 0 до 4π и обратно в соответствии с законом $\Theta = -2\varphi$.

Методика регистрации фазы в [61] гораздо проще. Фактически измерялся сдвиг картины интерференционных полос при вращении соот-

ветствующей фазовой пластинки. Постоянная часть фазы, не испытывающая приращения при повороте пластинки, просто отбрасывалась.

Схема регистрации фазового сдвига в работе [57] уже обсуждалась в связи с измерениями фазы Рытова — Владимирского. Компенсация динамических фаз здесь происходит за счет непосредственного сравнения интерференционных картин, создаваемых право- и левополяризованными фотонами. Использование естественного света означает усреднение по начальным состояниям поляризации, снижающее систематическую ошибку измерений.

Во всех перечисленных экспериментах с достаточно высокой точностью подтверждается равенство $\Theta = -\Omega/2$, предсказываемое теорией.

3.10. Фаза Панчаратнама в оптически активной среде. В оптически активной среде [38] происходит вращение эллипса поляризации при прохождении волны через среду, представляющее собой пример циклической эволюции поляризационного состояния. Изображающая точка совершает обход сферы Пуанкаре вдоль параллели; при полном обороте эллипса поляризации на 2π сфера Пуанкаре обходится дважды, и соответствующий телесный угол составляет $\Omega = 4\pi(1 - \sin 2\eta)$. Особенность такой постановки состоит в том, что Ω определяется однозначно параметром η , характеризующим эллиптичность начального состояния и сохраняющимся в процессе эволюции. Другая особенность заключается в невозможности отделить геометрическую фазу от динамической, сделав последнюю постоянной, как в экспериментах с фазовыми пластинками.

Физическая природа вращения эллипса поляризации при этом оказывается несущественной. Продемонстрируем это на примере, который использовали Гаррисон и Чао для иллюстрации общей теории в своей работе [28] ⁽¹⁰⁾. Этот пример — известное (см., например, [68]) явление самоиндуцированного вращения эллипса поляризации в среде с керровской нелинейностью. Исходное уравнение для комплексной амплитуды электрического поля в приближении плоской волны (без дифракции) имеет вид [69]:

$$i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -G_0 \left((\mathbf{E} \mathbf{E}) \mathbf{E}^* + \frac{1}{3} (\mathbf{E}^* \mathbf{E}) \mathbf{E} \right), \quad (3.46)$$

где $G_0 = 3kn_2/8n_0$ — постоянная нелинейности; $n = n_0 + n_2 |E|^2$ — нелинейный показатель преломления. Если на входе в среду ($z=0$) поле задать в виде

$$\mathbf{E}(0) = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \epsilon \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

то в произвольной точке, согласно [69], решение уравнения (3.46) выражается формулой

$$\mathbf{E}(z) = e^{i\kappa z} R(\Gamma z) \mathbf{E}(0), \quad (3.48)$$

где $R(\alpha)$ — матрица поворота вокруг оси z на угол α ,

$$\kappa = \frac{4}{3} G_0 E_0^2 (1 + \epsilon^2), \quad (3.49)$$

$$\Gamma = -2G_0 E_0^2 \epsilon.$$

Таким образом, с ростом z поле вращается с постоянной угловой скоростью Γ и приобретает равномерно увеличивающийся фазовый сдвиг κz . Полный оборот происходит при изменении z на величину $\Lambda = 2\pi/|\Gamma|$. На этом же интервале полный фазовый сдвиг, согласно (3.48), составляет $\Phi = 2\pi\kappa/|\Gamma|$

С другой стороны, динамическую фазу можно вычислить непосредственно по общему определению [28] (см. также раздел 2.12):

$$\delta = \frac{G_0}{Q} \int_0^{\Lambda} [|(\mathbf{E}, \mathbf{E})|^2 + \frac{1}{3} (\mathbf{E}^*, \mathbf{E})^2] dz. \quad (3.50)$$

Использование свойств решения (3.48)

$$\begin{aligned} |(\mathbf{E}(z), \mathbf{E}(z))|^2 &= |(\mathbf{E}(0), \mathbf{E}(0))|^2 = E_0^4 (1 - \epsilon^2)^2, \\ (\mathbf{E}^*(z), \mathbf{E}(z))^2 &= Q^2 = E_0^4 (1 + \epsilon^2)^2 \end{aligned}$$

позволяет вычислить интеграл (3.50) явно:

$$\delta = \frac{4\pi (1 - \epsilon^2 + \epsilon^4)}{3|\epsilon|(1 + \epsilon^2)}. \quad (3.51)$$

Геометрическая фаза определяется обсуждавшимся выше телесным углом Ω , который нетрудно выразить через параметр ϵ . В результате для геометрической фазы получается

$$\Theta = \frac{4\pi |\epsilon|}{1 + \epsilon^2}. \quad (3.52)$$

Складывая (3.51) и (3.52), нетрудно убедиться, что сумма величин δ и Θ действительно дает полную фазу $\Phi = 2\pi\kappa/|\Gamma|$, приобретаемую решением (3.48) за один полный оборот.

Нетрудно видеть, что результат, полученный Гаррисоном и Чао, не зависит от природы вращения эллипса поляризации и является совершенно общим для оптической активности любой природы, поскольку ни δ , ни Θ не зависят ни от чего, кроме заданного на входе параметра эллиптичности ϵ . От природы эффекта (в данном случае от нелинейного взаимодействия $G_0 E_0^2$) зависит только скорость вращения или, что то же самое, длина Λ , на которой происходит полный оборот. Экспериментальная проверка соотношений (3.51), (3.52) достаточно сложна, а главное — и не очень интересна, так как геометрическая фаза не проявляется в каких-либо специфических наблюдаемых эффектах, которые не зависели бы от динамической фазы. Динамическая и геометрическая фазы в случае оптической активности представляют собой просто два вклада в полную фазу, выделение которых достаточно условно.

3.11. Одновременное наблюдение фаз Рытова — Владимирского и Панчаратнама в одном эксперименте. Если в интерферометре Маха — Цендера с неплоским контуром луча и фазовыми пластинками (см. рис. 15, в) угол θ сделать отличным от $\pi/2$, то дополнительная фаза будет определяться как изменением направления спина фотонов, так и преобразованием состояний поляризации. Такой эксперимент был выполнен Джао с сотрудниками [57]. Схема интерферометра отличалась от показанной на рис. 15, в лишь тем, что в каждом плече одна пластинка $\lambda/2$ располагалась до отражения на угол θ , а вторая после. Эксперимент показал, что в данной схеме фазы Панчаратнама и Рытова — Владимирского представляют собой аддитивные вклады в общую геометрическую фазу. Этот факт подтверждается явным теоретическим расчетом [57], при котором производится перемножение матриц Джонса, описывающих последовательное преобразование состояний. $|E\rangle$ при прохождении элементов оптической схемы. Такой же результат вытекает и из анализа эволюции на сфере направлений спина и обобщенной сфере Пуанкаре.

Более сложные эксперименты могут включать такие оптические системы, в которых световая волна меняет как направление, так и состоя-

ние поляризации за счет одного и того же физического процесса. Очевидным примером дискретного варианта такой системы является последовательность неидеальных отражений. Бхандари [63] для теоретического анализа общего случая эволюции подобного типа предложил использовать проективное гильбертово пространство, построенное следующим образом. В пространстве трехкомпонентных векторов, соответствующем спину единица, выделяется подпространство с элементами

$$\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_{-1} \end{pmatrix},$$

где $c_{\pm 1}$ — комплексные числа, $c_{+1}^2 + |c_{-1}|^2 = 1$. Зануление второй компоненты учитывает поперечность волны. Состояния поля с произвольным направлением распространения (полярные углы θ, φ) строятся как

$$R_z(\varphi) R_y(\theta) |\psi\rangle = |\psi(\theta, \varphi)\rangle,$$

где $R_z(\varphi)$ и $R_y(\theta)$ — матрицы преобразования спиноров при поворотах вокруг осей z и y на углы φ и θ . Из таких «повернутых» состояний далее строится проективное пространство матриц плотности $|\psi(\theta, \varphi)\rangle\langle\psi(\theta, \varphi)|$, как это делалось в разделе 2.11.

4. Заключение. Геометрические фазы как простейшие топологические характеристики пространств состояний или фазовых пространств физических систем нужны, в первую очередь, для последовательной формулировки самой квантовой теории. В квантовой механике собственные векторы состояний гамильтониана задают базис в собственных подпространствах с точностью до унитарного произвола. Так, например, для невырожденных состояний этот произвол имеет вид неопределенного фазового множителя, а для n -кратно вырожденных состояний — некоторой унитарной $n \times n$ -матрицы. Во многих физических задачах фазовый произвол устраняется универсальным образом переходом к лучевому представлению. Однако при описании экспериментов с интерферирующими пучками или квантовомеханических систем во внешнем переменном поле, когда информация о фазах становится существенной, естественно использовать язык дифференциальной геометрии. На этом языке обычное пространство состояний рассматривается как векторное расслоение, в котором луч является точкой базы расслоения, а недостающий фазовый множитель задается элементом слоя. Само же существование лучевого представления означает, что соответствующее расслоение допускает глобальное сечение. В общем случае фазовый произвол глобально не устраним и проблема его классификации сводится к задаче о перечислении векторных расслоений с различными базами. Для линейных расслоений эта задача в контексте геометрического квантования была решена Б. Костантом.

Для незамкнутых систем гамильтониан квантовой задачи зависит от внешних параметров. В частности, это может быть внешнее поле, зависящее от времени, эффективные координаты, описывающие среду, в которую погружена рассматриваемая квантовая система, и т. д. В этих случаях зависимость мгновенного гамильтониана от параметров определяет отображение f из пространства параметров в базу расслоения. Тогда вопрос о глобальном определении фазы волновой функции сводится к изучению возможностей продолжения отображения f на все расслоение. Эта конструкция находит свое применение при исследовании адиабатического погружения «быстрой» квантовой системы в медленно меняющуюся среду.

Богатые геометрические структуры возникают в адиабатических системах, в которых существует иерархия эволюции, т. е. разбиение на «быстрые» и «медленные» подсистемы. Такое разбиение обосновано содержанием адиабатической теоремы, строго доказанной Т. Като при достаточно общих предположениях о виде гамильтониана. Анализ адиабатических систем сводится к изучению эффективного уравнения для медленной подсистемы, в которой при циклическом изменении мгновенного гамильтониана индуцируется ковариантная производная. Ее форма связности определяет топологическую фазу полной волновой функции в адиабатическом (диагональном) приближении. В адиабатическом подходе на каждом собственном подпространстве гамильтониана в зависимости от топологии пространства параметров по-разному индуцируется нетривиальная структура расслоения и параллельный перенос в нем. Недавно Э. Киритису удалось классифицировать все топологические препятствия к глобальному определению волновой функции. Классификация этих препятствий, по сути дела, дает ответ на вопрос о том, какими могут быть топологически неэквивалентные адиабатические системы и индуцированные фазы. Такая постановка задачи позволяет находить топологические фазы волновой функции геометрическим путем.

Другой механизм проявления топологических фаз возникает в алгебраическом подходе, в котором набор коммутирующих между собой операторов, определяющих квантовую систему, зависит согласованным образом от времени (т. е. гамильтонова эволюция и скобки Пуассона не нарушают алгебраической замкнутости набора). Здесь эволюция собственных векторов по-прежнему определена с точностью до фазы, зависящей от времени, и прямое использование лучевого описания становится неполным, так как при периодическом изменении операторов во времени волновая функция может приобрести топологическую фазу. Ее изучение удобно проводить на примерах Квантово-механических систем с динамической симметрией. Можно ожидать, что классификация этого типа фаз в квазиклассическом пределе связана с изучением симплектических структур в рамках методов, развиваемых В. И. Арнольдом.

В заключение вкратце отметим некоторые нерешенные проблемы теории и эксперимента по изучению топологических фаз в рамках представленного материала. Имеющиеся классификационные теоремы фактически сформулированы только в адиабатическом подходе. Начатое исследование топологических фаз в симплектическом подходе необходимо расширить с учетом фазы Ааронова — Анандана. Проблема циклической эволюции смешанных состояний в случае вырождения уровней и неабелевы фазы Ааронова — Анандана и Панчаратнама требуют дальнейших теоретических рассмотрений с учетом планирования экспериментов по их обнаружению.

5. Приложение. Исторический экскурс и перспективы. Авторы постарались дать наглядное представление о топологических фазах, используя наиболее простые примеры из квантовой механики и поляризационной оптики. В данном приложении мы хотели бы несколько расширить охват материала и представить читателю возможность проследить историю развития идей, которые привели к пониманию геометрических фаз и их приложений в различных физических задачах.

Проблемы, связанные с возникновением и свойствами топологических фаз в квантовой механике, имеют давнюю историю. Фактически она начинается с 1-го Сольвеевского конгресса 1911 г., где среди участников были А. Пуанкаре, М. Планк, А. Зоммерфельд, Э. Резерфорд, А. Эйнштейн. Под председательством Г. Лоренца обсуждался вопрос о сущности квантования энергии осциллятора с частотой ν , т. е. $E = nh\nu$

($n=1, 2, 3, \dots$). Тогда гипотезу Планка считали еще просто формальным математическим трюком. Действительно, было известно, что Планк ввел ее в порыве отчаяния, потеряв всякую надежду каким-либо другим образом объяснить наблюдаемый на опыте спектр излучения черного тела. Поэтому физики искали механические аналоги, пытаясь понять суть новых явлений. Так, в конце 1-го Сольвеевского конгресса Лоренц рассказал о вопросе, который он обсуждал с Эйнштейном: «...Мы говорили о простом маятнике, который можно укорачивать, сжимая нить двумя пальцами и передвигая их вдоль нее». Лоренц не понимал, что будет происходить с маятником. Ведь, с одной стороны, будет изменяться частота колебаний, с другой стороны, будет как-то изменяться энергия. Получалось, что изменяя длину нити, можно нарушить соотношения Планка. Эйнштейн частично разрешил недоумение Лоренца следующими словами: «...Когда длина маятника изменяется бесконечно медленно и непрерывно, энергия колебания остается равной $h\nu$, если вначале она была равна $h\nu$; энергия колебаний изменяется пропорционально ν ». Лоренц ответил: «Этот в высшей степени странный результат устраняет упомянутую трудность». Странный результат, сформулированный Эйнштейном, интуитивно очевиден: при бесконечно медленном и непрерывном изменении длины нити целое число (квантовое число) не может измениться скачком, т. е. отношение энергии колебаний маятника к его частоте остается постоянным. Другими словами, можно сказать, что *Лоренц и Эйнштейн столкнулись с частным случаем «адиабатического инварианта»*.

В общем случае адиабатические инварианты были введены и изучены Л. Больцманом в 1866 г. при попытке вывести второе начало термодинамики из принципов механики. Он рассматривал механическую систему, состояние которой определяется набором параметров λ . Предполагалось, что система при фиксированных значениях параметров совершала периодическое движение с частотой ν . Если при изменении параметров λ тепло не поглощается и не выделяется (такие процессы называются адиабатическими), то величина I , равная отношению средней кинетической энергии к частоте колебаний, сохраняется и представляет собой адиабатический инвариант.

Термин «адиабатический инвариант» был введен П. Эренфестом. К концу 1912 г. он доказал адиабатическую инвариантность величины I и тем самым дал характеристике Больцмана новую жизнь. Эренфест предположил, что гипотезу Планка о квантах энергии нужно обобщить следующим образом: $\bar{E} = (n/2)h\nu$.

В начале 1913 г. подобное предположение было очень смелым шагом. Тем самым Эренфест ввел это общее правило квантования еще до того, как Н. Бор рассмотрел квантование круговых орбит в атоме водорода. До Эренфеста квантовали только гармонические колебания, тогда как по его формуле можно проквантовать любое одномерное периодическое движение. При переходе от квантовых представлений Планка и Эйнштейна к квантовой теории в ее современном виде большую роль сыграла адиабатическая гипотеза Эренфеста: всякое определенное с точки зрения квантовой теории состояние переходит при адиабатическом изменении параметров системы снова в определенное состояние, характеризующееся теми же квантовыми числами.

Впоследствии вопрос о точности выполнения адиабатической гипотезы при медленном изменении внешних условий исследовали в конце 20-х годов после возникновения квантовой механики. В 1928 г. М. Борн и В. А. Фок показали, что адиабатическая гипотеза Эренфеста является следствием постулатов квантовой теории. Наконец, в 1949 г. Т. Като [70] дал математически строгое доказательство адиабатической теоремы. Вопрос можно было считать исчерпанным. Но оказалось, что одна

простая, но важная особенность эволюции квантовомеханических состояний при рассмотрении адиабатической гипотезы в квантовой теории фактически не исследовалась до нашего времени.

В 1983 г. английский ученый М. Р. Берри обнаружил, что если эволюция гамильтониана определяется набором зависящих от времени параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$, то изменение фазы волновой функции $\psi(\lambda(\tau))$ при циклической эволюции системы, т. е. при условии $\psi(\lambda(0)) = \psi(\lambda(\tau_c))$, обладает замечательными геометрическими свойствами, а именно, изменение фазы не зависит от продолжительности эволюции (которая предполагается достаточно большой, чтобы эволюция была адиабатической), а прямо определяется от геометрических (топологических) свойств пространства параметров $\{\lambda_i\}_1^N$.

Историю самого открытия излагают так. Во время лекции в США в 1983 г. Берри не смог ответить на один каверзный вопрос относительно поведения волновой функции квантовой системы, когда симметрия функции нарушена относительно отражения времени ⁽¹¹⁾. Возвратившись домой, он раздумывал над этим вопросом две недели и открыл то, что назвал квантовой адиабатической фазой. Это, конечно, апокриф.

В 1983 г. Б. Саймон, знакомый с работой Берри еще до ее опубликования, показал, что изменение фазы функции $\psi(\lambda(\tau))$ полностью характеризуется условием Борна — Фока, которое можно интерпретировать как условие параллельного переноса квантовомеханических векторов состояния в гильбертовом пространстве.

В 1984 г. Ф. Вильчек и А. Зи обратили внимание на то, что при циклической эволюции вырожденных систем фазовое преобразование Берри обобщается некоторым унитарным преобразованием волновых функций, принадлежащих некоторому вырожденному по энергии состоянию. Адиабатическая гипотеза Эренфеста утверждает, что при адиабатической эволюции Квантовомеханической системы не изменяются квантовые числа, однако при этом система не обязательно возвращается к исходному состоянию. Так, например, если система вырождена по угловому моменту, то проекция момента при адиабатической эволюции не изменяется, но ось квантования может изменить свое направление.

Отметим сначала, что идеи, связанные с адиабатической фазой Берри в рамках квантовой механики, содержатся еще в работах [72, 73], в рамках более общей проблемы о квазипересечении уровней быстрой подсистемы. Им не уделяли должного внимания в контексте практических задач атомной физики. В более современных работах [74] фазы изучались уже как в модельных задачах с конечным числом квазиуровней, так и в кулоновской задаче двух центров.

В справочных целях перечислим ряд методологически интересных работ. Постadiaбатическое обобщение было предложено в [21], а в [20, 22] рассматривалась общая структура оператора эволюции и его факторизации на геометрическую и динамическую части. Исследовались также примеры эволюции состояний, использующих представления групп [12, 25, 35, 75, 76] для вычисления геометрических фаз. В работах [77—80] с этой же целью использовались когерентные состояния. Роль адиабатических инвариантов обсуждалась в [81—83]. Одномерные эволюционные уравнения с периодическим потенциалом и их геометрические свойства, связанные с фазой Берри, изучались, например, в [84, 85]. Эффективное действие для адиабатических систем с учетом топологической фазы проводилось в работах [86, 87]. Эффективное квантовое действие и квазиклассическое приближение рассматривались в [88] для многочастичных систем. Учет топологической фазы в трехчастичной проблеме фактически содержится в [89] (см. также [90, 91]). Адиабатический подход к топологической фазе в симплектической

формулировке рассматривался в [92—95]. Общая топологическая классификация нетривиальных адиабатических фаз проведена в работе [5]. Отдельные результаты содержатся в [96—98].

Недавно границы определения топологических фаз были расширены, В 1987 г. Ааронов и Анандан ввели фазу, не прибегая к понятию адиабатичности. Она возникает при циклической эволюции, когда начальный и конечный Квантовомеханические лучи совпадают: $\psi(\tau_c) = e^{i\varphi}\psi(0)$. Эта фаза, в частности, проявляется в ставшем классическим эффекте Ааронова — Бома и в мысленном эксперименте с системой заряд + монополь Дирака.

Далее было показано, что если использовать в качестве полного базиса собственные функции инвариантов, связанных с динамикой данной квантовой системы [19, 26, 32, 33], то можно получить топологические фазы волновых функций, не требуя адиабатичности и параметрической зависимости гамильтониана от параметров. Рассмотрение инвариантов послужило толчком для выявления топологической фазы в нелинейных эволюционных уравнениях [28].

Сделаны были обобщения на случай смешанных состояний с помощью матрицы плотности. Рассмотрена анголономия матрицы плотности при адиабатических изменениях векторов состояний [99—102] при наличии стохастических шумов.

Следующее обобщение, которое не требует унитарности оператора эволюции, приводилось в [27, 56]. Здесь возможны механизмы, включающие стохастические силы и приводящие к появлению диссипативных членов в гамильтониане [103].

Выяснилось, что нециклическая эволюция в пространстве решений квантовой задачи, дополненная движением по геодезической, относительно подходящей метрики приводит эффективно к циклу и набегу фазы [27, 29].

Проследим теперь историю возникновения и развития понятия геометрической фазы в оптике. Причина возникновения топологических фаз в оптике связана с тем фактом, что распространение поляризованного света, согласно классической электродинамике, допускает представление в виде эволюционного уравнения для комплексной величины $\epsilon^{1/2}E \pm i\mu^{1/2}H$. Еще в 1938 г. С. М. Рытов обратил внимание на поворот вектора поляризации при перемещении вдоль луча в оптически активной среде. Затем в 1941 г. В. В. Владимирский записал угол этого поворота и закон Рытова в современной форме — на языке гауссовой кривизны, связанной с лучом, и определил правило параллельного переноса, совпадающее с введенным Саймоном 50 лет спустя. Далее, в 50-е годы, Панчаратнам исследовал вопросы изменения фазы поляризованного света при прохождении через активные элементы (среды) и ввел относительную фазу между двумя лучами. В настоящее время все эти достижения оптики в сочетании с современными достижениями волоконной оптики в интерферометрии послужили основой для планирования и проведения ряда экспериментов по измерению топологических и геометрических фаз, описание наиболее важных из них нашло место в основном тексте обзора.

Почти одновременно с фазой Берри другой ученый из Бристоля Дж. Х. Ханни указал механизм возникновения таких фаз в рамках классической механики [104]. Эти фазы могут проявляться в интегрируемых механических системах, зависящих от внешних параметров. Если такую систему адиабатически перенести по замкнутому контуру в пространстве хотя бы двух параметров, то в представлении действие — угол может появиться топологическая добавка $\Delta\varphi$ к динамическому углу φ . Эту добавку называют теперь углом Ханни (см. обзоры [105, 106]). Любопытно, что хотя метод усреднения, имеющий прямое отношение к

возникновению угла Ханни, известен давно (см. например [107] и обзор [108]) этот феномен ($\Delta\varphi \neq 0$) оставался неизвестным.

Угол Ханни возникает в квазиклассическом пределе из фазы Берри для систем с конечным числом степеней свободы [109]. Известны примеры с бесконечным числом степеней свободы, когда ВКБ-приближение не приводит к нетривиальному углу Ханни [110]. Отметим, что согласованный учет влияния адиабатических внешних параметров меняет симплектическую структуру фазового пространства системы [111], что связано с неканоничностью адиабатического отображения (см. также [94, 95]). Вводится, кроме этого, неадиабатический вариант угла Ханни, который проявляется при циклической эволюции торов в представлении действие — угол [112].

Геометрические фазы как простейшие топологические инварианты нашли применение в квантовой теории поля при объяснении разного вида аномалий и при исследовании свойств вакуума КТП (см., например, [113—118]) в шрёдингеровском представлении [119].

Многочисленны проявления топологических фаз в суперсимметрической квантовой механике [92, 93] и суперсимметрической квантовой теории рассеяния [120—123].

Завершим перечисление областей физики, где нашли свое применение топологические фазы, вопросом, которым А. Дж. Р. Айтчисон начинает свой обзор [124]: «Что общее проявляется в поведении частиц со спином $1/2$ в медленно вращающемся магнитном поле [7], в экспериментах по спиновому резонансу в слабомодулированном магнитном поле [13], в ядерных квадрупольных резонансных спектрах медленно вращающихся образцов [125], при прохождении фотонов через спирально изогнутые оптические световоды [44], при классификации спектров диатомов и молекул по полужелым угловым моментам [13—15] и ротационных полос [126], в последовательности нижайших состояний систем Яна — Теллера [127], в атомах с нечетным числом электронов, находящихся в медленно вращающемся электрическом поле [128], в квантовом эффекте Холла [129], в дробном эффекте Холла [130], в дробной статистике и квантовом эффекте Холла [131], в статистике вихрей для двумерных суперполей [132]...? Что общего имеют все эти эффекты с аномалиями в киральных калибровочных полях [113—118] и со скирмеонами [133]?»

Знакомство с цитируемыми статьями позволит убедиться читателю, что во всех этих конкретных разнородных работах речь идет о проявлении эффектов топологических фаз. В целом складывается впечатление, что будущие теории, которые могли бы претендовать на общность при описании физических явлений в большом интервале энергий, должны иметь топологический характер (см. [134]).

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

¹ То есть выполнены условия адиабатической теоремы.

² Напомним, что в таком контексте адиабатичность означает сохранение квантовых чисел начального состояния на протяжении эволюции.

³ Напомним, что скалярное произведение $\langle \omega \omega' \rangle$ индуцировано из тривиального $\langle \psi \psi' \rangle$ проецированием на горизонтальное подпространство.

⁴ Отметим, что точно такое же выражение получилось бы из формул (2.81), (2.87), что показывает согласованность определений.

⁵ Каждое из этих двух утверждений эквивалентно релятивистским волновым уравнениям соответствующих безмассовых полей [37].

⁶ Здесь и далее в этом разделе в кавычках цитируются наиболее важные места из работы В. В. Владимирского [30].

⁷ Постоянная распространения собственной моды зависит от разности показателей преломления сердцевины и оболочки световода. Поэтому член $k^2/2\beta$ соответствует тем содержащим градиенты ε и μ членам, об отбрасывании которых в адиабатическом приближении не упоминалось.

тическом пределе говорилось при обсуждении уравнений (3.3).

⁸ Параметризация на сфере Пуанкаре оказывается полезной и для других Квантовомеханических задач, например, задач рассеяния в системе нескольких частиц в рамках адиабатического подхода; см., например, [65].

⁹ При этом нарушается унитарность эволюции и, строго говоря, обсуждавшаяся выше теория неприменима. Забегая вперед, отметим, что эксперименты с унитарной [57, 61] и неунитарной [54, 60] эволюциями дали одни и те же результаты, так что требование унитарности, по-видимому, не является существенным.

¹⁰ Общая теория, развитая в [28],—одна из немногих попыток обобщения фазы Берри на нелинейные эволюционные уравнения.

¹¹ Современное изложение этого вопроса на примере ферми-систем дано в [71].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Born M., Fock V.*//Zs. Phys. 1928. Bd 51. S. 165.
2. *Berry M. V.*//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1984. V. 392. P. 45; Sci. American. 1988. V. 259, No. 6. P. 26.
3. *Kostant B.*//Lect. Not. Math. 1970. V. 170. P. 87.
4. *Simon B.*//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2167.
5. *Kiritisis B.*//Commun. Math. Phys. 1988. V. 111. P. 417.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко Л. Т.* Современная геометрия.—М.: Наука, 1979.
7. *Bitter T., Dubbers D.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 251.
8. *Stepanovsky Yu. P., Zazunov L. G.*//Topological Phases in Quantum Physics/Eds B. Markovski, S. I. Vinitisky.—Singapore a. o.: World Scientific, 1989.—P. 61.
9. *Wilczek F., Zee A.*//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 2111.
10. *Fock V.*//Zs. Phys. 1928. Bd 49. S. 323.
- [11] *Arodz H., Babiuch A.* Examples of Non-Abelian Connections Induced in Adiabatic Processes.—Preprint Jagellonian Univ. TPJU-18/88.—1988.
12. *Anandan J., Stodolsky L.*//Phys. Rev. Ser. D. 1987. V. 35. P. 2597.
13. *Moody J., Shapere A., Wilczek F.*//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 893.
14. *Van Vleck J. H.*//Phys. Rev. 1929. V. 33. P. 467.
15. *Mead A., Truhlar D. G.*//J. Chem. Phys. 1979. V. 70. P. 2284.
16. *Biswas S. N.* A Realisation of Berry's Non-Abelian Gauge Field.—Preprint Inst. Theor. Phys. BUTP-89/14.—Bern, 1989.
17. *Zee A.*//Non-Abelian Gauge Structure in Nuclear Quadrupole Resonance.—Preprint NSF-ITP-88-07.—1988.
18. Монополи: Топологические вариационные методы/Под ред. М. И. Монастырского, А. Г. Сергеева.—М.: Мир, 1989.
- Goddard P., Olive D. I.*//Phys. Rep. 1978. V. 41. P. 1357.
19. *Aharonov Y., Anandan J.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1593.
20. *Markovski B. L., Dubovik V. M., Vinitisky S. I.*//[8].—P. 93.
- [21] *Sun S. P.*//J. Phys. Ser. A. 1988. V. 21. P. 1595.
22. *Herdegen A.*//Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 139. P. 109.
23. *Page D. N.*//Phys. Rev. Ser. A. 1987. V. 36. P. 3479.
24. *Wells R.*//Differential Analysis in Complex Manifolds.—Prentice Hall ed. No. 4, 1973.
25. *Bouchiat C., Gibbons G. W.*//Non-integrable Quantum Phase in the Evolution of a Spin 1-system: A Physical Consequence of the Non-trivial Topology of the Quantum State-space.—Preprint LPTENS 87/25.—1987.
26. *Aharonov Y., Anandan J.*//Phys. Rev. Ser. D. 1988. V. 38. P. 1863.
27. *Samuel J., Bhandari R.*//Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2339.
28. *Garrison J. C., Chiao R. Y.*//Ibidem. P. 165.
29. *Pancharatnam S.*//Proc. Ind. Acad. Sci. Ser. A. 1956. V. 44. P. 247; то же://Collected Work of S. Pancharatnam/Ed G. W. Series.—Oxford Univ. Press, 1975.
30. *Владимирский В. В.*//ДАН СССР, 1941. Т. 31.—С. 222.
- [31] *Дирак П. А. М.* Основы квантовой механики.—М.: Мир, 1985.
32. *Lewis H. R. (jr.)*//J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1976.
33. *Mizrahi S.*//Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 183. P. 465.
34. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика.—4-е изд.—М.: Наука, 1981.—С. 432.
35. *Bialynicki-Birula L., Bialynicki-Birula S.*//Phys. Rev. Ser. D. 1987. V. 35. P. 2383.
36. *Jordan T. F.*//J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1759.
37. *Степановский Ю. П.*//Укр. физ. ж. 1964. Т. 9. С. 1165; ТМФ. 1981. Т. 47. С. 343.
38. *Борн М., Вольф Е.* Основы оптики.—М.: Наука, 1970.
39. *Kitano M., Yabuzaki T., Ogawa T.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 523.
40. *Рытов С. М.*//ДАН СССР. 1938. Т. 28. С. 263.
- [41] *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.*//Геометрическая оптика неоднородных сред.—М.: Наука, 1980.—С. 304.

42. Varnham M. P., Birch R. D., Payne D. N.//Techn. Dig. of Intern. Conference on Integrated Optics: Optical Fiber Communications European Conference on Optical Commun.—Geneva, 1985.—P. 135.
43. Varnham M. P., Birch R. D., Payne D. N., Love J. D.//Techn. Digications of Conference on Optical Fiber Communications.—Atlanta, USA: OSA, 1986.—P. 68.
44. Chiao R. Y., Wu Y. S.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 933.
45. Tomita A., Chiao R. Y.//Ibidem. P. 937.
46. Robinson A. L.//Science, 1986. V. 234, No. 4775. P. 424.
47. McCallum M.//New Scientist. November 20, 1986. P. 22.
48. Maddox J.//Nature, London, 1986. V. 323. P. 199.
49. Haldane F. D.//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1788.
50. Segert J.//Phys. Rev. Ser. A. 1987. V. 36. P. 10.
- [51] Kugler M., Shtrikman S.//Berry's Phase, Locally Inertial Frames and Classical Analogues.—Preprint WIS-87/49/Juhne-PH.—1987 — P. 33.
52. Berry M. V.//Nature, London. 1987. V. 326, No. 6110. P. 277.
53. Chiao R. Y., Antaramian A., Ganga K. M., Jiao H., Wilkinson S. R., Nathel H.//Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 1214.
54. Bhandari R., Samuel J.//Ibidem. P. 1211.
55. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов.—М.: Мир, 1987.
56. Simon R., Mukunda N., Sudarshan E. C. G.//Pramana — J. Phys. 1989. V. 32. P. 769.
57. Jiao H., Wilkinson S. R., Chiao R. Y., Nathel H.//Phys. Rev. Ser. A., 1989. V. 39. P. 3475.
- Klyshko D. N.//Phys. Lett. 1989. V. 140. P. 19.
58. Chow W. W., Gea-Banacloche J., Pedrotti L. M., Sanders V., Scheich W., Scully M. O.//Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 61.
59. Berry M. V.//J. Mod. Opt. 1987. V. 34. P. 1401.
60. Bhandari R.//Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 133. P. 1.
- [61] Chyba T. H., Wang L. J., Mandel L., Simon R.//Opt. Lett. 1988. V. 13. P. 562.
62. Simon R., Kimble H. J., Sudarshan E. C. G.//Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 19.
63. Bhandari R.//Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 135. P. 240.
64. Ramaseshan S., Nityananda R.//Curr. Sci. 1986. V. 55. P. 1225.
65. Pack R. T., Parker G. A.//J. Chem. Phys. 1987. V. 87. P. 3888.
66. Jordan T. F.//J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 2042.
67. Bhandari R.//Phys. Lett. Ser. A. 1989. V. 138. P. 469.
68. Marker P.-D., Terhene R. W., Savage C. M.//Phys. Rev. Lett. 1964. V. 12. P. 507.
69. Chiao R. Y., Godine J.//Phys. Rev. 1969. V. 185. P. 430.
70. Kato T.//J. Phys. Soc. Japan. 1950. V. 5. P. 435.
- [71] Avron J. E., Sadun L., Segert J., Simon B.//Commun. Math. Phys. 1989. V. 124. P. 595.
72. Демков Ю. Н.//ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 195; ДАН СССР. 1966. Т. 49. С. 1157.
73. Демков Ю. Н., Ошеров В. И.//ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1589.
74. Соловьев Е. Л.//ТМФ, 1976. Т. 28. С. 115; УФН. 1989. Т. 157. С. 437.
75. Rowe D. J., Rochford P., Repka J.//J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 572.
- Толкачев Е. А., Трегубович А. Я.//ДАН СССР. 1990. Т. 34. С. 119.
76. John G.//J. Phys. Ser. A. 1988. V. 21. P. 1805.
77. Giavarini G., Onofri E.//Generalized Coherent States and Berry's Phase.—Preprint. UTF 165.—Povo, Italy, 1988.
78. Fan H. Yi., Zaidi A. R.//Can. J. Phys. 1988. V. 66. C. 978.
79. Giavarini G., Onofri E. Vector Coherent States and Non-Abelian Gauge Structures in Quantum Mechanics.—Preprint UTNF-198.—1989.
80. Abe S.//Phys. Rev. Ser. D. 1989. V. 39. P. 2327.
- [81] Бакай А. С., Степановский Ю. П. Адиабатические инварианты.—Киев: Наукова думка, 1981.
82. Dodonov V. V., Man'ko V. I.//[8].—P. 74.
83. Malkin I. A., Man'ko V. J., Trifonov D. A.//J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 576.
84. Buslaev V. S., Dmitrieva L. A.//[8].—P. 218.
85. Breuer A. P., Dietz K., Holthaus M.//Adiabatic Motion and the Structure of Quasi-energy Surfaces of Periodically Driven Quantum Systems.—Preprint BONN-AM-89-01.—1989.
86. Dusedau D.//Phys. Lett. Ser. B. 1977. V. 205. P. 312.
87. Kuratsuji H., Iida S.//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 111. P. 220; Ser. B. 1987. V. 184. P. 212; Prog. Theor. Phys. 1985. V. 77. P. 739; Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1003.
- Vorov O. K.//[8].—P. 112.
88. Yabana K., Horiuchi H.//Prog. Theor. Phys. 1986. V. 75. P. 592.
89. Iwai I.//J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 964; 1315; 1988. V. 29. P. 1325.
90. Dubovik V. M., Kadomtsev M. B., Markovski B. L., Susko A. A., Vinitsky S. I.//Proceedings of the Internatifonal Few-body Workshop. Kalinin, August 15—21.—1988.—V. 1. P. 1.

- [91] *Vinitzky S. I., Susko A. A., Markovski B. L., Kadomtsev M. B., Dubovik V. M.* // [8]. — P. 173.
- 92. *Gozzi E., Thacker W. D.* // Phys. Rev. Ser. D. 1987. V. 35. P. 2398.
- 93. *Kuratsuji H., Iida S.* // Ibidem. 1988. V. 37. P. 441.
- 94. *Ralson J. P.* // Berry's Phase and the Symplectic Character of Quantum Time Evolution. — Preprint Univ. Kansas. — 1989.
- 95. *Szezcsny J., Besiad M., Szydowski M.* // Acta Phys. Polon. Ser. B. 1989. V. 20. P. 789.
- 96. *Imbo T. D., Sudarshan E. C. G.* Inequivalent Quantizations and Fundamentally Perfect Spaces. — Preprint DOE-ER40200-102. — 1987.
- 97. *Sudarshan E. C. G., Imbo T. D., Govindarajan T. R.* // Configuration Space Topology and Quantum Internal Symmetries. — Preprint DOE-ER40200-137. — 1988.
- 98. *Bednarz B. F.* // Geometric Methods and the Gauge Structure of Berry's Phase. — Preprint DOE-ER40200-127. — 1987.
- 99. *Dabrowski L., Jadczyk A.* Quantum Statistical Holonomy. — Preprint ITCP: Report 155/88/FM. — 1988.
- 100. *Jadczyk A.* // 7th Summer Workshop on Math. Physics: Group Theoretical Methods and Physical Applications: Proceedings of 7th Summer Workshop on Mathematical Physics. Claustal, FRG/Ed. H. Doebner. — Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1988.
- [101] *Dabrowski L., Grosse H.* // On Quantum Holonomy for Mixed States. — Preprint UWThPh-36. — 1988.
- 102. *Uhlmann A.* // Rep. Math. Phys. 1986. V. 24. P. 229.
- 103. *Camlied D., Freed J. A.* // Phys. Rev. Ser. A. 1989. V. 39. P. 3238.
- 104. *Hannay J. H.* // J. Phys. Ser. A. 1986. V. 18. P. 221.
- 105. *Jackiw R.* // Comm. At. and Mol. Phys. 1988. V. 21. P. 71; Intern. Mod. Phys. Ser. A. 1988. V. 3. P. 285.
- 106. *Gozzi E., Thacker W. O.* // Proceedings of the Workshop on Skyrmions and Anomalies. Krakow, Poland/Ed. M. Jezabek. — Singapore a. o.: World Scientific, 1987.
- 107. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — 2-е изд. — М.: Наука, 1977.
- 108. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштрадт А. И.* Математические аспекты классической небесной механики. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1983. — (Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 3).
- 109. *Berry M. V.* // J. Phys. Ser. A. 1985. V. 18. P. 15.
- 110. *Giavarini G., Gozzi E., Rohrllich D., Thacker W. D.* // Phys. Rev. Ser. D. 1989. V. 39. P. 3007.
- [111] *Berry M. V., Hannay J. H.* // J. Phys. Ser. A. 1988. V. 21. P. L325.
- 112. *Kuratsuji H.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. P. 1687.
- 113. *Witten E.* // Commun. Math. Phys. 1985. V. 100. P. 187.
- 114. *Bismut J. M., Freed D. S.* // Ibidem. 1986. V. 107. P. 109.
- 115. *Itoh T., Odaka K.* // Lett. Math. Phys. 1988. V. 15. P. 297.
- 116. *Stone M., Gaitan F.* // Ann. of Phys. 1987. V. 178. P. 89.
- 117. *Niemi A. J., Semenoff G. W.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 327.
- 118. *Sonoda A.* // Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 266. P. 410.
- 119. *Floresanini R., Jackiw R.* // Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 175. P. 428; Ann. of Phys. 1987. V. 178. P. 227; Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1873; Phys. Rev. Ser. D. 1988. V. 37. P. 2206.
- 120. *Boyanovsky D., Blankenbecler R.* // Ibidem. 1984. V. 30. P. 1821.
- [121] *Andrianov A. A., Borisov N. V., Ioffe M. V.* // Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 181. P. 141.
- 122. *Borisov N. V., Muller W., Schrader R.* // Commun. Math. Phys. 1988. V. 114. P. 475.
- 123. *Borisov N. V.* // [8] — P. 130.
- 124. *Aitchison I. J. R.* // Phys. Scripta. 1988. V. 23. P. 12.
- 125. *Tycko R.* // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 2281.
- 126. *Delacretaz G., Grant E. R., Whetten R. L., Woste L., Zwanziger J. W.* // Ibidem. 1986. V. 56. P. 2598.
- 127. *Ham F. S.* // Ibidem. 1987. V. 58. P. 725.
- 128. *Mead C. A.* // Ibidem. V. 59. P. 161.
- 129. *Thouless D., Kohomoto M., Nightingale M., van den Nijs M.* // Ibidem. 1982. V. 49. P. 405.
- 130. *Semenoff G., Sodano P.* // Ibidem. 1986. V. 58. P. 1195.
- [131] *Arovas D., Schrieffer R., Wilczek F.* // Ibidem. 1984. V. 53. P. 722.
- 132. *Haldane F. D. M., Wu Y.-S.* // Ibidem. 1985. V. 55. P. 2887.
- 133. *Aitchison I. J. R.* // Acta Phys. Polon. Ser. B. 1987. V. 18. P. 207.
- 134. *Witten.* // Commun. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 353; V. 118. P. 601.