Май 1990 г. *Том 160, вып. 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.12.551.51

ОДНОЗНАЧНОСТЬ ПРЕДСКАЗАНИЙ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

С. *И. Чермянин*

(Научно-исследовательский радиофизический институт, Горький)

1. В последние годы общая теория относительности (ОТО) неоднократно подвергалась критике со стороны А. А. Логунова и его сотрудников [1—6], где, в частности, поднимался вопрос о якобы существующей в структуре ОТО неоднозначности предсказаний для гравитационных эффектов [3—6]. Хотя в общих чертах несостоятельность такой критики была уже доказана в недавних работах Я. Б. Зельдовича и Л. П. Грищука [7, 8] и В. Л. Гинзбурга [9, 10], тем не менее имеет смысл еще одно, более подробное рассмотрение этого вопроса.

Цель данной статьи — конкретно на примере явления гравитационного смещения частоты с использованием двух типов полного решения задачи Шварцшильда показать однозначность предсказаний ОТО и несостоятельность утверждений авторов релятивистской теории гравитации (РТГ).

2. Пусть источником гравитационного поля служит статическая идеальная жидкость, заполняющая пространство внутри некоторой сферы физического радиуса l_0. Для простоты будем считать жидкость однородной, т. е. собственная плотность массы $\mu = \mathrm{const}$. Тензор энергии-импульса для данной среды, где отсутствует макроскопическое движение ($u^i = 0$), запишется в форме[1]

$$T^{\alpha}_{\beta} = (\mu + P)\, u_{\beta} u^{\alpha} - P\delta^{\alpha}_{\beta} = (\mu + P)\,\delta_{\alpha 4}\delta^{\beta}_{4} - P\delta^{\alpha}_{\beta}; \tag{1}$$

P — давление среды, $\delta^{\alpha}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ — четырехмерный символ Кронекера[2].

Поместим центр источника в начало координат и будем искать множество полных решений в общем ортогональном виде

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu}\mathrm{d}t^2 - e^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - \eta^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2), \tag{2}$$

где ν, λ, η — функции только радиальной координаты r и такие, что $\nu \to 0$, $\lambda \to 0$ и $\eta \to r$, когда $r \to \infty$.

Уравнения Эйнштейна

$$R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}R = \varkappa T^{\alpha}_{\beta} \tag{3}$$

после подстановки в них метрического тензора из квадратичной формы (2) и тензора энергии-импульса (1) удовлетворяются либо тождественно, либо в силу трех независимых уравнений

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'\eta'}{\eta}-\frac{\eta'^2}{\eta^2}-2\frac{\eta''}{\eta}\right)+\frac{1}{\eta^2}=\varkappa\mu, \tag{4а}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'\eta'}{\eta}+\frac{\eta'^2}{\eta^2}\right)-\frac{1}{\eta^2}=\varkappa P, \tag{4б}$$

$$e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{2}+2\frac{\nu'\eta'}{\eta}\right)=\varkappa(\mu+P), \tag{4в}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r.

Если граница источника предполагается свободной, то на этой поверхности давление равно нулю, а плотность массы жидкости, вообще говоря, имеет разрыв непрерывности. С учетом условий сшивания на границе источника для компонент метрики $g_{\alpha\beta}$ множество полных решений для всей области пространства запишется в форме

$$\eta'^2=e^{\lambda}\left(1-\frac{\alpha}{\eta}\right), \tag{5а}$$

$$e^{\nu}=1-\frac{\alpha}{\eta},\quad \eta\geqslant\eta_0, \tag{5б}$$

и

$$\eta'^2=e^{\lambda}\left(1-\frac{\eta^2}{A^2}\right), \tag{6а}$$

$$e^{\nu}=\frac{1}{4}\left[3\left(1-\frac{\eta_0^2}{A^2}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{\eta^2}{A^2}\right)^{1/2}\right],\quad \eta\leqslant\eta_0, \tag{6б}$$

где

$$\frac{1}{A^2}=\frac{\varkappa\mu}{3}=\frac{8\pi}{3}\sigma\mu,\quad \alpha=\varkappa\int_0^{\eta_0}\mu\eta^2 d\eta=2\sigma M,$$

M — гравитационная масса источника, η_0 — значение функции η на границе источника. Выражение для давления будет таким:

$$P=\mu\frac{[1-(\eta_0^2/A^2)]^{1/2}-[1-(\eta^2/A^2)]^{1/2}}{[1-(\eta^2/A^2)]^{1/2}-3[1-(\eta_0^2/A^2)]^{1/2}}. \tag{7}$$

Давление внутри жидкости имеет здесь отрицательный знак, однако это несущественно для данной модельной задачи.

Возьмем дифференциальное условие $dr=d\eta$, фиксирующее тип решения. Метрика этого решения запишется в виде

$$ds^2=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)dt^2-\frac{dr^2}{1-(\alpha/r)}-r^2d\Omega^2,\quad r\geqslant r_0, \tag{8а}$$

где $d\Omega^2=d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2$, и

$$ds^2=\frac{1}{4}\left[3\left(1-\frac{r_0^2}{A^2}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{r^2}{A^2}\right)^{1/2}\right]^2dt^2-\frac{dr^2}{1-(r^2/A^2)}-r^2d\Omega^2,\quad r\leqslant r_0, \tag{8б}$$

где r_0 — значение координаты на границе источника. Из множества решений (5) — (6) можно выделить другой тип решения, если для этого положить $dr^*/r^*=e^{\lambda/2}d\eta/\eta$[3]. Тогда метрика приобретает форму

$$ds^2=\left[\frac{1-(\alpha/4r^*)}{1+(\alpha/4r^*)}\right]^2dt^2-\left(1+\frac{\alpha}{4r^*}\right)^4(dr^{*2}+r^{*2}d\Omega^2),\quad r^*\geqslant r_0^*, \tag{9а}$$

и

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left(3\,\frac{c^2 - r_0^{*2}}{c^2 + r_0^{*2}} - \frac{c^2 - r^{*2}}{c^2 + r^{*2}}\right)^2 dt^2 -$$
$$- \frac{4c^2A^2}{(c^2 + r^{*2})^2}\,(dr^{*2} + r^{*2}d\Omega^2),\quad r^* \leqslant r_0^*, \tag{9б}$$

где c — произвольная константа, а r_0^* — значение координаты на границе источника. На поверхности источника имеем соотношение

$$\left(1 + \frac{\alpha}{4r_0^*}\right)^2 = \frac{2cA}{c^2 + r_0^{*2}}\,. \tag{10}$$

С другой стороны,

$$\alpha = \frac{r_0^3}{A^2} = \frac{r_0^{*3}}{A^2}\,\frac{8c^3A^3}{(c^2 + r_0^{*2})^3}\,. \tag{11}$$

Тогда из соотношения

$$4r_0^*\left[\left(\frac{2cA}{c^2 + r_0^{*2}}\right)^{1/2} - 1\right] = \frac{r_0^{*3}}{A^2}\,\frac{8c^3A^3}{(c^2 + r_0^{*2})^3} \tag{12}$$

мы можем найти постоянную c. Связь координат решения (8) с координатами решения (9) внутри источника [11] такова:

$$r^* = r\,\frac{c}{A\,\{1 + [1 - (r^2/A^2)]^{1/2}\}},\quad r = r^*\,\frac{2cA}{c^2 + r^{*2}}\,, \tag{13а}$$

а вне источника

$$r^* = \frac{1}{2}\left[(r^2 - \alpha r)^{1/2} + r - \frac{\alpha}{2}\right],\quad r = r^*\left(1 + \frac{\alpha}{4r^*}\right)^2. \tag{13б}$$

3. Полученные выражения (8) — (9) являются различными решениями уравнений Эйнштейна (3) для сферически-симметричного источника (идеальной однородной жидкости). Различие этих решений заключается в задании различных дифференциальных условий, определяющих $\eta(r)$. Однако в общей теории относительности эти решения совершенно равноправны! Они в обычной терминологии являются одним и тем же решением, записанным лишь в двух разных системах координат. Именно вследствие этого рассматриваемые решения дают одну и ту же величину в предсказании гравитационных эффектов ОТО. Покажем это на простейшем примере — на примере гравитационного смещения частоты во внешнем поле нашего источника.

Пусть наблюдатель и передатчик электромагнитного излучения частоты ω размещены на одной прямой, проходящей через сферический центр нашей жидкости. Положим, что передатчик установлен на сфере этого источника в координатной точке r_0 (r_0^*), а наблюдатель — на расстоянии l от источника в координатной точке r (r^*). Тогда относительное гравитационное смещение частоты для решений (8), (9) запишется соответственно в виде формул

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \left(\frac{g_{00}\,(r_0)}{g_{00}\,(r)}\right)^{1/2} - 1, \tag{14а}$$

$$\frac{\Delta^*\omega}{\omega} = \left(\frac{g_{00}^*\,(r_0^*)}{g_{00}^*\,(r^*)}\right)^{1/2} - 1, \tag{14б}$$

где

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{\alpha}{r}, \quad g^*_{00}(r^*) = \left[\frac{1-(\alpha/4r^*)}{1+(\alpha/4r^*)}\right]^2.$$

Для того чтобы воспользоваться этими формулами в теоретическом предсказании гравитационного смещения, необходимо знание координатных значений $(r_0, r^*_0$ и $r, r^*)$ в точках расположения измерительной аппаратуры. По физически измеримым величинам l_0, l мы можем найти значения этих координат, если будем основываться на интегральных соотношениях:

$$l_0 = \int\limits_0^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{[1-(r^2/A^2)]^{1/2}} = \int\limits_0^{r^*_0} \frac{2cA}{c^2 + r^{*2}}\,\mathrm{d}r^* \qquad (15)$$

и

$$l = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{[1-(\alpha/r)]^{1/2}} = \int\limits_{r^*_0}^{r^*} \left(1 + \frac{\alpha}{4r^*}\right)^2 \mathrm{d}r^*. \qquad (16)$$

Координаты r_0 и r^*_0 на границе источника имеют разные численные значения в отличие от того, что предлагается считать в работах [3—6]. Их связь запишется в форме

$$r_0 = r^*_0 \left(1 + \frac{\alpha}{4r^*_0}\right)^2. \qquad (17)$$

Такое соотношение выражает собой очевидное требование равенства площадей поверхности пограничной сферы в обеих формах решения, или, другими словами, чтобы было одинаковым в этих решениях физическое расстояние от центра до пограничной сферы. Координаты r, r^*, фиксирующие точку расположения наблюдателя, будут связаны между собой аналогичным образом. Тогда, учитывая эти обстоятельства, мы получаем равенства

$$g_{00}(r_0) = g^*_{00}(r^*_0), \quad g_{00}(r) = g^*_{00}(r^*), \qquad (18)$$

из которых следует, что относительное гравитационное смещение в заданных пространственных точках измерения для разных решений будет иметь тем не менее одно определенное значение

$$\Delta\omega = \Delta^*\omega. \qquad (19)$$

4. Итак, мы приходим к выводу, что математически строгое рассмотрение задачи Шварцшильда приводит вопреки утверждениям авторов РТГ к равноправию решений (8), (9) относительно их предсказаний гравитационного смещения частоты. Однако это можно утверждать и по отношению к другим гравитационным эффектам. Общий координатный принцип в ОТО выражает собой не только тривиальную возможность ковариантной записи математических соотношений, что имеет место уже в безгравитационной физике, но и равноправность самих решений уравнений Эйнштейна в каждой конкретной физической ситуации. Выбор арифметизации пространства здесь един для этих решений, тем не менее координаты разных решений в любой пространственной точке (кроме центра источника) будут давать разные величины. И эти величины различаются ровно настолько, насколько нужно для устранения какой-либо неоднозначности в предсказаниях ОТО! Только в центре источника имеем совпадение значений этих координат $r = r^* = 0$.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В. С. Троицкому и С. А. Жевакину за ценные замечания, возникшие в ходе обсуждения статьи.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

[1] Здесь всюду для скорости света принято $c_0=1$.

[2] Для выполнения условия статичности рассматриваемого источника параметры μ, P, l_0 принадлежат здесь области значений обычных небесных тел Солнечной системы, например Земли.

[3] В работе [3] такому типу при рассмотрении только внешнего решения соответствует выбор коэффициентов $N(r)=0$, $c(r)=r^{*2}[1+(\alpha/4r^*)]^4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов А. А., Логунов А. А., Мествиришвили М. А*// ТМиФ. 1984. Т. 61. С. 323.
2. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.*//Ibidem. С. 327.
3. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Чугреев Ю. В.*//ТМиФ. 1986. Т. 69. С. 328.
4. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Мествиришвили М. А.*//ТМиФ. 1987. Т. 73. С. 163.
5. —»—»—//УФН. 1988. Т. 155. С. 369.
6. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М.*//ТМиФ. 1988. Т. 76. С. 163.
7. *Зельдович Я. Б., Грищук Л. П.*//УФН. **1986. Т. 149. С. 695.**
8. —»—»—//УФН. 1988. Т. 155. С. 517.
9. *Гинзбург В. Л.*//Наука и жизнь. 1987. № 4. С. 41.
10. —»—»—//Ibidem. 1988. № 6. С. 114,
11. *Мёллер К.* Теория относительности.— М.: Атомиздат, 1975.