

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

524.6+532.517.4+536.7

**КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ
В ЛАБОРАТОРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ, ОКЕАНЕ
И АСТРОФИЗИКЕ**

А. Г. Бершадский

*Посвящается памяти замечательных ученых:
Я.Б. Зельдовича и А.Н. Колмогорова*

В последнее время фрактальные структуры привлекают внимание гидродинамиков и астрофизиков. Предлагаются разнообразные теоретические модели и осуществляются наблюдения, как в лабораторных экспериментах, так и в натуральных объектах (см., например, [1—7]). Принципиальным является вопрос: насколько общими оказываются свойства наблюдаемых фрактальных структур? В данной заметке показано, что однотипные крупномасштабные фрактальные структуры (с фрактальной размерностью $D \approx 4/3$) могут возникать в лабораторной турбулентности (пространственный масштаб $\sim 10^{-1}$ м), в океане и в скоплениях галактик (пространственный масштаб до 10^2 Мпс). Эти структуры имеют перколяционный характер [8—10].

1. Мысленно разобьем область, в которой движется турбулизованная жидкость, на кубические ячейки, у которых ребра имеют длину η (колмогоровский масштаб [11]). Вихри, имеющие такой масштаб, быстро затухают под действием вязкости. В фиксированный момент времени в одних ячейках движение будет турбулентным, а в других—ламинарным (безвихревым).

Можно ввести вероятность p , с которой турбулизована данная ячейка. При $p=0$ нет турбулизованных ячеек, при $p \ll 1$ кластеры, состоящие из турбулизованных ячеек, содержат мало их количество. При $p=1$ все ячейки турбулизованы. Существует критическая концентрация $0 < p_c < 1$, при которой возникает впервые бесконечный кластер из турбулизованных ячеек. При появлении такого кластера ситуация радикально меняется. Если до его появления вводимая область движения энергия шла на увеличение числа турбулизованных ячеек и диссипацию, то после появления такого кластера эта энергия может отводиться по нему на «бесконечность», т. е. выводиться из области турбулентного движения.

Концентрация турбулизованных ячеек при наличии такого кластера может флуктуационно возрастать. Однако возникающие флуктуационно новые турбулизованные ячейки будут затухать под действием вязкости, из-за отсутствия постоянного подвода энергии к ним. Более того, в самом бесконечном кластере устойчивым (в силу той же причины) будет только скелет.

Скелетом бесконечного кластера называют множество ячеек, принадлежащих бесконечным путям по кластеру, т. е. тупиковые, конечные ветки кластера будут затухать под действием вязкости без постоянного подвода энергии к ним. Образующие в таких перколяционных системах критические кластеры являются фрактальными объектами [8].

2. Возникновение бесконечного кластера—явление критическое. Характерный размер вихревого кластера l вблизи p_c ведет себя как [8]

$$l \sim |p_c - p|^{-\nu}. \quad (1)$$

Критический параметр ν является универсальным и зависит только от топологической размерности пространства.

Этот параметр многократно находился разными авторами с помощью разнообразных моделей. При $d=3$ приближенно $\nu \approx 0,9$ [8].

3. Свяжем этот параметр с фрактальной размерностью D_s скелета вихревого кластера. Если задано начальное поле крупномасштабной скорости (возбуждены только вихри масштаба l_0), то каскадный процесс дробления масштаба приводит к возбуждению иерархии вихрей масштабов $l_n \sim q^{-n} l_0$ (q — кратность дробления масштаба). Процесс передачи энергии по масштабному каскаду хаотичен и поэтому анизотропность и крупномасштабная неоднородность начального поля скорости по мере уменьшения масштаба все меньше сказывается на статистическом режиме пульсации. Это должно приводить к тому, что на достаточно мелких масштабах ($l_0 \gg l_n \gg \eta$) имеет место масштабная инвариантность и локальная изотропия. Для изотропных пульсаций распределение энергии по масштабам ($l \sim k^{-1}$, k —волновое число) задается спектральной плотностью $E(k)$. Если ввести в рассмотрение характерный период пульсации на m -м шаге дробления, то из соображений размерности или простых физических рассуждений [11]:

$$T_m \sim (E(k) k^3)^{-1/2}, \quad k_m \sim l_m^{-1}. \quad (2)$$

Характерный период T_m может быть интерпретирован как время возбуждения вихрями масштаба l_m вихрей масштаба l_{m+1} . Время возбуждения полного каскада вихрей

$$t_\infty \sim \sum_{m=0}^{\infty} T_m. \quad (3)$$

Вообще говоря подставлять в (3) вместо T_m представление (2) нельзя, так как оно применимо только при достаточно больших m . Однако нас будет интересовать дальше не само значение t_∞ , а величина

$$(t_\infty - t_M) \sim \sum_{m=M}^{\infty} T_m, \quad (4)$$

а для нее при достаточно больших M можно использовать представление (2).

При достаточно больших M имеет место масштабная инвариантность и скейлинговое представление [11]:

$$E(k) \sim k^{-\alpha}. \quad (5)$$

Используя (5) и (2) получаем

$$(t_\infty - t_M) \sim \sum_{m=M}^{\infty} l_m^{(3-\alpha)/2}. \quad (6)$$

Считая, что $l_m \sim q^{-m} l_0$ (см. выше), из (6) выводим

$$(t_\infty - t_M) \sim \sum_{m=M}^{\infty} q^{-m(\alpha-3)/2} \sim q^{M(\alpha-3)/2} \quad (7)$$

(при достаточно больших M).

Через M дроблений вместо одного исходного вихря масштаба l_0 будет

$$N \sim q^M \quad (8)$$

вихрей масштаба $l_M \sim q^{-M} l_0$. В промежуточной асимптотике ($l_0 \gg l_M \gg \eta$) из (8) и (7) получаем

$$N(t_M) \sim (t_\infty - t_M)^{2/(\alpha-3)}. \quad (9)$$

Эта система вихрей (вихревой кластер [3]) будет занимать некоторый объем в пространстве с эффективным размером l_* , причем

$$N \sim l_*^{D_s}, \quad (10)$$

где D_s — фрактальная размерность вихревого кластера [3]. Тогда из (9) и (10) получаем

$$l_*(t_M) \sim (t_\infty - t_M)^{2/(\alpha-3)D_s}. \quad (11)$$

Если теперь вернуться к терминам теории перколяции, то приближение t к критическому значению t_∞ , соответствует приближению p к p_c . Обозначим $(t_\infty - t) = \tau$. Ясно, что при $\tau \rightarrow 0$ и $(p_c - p) \rightarrow 0$. Делая обычное предположение об аналитической зависимости $(p_c - p)$ от τ (при малых τ), получаем $(p_c - p) \sim \tau$. Сравнивая формулу (1) с формулой (11), находим, что

$$\frac{2}{3-\alpha} = \nu D_s. \quad (12)$$

Если считать, что D_s в (12) является устойчивой фрактальной размерностью поля завихренности (диссипации), то из работы [3] следует, что $\alpha = D_s$ (при $d=3$) и тогда из (12) находим:

$$D_s = \frac{3}{2} \pm \left(\frac{9}{4} - \frac{2}{\nu} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Если подставить в (13) известное из многочисленных исследований по перколяции, значение $\nu \approx 0,9$ [8], то

$$D_s \approx \frac{5}{3}, \quad (14)$$

$$D_{ss} = \frac{4}{3}. \quad (15)$$

Так как $\alpha = D_s$ (при $d=3$ [3]), то первое значение (14) дает известный спектр Колмогорова—Обухова [11]. Что касается второго значения (15) — $D_{ss} \approx 4/3$, то, по-видимому, оно соответствует крупномасштабным перколяционным структурам, получившим в теории перколяции название «Упругий скелет» [12]. Этой субструктуре скелета бесконечного кластера соответствуют только кратчайшие пути, соединяющие достаточно удаленные его точки. Выполненные в работе [12] численные эксперименты дают значение $D_{ss} = 1,35 \pm 0,05$, т. е. совпадающее с (15).

4. Пространственный масштаб, на котором возможна реализация «упругого скелета» в перколяционной турбулентности, должен соответствовать интегральному масштабу турбулентности (L) [11], т. е. характерному масштабу поля пульсации скорости, на протяжении которого еще сохраняется заметная корреляционная связь между значениями поля в двух точках. Таким образом, реализация «упругого скелета» будет блокироваться спонтанным нарушением масштабной инвариантности на масштабах порядка L [13]. Однако, по-видимому, возможны условия, при которых он все же реализуется (нам эти условия не известны), несмотря на спонтанное нарушение масштабной инвариантности. На рис. 1, взятой из работы [14], приведены данные для энергетического спектра турбулентности, полученные в эксперименте за гидродинамической решеткой. Данные отложены в билогарифмической шкале и проведены прямые, указывающие на выполнимость скэйлинговых законов с $\alpha \approx 5/3$ и $\alpha \approx 4/3$.

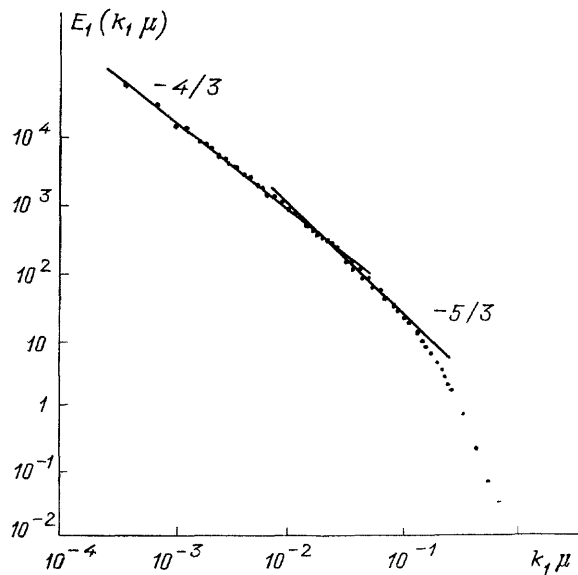


Рис. 1

На рис. 2, взятом из работы [15] (см. также [16, стр. 181]), приведены аналогичные данные наблюдений в океане в разных точках термоклина на горизонте 100 м. И здесь в крупномасштабной части спектра имеются участки со скэйлингом (показатель «4/3» указан отрезками сплошных линий).

Представляет интерес вопрос о непосредственном наблюдении фрактальных структур, обусловленных турбулентностью, как это, по-видимому, имеет место при исследовании структур облаков с помощью радаров [17—19]. Какая из структур: неустойчивая, скелет или упругий скелет выявляется при таком прямом наблюдении? По-видимому, и здесь ответ зависит от диапазона масштабов, в котором ведется исследование $D^{(1)}$.

5. Еще один пример прямого наблюдения за крупномасштабными фрактальными структурами нам предоставляет астрофизика. Если предположить, что материя во вселенной находится в турбулентном движении, то крупномасштабные скопления материи—галактики и их кластеры [3—7], приходится на области пространства, в которых происходит активная диссипация энергии, т. е. фрактальная размерность поля тур-

булентной диссипации (завихренности) совпадает с фрактальной размерностью поля плотности материи в виде галактик и их скоплений. Наблюдения за фрактальной размерностью крупномасштабных структур во вселенной (галактиками и их скоплениями) приводят для них к значению фрактальной размерности $D=1,3\pm 0,1$ [4—7], т. е. близкому к «4/3» значению.

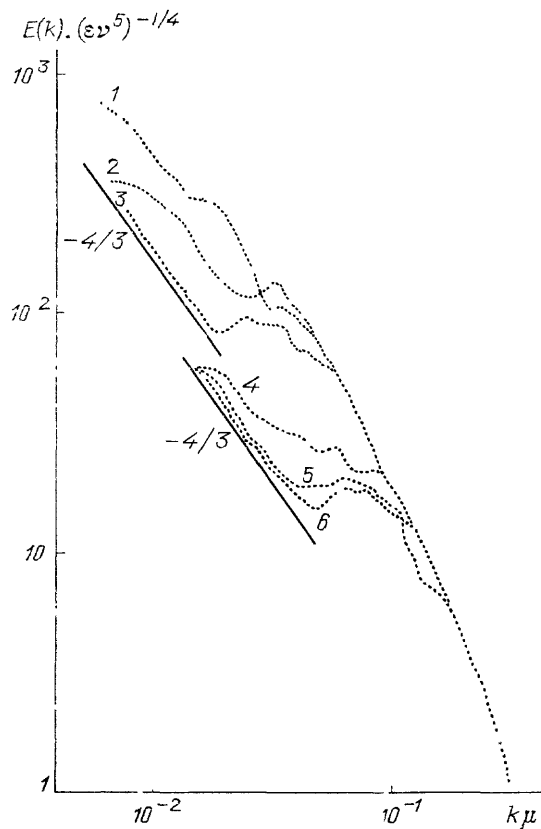


Рис. 2

Таким образом, мы видим, что в лабораторной турбулентности, в океане и атмосфере, и на масштабах, сравнимых с пределами наблюдаемой вселенной, могут оказаться действенными одни и те же представления о крупномасштабных фрактальных структурах.

ПРИМЕЧАНИЕ К ТЕКСТУ

¹ Автор благодарит Б.М. Смирнова, обратившего его внимание на этот вопрос, и Ш. Лавджой за разъяснения изменчивости наблюдений за полями облаков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hentshel H.G.E., Procaccia I.//Phys. Rev. Ser. A. **1984**. V. 29. P. 1461.
 2. Рабинович М.И., Сушик М.М.//УФН. **1990** Т. 160. С. 3.
 3. Бершадский А. Г. //ЖЭТФ **1989**. Т. 96. С. 625.
 4. Луккин Ф.//Фракталы в физике.—М.: Мир, 1988.—С. 446.
 5. Пьетронеро Л., Куперс Р.//Ibidem.— С. 454
 6. Pietronero L.//Physica. Ser. A. **1987**. V. 144. P. 257.
 7. Coleman P.H., Pietronero L., Sanders L.P.H.//Astron. and Astrophys. **1988**.V. 200. P. 32.
 8. Соколов И.Х.//УФН. **1986**. Т. 150. С. 221.

9. *Bershadsky A.G.*//Generation of large scale Structures in Continuous Media: International Symposium.Perm—Moscow, June 1990.—P. 50.
10. *Клѣтин А.А.*//Астрон. ж. **1987**. Т. 64. С. 15.
- [11].*Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч 2.—М.: Наука, 1967.
12. *Herrmann H. J., Hong D. C., Stanley H. E.*//J. Phys. Ser. A. **1984**. V. 17. P. L261.
13. *Бершадский А. Г.*//ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 117.
14. *Schedvin J., Stegen G. R., Gibson C. H.*//J. Fluid Mech. **1974**. V. 65. P. 561.
15. *Беляев В.С., Лозовацкий И.Д., Озмидов Р.В.* //Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». **1975**. Т. 11. С. 718.
16. Океанология. Физика океана. Т. 1.—М.: Наука, 1978.
17. *Lovejoy S.*//Science. **1982**. V. 216. P. 186.
18. *Schertzer D., Lovejoy S.* //Fractals: Physical Origin and Properties/Ed. L. Pietronero.—New York: Plenum Press, 1990.—P. 49.
19. *Schertzer D., Lavallee D., Lovejoy S.*//[9] —P. 209.