

538.9

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

С. А. Гредескул, В. Д. Фрейлихер

(Физико-технический институт низких температур АН УССР,
Институт радиофизики и электроники АН УССР, Харьков)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	239
2. Прохождение волны через случайный слой	244
3. Точечный источник в случайно-стратифицированном слое	249
4. Флуктуационный волновод	252
5. Квазигомогенные волны	255
Примечания к тексту	261
Список литературы	261

1. Введение. Важной и актуальной проблемой теории распространения волн в случайных средах и квантовой теории неупорядоченных конденсированных систем является последовательный учет интерференции многократно рассеянных полей. В процессе ее изучения естественным образом возникло понятие локализации, которое отражает самые общие свойства неупорядоченных систем и является следствием как волновой природы рассеянных полей, так и случайного характера рассеивающих сред. Более тридцати лет назад вышла основополагающая работа Ф. Андерсона [1], в которой были приведены аргументы в пользу того, что все состояния в некоторой трехмерной неупорядоченной системе при достаточно высокой случайности являются локализованными. В последующие десятилетия концепция локализации стала основной в физике неупорядоченных конденсированных систем. Появились такие понятия, как андерсоновский диэлектрик, переход Андерсона, масштабная теория локализации, слабая локализация, уверенно вошедшие сейчас в монографии [2—4], учебники [5, 6] и физические энциклопедии [7—8].

Интерес к локализации всевозможных типов волн и возбуждений в средах, не обладающих пространственной периодичностью или однородностью, в последнее время резко возрос. Интенсивно исследуется локализация звуковых волн в непрерывной среде [9—15], электромагнитных волн в твердых телах и плазме [14, 16], гравитационных волн в мелководном канале с шероховатым дном [17—19], третьего и четвертого звука в гелиевой пленке на случайно-неоднородной подложке [20, 21], поверхностных волн в металлах [22—24] и т. п. Интерес к прохождению коротких нерегулярных импульсов через однородные среды стимулировал изучение локализационных свойств решений уравнений типа Дирака [25—27], описывающих свойства одночастичных возбуждений в сверхпроводниках и полупроводниках [28, 29], а также прохождение волны через многослойную структуру типа используемой в рентгеновских зеркалах [30].

В литературе по распространению волн термин «локализация» появился сравнительно недавно и еще не стал столь привычным, как в теории неупорядоченных конденсированных систем. Однако изучение связанных с локализацией явлений в радиофизике началось еще в пятидесятые годы. Оно было стимулировано стремлением определить пределы применимости уравнения переноса излучения и по возможности выйти за эти пределы. В конце 50-х годов в работах [31, 32] было впервые показано, что средний коэффициент прохождения плоской волны через одномерно-неупорядоченный слой экспоненциально убывает с его толщиной. В дальнейшем исследования прохождения волн через одномерную случайную среду продолжались с нарастающей интенсивностью, что отражено в монографиях [33—35], однако концепция локализации в этих исследованиях до недавнего времени практически не использовалась. Связано это, по-видимому, с тем, что основные утверждения теории локализации сформулированы и доказаны для закрытых систем, на границах которых поставлены самосопряженные граничные условия (см., например, [4]). В радиофизических и акустических задачах чаще приходится иметь дело с открытыми системами, т. е. с несамосопряженными граничными условиями типа условия излучения на бесконечности. Спектральные свойства таких систем, локализация и сопутствующие ей явления, возникающие при распространении волн в случайных средах, параметры которых зависят только от одной координаты, изучены в настоящей работе (см. также [36, 37]).

Слоистые «одномерные» структуры широко используются в оптике, радиофизике и акустике в качестве моделей среды распространения [38]. Необходимость в их теоретическом изучении возникает, в частности, при описании процессов распространения волн в природных средах (атмосфера, ионосфера, океан) в рамках двухмасштабной модели [39, 40]. При этом пространственный спектр показателя преломления $n(\mathbf{R})$ или диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{R})$ разделяется на две статистически независимые области, влияние которых можно учитывать последовательно и в определенном смысле независимо. Одна — турбулентная, мелкомасштабная — может быть учтена, например, с помощью приближения марковского процесса, применимого для не очень протяженных неоднородностей [33]. Другая, крупномасштабная, является, как правило, сильно анизотропной (вследствие наличия границы раздела), что позволяет в ряде случаев пренебречь ее изменением в горизонтальной плоскости x, y и приближенно описывать функцией одной переменной z . В этом случае решение одномерной задачи является необходимым промежуточным этапом в процедуре полного учета реальной зависимости $\epsilon(\mathbf{R})$.

Будем исходить из скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \epsilon(\mathbf{R}) \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \quad (1.1)$$

в котором диэлектрическая проницаемость ϵ имеет вид

$$\epsilon(\mathbf{R}) = \epsilon_0 + \delta\epsilon(z), \quad \mathbf{R} = (\rho, z); \quad (1.2)$$

здесь $\delta\epsilon(z)$ — случайная функция координаты z с нулевым средним значением. Выделяя слагаемое

$$\epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \equiv E_0,$$

переходя к фурье-компонентам поля по координатам ρ :

$$u(\mathbf{R}) = (2\pi)^{-2} \int e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\rho}} \tilde{u}(\mathbf{x}, z) d\mathbf{x},$$

и, полагая

$$E_0 - \kappa^2 = E, \quad -E_0 \frac{\delta \varepsilon(z)}{\varepsilon_0} = v(z), \quad \tilde{u}(\kappa, z) = \psi(z),$$

приходим к одномерному уравнению Шрёдингера

$$-\psi'' + v(z)\psi = E\psi. \quad (1.3)$$

Свойства этого уравнения в случае, когда $v(z)$, т. е. $\varepsilon(z)$, обладает свойствами пространственной однородности в среднем и ослабления корреляций в далеких точках, подробно изучены, что позволяет нам в полной мере воспользоваться известными в теории неупорядоченных конденсированных систем результатами (см., например, [4]). Первым из них является самоусредняемость удельных экстенсивных физических величин (плотности состояний, плотности свободной энергии, декремента коэффициента прохождения одномерно-неупорядоченного случайного слоя и т. п.). Наиболее существенным свойством самоусредняющихся величин является совпадение в бесконечной системе с вероятностью единица их значений на отдельной реализации и средних значений. Это придает вычисляемым средним смысл реально наблюдаемых величин.

Достоверность самоусредняющихся величин имеет место в макроскопическом пределе $V \rightarrow \infty$. Для каждой такой величины f_V в соответствующей области параметров имеется свое характерное значение объема V_f , начиная с которого распределение величины f_V является гауссовым с не зависящим от V средним значением $\langle f_V \rangle$ и дисперсией $\langle f_V^2 \rangle - \langle f_V \rangle^2 \sim V_f / V$. Для систем, меньших чем V_f размеров (хотя и существенно превышающих микроскопические), величина f_V является случайной и чувствует детали отдельной реализации — в этом случае система называется мезоскопической, а флуктуации физической величины — мезоскопическими флуктуациями [41—44].

В теории распространения волн в случайных средах мы, как правило, имеем дело с несамоусредняющимися величинами, для которых система любого объема всегда мезоскопична и поэтому их средние значения не информативны для описания отдельных реализаций. Придание этим средним физического смысла и сравнение их с результатами измерений (проводимых, как правило, на конкретных реализациях) требует специальной постановки эксперимента и специальных методов обработки. Один из них предполагает измерение наблюдаемой величины в течение некоторого промежутка времени и сопоставление среднего по времени вычисляемому среднему по ансамблю. В натуральных радиофизических измерениях такая процедура является довольно естественной и просто реализуемой, так как нужное изменение обеспечивается эволюцией во времени параметров реальных сред (например, показателя преломления атмосферы [45] или формы морской поверхности [46]).

Другая возможность обработки появляется в случае, когда результат наблюдения зависит от каких-либо дополнительных параметров (частоты, параметров приемно-передающих устройств и т. д.). Это позволяет сопоставлять средним по ансамблю средние по одному или нескольким параметрам. Интервал усреднения должен быть достаточно велик по сравнению с соответствующим радиусом корреляции, но так, чтобы в пределах этого интервала среднее по ансамблю практически не менялось [47, 48]. Например, при исследовании шероховатых поверхностей твердых тел методом светорассеяния усредняющим параметром является апертура светового пучка, т. е. площадь освещаемого участка поверхности. Если она достаточно велика, усредненная индикатриса рассеяния получается уже от одного образца [49—52].

Однако для физических величин f_V с растущими при увеличении объема системы относительными флуктуациями такая процедура ока-

зывается неприемлемой. Их средние значения $\langle f_V \rangle$ существенно отличаются от значений на типичных реализациях, так как формируются маловероятными репрезентативными реализациями и являются малоинформативными. В таком случае дополнительную информацию о поведении случайной функции f_V на типичных (наиболее вероятных) реализациях можно извлечь, изучая ее зависимость от самоусредняющихся величин. Действительно, если f_V удастся выразить через некоторую самоусредняющуюся величину γ_V и объем, $f_V = f(\gamma_V, V)$, то поскольку при $V \rightarrow \infty$ γ_V выходит на неслучайный предел

$$\gamma = \lim_{V \rightarrow \infty} \gamma_V,$$

функция $f(\gamma, V) (\neq \langle f(\gamma_V, V) \rangle)$ при больших V характеризует (по крайней мере качественно) поведение f_V на типичных реализациях. Такой подход будет применен ниже при анализе коэффициента отражения волны от неупорядоченного слоя, интенсивности волны, проходящей через него (п. 2), распределения энергетических потоков от точечного источника в случайно-слоистой среде (см. п. 4).

Рассмотрим решение $\Psi(z)$ уравнения (1.3), удовлетворяющее бесстоковому (самосопряженному) граничному условию, например, при $z=0$, вида

$$\Psi(0) + a\Psi'(0) = 0, \quad \text{Im} a = 0. \quad (1.4)$$

Коэффициент отражения r_- волны с энергией $E=k^2$, падающей на такую границу справа, равен

$$r_- = \frac{ika - 1}{ika + 1} \quad (1.5)$$

и соответствует идеальному отражению $|r_-|=1$. Такое решение может быть выбрано вещественным и параметризовано формулами

$$\Psi(z) = e^{\xi} \sin \varphi, \quad \Psi'(z) = k e^{\xi} \cos \varphi. \quad (1.6)$$

В рассматриваемом случае, когда $v(z)$ обладает свойствами пространственной однородности в среднем и ослабления корреляций, отношение $\xi(z)/z$ при $|z| \rightarrow \infty$ с вероятностью единица стремится к неслучайному пределу, т. е. самоусредняется

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\xi(z)}{z} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\xi(z)}{z} \right\rangle > 0. \quad (1.7)$$

Именно это отношение и выбирается в дальнейшем в качестве величины $\gamma(z)$ (координата z играет роль объема):

$$\gamma(z) = \frac{\xi(z)}{z}.$$

Предельное значение (1.7) $\gamma(z)$ связано с длиной локализации $l(k^2)$ состояния с энергией k^2 в бесконечной неупорядоченной системе простым соотношением

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \gamma(z) = \frac{1}{2l(k^2)}, \quad (1.8)$$

а соответствующее состояние экспоненциально локализовано вблизи некоторого центра локализации. На языке распространения это означает, что, например, в волноводе, образованном двумя идеально отражающими плоскостями $z=0$ и $z=L$, случайная стратификация диэлектрической проницаемости приведет при достаточно большом L к радикальной перестройке пространственного распределения поля $\Psi_n(z)$ волновых

мод в поперечном сечении. В отличие от однородного случая, где это поле равномерно осциллирует ($\psi_n \sim \sin(n\pi z/L)$, n — номер мода), в нерегулярном волноводе огибающие нормальных волн экспоненциально убывают по обе стороны от случайно расположенных центров локализации z_n , $|\psi_n(z)|^2 + |\psi'_n(z)|^2 \sim \exp(-|z - z_n|/l_n)$

В предельном случае, когда радиус корреляции r_c потенциала $v(z)$ мал по сравнению с длиной волны,

$$r_c \ll k^{-1}, \quad (1.9)$$

потенциал можно считать дельта-коррелированным

$$B(z) = \langle v(z)v(0) \rangle \approx 2D\delta(z), \quad D \sim B(0)r_c, \quad (1.10)$$

и длина локализации приобретает вид

$$l(k^2) \approx \frac{2k^2}{D}, \quad k^2 \gg D^{2/3}. \quad (1.11)$$

Если к тому же выполнено неравенство

$$r_c \ll D^{-1/3}, \quad (1.12)$$

то при

$$|E| \ll r_c^{-2} \quad (1.13)$$

потенциал $v(z)$ становится гауссовским. Длина локализации ведет себя следующим образом:

$$\begin{aligned} l(E) &\approx \frac{2E}{D}, & D^{2/3} \ll E \ll r_c^{-2}, \\ &\approx D^{-1/3}, & |E| \ll D^{2/3}, \\ &\approx \frac{1}{2}|E|^{-1/2}, & D^{2/3} \ll -E \ll r_c^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Используя стандартный метод усреднения по быстрым переменным [4, 34], в области высоких энергий

$$E = k^2 \gg D^{2/3} \quad (1.15)$$

можно получить замкнутое уравнение Фоккера — Планка для плотности вероятностей $p(\gamma, z)$ величины $\gamma(z)$, которая оказывается распределенной по Гауссу со средним значением (1.8) и дисперсией, обратно пропорциональной «объему» z — поведение типичное для самоусредняющихся величин в пределе бесконечно большого объема. Средние значения величин вида $\exp(\alpha\xi)$ ведут себя следующим образом:

$$\langle e^{\alpha\xi} \rangle = \langle e^{\alpha z \gamma} \rangle = \exp \left[\frac{\alpha(\alpha+2)}{4} \frac{z}{l} \right]. \quad (1.16)$$

Видно, что при $\alpha \in [-2, 0]$ среднее $\langle e^{\alpha\xi} \rangle$ экспоненциально растет, несмотря на экспоненциальное убывание величины $e^{\alpha\xi}$ на каждой реализации (т. е. с вероятностью единица). Такое поведение характерно для экспоненциальных величин и означает, что вклад в среднее дают не типичные, а, напротив, весьма маловероятные репрезентативные реализации. Для наблюдения такого среднего на эксперименте необходим экспоненциально богатый ансамбль реализации и лишь в этом случае оно является сколько-нибудь информативным. Величины вида $e^{\alpha\xi}$ весьма сильно флуктуируют: их относительная флуктуация пропорциональна $[\exp(\alpha^2 z / 4l) - 1]^{1/2}$ и не растёт экспоненциально лишь в тривиальном случае $\alpha = 0$.

Некоторые следствия факта экспоненциального роста (1.7) хорошо известны в статистической радиофизике и составляют явление стохастического параметрического резонанса (см. [34, 35]). В самом деле, например, формулы [1.21] гл. 6 из [34] демонстрируют экспоненциальный рост средних значений квадратичных комбинаций решений уравнения (1.3) с инкрементом, в точности соответствующим формулам (1.16) при $\alpha = 2$ и (1.11), и получены именно при выполнении условий (1.12).

Все изложенные выше результаты полностью переносятся на случай, когда уравнение (1.3) получено из уравнения Гельмгольца в трехмерной случайно-слоистой среде. При этом коэффициент D в формулах (1.10)–(1.12) по порядку величины равен

$$D \sim \lambda_0^{-4} r_c \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2, \quad (1.17)$$

где λ_0 — деленная на 2π длина волны в среде без флуктуаций, а σ_ε^2 — дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon(z)$. В случае малых флуктуаций $\sigma_\varepsilon \ll \varepsilon_0$ для замены потенциала гауссовским белым шумом достаточно выполнения условия $r_c \ll \lambda_0$, а область высоких энергий (коротких волн) ограничивается неравенством

$$\lambda \ll \lambda_0 \left(\frac{r_c}{\lambda_0} \right)^{-1/3} \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-2/3}, \quad \lambda \equiv k^{-1}. \quad (1.18)$$

В случае одномерного уравнения Гельмгольца спектральный параметр фигурирует в потенциале $v(z) = -k^2 \delta\varepsilon(z)/\varepsilon_0$, и в формулах (1.17), (1.18) следует отождествить λ и λ_0 (k и $E_0^{1/2}$). Тогда в длинноволновом пределе $\lambda \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow 0$) условия, позволяющие заменить потенциал гауссовским белым шумом и считать энергию k^2 высокой, удовлетворяются автоматически, а выражение (1.11) для длины локализации приобретает вид

$$l(k^2) = \frac{2}{k^2 r_c} \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2.$$

Отсюда видно, что в пределе бесконечно длинных волн состояния де-локализуются (случайная функция $v(z)$ выпадает из динамического уравнения). Этот результат с помощью иных рассуждений и непосредственных вычислений получался многими авторами для близких к описанной непрерывных [11, 53, 54] и дискретных [55, 56] моделей.

2. Прохождение волны через случайный слой. Напомним сначала известные результаты одномерной задачи рассеяния для уравнения (1.3), в которой на неупорядоченный сегмент $[0, L]$ справа падает монохроматическая волна единичной амплитуды с волновым числом k (подробности см. в [4, 34]). Всюду ниже речь идет о достаточно длинном сегменте, $L \gg l(k^2)$. Прозрачность (квадрат модуля коэффициента прохождения) сегмента можно представить в виде [57]⁽¹⁾

$$|t(L)|^2 = 1 - |r(L)|^2 = 4(2 + e^{2\xi_c(L)} + e^{2\xi_s(L)})^{-1}, \quad (2.1)$$

где функции $\xi_c(z)$ и $\xi_s(z)$ определяются формулами (1.6) и граничными условиями

$$\varphi_c(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_s(0) = 0, \quad \xi_{c,s} = 0.$$

Поскольку на каждой реализации $\xi(z)$ в основном линейно растет (1.7), (1.8), прозрачность на типичной реализации экспоненциально убывает с декрементом, равным обратной длине локализации:

$$-L^{-1} \ln |t(L)|^2 \sim l^{-1}, \quad L \gg l, \quad (2.2)$$

а квадрат модуля коэффициента отражения на типичной реализации экспоненциально мало отличается от единицы.

Естественно ожидать, что средняя прозрачность также экспоненциально убывает с длиной сегмента. В данном случае это действительно так, хотя, как отмечалось в п. 1, убывание на реализации, вообще говоря, не означает убывания среднего значения. Декремент средней прозрачности

$$\gamma_T = -\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \ln \langle |t(L)|^2 \rangle$$

существует [58] и не превышает декремента прохождения на реализации $\bar{\gamma}$:

$$\gamma_T \leq \bar{\gamma} = l^{-1}$$

(физически это очевидно в силу маловероятности нетипичных реализации и ограниченности прозрачности $|t|^2 \leq 1$). В простейшем случае уравнения (1.3) с потенциалом (1.10) в квазиклассической области (1.15) средняя прозрачность равна [59]

$$\langle |t(L)|^2 \rangle \approx \frac{\pi^{5/2}}{2} \left(\frac{L}{l} \right)^{-3/2} \exp \left(-\frac{L}{4l} \right), \quad (2.3)$$

так что ⁽²⁾

$$\gamma_T = (4l)^{-1} = \frac{1}{4} \bar{\gamma}. \quad (2.4)$$

Вклад в среднюю прозрачность вносят экспоненциально маловероятные реализации с $\xi_{c,s}(L) \approx 0$ на которых прозрачность почти полная $|t(L)|^2 \approx 1$, т.е. именно они являются репрезентативными для $\langle |t(L)|^2 \rangle$.

Пусть теперь в точку z_0 внутри неупорядоченного сегмента $[0, L]$, граница $z=0$ которого является идеально отражающей с $r=1$, помещен точечный источник излучения с частотой ω . Поле такого источника, совпадающее с функцией Грина $g(z, z_0; E)$

$$\left(E + \frac{d^2}{dz^2} - v(z) \right) g(z, z_0; E) = \delta(z - z_0)$$

уравнения (1.3), можно выразить в терминах функций $\xi(z)$ и $\varphi(z)$ (1.6). Плотность потока излучения j равна

$$j = 2 \operatorname{Im} (g^* g') = \frac{2}{E^{1/2}} \sin^2 \varphi(z_0) \cdot \exp [-2(\xi(L) - \xi(z_0))]. \quad (2.5)$$

В простейшем случае $z_0=0$, $\varphi_c(0)=\pi/2$, $\xi_c(0)=0$, выражение для плотности потока упрощается

$$j = \frac{2}{E^{1/2}} e^{-2\xi_c(L)}. \quad (2.6)$$

Эта величина также имеет структуру $e^{\alpha \xi}$ с критическим в смысле (1.16) значением $\alpha = -2$. Другими словами, на типичной реализации, где

$$\gamma(L) = \frac{\xi(L)}{L} \approx \frac{1}{2l},$$

плотность потока экспоненциально мала, $j \sim \exp(-L/l)$, в то время как ее среднее значение формируется на маловероятных реализациях с $\gamma(L) \approx -1/2l$ и равно $2/E^{1/2}$.

Хотя средняя прозрачность экспоненциально убывает с длиной неупорядоченного сегмента, другие физические величины, выражающиеся через интеграл от нее по спектру, могут совершенно иначе зависеть от L .

Примером такой величины является прозрачность $\mathcal{T}$ сегмента для волнового пакета с огибающей $p(k)$:

$$\mathcal{T} = \int |t(L, k^2)|^2 p(k) dk.$$

Если, например,

$$p(k) = (2\eta)^{-1} \operatorname{sech}^2 \frac{k - k_0}{\eta},$$

то при выполнении неравенств

$$(DL)^{1/2} \gg \eta \gg L^{-1}, \quad 1 - \frac{\bar{k}}{k_0} \gg \left[\frac{\eta}{(DL)^{1/2}} \right]^{1/3}, \quad \bar{k} = \frac{1}{l^2} (\eta DL)^{1/3}$$

эта прозрачность равна

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} \left(\frac{\eta^2}{DL} \right)^{1/3} \exp \left[\frac{2k_0}{\eta} - \frac{3}{2} \left(\frac{DL}{\eta} \right)^{1/3} \right]$$

и убывает с длиной сегмента существенно медленнее, чем прозрачность для монохроматической волны (2.3)⁽³⁾.

Как было отмечено, средняя прозрачность (2.3) формируется маловероятными почти прозрачными реализациями. Для того чтобы понять механизмы их возникновения, а также свойства соответствующих состояний рассеяния, необходимо рассмотреть явление резонансного прохождения.

Пусть R — коэффициент отражения неупорядоченного сегмента. Назовем сегмент резонансно прозрачным, если $1 - |R|$ имеет порядок единицы (а не $e^{-L/l}$, как на типичной реализации). Случай $R=0$ соответствует идеальной прозрачности. Вещественная и мнимая части Δ (и ϕ) (где $R = \exp(-\Delta + i\phi)$) логарифма коэффициента отражения удовлетворяют системе уравнений (см. [4, 34])

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{v(z)}{k} \operatorname{sh} \Delta \cdot \sin \phi, \\ \phi' &= 2k - \frac{v(z)}{k} (1 + \operatorname{ch} \Delta \cdot \cos \phi) \end{aligned} \quad (2.7)$$

и начальному условию $\Delta(0) = +\infty$. На типичной реализации согласно (2.2) имеем⁽⁴⁾

$$\Delta(L) \sim e^{-L/l}.$$

Представим неупорядоченный сегмент, состоящим из двух полусегментов, например, $[0, z_0]$ и $[z_0, L]$, и обозначим коэффициенты отражения от первого из них при падении волны слева (справа) через $r_1(r_-)$, от второго — соответственно $r_+(r_2)$. Тогда коэффициент отражения от сегмента в целом при падении волны, например, слева (R_+), равен [36]

$$R_+ = r_1 \frac{1 - (r_+/r_-^*)}{1 - r_+ r_-}. \quad (2.8)$$

(Коэффициент R_- получается перестановкой индексов $- \leftrightarrow +$, $1 \leftrightarrow 2$.)

Введем модули $\rho_{\pm} = e^{-\Delta_{\pm}}$ и фазы $\phi_{\pm}$ коэффициентов отражения

$r_{\pm} = \rho_{\pm} e^{i\phi_{\pm}}$. Тогда

$$|R_{\pm}| = \left| \frac{\rho_- - \rho_+ \exp[i(\phi_+ + \phi_-)]}{1 - \rho_- \rho_+ \exp[i(\phi_+ + \phi_-)]} \right|. \quad (2.9)$$

На типичных реализациях потенциала для каждого из полусегментов $\rho_{\pm} \approx 1$. Если при этом $\phi_+ + \phi_- \neq 2\pi n$, то числитель и знаменатель в (2.9) с экспоненциальной точностью совпадают и $|R_{\pm}| \approx 1$. Если же $\phi_+ + \phi_- =$

$= 2\pi n$, то тогда

$$|R_{\pm}| \approx \left| \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{\Delta_+ + \Delta_-} \right|. \quad (2.10)$$

С вероятностью, близкой к единице, Δ_+ и Δ_- — две экспоненциально малые величины, из которых одна с той же вероятностью экспоненциально больше другой и поэтому $|R_{\pm}| \approx 1$. Наконец, если реализация на одном из полусегментов оказалась маловероятной с $1 - |\rho| \sim 1$, опять-таки, как следует из формул (2.9) или (2.8), $|R_{\pm}| \approx 1$.

Исключения составляют лишь две возможности. Первая из них соответствует типичному поведению $\rho_{\pm} \approx 1$, но — экспоненциально точной подстройке величин $\Delta_{\pm}$, при которой они становятся одного порядка. Вторая возможность реализуется, когда оба полусегмента резонансно прозрачны, т. е. когда оба модуля $\rho_{\pm}$ одновременно не экспоненциально мало отличаются от единицы. Эти случаи соответствуют резонансному прохождению: $1 - |R_{\pm}| \sim 1$. Оба указанных механизма возникновения резонансно прозрачной реализации различаются лишь при фиксированном выборе точки z_0 : достаточно во втором случае несколько сдвинуть z_0 и реализация (разумеется, остающаяся резонансно прозрачной) будет отвечать уже первому, а не второму механизму.

В случае идеальной прозрачности $R_{\pm} = 0$ состояния рассеяния внутри сегмента носят четко выраженный локализованный характер (на всей оси они, конечно же, не являются квадратично интегрируемыми из-за наличия осциллирующих хвостов). Это следует из условий сшивки их с одной стороны только с падающей, а с другой — только с прошедшей волной. В результате квадрат модуля этого состояния внутри сегмента в окрестности каждой из его границ есть сумма квадратов модулей двух решений того же уравнения (1.3), удовлетворяющих граничным условиям типа (1.4) и потому экспоненциально растущих внутри сегмента (см. (1.7), (1.8)).

В пионерской работе [61] исследовалось резонансное прохождение через сегмент, на котором потенциал представлял собой последовательность дельта-функционных ям, помещенных на постоянный отталкивающий (положительный) пьедестал. Был обнаружен локализованный характер резонансных состояний и проклассифицированы резонансные реализации. Среди них присутствовали отвечающие механизмам и первого (сегмент с одной ямой) и второго (последовательное соединение таких сегментов) из описанных выше типов. В [62] было обнаружено, что плотности вероятностей прозрачности в случае одной или двух ям имеют интегрируемые особенности в точке $|t|^2 = 1$, соответствующей идеальной прозрачности.

Перейдем к качественному описанию поведения интенсивности волны $I(z) = |\psi(z)|^2$, проходящей через случайный сегмент $[0, L]$ как функции координаты. Интенсивность связана с коэффициентом отражения $r_-(z)$ от сегмента $[0, z]$ соотношением [34]

$$I(z) = I(0) \frac{|1 + r_-(z)|^2}{1 - |r_-(z)|^2}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим сначала случай, когда модуль коэффициента отражения на расстояниях $z \gg l$ ведет себя типичным образом, т. е. в соответствии с формулой (2.2)

$$1 - |r_-(z)| \sim e^{-z/l}.$$

Тогда интенсивность $I(z)$ представляет собой быстро (на расстояниях порядка k^{-1}), осциллирующую функцию z , огибающая которой экспоненциально растет от значения $I(0) \sim \exp(-L/l)$ до значения порядка единицы вблизи правой границы $z = L$ (штриховая линия на рис. 1). В промежуточных точках интервала $[0, L]$ и на его правом конце интен-

сивность за счет осцилляций может быть существенно меньше интенсивности на выходе. Это происходит каждый раз, когда фаза коэффициента отражения в соответствующей точке близка к $(2n+1)\pi$, и падающая и отраженная волны в точке z находятся почти в противофазе. Такое выравнивание интенсивности на «входе» z и выходе 0 происходит не за счет возрастания интенсивности на выходе, а напротив, за счет интерференционного гашения интенсивности на «входе» (сплошная линия на рис. 1).

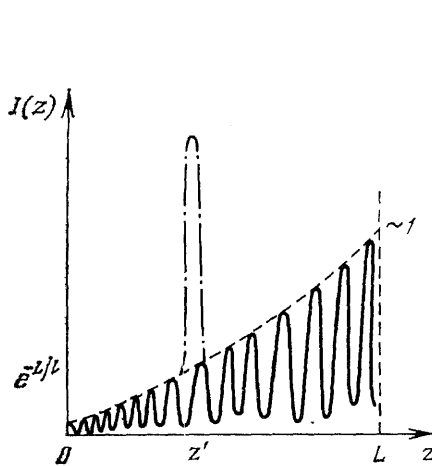


Рис. 1. Схематическая зависимость от координаты z интенсивности волны, прошедшей через случайно-стратифицированный слой для нерезонансной реализации

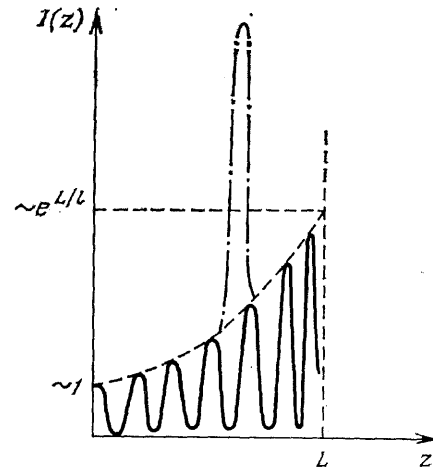


Рис. 2. Схематическая зависимость от координаты интенсивности волны для резонансной реализации. Штриховая кривая — огибающая интенсивности, штрихпунктирная линия — всплеск интенсивности, вызванный флуктуацией $|r_-(z)|$

Учет флуктуаций модуля коэффициента отражения меняет описанную картину. Эти флуктуации удобно разделить на два класса. К первому мы отнесем такие, для которых сегмент $[0, z]$ оказывается существенно более непрозрачным, чем для типичных реализации

$$1 - |r_-(z)|^2 \ll e^{-z/l}.$$

Существование такой флуктуации в окрестности некоторой точки z приводит к резкому увеличению — в $e^{-z/l} / (1 - |r_-(z)|^2)$ раз — огибающей интенсивности, которая может значительно превышать даже значение огибающей на входе слоя (штрихпунктирная кривая на рис. 1). Вторым класс составляют флуктуации, для которых в окрестности некоторой точки z модуль коэффициента отражения оказывается малым, точнее, разность $1 - |r_-(z)|$ становится порядка единицы (а не экспоненциально мала, как в типичном случае). Тогда огибающая интенсивности в этой окрестности по порядку величины совпадает с интенсивностью на выходе $I(0)$. Если такая точка расположена на расстоянии порядка радиуса локализации от входа⁽⁵⁾, $L - z \ll l$, то имеет место резонансное прохождение: интенсивности на входе и выходе сравниваются по порядку величины не только между собой, но и с интенсивностью падающей волны (рис. 2). При этом $I(0) \sim I(L) \sim 1$, но в промежуточных точках в силу (2.11) интенсивность экспоненциально велика даже для типичного поведения $r_-(z)$, а в окрестности точек, связанных с флуктуациями первого типа принимает еще большие значения.

Такое поведение интенсивности на реализации существенно отличается от поведения ее моментов, описанного в [34] (рис. 3), позволяя,

однако, проследить за тем, как они формируются. Типичное поведение модуля коэффициента отражения приводит к «монотонному» экспоненциальному убыванию огибающей интенсивности от входа сегмента, где ее значение порядка единицы, к его выходу. Маловероятные резонансные реализации отвечают появлению экспоненциально больших всплесков интенсивности внутри слоя (см. [61]), в результате чего поведение средней интенсивности отлично от экспоненты, а более высокие ее моменты ведут себя немонотонно, обнаруживая максимумы, амплитуда которых растет с порядком момента. Однако резонансные реализации не оказывают существенного влияния на значения моментов на входе и выходе сегмента (поскольку для них $I(0) \sim I(L) \sim 1$) — этот факт также согласуется с результатами [34], приведенными на рис. 3.

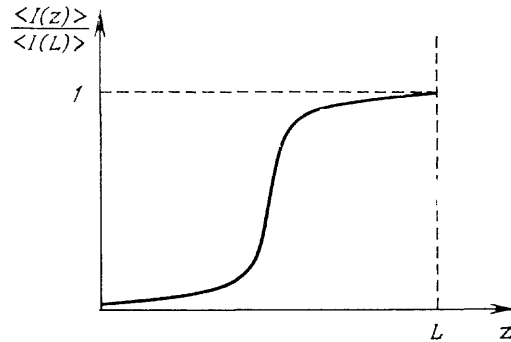


Рис. 3. Средняя интенсивность в слое (кривая пересекает ось ординат в 0)

В [63, 64] были проведены численные эксперименты, моделирующие распространение плоской волны в случайно-стратифицированном слое. В частности, на основе метода погружения исследовалась зависимость интенсивности волны внутри слоя от координаты на отдельных, сконструированных с помощью датчика случайных чисел, реализациях. Примеры полученных зависимостей представлены на рис. 4 и 5⁽⁶⁾. (Для простоты отмечены значения через достаточно большие расстояния, порядка 10 длин волн. На самом деле графики имеют гораздо большее число выбросов.) Положения и амплитуды отдельных пиков определяются индивидуальными свой-

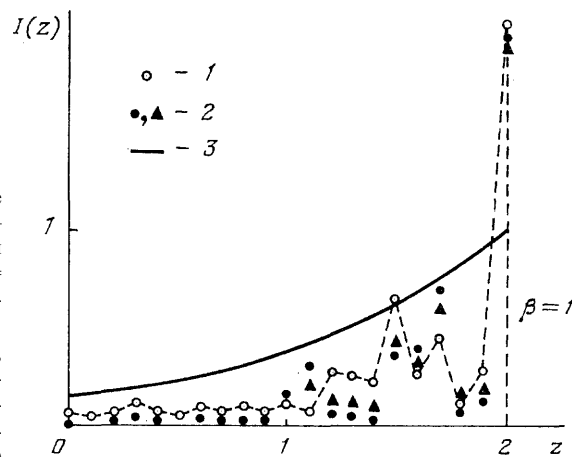


Рис. 4. Интенсивность в слое (численные результаты). 1 — значения интенсивности волны $I(z)$ в слое толщиной $L = L = 4 (k^2 \sigma_e^2 r_c)^{-1}$ с диссипативным затуханием $\Gamma = \text{Im } \delta \epsilon$ ($\beta = 2 \Gamma (k \sigma_e^2 r_c)^{-1}$), 2 — случаи, когда внутри слоя на интервале порядка $k^{-1} \text{Re } \delta \epsilon$ заменено на $-\text{Re } \delta \epsilon$ (положено равным нулю), 3 — случай $\delta \epsilon = 0$

ствами реализации и, естественно, не могут быть вычислены на основе качественного анализа, проведенного выше. В остальном же описанное поведение интенсивности на типичных реализациях вполне согласуется с результатами численного моделирования.

3. Точечный источник в случайно-стратифицированном слое. В предыдущем параграфе речь шла о прохождении плоской волны через стратифицированный слой и о поле, создаваемом в таком слое бесконечной

излучающей плоскостью. Однако для практических целей (например, для нахождения поля излучения по заданному распределению токов в антенне) необходимо иметь решение задачи о поле G точечного источника в такой среде.

Рассмотрим поле $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$, создаваемое в случайно-слоистой среде монохроматическим излучателем, расположенным в точке $\mathbf{R}_0=(0, z)$ над идеально отражающей плоскостью $z=0$. (Такая постановка возни-

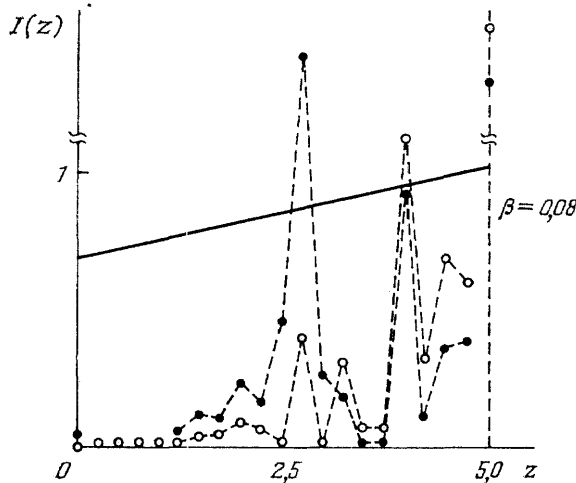


Рис. 5. То же, что на рис. 4, при $L = 10 (k^2 \sigma_e^2 r_c^2)^{-1}$

кает, например, при изучении распространения радиоволн в атмосфере вдоль поверхности земли.) Поле G удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(z) G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad \mathbf{R} = (\rho, z), \quad (3.1)$$

самосопряженному граничному условию при $z=0$

$$\left(G + a \frac{\partial G}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \text{Im } a = 0, \quad (3.2)$$

соответствующему полному отражению плоской волны при любом угле падения, и условию излучения, отражающему тот факт, что на бесконечности существуют только уходящие волны.

Преобразование Фурье $\tilde{G}(\kappa, z)$ поля $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ по продольным координатам ρ

$$\tilde{G}(\kappa, z) = \int G(\rho, z) e^{-i\kappa \rho} d\rho \quad (3.3)$$

как функция от z совпадает с функцией Грина уравнения (1.3) с $E = E_0 - \kappa^2$, удовлетворяющей тем же граничным условиям, что и $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$. Поэтому $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ естественно разложить по собственным функциям одномерной задачи:

$$4iG(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \sum_j \psi_j^*(z) \psi_j(z_0) H_0^{(1)}(\rho(E_0 - E_j)^{1/2}) + \\ + \int_0^E \psi_E^*(z) \psi_E(z_0) H_0^{(1)}(\rho(E_0 - E)^{1/2}) dE + \int_{E_0}^{\infty} \psi_E^*(z) \psi_E(z_0) H_0^{(1)}(i\rho(E - E_0)^{1/2}) dE. \quad (3.4)$$

Зависимость поля от поперечной координаты z описывается волновыми функциями $\psi_j(z)$ дискретного ($E_j < 0$) и $\psi_E(z)$ непрерывного ($E > 0$) спектра, удовлетворяющими уравнению (1.3), граничному условию (1.4)

при $z=0$, условиям нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(z) \psi_k(z) dz = \delta_{jk},$$

$$\int_0^{\infty} \psi_E^*(z) \psi_{E'}(z) dz = \delta(E - E')$$
(3.5)

и требованию ограниченности на бесконечности.

В случае, когда флуктуации диэлектрической проницаемости среды занимают слой конечной толщины L , $\varepsilon(z)$ в (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(z), & 0 < z < L, \\ &= \varepsilon_0, & L < z. \end{aligned}$$
(3.6)

Будем считать, что $\delta\varepsilon(z)$, заданная на всей оси, $-\infty < z < \infty$, удовлетворяет сформулированным во введении условиям пространственной однородности в среднем и убывания корреляций на бесконечности. Поскольку $\langle \delta\varepsilon(z) \rangle = 0$, а $\varepsilon_0 = \text{const}$, регулярная рефракция в слое отсутствует. Представляет интерес выяснить, как влияет такая случайно-стратифицированная, в среднем однородная среда на дальность распространения волн, в частности, обладает ли она волноводными, каналирующими свойствами.

Характерным признаком волноводного распространения является цилиндрическая расходимость плотности потока энергии

$$S(\mathbf{R}) = 2 \operatorname{Im} (G^*(\mathbf{R}) \nabla G(\mathbf{R}))$$

на больших расстояниях от источника:

$$|S(\rho, z)| \Big|_{\substack{z=\text{const}, \\ \rho \rightarrow \infty}} \sim \rho^{-1}.$$
(3.7)

В однородном пространстве $\delta\varepsilon(z) = 0$ плотность потока энергии поля точечного источника убывает, как ρ^{-2} . Эта расходимость однозначно связана с существованием ненулевого потока $\Phi_d(z') < 0$ через боковую поверхность цилиндра бесконечного радиуса, ограниченного отражающей плоскостью $z=0$ и плоскостью $z=z'$

$$\Phi_d(z') = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_0^{z'} dz \int_0^{2\pi} d\varphi S_\rho(\rho, z')$$

(в однородном пространстве, т. е. при сферической расходимости, эта величина равна нулю).

Поток $\Phi_c(z')$ через бесконечную плоскость $z=z'$

$$\Phi_c(z') = \int S_z(\rho, z') d\rho$$

при $z' > z_0$ связан с $\Phi_d(z')$ очевидным соотношением

$$\Phi_c(z') + \Phi_d(z') = \Phi_0 = -2 \operatorname{Im} G(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0),$$

где Φ_0 — полный поток энергии, излучаемой источником в единицу времени. При $z' < z_0$ $\Phi_c(z') + \Phi_d(z') = 0$. В однородном пространстве $\Phi_c(z')$ не зависит от z' и равно Φ_0 .

С помощью стандартных, хотя и весьма громоздких вычислений можно выразить потоки $\Phi_d(z)$ и $\Phi_c(z)$ в терминах волновых функций

одномерной задачи (которые могут быть выбраны вещественными)

$$\Phi_d(z) = \frac{1}{2} \sum_j \psi_j^2(z_0) \int_0^z \psi_j^2(\xi) d\xi, \quad (3.8a)$$

$$\Phi_c(z) = -\Phi_d(z) \text{ при } 0 < z < z_0,$$

$$= \Phi_c + \frac{1}{2} \sum_j \psi_j^2(z_0) \int_z^\infty \psi_j^2(\xi) d\xi \text{ при } z_0 < z, \quad (3.8б)$$

$$\Phi_d \equiv \Phi_d(\infty) = \frac{1}{2} \sum_j \psi_j^2(z_0), \quad (3.8в)$$

$$\Phi_c \equiv \Phi_c(\infty) = \frac{1}{2} \int_0^{E_0} \psi_E^2(z_0) dE. \quad (3.8г)$$

Эти формулы являются точными динамическими (т. е. справедливыми на отдельной реализации) соотношениями и служат основой для исследования потоков на реализации. Однако для того, чтобы явным образом учесть случайный характер флуктуаций $\delta\epsilon(z)$, естественно воспользоваться выражением для волновых функций непрерывного спектра в терминах хорошо изученных (см. [4]) функций $\xi(z)$ и $\varphi(z)$ (1.6) (напомним, что величина $\gamma(z) = \xi(z)/z$ самоусредняется при больших z). В результате формула (3.8г) может быть переписана в виде

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{E_0} \sin^2 \varphi(z_0) \cdot \exp[-2(\xi(L) - \xi(z_0))] \frac{dE}{E^{1/2}}. \quad (3.9)$$

Заметим, что подынтегральное выражение в формуле для полного выходящего из слоя потока (3.9) совпадает, как и следовало ожидать, с выражением (2.5), описывающим плотность потока энергии плоской волны в одномерной задаче.

4. Флуктуационный волновод. Обратимся к анализу полученных выражений для потоков. Из (3.8а), (3.8в) следует, что волноводное (в смысле (3.7)) распространение имеет место лишь в том случае, когда в одномерной задаче (1.3) с потенциалом, порожденным (3.6), существует дискретный спектр. Действительно, в этом случае $\Phi_d(z) \neq 0$ и

$$\Phi_c'(z) = -\Phi_d'(z) = -\frac{1}{2} \sum_j \psi_j^2(z_0) \psi_j^2(z) < 0. \quad (4.1)$$

Это означает, что по мере удаления от источника (т. е. с ростом z) поток через бесконечную плоскость $z=\text{const}$ убывает именно за счет каналирования энергии «вбок» посредством волноводных мод, связанных с дискретным спектром $E_j < 0$ и представляющих собой нормальные волны, бегущие вдоль слоев. Зависимость соответствующих мод при $\rho(E_0 - E_j)^{1/2} \gg 1$ от z имеет вид $\sim H_0^{(1)}(\rho(E_0 - E_j)^{1/2}) \sim \exp[ip(E_0 - E_j)^{1/2}]$. В направлении оси z их энергия заперта внутри слоя, как видно из (3.8г), волны дискретного спектра не дают вклада в поток Φ_c , высвечивающийся «вверх». В однородной среде дискретный спектр отсутствует, вследствие чего, как уже говорилось, $\Phi_d = 0$, $\Phi_c = \Phi_c^{(0)} = \pi^{-1} E_0^{1/2}$.

В случае диэлектрического волновода с $\delta\epsilon(z) = \epsilon_1 > 0$ толщиной $L \gg \lambda(\lambda - \text{длина волн излучения источника в однородной среде с } \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1)$ дискретный спектр одномерной задачи содержит пропорцио-

нальное L число уровней, а амплитуда соответствующих волновых функций $\psi_j(z)$ имеют один и тот же порядок величины $\sim L^{-1/2}$ во всех точках слоя. Вследствие этого поток $\Phi_d(z)$ линейно растет с ростом z от нуля до $\Phi_d(L) \sim \Phi_d$ причем в силу приведенных оценок полный поток «вбок» Φ_d слабо зависит от толщины слоя. Это означает, что слой «засвечивается» в среднем равномерно. Выходящий из слоя поток $\Phi_c(L) \sim \Phi_c$, связанный с волнами непрерывного спектра при значениях $E \in [0, E_0]$ по порядку величины также слабо зависит от L .

Переходя к рассмотрению случайно-слоистой среды, заметим, что в одномерном случае в любой потенциальной яме содержится по крайней мере один дискретный уровень. Реализациям, в которых ямы отсутствуют, отвечают функции $\delta\epsilon(z) \leq 0$ ($v(z) \geq 0$) для всех $z < L$, и их мера экспоненциально мала по параметру L/r_c . Поэтому в толстом слое $L \gg r_c$ с вероятностью экспоненциально мало отличающейся от единицы, на каждой реализации при $E < 0$ существуют нормальные моды и имеет место волноводное распространение. В этом смысле изучаемая неупорядоченная система эквивалентна диэлектрическому слою, являющемуся оптически более плотным, чем окружающая среда (потенциальная яма конечной глубины), однако в нашем случае каналирование не связано с отражением от регулярной границы или с регулярной рефракцией и является чисто флуктуационным эффектом, исчезающим при $\delta\epsilon = 0$.

Зависимость плотности потока энергии поля точечного источника в случайно-слоистой среде, естественно, такая же, как и в диэлектрическом волноводе—вдали от источника она убывает как r^{-1} . Однако высотное распределение полей нормальных волн и потока энергии $\Phi_d(z)$ в случайно-стратифицированном слое обладает рядом специфических особенностей. Вне слоя при $E < 0$ и $z > L$ $\psi(z) \sim \exp[-(-E)^{1/2}(z-L)]$, что позволяет записать эффективное граничное условие для ψ в точке L в «самосопряженном» виде

$$\left. \frac{\psi'}{\psi} \right|_{z=L} = -(-E)^{1/2}.$$

Поэтому ψ_j обладают теми же свойствами, что и собственные функции закрытых неупорядоченных систем [4]. Это означает, что модули волновых функций $\psi_j(z)$, описывающих, как следует из представления (3.4), высотное (по координате z) распределение полей нормальных волн, существенно отличны от нуля в окрестности размером порядка $l_j = l(E_j)$ вблизи центров локализации z_j , и экспоненциально убывают по мере удаления от них. Характерное расстояние между центрами локализации волн дискретного спектра, очевидно, имеет порядок $\mathcal{N}^{-1}(0)$, где $\mathcal{N}(E')$ —число состояний с $E < E'$, приходящихся на единицу толщины слоя.

При выполнении условий (1.9), (1.15) случайная функция $v(z)$ характеризуется единственным параметром размерности длины $D^{-1/3}$ (1.10) и поэтому из соображений размерности $\mathcal{N}(0) \sim D^{1/3}$, откуда

$$\Delta z \sim D^{-1/3} = \gamma_0 \left[\frac{r_c}{\chi_0} \left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right]^{-1/3}. \quad (4.2)$$

Из этих же соображений следует, что при $|E_j| \ll D^{2/3}$ радиус локализации l_j имеет такой же порядок величины. В противоположном случае $|E_j| \gg D^{2/3}$, как следует из формулы (1.14), имеем

$$l_j \sim |E_j|^{-1/2}.$$

Такая резко неоднородная зависимость полей волновых мод от поперечной координаты существенно отличает случайно-слоистую среду от регулярного диэлектрического волновода, в котором высотные множители модов равномерно осциллируют по всей толщине слоя.

По-иному ведет себя и поток энергии Φ_d , уносимый волнами дискретного спектра вдоль слоев. Действительно, как видно из формулы (3.8а) j -е состояние дискретного спектра дает вклад в поток $\Phi_d(z)$ лишь при $z - z_j \geq l_j$, поскольку при $z < z_j - l_j$ соответствующий интеграл в (3.8а) экспоненциально мал, в то время как при $z > z_j + l_j$ он практически равен единице. Величина этого вклада, равная $(1/2)\psi_j^2(z_0)$, заметно отлична от нуля, лишь если центр локализации этого состояния удален по вертикали от источника не более чем на радиус локализации, и имеет в этом случае порядок l_j^{-1} (это следует из условия нормировки (3.5)). Поэтому полный поток «вбок» Φ_d (3.8с) в случае толстого слоя $L \gg l$ формируется лишь небольшой группой волн, для которых $|z_0 - z_j| \leq l_j$, и имеет порядок

$$\Phi_d \sim (\Delta z)^{-1}; \quad (4.3)$$

здесь l — значение радиуса локализации при $|E| \sim \sigma_3 \omega^2 / c^2$, а Δz — среднее расстояние между соседними центрами локализации. Высотное распределение уходящего «вбок» потока резко неоднородно: «засвечена» лишь узкая полоса $|z - z_0| \ll l \ll L$ вблизи источника. В примере (1.10) из (4.2), (4.3) находим

$$\Phi_d \sim D^{1/3}. \quad (4.4)$$

Уходящий «вбок» поток $\Phi_d(z)$ не является самоусредняющейся величиной и поэтому обладает тонкой структурой, определяемой устройством конкретной реализации. Эта структура по существу была описана в предыдущем абзаце и схематически изображена на рис. 6. Однако для ее наблюдения проще исследовать производную этого потока

$$\Phi'_d(z) = \frac{1}{2} \sum_j \psi_j^2(z_0) \psi_j^2(z),$$

имеющую, кроме ярко выраженного пика в окрестности z_0 (также обладающего тонкой структурой), много слабых пиков в окрестностях всех

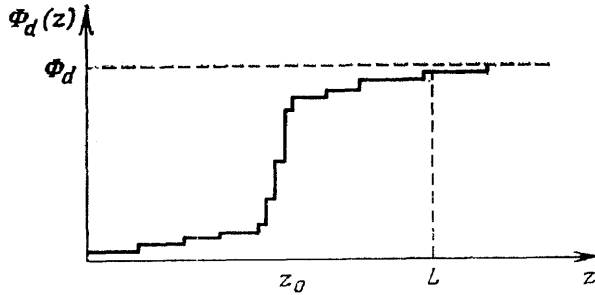


Рис. 6. Поток $\Phi_d(z)$ через боковую поверхность цилиндра бесконечного радиуса высотой z

центров локализации (рис. 7). Эти пики формируют мезоскопическую структуру производной $\Phi'_d(z)$ с характерным периодом, совпадающим по порядку с расстоянием между центрами локализации Δz . Меняя положение источника, можно в принципе определять положения центров локализации z_j собственных мод (т. е. наиболее «прозрачных» в продольном направлении участков неоднородного слоя, по которым в основном и происходит каналирование вдоль слоев) и амплитуды значений волновых функций в этих центрах $\psi_j(z_j)$. Набор величин z_j и $\psi_j(z_j)$ однозначно характеризует отдельную реализацию и является в некотором смысле ее «паспортом» (так же, как и, например, зависимость $\sigma(H)$ проводимости от магнитного поля в мезоскопических проводниках, получившая в литературе образное название «magnetofingerprints»).

Полный средний поток «вбок» $\langle \Phi_d \rangle$ по порядку величины совпадает со своим значением на отдельной реализации. В самом деле, записав с

помощью (3.8a) средний поток $\langle \Phi_d \rangle$ в форме

$$\langle \Phi_d \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left\langle \sum_j \delta(E - E_j) \psi_j^2(z_0) \right\rangle dE,$$

видим (см. [4]), что при $z_0, E - z_0 \gg r_c$ интеграл в правой части есть среднее число дискретных уровней на единицу толщины слоя, так что

$$\langle \Phi_d \rangle \approx \frac{1}{2} \mathcal{N}(0),$$

откуда в случае (1.10) снова вытекает оценка (4.4).

Итак, как следует из формул (4.1), (4.2) в случайно-слоистой среде на каждой реализации (кроме экспоненциально маловероятных) имеет

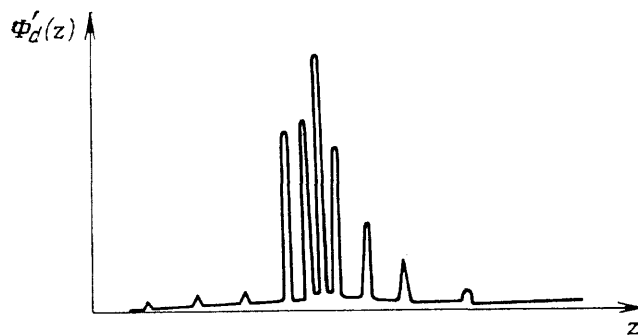


Рис. 7. Тонкая структура производной от потока $\Phi'_d(z)$ (большой пик соответствует z_0)

место волноводное распространение. Оно обеспечивается волнами дискретного спектра с отрицательными значениями параметра E . Остальная энергия приходится на долю непрерывного спектра, состояния которого, как известно, делокализованы (т. е. связанное с ним поле не удерживается в слое, а высвечивается из него, в чем и проявляется «открытость» системы). Однако специфика неупорядоченных открытых систем, наиболее ярко проявляющаяся именно в формировании непрерывного спектра, приводит, как будет показано ниже, к радикальной перестройке структуры связанной с ним части поля—возникновению квазиоднородных волн (аналогов квантовомеханических квазистационарных состояний), следствием чего оказывается существенное усиление (по сравнению с регулярными структурами) волноводного эффекта.

5. Квазиоднородные волны. Надежду на то, что в случайно-стратифицированной среде каналироваться должны и волны непрерывного спектра дает следующее простое соображение. Поле точечного источника можно представить в виде суперпозиции плоских волн, каждая из которых (даже распространяющаяся нормально к слою), как следует из (2.2), отражается от достаточно толстого слоя с коэффициентом отражения по модулю экспоненциально близким к единице. Такое усиление отражения должно приводить к тому, что излучение в каком-то смысле частично «запирается» в направлении оси z и за счет этого каналируется вдоль слоев.

Чтобы убедиться в этом, обратимся к анализу потока Φ_c , высвечивающегося из слоя за счет волн непрерывного спектра. Подынтегральное выражение

$$\rho(E) = \sin^2 \varphi(z_0) \cdot \exp[-2(\xi(L) - \xi(z_0))] \quad (5.1)$$

в формуле (3.9), записанной в виде

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{E_0} \rho(E) \frac{dE}{E^{1/2}} \quad (5.2)$$

имеет смысл потока энергии излучения, приходящегося на единичный интервал спектрального параметра E , т. е. плотности углового ($\vartheta =$

$$= \arcsin \left(\frac{E}{E_0} \right)^{1/2}, \int_0^{E_0} \dots dE = E_0 \int_0^{\pi/2} \dots \sin 2\vartheta d\vartheta \Bigg) \quad \text{распределения} \quad \text{уходя-}$$

щего «вверх» потока.

Из (5.1) видно, что поскольку на почти каждой реализации функция $\xi(z)$ в основном линейно растет, при $L - z_0 \gg l(E)$ величина $\rho(E)$ на подавляющем большинстве реализаций экспоненциально мала. На первый взгляд это полностью согласуется с приведенными выше качественными рассуждениями. Однако, как мы видели в п. 2, в случае (1.10) при $z_0 = 0$ и $r_- = 1$, среднее значение $\langle \rho(E) \rangle = 1$ (2.6) (как в свободном пространстве при $\delta\epsilon(z) = 0$) и формируется на маловероятных реализациях, где $\rho(E)$ экспоненциально велико, $\rho \sim \exp(2L/l)$.

Существуют две возможности формирования такого среднего. Первая из них соответствует тому, что весь интеграл (5.2) на подавляющем большинстве реализации экспоненциально мал, а его среднее значение формируется на маловероятных реализациях. В этом случае произвольная реализация с экспоненциально близкой к единице вероятностью обладает хорошими волноводными свойствами: высвечивается из слоя лишь экспоненциально малая часть полного потока.

Вторая возможность заключается в том, что, поскольку при фиксированном значении E оценка $\gamma(E) \sim \xi(L)/L \sim (2l)^{-1}$ справедлива для подавляющего числа реализации, но не для всех, то на каждой реализации найдутся такие $E \in [0, E_0]$, при которых подынтегральная функция $\rho(E)$ экспоненциально велика. В результате связанный с непрерывным спектром высвечивающийся поток на каждой реализации по порядку величины будет таким же, как в однородном пространстве

$$\Phi_c \sim \lambda_0^{-1}$$

и существенно превысит каналирующий «вбок» поток (4.4):

$$\Phi_d \sim D^{1/3} \sim \Phi_c \left[\frac{r_c}{\lambda_0} \left(\frac{\sigma_g}{\epsilon_0} \right)^2 \right]^{1/3} \ll \Phi_c.$$

Для выяснения того, какая из этих двух возможностей реализуется, выразим плотность $\rho(E)$ (5.1) высвечивающегося из слоя потока через коэффициент отражения $r_+(E)$ от сегмента при падении на него слева плоской волны. В частном случае $z_0 = 0$, $r_- = 1$ такое представление имеет вид:

$$\rho(E) = \frac{1 - |r_+(E)|^2}{|1 - r_+(E)|^2}. \quad (5.3)$$

В области достаточно больших $E \gg |v|$ фаза $f_+(E) = \text{Arg } r_+(E)$ коэффициента отражения, как следует из (2.7), в основном ведет себя как $f_+(E) \approx 2LE^{1/2}$. Поскольку на типичной реализации $1 - |r_+(E)| \sim O(\exp(-L/l))$, то при фиксированном E , как правило

$$\rho(E) \sim e^{-L/l}. \quad (5.4)$$

Исключение составляют те значения E_n параметра E , для которых

$$\varphi_+(E_n) = 2\pi n. \quad (5.5)$$

В этих точках

$$E_n \approx \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (5.6)$$

знаменатель $|1 - r_+|^2$ в (5.3) становится малым

$$|1 - r_+(E_n)|^2 \sim e^{-2L/l}, \quad (5.7)$$

а $\rho(E)$ — экспоненциально большим

$$\rho(E_n) \sim e^{L/l(E_n)}. \quad (5.8)$$

В результате $\rho(E)$ представляет собой острую функцию—систему пиков, изображенную на рис. 8. Расстояние $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$ между пиками

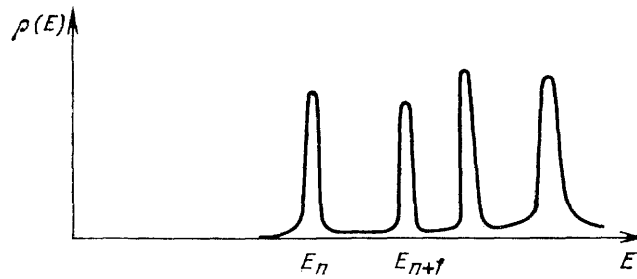


Рис. 8. Эффективная плотность состояний $\rho(E)$

$\rho(E)$, т. е. между корнями уравнения (5.5), в соответствии с формулой (5.6) равно $\Delta E_n = 2n\pi^2 / L^2$, а их полуширина δE_n , связанная с отклонением $|r_+|$ от единицы, равна

$$\delta E_n \approx \frac{1}{2\pi} \Delta E_n \cdot e^{-L/l(E_n)}. \quad (5.9)$$

При вычислении потока Φ_c (5.2) функцию $\rho(E)$ можно заменить сглаженной $\tilde{\rho}(E)$, получаемой путем усреднения по интервалу ΔE , на котором $E^{-1/2} \approx \text{const}$, но включающему много пиков:

$$\tilde{\rho}(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{-\Delta E/2}^{\Delta E/2} \rho(E + E') dE'.$$

Непосредственный расчет с использованием соотношений (5.8) и (5.9) дает

$$\tilde{\rho}(E) \approx \frac{1}{2\pi}, \quad (5.10)$$

вследствие чего на типичной реализации высвечивающийся поток совпадает по порядку величины со своим средним значением $\langle \Phi_c \rangle$ и значением $\Phi_c^{(0)}$ в однородном пространстве. Это означает, в частности, что в рассматриваемой системе имеется в некотором смысле эргодичность по параметру E : $\langle \rho(E) \rangle \sim \tilde{\rho}(E)$. Такая эргодичность делает понятной описанное выше различие в поведении $\rho(E)$ на типичных и репрезентативных для данного значения E реализациях. Действительно, вероятность того, что для данной реализации плотность $\rho(E)$ экспоненциально мала (5.4), равна вероятности не попасть данному значению E в интервал δE ,

которая, очевидно, равна

$$1 - \frac{\delta E}{\Delta E} = 1 - \frac{1}{2\pi} e^{-L/l(E_n)},$$

т. е. мера типичных для данного E реализации экспоненциально мало отличается от единицы. Напротив, на репрезентативных для данного E реализациях, мера которых $\sim \exp(-L/l)$, $\rho(E)$ экспоненциально велико (5.8).

Таким образом, как видно из (5.2), (5.10), в рассматриваемой задаче реализуется вторая из описанных выше возможностей.

Из приведенных рассуждений следует, что полный высвечивающийся из неоднородного слоя поток имеет резко неоднородное распределение по углам — происходит своеобразная фокусировка выходящего излучения вблизи значений $\vartheta_n = \arcsin(E_n/E_0)^{1/2}$, соответствующих тем значениям E_n , при которых $\rho(E)$ имеет максимумы. Смысл выделенных значений E_n (5.6) становится понятным, если записать решение уравнения (1.3) с граничным условием (1.4) вне слоя $z > L$ в виде

$$\psi(E, z) = (1 - r_+(E)) t^*(E) \exp[-iE^{1/2}(z - L)] + (1 - r_+^*(E)) t(E) \exp[iE^{1/2}(z - L)] \quad (5.11)$$

($t(E)$ — коэффициент прохождения неупорядоченного сегмента). В самом деле, при вещественных E здесь присутствуют и падающая (справа) и отраженная волны. Однако при комплексных $\mathcal{E}_n = E_n - \delta_{1n} - i\delta_{2n}$, при которых

$$r_+(\mathcal{E}_n) = 1 \quad (5.12)$$

коэффициент при падающей волне обращается в нуль и остается только уходящая волна:

$$\psi(\mathcal{E}_n, z) = (1 - r_+^*(\mathcal{E}_n)) t(\mathcal{E}_n) \exp[i\mathcal{E}_n^{1/2}(z - L)]. \quad (5.13)$$

В квантовой механике волновая функция (5.13) описывает так называемое распадное состояние, ее квадрат модуля в силу временной зависимости $\sim e^{-i\mathcal{E}_n t} = e^{-iE_n t + i\delta_{1n} t - i\delta_{2n} t}$ убывает за время $\tau \sim (\delta_{2n})^{-1}$. Однако в случае $\delta_{2n} \ll E_1 - \delta_{1n}$, когда это время велико по сравнению с характерным периодом осцилляций $(E_n - \delta_{1n})^{-1}$, такое состояние является квазистационарным. Обычно речь идет о квазистационарных состояниях, возникающих за счет специфического рельефа потенциала $v(z)$ в (1.3), представляющего собой потенциальную яму, отделенную от внешней области достаточно широким потенциальным барьером, высота которого больше чем энергия частицы [65, 66]. Здесь же квазистационарные состояния возникли в «надбарьерной» ситуации, когда энергия частицы велика по сравнению с рассеивающим потенциалом, «запирание» частицы носит чисто волновой характер и обусловлено интерференцией многократно рассеянных на флуктуациях потенциала волн. (Однократные рассеяния могут быть при этом достаточно слабыми.)

В области значений параметра E , для которых длина локализации $l(E)$ мала по сравнению с толщиной слоя, модуль коэффициента отражения экспоненциально мало отличается от единицы. В результате решение уравнения (5.12) принимает вид

$$\mathcal{E}_n = E_n - i\delta_{2n}, \quad (5.14)$$

где мнимая часть δ_{2n} в два раза меньше полуширины соответствующего пика функции $\rho(E)$ (5.3) и экспоненциально мала по параметру L/l :

$$\delta_{2n} = \frac{1}{2} \delta E_n = \frac{1}{4\pi} \Delta E_n \cdot e^{-L/l(E_n)} \quad (5.15)$$

(сдвиг δ_{in} вещественной части E_n с этой точностью равен нулю). Таким образом, значения E_n (5.6), при которых величина $\rho(E)$ имеет максимум, есть вещественные части комплексных значений $\mathcal{E}_n$ (5.14), (5.12), отвечающих квазистационарным состояниям, «время жизни» которых $\tau \sim \sim e^{L/l}$ экспоненциально велико, а полный поток Φ_c , высвечивающийся из слоя, формируется именно квазистационарными состояниями.

Волны $\psi(E_n, z)$, отвечающие значениям $E=E_n$, экспоненциально локализованы внутри слоя (хотя, конечно же, ненормируемы из-за наличия осциллирующих «хвостов» (5.11) вне него). Это следует из пропорциональности собственных волн $\psi(E_n, z)$ при z внутри слоя и $r_- = 1$ экспоненциально растущим от точки $z=0$ косинусным решениям $c(E_n, z)$ уравнения (1.3) (удовлетворяющим условиям $c(E_n, 0)=1$, $c'(E_n, 0)=0$) и тождества

$$c^2(E_n, L) + E_n^{-1} c_n'(E_n, L) = \frac{|1 - r_+(E_n)|^2}{1 - |r_+(E_n)|^2} \sim e^{-L/l(E_n)}.$$

Характерным масштабом локализации волн $\psi(E_n, z)$ является длина локализации $l(E_n) \ll L$, а не ширина потенциальной ямы, как для стандартных («подбарьерных») квазистационарных состояний—в этом проявляется отличие неупорядоченных систем от регулярных.

Представление о квазистационарных состояниях позволяет не только понять их роль в формировании потока Φ_c , но и проанализировать зависимость поля источника G от продольной координаты ρ . Воспользуемся для этого формулой [38]

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \frac{iE_0^{1/2}}{2} \int_{\Gamma} \frac{1 + r_-(z_0)}{1 - r_+(z_0)r_-(z_0)} H_0^{(1)}(k\rho \sin \vartheta) f_{1,2}(\vartheta, z) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (5.16)$$

$$\rho = |\rho - \rho_0|, \quad z \geq z_0;$$

здесь Γ —некоторый контур интегрирования в комплексной плоскости ϑ , $E_0^{1/2}$ — волновое число для уровня расположения излучателя, $f_{1,2}(\vartheta, z)$ — функции, описывающие поля в нижнем ($z < z_0$) и верхнем ($z > z_0$) полупространствах, при падении на них из вакуума плоской волны единичной амплитуды под углом ϑ . Анализ выражений (5.16) показывает, что они сводятся к сумме вычетов, соответствующих полюсам знаменателя, и к интегралам по берегам разрезам [38].

Сумма вычетов, описывающая поле внутри слоя, при $\kappa_n \rho \gg 1$ может быть записана после перехода к переменной $\mathcal{E} = E_0 - k^2 \sin^2 \vartheta$ в виде

$$G = \sum_n F_n(z, z_0; \mathcal{E}_n) e^{i\kappa_n \rho}; \quad (5.17)$$

здесь $\kappa_n = (E_0 - \mathcal{E}_n)^{1/2}$, $\mathcal{E}_n$ — корни дисперсионного уравнения

$$1 - r_+(z_0)r_-(z_0) = 0, \quad (5.18)$$

а $r_{\pm}(z_0)$ —коэффициенты отражения от областей $[z_0, \infty]$ и $[0, z_0]$ при падении на них волны слева (справа).

Можно показать, что совокупность решений $\mathcal{E}_n$ уравнения (5.18) не зависит от выбора точки z_0 и, следовательно, в случае $r_- = 1$ совпадает с совокупностью решений уравнения (5.12). Среди них, как было показано, имеются решения, отвечающие квазистационарным состояниям. Поскольку в нашем случае роль времени играет расстояние ρ от источника до точки наблюдения в плоскости x, y , таким состояниям соответствуют квазиоднородные волны, затухающие на экспоненциально больших по параметру L/l расстояниях $\mathcal{D}$ от источника

$$\mathcal{D}_n \sim (\text{Im } \kappa_n)^{-1} \sim Le^{L/l}. \quad (5.19)$$

Это затухание не связано с диссипацией, а происходит за счет высвечивания поля «вверх» (в область $z > L$). Однако при $\rho < \mathcal{Q}_n$ квазиоднородные волны заперты внутри слоя.

Таким образом, радикальное отличие случайно-стратифицированного слоя от регулярного диэлектрического волновода связано именно со специфической ролью непрерывного спектра. Обусловленный им поток формируется квазиоднородными волнами, энергии которых, хотя и высвечиваются из слоя, но на экспоненциально больших по сравнению с его толщиной расстояниях от излучателя. Из связанной с непрерывным спектром части поля, описываемой интегральными членами в разложении (3.4), можно выделить дискретную сумму по квазистационарным состояниям, отвечающую слабо затухающим квазиоднородным волнам, каналирующим энергию вдоль слоя на гигантские расстояния.

Отметим в заключение, что факт высвечивания потока $\Phi_c(z)$ обусловлен конечной толщиной слоя. В бесконечной случайно стратифицированной среде все состояния в z направлении экспоненциально локализованы, и среднее значение потока $\Phi_c(z, z_0)$ экспоненциально убывает по мере удаления плоскости z от источника [67]

$$\langle \Phi_c(z, z_0) \rangle = 8\pi^{3/2} E_0^{1/2} \left(\frac{l(E_0)}{|z - z_0|} \right)^{5/2} \exp \left(- \frac{|z - z_0|}{4l(E_0)} \right) \left(1 + O \left(\frac{\gamma}{E_0^{1/2} l(E_0)} \right) \right),$$

$$|z - z_0| \gg l(E_0), \rho; \quad \gamma \ll (E_0^{1/2} l(E_0))^{-1}.$$

Также экспоненциально убывают средняя интенсивность $\langle I(R, R_0) \rangle$ в точке $\mathbf{R}$

$$\langle I(R, R_0) \rangle = \frac{1}{2(z - z_0)^2} \exp[-|z - z_0|(l^{-1}(E_0) + \gamma E_0^{1/2})],$$

$$\gamma \gg (E_0^{1/2} l(E_0))^{-1}$$

и среднее поле $\langle G(R, R_0) \rangle$ (когерентная составляющая сигнала)

$$\langle G(R, R_0) \rangle = -|z - z_0|^{-1} \exp \left[\frac{iE_0^{1/2} \rho^2}{2|z - z_0|} + iE_0^{1/2}(z - z_0) - \frac{|z - z_0|}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{|z - z_0|} \right) (l^{-1}(E_0) + \tilde{l}^{-1}(E_0) + \gamma E_0^{1/2}) \right],$$

$$\gamma \gg (E_0^{1/2} l(E_0))^{-1}.$$

γ — безразмерное затухание, $\rho = |\rho - \rho_0|$, а $\tilde{l}(E_0)$ — длина экстинкции (длина свободного пробега) по отношению к рассеянию вперед.

В заключение отметим, что изученные выше «одномерные» интерференционные эффекты, в частности, возникновение флуктуационного волновода, могут играть заметную роль при распространении волн УКВ диапазона в атмосфере на большие расстояния и при каналировании звука в океане. Действительно, наличие в атмосфере и в океане сильно анизотропных квазислоистых флуктуаций показателя преломления в настоящее время не вызывает сомнений (см., например [45, 68—70]). Для эффективного захвата волны флуктуационным волноводом необходимо, чтобы длина локализации при соответствующем значении параметра $E = [(\omega/c) \sin \psi]^2$ (ψ — угол скольжения) не превосходила толщину флуктуационного слоя. При характерных для приводного слоя тропосферы значениях параметров $\sigma_e \sim 3 \cdot 10^{-7} \approx 0,3$ Н ед, $r_e \sim 10^3$ см в соответствии с формулой (1.11) для волны с длиной $\lambda = 3$ см и углом скольжения $\psi \sim 10^{-3}$ длина локализации оказывается порядка $l \sim 50$ м. Если учесть, что неоднородности диэлектрической проницаемости с характерными градиентами порядка десятых долей Н ед/м наблюдаются в атмосфере до высот 1 км и более, следует ожидать, что флуктуационный волновод может

каналировать энергию даже более эффективно, чем волновод, связанный с регулярной рефракцией, в котором углы захвата Ψ редко превышают значения $\sim 10^{-4}$.

Хотя целенаправленные радиофизические и метеорологические измерения для обнаружения флуктуационного волновода не проводились, ряд косвенных данных свидетельствует о возможности его существования. Так, отмечено возрастание глубины замирания сигнала на больших расстояниях от источника по мере роста его среднего уровня [71] и длины трассы [72]. Такое поведение амплитуды сигнала не характерно для регулярных тропосферных волноводов и согласуется с описанным во втором разделе поведением интенсивности в случайно стратифицированном слое. Признаком существования флуктуационного волновода можно считать и часто наблюдаемую заметную корреляцию уровня поля далеко за горизонтом с дисперсией флуктуаций показателя преломления σ_e^2 в приземном слое: интенсивность сигнала возрастает с σ_e^2 , даже если средний градиент $d\varepsilon/dz$ достаточно мал и регулярный волновод отсутствует.

Авторы благодарны Ю. А. Кравцову, Л. А. Пастуру и В. И. Татарскому за полезные обсуждения.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

¹ Для фиксированной реализации коэффициенты прохождения t и отражения r зависят и от длины сегмента L , и от спектрального параметра E . Мы, однако, будем указывать явно лишь зависимость t или r от более существенного в каждом конкретном случае из этих двух параметров.

² Как показано в [60], соотношение (2.4) справедливо в гораздо более широком, чем (1.10), (1.15), классе случаев.

³ Этот результат получен совместно с Ю. С. Кившарем.

⁴ Эта и последующие аналогичные оценки справедливы, разумеется, с логарифмической точностью.

⁵ В области больших $E=k_2^2$, где применима теория возмущений по $v(z)/k^2$, фаза ϕ коэффициента отражения в соответствии с (2.7) меняется быстро — на расстояниях порядка длины волны k^{-1} , в то время как модуль ρ , т. е. Δ , — существенно медленнее, на расстояниях порядка длины локализации l .

⁶ Мы благодарны В. И. Кляцкину и И. О. Ярошуку, любезно предоставившим нам эти графики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Anderson P. W. // Phys. Rev. **1958**. V. 109. P. 1492.
2. Мотт Н., Дэвис Э. Электронные процессы в некристаллических веществах. Т. 1.— М.: Мир, 1982.
3. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников.— М.: Наука, 1979.
4. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем.— М.: Наука, 1982.
5. Бонч-Бруевич В. А., Звягин И. П. и др. Электронная теория неупорядоченных полупроводников.— М.: Наука, 1981.
6. Абрикосов А. А. Основы теории металлов.— М.: Наука, 1987.
7. Физический энциклопедический словарь.— М.: Сов. энциклопедия, 1984.
8. Физическая энциклопедия. Т. 1.— М.: Сов. энциклопедия, 1988.
9. Papanicolaou G. C. // CIME/Ed. J. P. Cecconi— Napoli: Liquory editore, 1978.
10. Hodges C. I. // Sound and Vib. **1982**. V. 82. P. 411.
- [11] John S; Sompolsky H., Stephen H. // Phys. Rev. Ser. B. **1983**. V. 27. P. 5592.
12. Baluni V., Willemsen J. // Ibidem. **1985**. V. 31. P. 3358.
13. Kirkpatrick T. R. // Ibidem. P. 5746.
14. Ping Sheng et al. // Ibidem. **1986**. V. 34. P. 4757.
15. Condat C. L., Kirkpatrick T. J. // Ibidem. **1987**. V. 36. P. 6782.
16. Escande D., Souillard B. // Phys. Rev. Lett. **1985**. V. 52. P. 1296.
17. Guazze U E., Guyon E., Souillard B. // J. de Phys. Lett. **1983**. T. 44. P. 837.
18. Devillard P. et al. Preprint. Centre de physique Theor. Ecole Politech. A. 688. 10. 85.— Palaiseau, France, 1985.
19. Belzons M. et al. Preprint Centre de Physique Theor. Ecole Politech. A. 742.09.86. Palaiseau, France, 1986.
20. Cohen S. M; Machta C. // Phys. Rev. Lett. **1985**. V. 54. P. 2242.
- [21] Condat C., Kirkpatrick T. R. // Phys. Rev. Ser. B. **1986**. V. 33. P. 3102.
22. Farias G., Maradudin A. A. // Ibidem. **1983**. V. 28 P. 5675.
23. McGurn A., Maradudin A. A. // Ibidem. **1985**. V. 31. P. 4866.

24. McGurn J., Maradudin A. A.//J. Opt. Soc. Amer. Ser. B. **1987**. V. 4. P. 910.
25. Дутышев В. Н., Потапенко С. Ю., Соланин А. М.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 298.
26. Братусь Е. Н., Гредескул С. А. и др.//ТМФ. 1988. Т. 76. С. 401.
27. Gredeskul S. A., Pastur L. A., Seba P. Preprint JINR E 17-88-805.—Dubna, 1988.
28. Bratus' E. N., Gredeskul S. A. et al.//Phys. Lett. Ser. A. **1988**. V. 131. P. 449.
29. Гредескул С. А., Шумейко В. С.//XIII Всесоюзное совещание по теории полупроводников.—Ереван, **1987**.
30. Гапонов С. В.//Вестн. АН СССР. **1984**. № 12. С. 3.
- [31] Герцеништейн Н. Е., Васильев В. Б.//Радиотехн. и электрон. **1959**. Т. 4. С. 611.
32. Герцеништейн Н. Е., Васильев В. Б.//Теория вероятн. и ее примен. **1959**. Т. 4. С. 424.
33. Рытое С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику.—М.: Наука, 1978.
34. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайных средах.—М.: Наука, 1980.
35. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн.—М.: Наука, 1986.
36. Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». **1990**. Т. 37. С. 28.
37. Freylikher V. D., Gredeskul S. A.//J. Opt. Soc. Amer. Ser. A. **1990**. V. 7. P. 144.
38. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.—М.: Наука, 1973.
39. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И. Прохождение радиоволн через атмосферу Земли.—М.: Радио и связь, 1983.
40. Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. Препринт ИРЭ АН СССР № 9(381).—Москва, 1984.
- [41] Альтигулер Б. Л.//Письма ЖЭТФ. **1985**. Т. 41. С. 530.
42. Альтигулер Б. Л., Хмельницкий Д. Е. //Ibidem. Т. 42. С. 291.
43. Localization, Interaction and Transport Phenomena in Impure Metals/Eds B. Kramers et al.—Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1984.
44. Directions in Condensed Matter Physics/Eds G. Grinstein, G. Mazenko.—Singapore, N. J.: World Scientific, 1986.
45. Кукушкин А. В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». **1987**. Т. 30. С. 811.
46. Радиоокеанографические исследования морского волнения./Под ред. С. Я. Брауде.—Киев: Изд. АН УССР. 1962.
47. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, **1967**.
48. Соколовский В. Н., Черкашина Л. Н.//Радиотехника и электроника. **1971**. Т. 16. С. 1391.
49. Кагановский Ю. С., Макиенко А. И., Фрейлихер В. Д.//ФММ. **1976**. Т. 42. С. 588.
50. Кагановский Ю. С., Фрейлихер В. Д., Юрченко С. П.//Опт. и спектроскоп. **1984**. Т. 56. С. 472.
- [51] Dainty J. C., Kirn M.-J., Sant A. I. Notes for Tallinn Workshop, 1988. Blackett Lab., Imperial Col. London.
52. O'Donnell K. A., Mendez E. R.//J. Opt. Soc. Amer. Ser. A. **1987**. V. 4. P. 1194.
53. Kohler W., Papanicolaou G.//J. Math. Phys. **1973**. V. 14. P. 1753.
54. Azbel M. Ya.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 28. P. 4116.
55. Ishii A.//Prog. Theor. Phys. Supl. **1973**. V. 53. P. 77.
56. O'Connor J., Lebowitz J.//S. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 692.
57. Пастур Л. А., Фельдман Э. Я.//ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 487.
58. Марченко А. В., Пастур Л. А.//ТМФ. **1986**. Т. 68. С. 433.
59. Papanicolaou G.//J. Appl. Math. 1971. V. 21. P. 13.
60. Марченко А. В., Молчанов С. А., Пастур Л. А.//ТМФ. **1989**. Т. 80. С. 343.
- [61] Лифшиц И. М., Кирпичников В. Я.//ЖЭТФ. **1979**. Т. 77. С. 989.
62. Перель В. И., Поляков Д. Г.//ЖЭТФ. **1984**. Т. 86. С. 352.
63. Кляцкин В. И., Ярошук И. О.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». **1983**. Т. 26. С. 1241.
64. Ярошук И. О.//Ж. выч. мат. и мат. физ. **1984**. Т. 24. С. 1718.
65. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.—М.: Наука, 1974.
66. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.—М.: Наука, 1971.
67. Freylikher V. D., Tarasov Yu. V.//URSI EM Theory Symposium.—Stockholm. 1989.
68. Стоцкий А. А.//Радиотехн. и электрон. **1972**. Т. 17. С. 2277.
69. Федоров И. Н. Тонкая термохалинная структура океана.—Л.: Гидрометеоздат, 1976.
70. Gregg M. C., Briscoe M. G.//Rev. Geophys. and Space Phys. **1979**. V. 17. P. 1524.
- [71] Шур А. А. Характеристики сигнала на тропосферных радиополосах.—М.: Связь, 1972.
72. Дальнее тропосферное распространение ультракоротких радиоволн/Под ред. Б. А. Введенского, М. А. Колосова, А. М. Калинина, Я. С. Шифрина.—М.: Сов. радио, 1965.