

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

УФН 1990

ТОМ СТО ШЕСТИДЕСЯТЫЙ

Журнал издается с апреля 1918г.

Декабрь 1990 г.

Том 160, вып. 12

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.184

**ОПТИЧЕСКОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ:
НОВЫЕ ИДЕИ И НОВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ**

А. В. Андреев

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	1
2. Полуклассическая система уравнений взаимодействия двухуровневой системы атомов с резонансным электромагнитным полем	5
2.1. Волновое уравнение. 2.2. Нормированные уравнения и основные параметры задачи. 2.3. Начальные и граничные условия. 2.4. Интегралы движения. 2.5. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд.	
3. Динамика системы на линейном этапе генерации	9
3.1. Однородные граничные условия. 3.2. Время задержки. 3.3. Сверхизлучение в резонаторе. 3.4. Корреляционные свойства импульса сверхизлучения. 3.5. Неоднородное уширение.	
4. Одноволновые задачи	15
4.1. Взаимодействие встречных волн. 4.2. Солитонное распространение импульсов в неограниченных средах. 4.3. Экспоненциальное и латаргическое усиление. 4.4. Солитонные решения в пространственно-неоднородных средах.	
5. Двухволновые задачи	24
5.1. Сверхизлучение и суперлюминисценция. 5.2. Сверхизлучение, суперлюминисценция и самовозбуждение в оптическом резонаторе 5.3 Коллективное сверхизлучение	
6. Сверхизлучение системы ядерных спинов	38
6.1. Экспериментальные исследования. 6.2. Теория спинового сверхизлучения	
Приложения	44
1. Вывод уравнений взаимодействия системы двухуровневых атомов с излучением. 2. Система медленноменяющихся уравнений в нерезонансном случае	
Список литературы	46

1. Введение. Оптическое сверхизлучение—один из наиболее ярких примеров кооперативного поведения многоатомных систем. Отличие его от других коллективных процессов состоит в том, что система сама за счет внутренних взаимодействий составляющих ее частиц приходит из некоррелированного в коррелированное состояние, когда радиус корреляции моментов переходов частиц принимает макроскопические значения. Сверхизлучение (СИ) было предсказано Дике в 1954 г. [1], еще в долазерную эпоху. Однако экспериментально СИ было обнаружено по-

сле создания лазеров [2], а требования, предъявляемые к накачке активных сред, удалось выполнить именно благодаря использованию лазерной накачки. Хорошо известно, что СИ и лазерная генерация представляют собой два предельных случая одного и того же процесса. Процесс любой генерации основан на взаимодействии двух подсистем: среды, которая вначале выступает в качестве аккумулятора энергии, и поля, которому среда передает запасенную энергию. Для получения когерентного излучения необходимо, чтобы, по крайней мере, одна из взаимодействующих подсистем была упорядочена, т.е. имела как можно меньше степеней свободы, по которым распределяется ее энергия. В идеальном случае нужно, чтобы и излучатели и поле имели одну и ту же резонансную частоту ω_0 с предельно малыми ширинами $\Delta\omega_a$ и $\Delta\omega_f$ и кроме того, чтобы диаграмма направленности поля излучения имела предельно малые значения. В лазерах такое упорядочение достигается за счет дискриминации мод поля излучения. А узость линии поля $\Delta\omega_f$ достигается использованием высокодобротных резонаторов. Поэтому поле должно достаточно долго находиться в резонаторе по сравнению с временем пролета через него, чтобы успеть совершить хотя бы несколько пробегов. Мы будем интересоваться далее режимом свободной генерации, когда первоначально возбужденная среда в результате самопроизвольного распада генерирует импульс излучения. Ширина линии поля определяется в этом случае длиной среды l . Если не происходит отражения поля на границах среды, то $\Delta\omega_f = 1/\tau$, где $\tau = L/c$ — время пролета кванта через среду. Если имеет место отражение поля на границах среды, то

$$\Delta\omega_f = \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{r_1 r_2},$$

где r_1, r_2 — амплитудные коэффициенты отражения. Если длина среды много меньше длины резонатора, то в эти формулы войдет в качестве L длина резонатора. Но в этом случае мы должны возбуждать активную среду синхронно с приходом импульса, поэтому этот случай является по сути режимом усиления падающего извне импульса, который нужно рассматривать отдельно. Ширина линии атомного перехода $\Delta\omega_a = 1/T_2$. При $\Delta\omega_f \ll \Delta\omega_a$ упорядочение достигается за счет поля. В обратном предельном случае: $\Delta\omega_f \gg \Delta\omega_a$ — за счет среды. Первый случай близок к режиму лазерной генерации и в беззеркальных системах называется режимом суперлюминесценции (СЛ) или усиления спонтанного излучения. Второй случай, когда упорядочение достигается за счет узости линии атомных переходов, называется СИ. Дискриминация мод поля (по направлениям вылета квантов) достигается в обоих этих случаях выбором иглообразной формы активной среды. Волна, распространяющаяся вдоль оси образца, усиливается в этом случае значительно сильнее, чем волны, испускаемые по другим направлениям.

Систему атомов, взаимодействующих с полем излучения, можно характеризовать следующими параметрами: N/V — плотность атомов, $\Delta\omega_a = 1/T_2$ — ширина линии атомного перехода, L — длина среды, определяющая ширину линии поля $\Delta\omega_f = c/L$; T_1 — время спонтанного распада отдельного атома; r_1, r_2 — коэффициенты отражения на границах среды. Если среда неоднородно уширена, то добавляется параметр неоднородного уширения $\Delta\omega^* = 1/T_2^*$. В настоящей статье мы постараемся ответить на следующие вопросы. Как параметры импульсов свободной генерации зависят от перечисленных выше параметров? Как и в каких пределах можно управлять параметрами импульсов генерации? Какой режим — СИ или СЛ — выгоднее с точки зрения получения наибольшей скорости перекачки энергии из возбужденной среды в поле излуче-

ния? Для сравнения эффективности различных режимов, на наш взгляд, удобно выбрать такую нормировку амплитуды поля $a(x,t)$, чтобы плотность энергии поля определялась выражением $W(x,t) = \hbar\omega_0(N/V)n(x,t)$. В этом случае $n(x,t) = |a(x,t)|^2$ имеет смысл плотности числа квантов в единицах плотности числа частиц. Следовательно, интегральное по времени значение $\overline{n(x,t)}$ определяет число испущенных квантов, приходящихся на один атом. В качестве единицы измерения длительности импульса удобно выбрать время пролета $\tau = L/c$. Ясно, что минимальная длительность импульса излучения или цуга импульсов будет иметь величину порядка τ . Такая нормировка вводится в разделе 2 статьи. Ответы на поставленные выше вопросы позволяют определить возможности управления параметрами импульсов излучения и указать пути оптимизации процесса генерации.

В настоящее время существует ряд методов, позволяющих формировать импульсы с заданными параметрами (см., например, [3—10]). Во всех этих случаях формирование импульса происходит в многокаскадных системах. Однако, на наш взгляд, еще не исчерпаны все возможности формирования импульсов с заданными параметрами уже в первом каскаде. Этот вопрос становится все более актуальным еще и потому, что с появлением импульсов фемтосекундной длительности открылись широкие возможности сверхбыстрого приготовления возбужденных сред, позволяющие использовать режим когерентной коллективной генерации. Теоретические и экспериментальные исследования режима сверхизлучения [9—26] проводились, как правило, в отрыве от теории лазерной генерации. На наш взгляд, сейчас настала пора объединения и сопоставления различных теорий.

Обсуждавшаяся выше оптимизация процесса генерации по параметрам активных сред не исчерпывает всех возможностей управления параметрами импульсов излучения. Действительно, общая задача о взаимодействии атомной и полевой подсистем зависит также от начальных и граничных условий. Граничные условия мы, по сути дела, учли, включив в параметры системы коэффициенты отражения r_1 и r_2 . Начальные же условия могут существенно повлиять на характер радиационного распада системы. Так в [27] были определены суперсимметричные решения общей системы уравнений взаимодействия ансамбля двухуровневых атомов с резонансным полем и было показано, что выбор начальных условий, соответствующих этим решениям, приводит к генерации импульса максимальной интенсивности. Суть явления заключается в следующем. Высокая скорость распада СИ-систем объясняется тем, что атомная подсистема приходит в состояние полностью симметричное относительно перестановок атомов. Эта ситуация, как известно, может осуществиться лишь в двух случаях: в системе с размерами много меньше длины волны излучения или в случае взаимодействия протяженной многоатомной системы с одной модой поля. В реальных протяженных системах неоднородность амплитуды поля по длине образца нарушает симметрию атомной подсистемы. Это приводит к увеличению длительности импульса генерируемого излучения. В [27] было показано, что существуют состояния, учитывающие симметрию полной атомно-полевой системы, а не только атомной подсистемы. Процесс радиационного распада в протяженной многоатомной системе протекает в этом случае как в сосредоточенной и имеет максимальную скорость и минимальную длительность при заданной плотности инверсии.

К указанному выше кругу вопросов близко примыкают вопросы о распространении импульсов в резонансных средах в режиме когерентного взаимодействия [28—37]. Один из наиболее ярких эффектов в этой области—эффект самоиндуцированной прозрачности—детально

исследован как экспериментально [10, 11, 28, 29], так и теоретически [30—35]. Одновременно с развитием теории распространения 2π -импульсов в резонансно поглощающих средах развивалась и теория их распространения в резонансно усиливающих средах (см. [36] и ссылки в ней). В последнем случае, при развитии теории в полубесконечных средах, при определенных значениях параметров задачи возникают, казалось бы, нефизические выводы, например, о распространении импульса со сверхсветовыми скоростями и т. п. Уже в [36] было отмечено, что для правильной интерпретации явления нужно рассматривать ограниченные среды. В настоящей статье мы получим солитонные решения для пространственно неоднородных сред (в том числе пространственно ограниченных), которые дают наглядную интерпретацию всех особенностей распространения солитонов в усиливающих средах. Показаны возможности управления состоянием среды, открывающие широкие перспективы формирования импульсов с заданным профилем, в особенности в многоуровневых системах.

Теория сверхизлучения возникла из анализа задачи о радиационном распаде многоатомной системы с размерами много меньше длины волны излучения. Долгое время считалось, что эта задача чисто модельная и ее привлекательность состоит лишь в возможности точного описания ее динамики. Однако выполненные недавно эксперименты [38—40] показали возможность физической реализации этой модели, что представляет безусловный интерес для теории СИ, поскольку дает возможность проверки основ теории.

Обсуждение упомянутого выше круга вопросов составляет основу содержания настоящей статьи. В разделе 2 статьи дан вывод уравнений полуклассической теории резонансного взаимодействия излучения с веществом, проведено обезразмеривание полученных уравнений, обсуждаются начальные и граничные условия. Определены интегралы движения. В разделе 3 проведен анализ линейной стадии процесса генерации. Показано, что анализ линейной стадии позволяет определить время задержки импульса, величину амплитуды поля в его максимуме, проанализировать качественное влияние неоднородного уширения на параметры импульсов излучения. Исследована динамика корреляционных свойств поля в процессе генерации, определена зависимость радиуса корреляции поля от характерных параметров задачи. В разделе 4 обсуждаются задачи когерентного усиления импульсов в резонансных средах, обсуждаются условия реализации латаргического и экспоненциального усиления. Рассмотрены особенности распространения солитонных импульсов в резонансно усиливающих средах конечной длины. Показаны возможности управления движением населенностей уровней в активной среде и параметрами усиленных импульсов на выходе из среды. В разделе 5 представлены графики зависимостей основных параметров импульсов (пикового значения интенсивности и длительности импульса) от параметров среды. Определены границы областей насыщения интенсивности, превышение плотности инверсии над которыми не приводит к увеличению пикового значения интенсивности. Определены зависимости указанных параметров импульсов от амплитудных коэффициентов отражения на границах среды, показавшие возможность оптимизации параметров импульсов сверхизлучения и позволившие ввести математические критерии определения режима генерации. Анализ задачи о возможности оптимизации параметров импульсов генерации при вариации начальных условий привел к предсказанию нового режима генерации—коллективного сверхизлучения. Обсуждению особенностей этого режима посвящен п.5.3 данного раздела статьи. В разделе 6 обсуждаются особенности сверхизлучения системы ядерных спинов, генерирующих когерентное излучение с длиной волны, во много раз пре-

вышающей размеры активной среды. Предложен вариант теории спинового СИ, дающий связь основных параметров импульсов с микроскопическими характеристиками ансамбля ядерных спинов.

2. Полуклассическая система уравнений взаимодействия двухуровневой системы атомов с резонансным электромагнитным полем.

2.1. Волновое уравнение. Система полуклассических уравнений взаимодействия излучения с веществом получается усреднением квантовой системы уравнений (П1.10) (см. приложение 1) с использованием полуклассического расщепления операторов:

$$\langle \sigma_{\pm} A \rangle = \langle \sigma_{\pm} \rangle \langle A \rangle, \quad \langle \sigma_3 A \rangle = \langle \sigma_3 \rangle \langle A \rangle. \quad (2.1)$$

Если взаимодействие излучателей осуществляется посредством поперечного электромагнитного поля, система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A(\mathbf{r}, t) &= -\frac{4\pi}{c} (j^+ + j^-), \\ \frac{\partial j^+}{\partial t} - i\omega_0 j^+ + \frac{j^+}{2T_2} &= \frac{i|m|^2}{\hbar c} A\rho, \\ \frac{\partial j^-}{\partial t} + i\omega_0 j^- + \frac{j^-}{2T_2} &= -\frac{i|m|^2}{\hbar c} A\rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho - \rho_e}{T_1} &= \frac{2i}{\hbar c} (j^+ - j^-) A, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$j^{\pm} = m \sum_{i=1}^N \langle \sigma_{i\pm} \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \rho = \sum_{i=1}^N \langle \sigma_{i3} \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad m = e\mathbf{m},$$

$\mathbf{e}$ —единичный вектор поляризации волны, T_2 —время поперечной релаксации, T_1 —продольной, ρ_e —равновесное значение разности населенностей. При выводе уравнений (2.2) мы пренебрегли эффектами неоднородного уширения и положили $m_i = m_0$, что выполняется в отсутствие вырождения уровней (т. е. в истинной двухуровневой системе). В отсутствие релаксации, т. е. при $T_2 = T_1 = \infty$ система уравнений (2.2) имеет хорошо известный интеграл движения

$$j^+(\mathbf{r}, t) j^-(\mathbf{r}, t) + \frac{|m|^2}{4} \rho^2(\mathbf{r}, t) = \text{const}. \quad (2.3)$$

Исходя из аналогии между системой классических осцилляторов и двухуровневой системой атомов, уравнения (2.2) записывают часто в следующей эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A(\mathbf{r}, t) &= -\frac{4\pi}{c} j(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + \frac{1}{T_2} \frac{\partial j}{\partial t} + \left(\frac{1}{4T_2^2} + \omega_0^2 \right) j &= -\frac{2\omega_0 |m|^2}{\hbar c} A\rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho - \rho_e}{T_1} &= \frac{2}{\hbar \omega_0 c} A \frac{\partial j}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $j = j^+ + j^-$. В этом случае при $T_2 = T_1 = \infty$ интеграл движения (2.3) принимает следующую форму

$$\left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 + \omega_0^2 j^2 + |m|^2 \omega_0^2 \rho^2 = \text{const}. \quad (2.5)$$

Таким образом, уравнения (2.2) (или (2.4)) в случае $T_2 = T_1 = \infty$ имеют закон сохранения (2.3) (или (2.5)), являющийся основой для описания процессов когерентного резонансного взаимодействия излучения с веществом. Следует особо отметить, что в выражения (2.3) и (2.5) входят величины, осциллирующие на оптической частоте. Традиционно эти законы сохранения выводятся из уравнений для медленноменяющихся амплитуд. Отметим также, что если в (2.2) $j^\pm$ являются комплексными функциями, то j в (2.4) является действительной величиной.

Далее мы будем пользоваться приближением плоских волн. Введем медленноменяющиеся амплитуды $A_{1,2}(x, t)$ правой и левой волн, определяющиеся выражением

$$A(\mathbf{r}, t) = A_1(x, t) \sin(\omega t - kx) + A_2(x, t) \sin(\omega t + kx + \varphi), \quad (2.6)$$

волновой вектор k определяется условием $k = 2\pi n/L$, где L — длина среды, $\omega = kc$ и положим, что $\omega = \omega_0$. В этом случае система уравнений для медленноменяющихся амплитуд примет вид (вид системы уравнений в случае $\omega \neq \omega_0$ представлен в приложении 2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + c \frac{\partial A_1}{\partial x} &= \frac{2\pi}{\kappa} j_1, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} - c \frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{2\pi}{\kappa} j_2, \\ \frac{\partial j_1}{\partial t} + \frac{j_1}{2T_2} &= \frac{|m|^2}{\hbar c} (A_1 \rho_0 + A_2 \rho_1), \\ \frac{\partial j_2}{\partial t} + \frac{j_2}{2T_2} &= \frac{|m|^2}{\hbar c} (A_2 \rho_0 + A_1 \rho_1), \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\rho_0 - \rho_l}{T_1} &= -\frac{1}{\hbar c} (A_1 j_1 + A_2 j_2), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\rho_1}{T_1} &= -\frac{1}{2\hbar c} (A_1 j_2 + A_2 j_1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} j(\mathbf{r}, t) &= j_1(x, t) \cos(\omega t - kx) + j_2(x, t) \cos(\omega t + kx + \varphi), \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_0(x, t) + 2\rho_1(x, t) \cos(2kx + \varphi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Как видно из последнего выражения, в (2.7) мы учли возможность наведения решетки населенностей на пространственной частоте $K = 2k$, что может, в принципе, иметь место при генерации в резонаторе в условиях кооперативного распада. Действительно, одним из условий наблюдения кооперативных эффектов является условие

$$T_2, T_2^* \gg \tau_p, \quad (2.9a)$$

где T_2^* — время неоднородной поперечной релаксации, а τ_p — характерная длительность импульса излучения. Если положить, что T_2^* обусловлено доплеровским уширением, то условие (2.8) принимает вид

$$T_2^* = \frac{\lambda}{v_T} \gg \tau_p. \quad (2.9b)$$

Поскольку λ/v_T есть время пролета частицей расстояния между двумя ближайшими пучностями электромагнитного поля в резонаторе, то условие (2.9a) означает, что тепловое движение атомов не успевает за время длительности импульса генерации разрушить решетку инверсии населенностей, наведенной в активной среде. Однако заметное влияние на динамику распада системы эти эффекты могут оказать лишь при определенных параметрах задачи (см., например, п. 2.5 и 4.1). Анализ некоторых аспектов динамики такого распада предпринят в [41, 42].

2.2. НОРМИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ. Введем безразмерную координату $x' = xL$ и время

$t' = t/\tau$, где $\tau = L/c$ — время пролета кванта через образец, а также от-
нормируем неизвестные функции следующим образом

$$\begin{aligned} A_{1,2}(x, t) &= a_{1,2}(x, t) \left(\frac{8\pi\hbar c^2 N}{\omega V} \right)^{1/2}, \\ p_{1,2}(x, t) &= \frac{2\pi\tau}{\kappa} j_{1,2}(x, t) \left(\frac{8\pi\hbar c^2 N}{\omega V} \right)^{-1/2}, \\ R_{0,1}(x, t) &= \rho_{0,1}(x, t) \left(\frac{N}{V} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В новых безразмерных переменных система уравнений (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial x} &= p_1, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{\partial a_2}{\partial x} = p_2, \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + \alpha p_1 &= \beta (a_1 R_0 + a_2 R_1), \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \alpha p_2 &= \beta (a_2 R_0 + a_1 R_1), \\ \frac{\partial R_0}{\partial t} + \alpha_1 (1 + R_0) &= -4 (a_1 p_1 + a_2 p_2), \\ \frac{\partial R_1}{\partial t} + \alpha_1 R_1 &= -2 (a_1 p_2 + a_2 p_1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\beta = \frac{2\pi |m|^2}{\hbar\omega} \frac{N}{V} \tau, \quad \alpha = \frac{\tau}{2T_2}, \quad \alpha_1 = \frac{\tau}{T_1}. \quad (2.12)$$

В (2.11) мы опустили штрихи у безразмерных переменных x' и t' . Отно-
шение коэффициентов β и α , как следует из (2.11), определяет стациона-
рный коэффициент усиления. Действительно, при

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} = \frac{\partial p_n}{\partial t} = 0,$$

имеем из (2.11)

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{\beta}{\alpha} R_0(0) a_1 = \mu_0 L a_1.$$

Следовательно, в случае полной инверсии ($R_0(0)=1$)

$$\mu_0 L = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4\pi |m|^2}{\hbar\omega} \tau \frac{N}{V} T_2 = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{T_2}{T_1} L. \quad (2.13)$$

В условиях нормировки (2.10) величина $n(x, t) = |a(x, t)|^2$ имеет смысл
плотности числа квантов, нормированной на плотность резонансных ато-
мов. В частности, плотность энергии электромагнитного поля выража-
ется через n_1 и n_2 следующим образом:

$$W_F(x, t) = \hbar\omega_0 \frac{N}{V} (n_1(x, t) + n_2(x, t)), \quad (2.14)$$

а плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) имеет вид

$$S(x, t) = e_x \hbar\omega_0 \frac{N}{V} (n_1(x, t) - n_2(x, t)). \quad (2.15)$$

2.3. Начальные и граничные условия. В задачах, свя-
занных с исследованием самопроизвольного распада многоатомных сис-

тем, начальные условия для поля и поляризации должны быть однородными:

$$a_1(x, 0) = a_2(x, 0) = p_1(x, 0) = p_2(x, 0) = 0. \quad (2.16)$$

Однако система уравнений (2.11) с начальными условиями (2.16) имеет тождественно нулевое решение. Это связано с тем, что полуклассическое расщепление операторов (2.1) приводит к потере источников спонтанного излучения. Поэтому либо приходится дополнять систему уравнений (2.11) эффективными источниками спонтанной поляризации, либо выбирать ненулевые начальные условия. Например, в виде

$$a_n(x, 0) = a_{0n}(x), \quad p_n(x, 0) = p_{0n}(x), \quad (2.17)$$

где либо a_{0n} , либо p_{0n} могут быть равны нулю. Величину p_{0n} можно определить, если на начальной стадии не пользоваться расщеплением (2.1), а учитывать двухчастичные корреляции коллективных атомных операторов $R^\pm$ (подробнее см., например, [1]):

$$p_{01}^2 + p_{02}^2 = \frac{\beta}{2N^2} \langle R^+ R^- + R^- R^+ \rangle|_{t=0} = \frac{\beta}{2N};$$

следовательно,

$$p_{01} = p_{02} = \left(\frac{\beta}{2N} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

В более последовательных теориях начальные условия задаются в виде корреляционной матрицы (см., например, [43]):

$$K_{nm}(x, x') = \langle a_n^*(x, 0) a_m(x', 0) \rangle, \quad (2.19)$$

где скобки означают квантовое усреднение в рамках квантовых теорий или усреднение по реализациям в феноменологических теориях.

Граничные условия для медленноменяющихся амплитуд $a_n(x, t)$ имеют вид

$$a_1\left(-\frac{1}{2}, t\right) = r_1 a_2\left(-\frac{1}{2}, t\right), \quad (2.20a)$$

$$a_2\left(\frac{1}{2}, t\right) = r_2 a_1\left(\frac{1}{2}, t\right), \quad (2.20б)$$

где $r_{1,2}$ — амплитудные коэффициенты отражения на левом ($x=-1/2$) и правом ($x=1/2$) концах активной среды. Отметим, что введение фазы φ в выражения (2.6), (2.8) позволяет учесть различие фаз коэффициентов отражения: $r_{1,2} = |r_{1,2}| \exp(i\varphi_{1,2})$, тогда $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

2.4. Интегралы движения. Из (2.11) несложно получить следующее выражение, имеющее смысл локального закона изменения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_F + W_A) + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad (2.21)$$

где

$$W_A = \frac{\hbar \omega_0}{2} R_0. \quad (2.22)$$

Интегрируя выражение (2.21) по времени и по длине образца и учитывая граничные условия (2.20a), (2.20б), получаем

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + (1 - |r_2|^2) \int_0^t n_1\left(\frac{1}{2}, t'\right) dt' + (1 - |r_1|^2) \int_0^t n_2\left(-\frac{1}{2}, t'\right) dt' = \\ = \frac{1}{2} (1 - \bar{R}_0), \quad \text{где } n_{1,2}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} n(x, t) dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Полученное выражение определяет закон сохранения энергии в интегральной форме.

Второе интегральное выражение можно получить из последних четырех уравнений системы (2.11). Оно имеет вид

$$\sum_{n=1}^2 |p_n(x, t)|^2 + \frac{\beta}{4} (R_0^2(x, t) + 2R_1^2(x, t)) + \\ + 2 \int_0^t \left\{ \alpha \sum_{n=1}^2 |p_n(x, t')|^2 + \alpha_1 \frac{\beta}{4} [(1 + R_0) R_0 + 2R_1^2] \right\} dt' = \text{const.} \quad (2.24)$$

В случае $\alpha = \alpha_1 = 0$ оно превращается в закон сохранения длины блоховского вектора:

$$p_1^2(x, t) + p_2^2(x, t) + \frac{\beta}{4} (R_0^2(x, t) + 2R_1^2(x, t)) = \text{const.} \quad (2.25)$$

Это выражение следует как непосредственно из системы уравнений (2.11), так и в результате подстановки выражений (2.8), (2.10) в (2.5) и усреднения последнего по периоду $T = 2\pi/\omega_0$ и длине волны $\lambda = 2\pi/k$.

2.5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННОМЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД. Как было отмечено в п. 2.1, одним из условий возникновения процессов самодифракции, обусловленных процессами четырехфотонного рассеяния, является условие (2.9). Однако этого условия недостаточно для эффективного наведения светоиндуцированной решетки населенностей. Из последнего уравнения системы (2.11) следует, что R_1 близко к R_0 , если $|a_1 p_1| \sim |a_1 p_2|$. Как будет показано в следующем разделе статьи, при самопроизвольном распаде открытых систем ($r_1, r_2 < 0,9$), как правило, $|a_1 p_1| \gg |a_1 p_2|$. В этом случае система уравнений (2.11) принимает более простой вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{\partial a_2}{\partial x} = p_2, \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + \alpha p_1 = \beta a_1 R, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + \alpha p_2 = \beta a_2 R, \\ \frac{\partial R}{\partial t} = -4(a_1 p_1 + a_2 p_2). \quad (2.26)$$

В этом случае законы сохранения (2.21) и (2.23) сохраняют свой вид, а выражение (2.25) преобразуется к виду

$$p_1^2 + p_2^2 + \frac{\beta}{4} R^2 = \text{const.} \quad (2.27)$$

3. Динамика системы на линейном этапе генерации. Исследуем динамику системы на линейном этапе, когда выполняется условие $1 - R(t) \ll R(0) = 1$.

3.1. Однородные граничные условия. Если отражением поля на границах среды можно пренебречь, то граничные условия (2.20) принимают вид

$$a_1\left(-\frac{1}{2}, t\right) = a_2\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \quad (3.1)$$

В этом случае на линейном этапе правая и левая волны развиваются независимо друг от друга. Полагая $R_0(x) = 1$, для правой волны из

(2.26) можно получить следующую систему двух линейных уравнений

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha p = \beta a. \quad (3.2)$$

Используя преобразование Лапласа — Карсона

$$a(x, u) = \int_0^\infty a(x, t) e^{-ut} dt \quad (3.3)$$

для изображения $a(x, u)$, несложно получить

$$\frac{\partial a(x, u)}{\partial x} + \left(u - \frac{\beta}{u + \alpha}\right) a(x, u) = a(x, 0) + \frac{p(x, 0)}{u + \alpha}. \quad (3.4)$$

Пусть $p(x, 0) = 0$ тогда, выполняя обратное преобразование Лапласа — Карсона, для $a(x, t)$ можно получить следующее выражение

$$a(x, t) = \int_{-1/2}^x a(x', 0) G_a(x - x', t) dx', \quad (3.5)$$

где функция Грина $G_a(x - x', t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} G_a(x - x', t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \exp \left\{ u [t - (x - x')] + \frac{\beta (x - x')}{u + \alpha} \right\} du = \\ &= \left[\frac{\beta (x - x')}{t - (x - x')} \right]^{1/2} I_1 \left(2 \{ \beta (x - x') [t - (x - x')] \}^{1/2} \right) \times \\ &\quad \times \exp \{ -\alpha [t - (x - x')] \} \theta(t - (x - x')); \end{aligned} \quad (3.6)$$

здесь $\theta(z)$ — ступенчатая функция Хэвисайда:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= 1, \quad z \geq 0, \\ &= 0, \quad z < 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если в начальный момент $a(x, 0) = 0$ и отлична от нуля спонтанная поляризация $p(x, 0)$, то решение системы уравнений (3.2) имеет вид

$$a(x, t) = \int_{-1/2}^x p(x', 0) G_p(x - x', t) dx', \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} G_p(x - x', t) &= I_0 \left(2 \{ \beta (x - x') [t - (x - x')] \}^{1/2} \right) \times \\ &\quad \times \exp \{ -\alpha [t - (x - x')] \} \theta(t - (x - x')). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2. ВРЕМЯ ЗАДЕРЖКИ. Оценим зависимость от параметров задачи величин характерных времен изменения амплитуды поля. Положим для простоты, что

$$a(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = \left(\frac{\beta}{2N} \right)^{1/2} \delta(x). \quad (3.10)$$

В этом случае

$$a\left(\frac{1}{2}, t\right) = \left(\frac{\beta}{2N} \right)^{1/2} I_0 \left(\left[2\beta \left(t - \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \right) \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] \theta \left(t - \frac{1}{2} \right). \quad (3.11)$$

При $\beta t \gg 1$ можно воспользоваться асимптотикой модифицированной функции Бесселя. Тогда

$$a\left(\frac{1}{2}, t\right) = \left(\frac{\beta}{2N} \right)^{1/2} \frac{\exp \{ 2\beta [t - (1/2)]^{1/2} - \alpha [t - (1/2)] \}}{[2\pi \{ 2\beta [t - (1/2)] \}^{1/2}]^{1/2}}. \quad (3.12)$$

Из закона сохранения (2.23) следует, что

$$\int_{1/2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}, t\right) dt \leq \frac{1}{2},$$

так как в каждую сторону при симметричных начальных условиях испускается половина полного числа квантов. Используя (3.12), несложно получить

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{t_0+1/2} n\left(\frac{1}{2}, t\right) dt &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}N} G^{1/2} e^G [\Phi(G^{1/2}) - \Phi(G^{1/2} - (2t_0^*\alpha)^{1/2})] \approx \\ &\approx \frac{1}{8\pi N} \left[\frac{\exp\left\{2\alpha \left[\left(\frac{2G}{\alpha} t_0^*\right)^{1/2} - t_0^*\right]\right\}}{1 - (2\alpha t_0^*/G)^{1/2}} - 1 \right] = \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$t_0^* = t_0 + \frac{1}{2}.$$

Время задержки определяется по моменту достижения пикового значения интенсивности. При симметричной форме импульса излучения к этому моменту испустится половина от полного числа квантов. В (3.13) мы использовали следующее обозначение

$$G(\Gamma) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \frac{N}{V} \frac{1}{\Gamma T_1} L, \quad (3.14)$$

где $\Gamma = 1/2T_2$ — однородная ширина линии. Из (3.13) для времени задержки t_0 получаем следующее выражение

$$t_0 = \frac{1}{2} + \left\{ \left(\frac{G}{2\alpha} \right)^{1/2} - \left[\frac{G}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \ln(2\pi N) \right]^{1/2} \right\}^2. \quad (3.15)$$

С другой стороны, правая часть выражения (3.12) достигает максимума при

$$t_m = \frac{1}{2} + \frac{2G}{\alpha}. \quad (3.16)$$

Таким образом, пока $G > \ln(2\pi N)$, время задержки определяется формулой (3.15). Отметим, что $G = \mu_0 L$, т. е. в сильноусиливающих средах выражение для времени задержки определяется формулой (3.15). В частности, при

$$G(\Gamma) \gg \ln(2\pi N)$$

из (3.15) получаем

$$t_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\beta} \ln^2(4\pi N). \quad (3.17)$$

При $G < \ln(2\pi N)$ левая часть выражения (3.13) не достигает значения $1/4$, т. е. полное число испущенных квантов становится меньше числа атомов и мы приходим к режиму сверхизлучения в слабоусиливающих средах [44]. Время задержки в этом случае определяется выражением (3.16). В области $G \sim \ln(2\pi N)$ время задержки необходимо определять непосредственно из выражения (3.13). Отметим, что при $G < \ln(2\pi N)$ формулу (3.16) можно записать в виде

$$t_0 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha} \ln(2\pi N_{\text{eff}}), \quad (3.18)$$

где N_{eff} — эффективное число излучающих атомов (см. [44]).

3.3. СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В РЕЗОНАТОРЕ. В отличие от граничных условий (31) граничные условия (2.20а), (2.20б) связывают амплитуды встречных волн и на линейном этапе развития системы. Полагая $p_n(x, 0) = 0$ и повторяя процедуру, изложенную в п. 3.1, несложно показать, что амплитуда правой волны определяется в этом случае выражением

$$\begin{aligned} a_1(x, t) = & \int_{-1/2}^x a_1(x', 0) G_a(x - x', t) dx' + \\ & + \int_{-1/2}^{1/2} a_1(x', 0) \sum_{k=1}^{\infty} (r_1 r_2)^k G_a(x - x' + 2k, t) dx' + \\ & + \int_{-1/2}^{1/2} a_2(x', 0) r_1 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k G_a(x + x' + 2k + 1, t) dx'. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Смысл дополнительных слагаемых в (3.19) по сравнению с (3.5) понятен. Второе слагаемое описывает волну, образовавшуюся в результате k -кратного отражения правой волны от обоих концов среды. Третье слагаемое описывает волну, образовавшуюся при отражении левой волны от левого конца и последующего k -кратного отражения от обоих концов среды. Верхний предел сумм в правой части (3.19) определяется согласно (3.6) количеством отражений, которые успеют совершиться к моменту времени t . В частном случае $r_1 = r_2 = r$ и $a_2(x, 0) = a_1(-x, 0)$ выражение (3.19) принимает более простой вид

$$\begin{aligned} a_1(x, t) = & \int_{-1/2}^x a(x', 0) G_a(x - x', t) dx' + \\ & + \int_{-1/2}^{1/2} a(x', 0) \sum_{k=1}^{\infty} r^k G_a(x - x' + k, t) dx'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В случае $a_1(x, 0) = a_2(x, 0) = 0$ и не равных нулю $p_1(x, 0)$ и $p_2(x, 0)$ выражения (3.19) и (3.20) сохраняют свой вид при замене $a_n(x, 0) \rightarrow p_n(x, 0)$ и $G_a(x - x', t) \rightarrow G_p(x - x', t)$, где $G_p(x - x', t)$ определяется выражением (3.9).

3.4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИМПУЛЬСА СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ. Пусть корреляционные свойства затравочного поля $a_n(x, 0)$ определяются корреляционной матрицей следующего вида

$$K_{nm}(x, x', 0) = \langle a_n(x, 0) a_m(x', 0) \rangle = A(x - x') \delta_{nm}. \quad (3.21)$$

Для простоты полагаем, что все амплитуды действительны. Обобщение на случай комплексных полей не представляет труда.

Динамика корреляционной функции определяется выражением

$$K_{nm}(x, x', t) = \int_{-1/2}^x d\xi \int_{-1/2}^{x'} d\eta A(\xi - \eta) G(x - \xi, t) G(x' - \eta, t).$$

Мы видим, что с ростом времени t начальные корреляционные свойства поля «забываются», и радиус корреляции начинает определяться величиной параметров α и β .

Основное отличие случая СИ в свободном пространстве ($r_1 = r_2 = 0$) от случая распада в резонаторе ($r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$) состоит в том, что в первом случае $K_{12}^{(0)}(1/2, -1/2, t)$ всегда равна нулю, т.е. импульсы сверхизлучения, испускаемые с двух концов среды, остаются некоррелированными, если они обусловлены некоррелированными источниками

затравочного поля или спонтанной поляризации. В случае же $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$, как следует из (3.19):

$$K_{12}^{(2)}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t\right) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2}^{1/2} dx' A(x-x') \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (r_1 r_2)^{k+l} \times \\ \times \left[r_2 G_a\left(\frac{1}{2} - x + 2k, t\right) G_a\left(-\frac{1}{2} + x' + 2l + 1, t\right) + \right. \\ \left. + r_1 G_a\left(\frac{1}{2} + x + 2k + 1, t\right) G_a\left(-\frac{1}{2} - x' + 2l, t\right) \right]. \quad (3.22)$$

Как видно, при $t > 1$ устанавливается корреляция между волнами, излучаемыми с разных концов среды. Степень взаимной корреляции растет с ростом параметра β и коэффициентов отражения $r_{1,2}$ и уменьшается с ростом параметра α .

3.5. Неоднородное уширение. До сих пор мы не принимали во внимание эффектов неоднородного уширения атомных линий. С учетом неоднородного уширения система уравнений (2.11) примет вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial x} = \int p_1(\Delta) f(\Delta) d\Delta, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{\partial a_2}{\partial x} = \int p_2(\Delta) f(\Delta) d\Delta, \\ \frac{\partial p_1(\Delta)}{\partial t} + (\alpha + i\alpha^* \Delta) p_1(\Delta) = \beta (a_1 R_0(\Delta) + a_2 R_1(\Delta)), \\ \frac{\partial p_2(\Delta)}{\partial t} + (\alpha + i\alpha^* \Delta) p_2(\Delta) = \beta (a_2 R_0(\Delta) + a_1 R_1^*(\Delta)), \quad (3.23) \\ \frac{\partial R_0(\Delta)}{\partial t} + \alpha_1 (1 + R_0(\Delta)) = -2 (a_1 p_1^*(\Delta) + a_2 p_2^*(\Delta) + \text{к. с.}), \\ \frac{\partial R_1(\Delta)}{\partial t} + \alpha_1 R_1(\Delta) = -2 (a_1 p_2^*(\Delta) + a_2^* p_1(\Delta)),$$

где $f(\Delta)$ — контур неоднородного уширения линии, удовлетворяющий условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta) d\Delta = 1, \quad (3.24)$$

$\alpha^* = \tau \Delta_0, \Delta_0$ — характерная ширина функции $f(\Delta)$.

Оценим характер изменения основных параметров импульсов генерации на линейном этапе, обусловленного влиянием эффектов неоднородного уширения. Используя преобразование Лапласа—Карсона, по аналогии с п. 2.1, для изображения амплитуды поля правой волны несложно получить следующее уравнение

$$\frac{da_1(x, u)}{dx} + \left(u - \beta \int \frac{f(\Delta) R_0(\Delta) d\Delta}{u + \alpha + i\alpha^* \Delta} \right) a_1(x, u) = \\ = a_1(x, 0) + p_1(x, 0) \int \frac{f(\Delta) d\Delta}{u + \alpha + i\alpha^* \Delta}, \quad (3.25)$$

где $R_0(\Delta) = R(\Delta, x, 0)$. Пусть $p_1(x, 0) = 0$, вид функции Грина $G_a(x-x', t)$ определялся в этом случае в однородноуширенных системах особой точкой $u_0 = -\alpha$ (см. (3.6)). В случае неоднородноуширенных сред вид функции $G_a(x-x', t)$ будет определяться особыми точками следующей функции

$$F(u) = \int \frac{f(\Delta) R_0(\Delta) d\Delta}{u + \alpha + i\alpha^* \Delta}. \quad (3.26a)$$

Пусть $R_0(\Delta)=1$, т.е. все атомы в пределах неоднородной ширины линии перехода возбуждены равномерно.

В целях удобства интерпретации формул вернемся на время к размерным величинам, тогда α заменится на $\Gamma=1/(2T_2)$, и функция $F(u)$ примет вид

$$F(u) = \int \frac{f(\Delta) d\Delta}{u + \Gamma + i\Delta}; \quad (3.26б)$$

положим, что $f(\Delta)$ имеет вид

$$f(\Delta) = \frac{\Delta_0}{\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \Delta_0^2}, \quad (3.27)$$

где Δ_0 —полуширина функции $f(\Delta)$, а сама функция $f(\Delta)$ по-прежнему удовлетворяет условию (3.24). Подставляя выражение (3.27) в (3.26а), получим

$$F(u) = \frac{1}{u + \Gamma + \Delta_0}. \quad (3.28)$$

Следовательно, выражение для амплитуды поля $a_1(x,t)$ снова сохранит вид (3.5), (3.6), однако, вместо однородной ширины линии Γ в него войдет следующее выражение

$$\Gamma + \Delta_0 = \frac{1}{2T_2} + \Delta_0 = \frac{1}{2T_2^*}.$$

Таким образом, в случае, когда равномерно возбуждается весь неоднородный спектр, характер нарастания поля будет определяться не отношением величин β/α , а отношением β/α^* , имеющем вид

$$G(\Gamma + \Delta_0) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Gamma}{\Gamma + \Delta_0} = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{T_2^*}{T_1} L. \quad (3.29)$$

Если в начальный момент возбуждается не весь неоднородный спектр, а лишь его часть с полушириной Δ_1 :

$$R_0(\Delta) = \frac{\Delta_1^2}{\Delta^2 + \Delta_1^2}, \quad (3.30)$$

то функция $F(u)$ примет вид

$$F(u) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0^2 - \Delta_1^2} \left(\frac{\Delta_0}{u + \Gamma + \Delta_1} - \frac{\Delta_1}{u + \Gamma + \Delta_0} \right). \quad (3.31)$$

В частности, при $\Delta_0 \gg \Delta_1$ получим

$$F(u) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \frac{1}{u + \Gamma + \Delta_1}. \quad (3.32)$$

Следовательно, характер нарастания поля определяется теперь параметром

$$G(\Gamma + \Delta_1, \Delta_0) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \frac{\Gamma}{\Gamma + \Delta_1} = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \frac{T_{21}^*}{T_1} L, \quad (3.33)$$

где $2T_{21}^* = (\Gamma + \Delta_1)^{-1}$. В процессе СИ участвуют теперь лишь атомы с частотами, лежащими в полосе $\Gamma + \Delta_1$ вблизи резонансной линии перехода. Их число определяется выражением $N(\Delta_1/\Delta_0)$.

Если возбуждается часть неоднородного спектра линии с шириной Δ_1 , но не на центральной частоте, а с отстройкой Δ_2 от центра линии, т. е.

$$R_0(\Delta) = \frac{\Delta_1^2}{(\Delta - \Delta_2)^2 + \Delta_1^2}, \quad (3.34)$$

то при $\Delta_0 \gg \Delta_1$ получим

$$F(u) = \frac{\Delta_0 \Delta_1}{\Delta_0^2 + \Delta_2^2} \frac{1}{u + \Gamma + \Delta_1 - i\Delta_2}. \quad (3.35)$$

Следовательно, амплитуда волны будет осциллирующей функцией с частотой Δ_2 по времени и волновым вектором Δ_2/c —по пространству. Динамика генерации на начальном этапе будет определяться величиной параметра

$$G(\Gamma + \Delta_1, \Delta_0, \Delta_2) = \frac{3\lambda^2}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{\Delta_0 \Delta_1}{\Delta_0^2 + \Delta_2^2} \frac{T_{21}^*}{T_1} L. \quad (3.36)$$

Таким образом, как следует из сопоставления формул (3.11)—(3.17) и формул (3.29), (3.33), (3.36), динамика генерации на начальном этапе определяется формулами (3.11)—(3.17) при замене в них $\beta \rightarrow \beta_{\text{eff}}$, $\alpha \rightarrow \alpha_{\text{eff}}$, где параметры α_{eff} и β_{eff} определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \text{а) для } R_0(\Delta) &= 1 \\ \beta_{\text{eff}} &= \beta, \quad \alpha_{\text{eff}} = \alpha \frac{\Gamma + \Delta_0}{\Gamma}; \\ \text{б) для } R_0(\Delta) &= \Delta_1^2 / (\Delta^2 + \Delta_1^2) \\ \beta_{\text{eff}} &= \beta \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \alpha_{\text{eff}} = \alpha \frac{\Gamma + \Delta_1}{\Gamma}; \\ \text{в) для } R_0(\Delta) &= \Delta_1^2 / [(\Delta - \Delta_2)^2 + \Delta_1^2] \\ \beta_{\text{eff}} &= \beta \frac{\Delta_0 \Delta_1}{\Delta_0^2 + \Delta_2^2}, \quad \alpha_{\text{eff}} = \alpha \frac{\Gamma + \Delta_1}{\Gamma}. \end{aligned}$$

Изменение β соответствует уменьшению плотности числа возбуждаемых атомов, а изменение параметра α соответствует увеличению ширины линии.

4. Одноволновые задачи. Как следует из результатов предыдущего раздела, в отсутствие отражения на границах активного объема две встречные волны на линейном этапе развиваются независимо друг от друга. В этом случае характерные параметры импульсов излучения могут быть определены в рамках одноволновой модели. К классу одноволновых задач относятся также задачи об усилении и распространении когерентных импульсов.

4.1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН. В одноволновом случае система уравнений (2.26) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} &= p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha p = \beta a R, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \alpha_1 (1 + R) &= -4\alpha p, \end{aligned} \quad (4.1)$$

с начальными условиями

$$a(x, 0) = a_0(x), \quad p(x, 0) = 0 \quad (4.2a)$$

или

$$a(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = p_0(x) \quad (4.26)$$

и граничным условием

$$\alpha\left(\frac{1}{2}, t\right) = A(t). \quad (4.3)$$

В случае самопроизвольного распада $A(t)=0$. Решение системы уравнений (4.1) тождественно совпадает с решением системы (2.26), если в последней начальные и граничные условия для левой волны выбрать в виде

$$a_2(x, 0) = p_2(x, 0) = 0, \quad a_2\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \quad (4.4)$$

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены для сравнения профили излучения в двух случаях:

$$p_1(x, 0) = p_0, \quad p_2(x, 0) = 0, \quad (4.5a)$$

$$p_1(x, 0) = p_2(x, 0) = p_0, \quad (4.5b)$$

в однородных в обоих случаях начальных и граничных условиях для амплитуд полей. Из рисунка следует, что в случае (4.5a) $a_2(x, t)=0$, а в случае (4.5b) — $a_2(x, t)=a_1(-x, t)$. Как видно из рисунка, взаимодействие встречных волн совершенно несущественно до момента формирования первого максимума интенсивности излучения и начинает проявляться лишь в области формирования последующих максимумов. Это

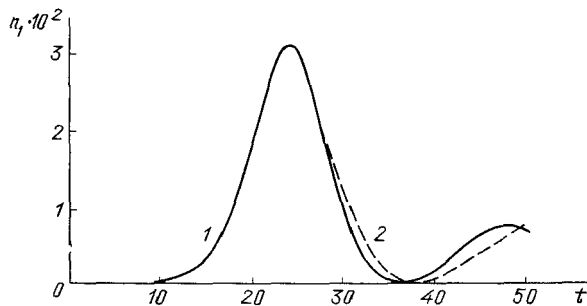


Рис. 1 Влияние начальных условий на профиль интенсивности излучения. Кривая 1 соответствует начальным условиям (4.5a), кривая 2 — (4.5b)

объясняется тем, что, как следует из уравнений (2.26), взаимодействие встречных волн осуществляется лишь посредством изменения разности населенностей. Как видно из рис. 2, а, основная доля энергии правой волны до момента наступления максимума сосредоточена на интервале $0 \leq x \leq 1/2$, и лишь по мере истощения инверсии в области около правого конца образца максимум амплитуды правой волны в среде начинает перемещаться к центру образца (рис. 2, б), и начинают сказываться эффекты взаимодействия волн через взаимное истощение инверсии.

Рис. 2 отражает еще одну особенность самопроизвольного распада открытых систем. Поскольку при симметричных начальных условиях (4.5b) выполняются равенства $a_2(x, 0)=a_1(-x, 0)$ и $p_2(x, 0)=p_1(-x, 0)$, то из рис. 2 следует, что в пределах первого импульса излучения $|a_1(x, t)p_1(x, t)| \gg |a_2(x, t)p_2(x, t)|$. В частности, для приведенного на рисунке случая

$$\frac{|a_1(x, t_0)p_1(x, t_0)|_{\max}}{|a_1(x, t_0)p_2(x, t_0)|_{\max}} \approx 30.$$

Следовательно, эффекты светоиндуцированного наведения решетки ин-

версии не оказывают влияния на формирование первого импульса излучения и могут проявить себя лишь в послесвечении.

4.2. Солитонное распространение импульсов в неограниченных средах. Одним из наиболее интересных явлений, описываемых уравнениями (4.1), является эффект солитонного распространения импульсов. Солитонные решения возникают в когерентном

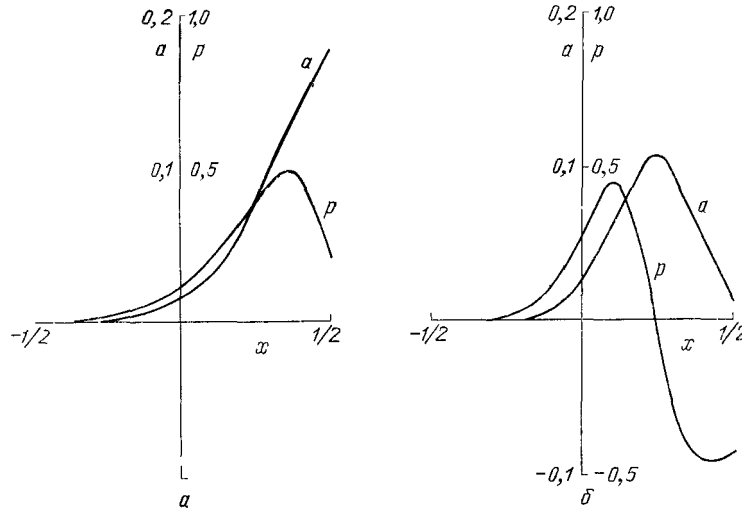


Рис. 2. Пространственное распределение амплитуды поля правой волны и соответствующей ей поляризации в различные моменты времени: $t=24$ (а), 35 (б)

режиме, когда $\alpha=\alpha_1=0$. В рассматриваемом случае блоховский интеграл движения имеет вид

$$p^2(x, t) + \frac{\beta}{4} R^2(x, t) = p^2(x, 0) + \frac{\beta}{4} R^2(x, 0). \quad (4.6)$$

Откуда, полагая

$$R = R_0 \cos \theta, \quad (4.7)$$

получаем

$$p = \frac{\beta^{1/2}}{2} R_0 \sin \theta, \quad a = \frac{1}{2\beta^{1/2}} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.8)$$

и следующее уравнение для угла Блоха $\theta(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x} = \beta R_0 \sin \theta. \quad (4.9)$$

Одно солитонное решение уравнения (4.9) в невозбужденной резонансной среде, когда $R_0 = -1$, имеет хорошо известный вид [28—33]:

$$\theta(t, x) = 4 \operatorname{arctg} \exp \frac{t - (x/v)}{\tau_0}, \quad (4.10)$$

где скорость солитона и его длительность связаны соотношением (рис. 3, а)

$$\tau_0 = \left(\frac{1}{\beta} \frac{1-v}{v} \right)^{1/2}, \quad \text{или} \quad v = \frac{1}{1 + \beta \tau_0^2}. \quad (4.11)$$

В возбужденной резонансной среде ($R_0=1$) также возможно солитонное распространение импульсов (см. обзор [36]), однако в этом случае

их распространение характеризуется целым рядом особенностей. Так связь между скоростью солитона и его длительностью имеет теперь вид

$$\tau_0 = \left[\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{v} \right) \right]^{1/2}, \text{ или } v = \frac{1}{1 - \beta \tau_0^2}. \quad (4.12)$$

Таким образом, как следует из рис. 3, б, если в случае $R_0 = -1$ скорость $v \leq 1$ при всех τ_0 , то в случае $R_0 = 1$ скорость $v > 1$ при $\beta \tau_0^2 < 1$ и $v < 0$ при $\beta \tau_0^2 > 1$. Следовательно, скорость движения максимума импульса

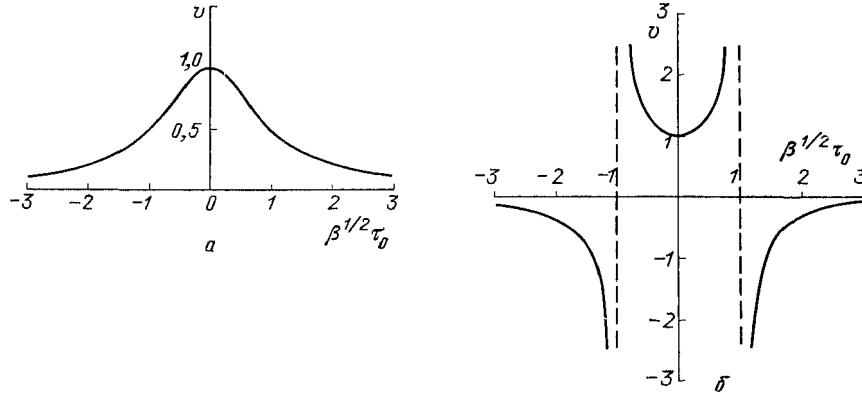


Рис. 3. Зависимость скорости v солитона от его длительности τ_0 . а — В поглощающих средах, $R_0 = -1$. б — В усиливающих средах, $R_0 = 1$

либо больше скорости света, либо отрицательна. В последнем случае $|v| > 1$ при $1 < \beta \tau_0^2 < 2$ и $|v| \leq 1$ при $\beta \tau_0^2 \geq 2$, т.е. отрицательная скорость также может превышать скорость света.

Амплитуда поля в обоих случаях ($R_0 = \pm 1$) имеет вид

$$a(x, t) = \frac{1}{\beta^{1/2} \tau_0} \operatorname{ch}^{-1} \left[\frac{1}{\tau_0} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (4.13)$$

4.3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ И ЛЕТАРГИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ. Решение уравнения (3.4) для $a(x, u)$ имеет в общем случае вид

$$a(x, u) = A_0(u) e^{-\lambda x} + \int_0^x \left(a(x', 0) + \frac{p(x', 0)}{u + \alpha} \right) \exp[-\lambda(x - x')] dx', \quad (4.14)$$

где

$$\lambda = u - \frac{\beta}{u + \alpha}.$$

Пусть теперь $a(x, 0) = 0$ и $p(x, 0) = 0$, тогда

$$a(x, u) = e^{-\lambda x} \int_0^\infty e^{-ut} a_0(0, t) dt. \quad (4.15)$$

Следовательно,

$$a(x, t) = \int_0^\infty a(0, t') G_b(t - t', x) dt' + a(0, t), \quad (4.16)$$

где

$$G_b(t - t', x) = \left(\frac{\beta x}{t - t' - x} \right)^{1/2} I_1(2[\beta x(t - t' - x)]^{1/2}) \times \\ \times \exp[-\alpha(t - t' - x)] \theta(t - t' - x). \quad (4.17)$$

В этом разделе для удобства мы рассматриваем задачу на интервале $[0, \infty]$, а не на интервале $[-1/2, 1/2]$, как ранее. Таким образом, $a(0, t)$ определяет форму импульса, падающего на границу активной среды. Пусть граничное условие имеет вид

$$a(0, t) = a_0 e^{\delta t}, \quad (4.18)$$

тогда, используя (3.16), (3.17), получаем

$$a(x, t) = \left\{ a_0 \exp \left[\delta(t-x) + \frac{\beta x}{\alpha + \delta} \right] + \right. \\ \left. + a_0 \exp[-\alpha(t-x)] \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\alpha + \delta) \left(\frac{t-x}{\beta x} \right)^{1/2} \right]^n I_n(2[\beta x(t-x)]^{1/2}) \right\} \theta(t-x). \quad (4.19)$$

Если на среду падает импульс постоянной амплитуды ($\delta=0$), то из (4.19) получаем

$$a(x, t) = \left\{ a_0 \exp \frac{\beta x}{\alpha} + a_0 \exp[-\alpha(t-x)] \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha \left(\frac{t-x}{\beta x} \right)^{1/2} \right]^n \times \right. \\ \left. \times I_n(2[\beta x(t-x)]^{1/2}) \theta(t-x) \right\}. \quad (4.20)$$

В случае, когда $\alpha=0$, выражение (4.19) преобразуется к виду

$$a(x, t) = \left\{ a_0 \exp \left[\frac{\beta x}{\delta} + \delta(t-x) \right] + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\delta \left(\frac{t-x}{\beta x} \right)^{1/2} \right]^n \times \right. \\ \left. \times I_n(2[\beta x(t-x)]^{1/2}) \right\} \theta(t-x). \quad (4.21)$$

Если $\alpha = \delta = 0$, то

$$a(x, t) = a_0 I_0(2[\beta x(t-x)]^{1/2}) \theta(t-x). \quad (4.22)$$

Из приведенных выражений следует, что если отличен от нуля хотя бы один из параметров α или δ , то при $\beta x \ll 1$ мы имеем обычное экспоненциальное усиление импульса с коэффициентом усиления

$$\mu_0 L = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Этот режим по мере роста произведения $\beta x(t-x)$ сменяется режимом с более медленным нарастанием по x :

$$a(x, t) \sim \exp\{2[\beta x(t-x)]^{1/2}\},$$

который называется латаргическим усилением. При $\alpha = \delta = 0$, как следует из (4.22), мы сразу имеем режим латаргического усиления.

4.4. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ. Исследования, проведенные в предыдущих двух разделах статьи (п. 4.2, 4.3), позволяют сформулировать следующие проблемы, требующие более детального осмысления. Может ли скорость солитона превышать скорость света, как следует из рис. 3? Что означает расходимость скорости v при $\beta \tau_0^2 = 1$ (см. рис. 3, б)? Солитон является собственным решением уравнения (4.9) в бесконечной среде. Что произойдет, если импульс излучения вида (4.13) пропустить через усиливающую среду, ограниченную по координате x ? Можно ли снова получить на выходе солитон, или же его форма будет деформирована границами образца?

Как мы увидим, ответ на последний вопрос даст нам ответы и на предыдущие вопросы. Итак, рассмотрим распространение импульсов излучения в пространственно-неоднородных средах в режиме когерентного усиления ($\alpha = 0$). Елоховские интегралы движения (2.24), (2.25), (4.6) обладают тем свойством, что они выполняются в каждой точке x . Поэтому, полагая, что среда имеет некий профиль плотности числа частиц

$$R(x, 0) = R_0(x), \quad (4.23)$$

мы можем переписать выражения (4.7) и (4.8) в виде

$$\begin{aligned} R(x, t) &= R_0(x) \cos \theta(x, t), \\ p(x, t) &= \frac{\beta^{1/2}}{2} R_0(x) \sin \theta(x, t), \\ a(x, t) &= \frac{1}{2\beta^{1/2}} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В результате подстановки этих выражений в систему уравнений (4.1) в случае $\alpha = \alpha_1 = 0$ получим следующее уравнение для вектора Блоха

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x \partial t} = \beta R_0(x) \sin \theta(x, t). \quad (4.25)$$

Решение уравнения (4.25) будем искать в виде

$$\theta(x, t) = 4 \operatorname{arctg} e^{\Phi(x, t)}. \quad (4.26)$$

Тогда для переменной $\Phi(x, t)$ получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) &= \beta R_0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = C(x), \quad (4.28)$$

тогда из первого уравнения получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\beta R_0(x)}{C(x)} \\ \text{или} \\ \Phi(x, t) &= \frac{\beta R_0(x)}{C(x)} t + \Phi_0(x). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Подставляя (4.29) в (4.28) и интегрируя последнее, получаем

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^x \left(C(x') - \frac{\beta R_0(x')}{C(x')} \right) dx' + \Phi_1(t). \quad (4.30)$$

Сравнивая (4.29) и (4.30), несложно убедиться, что

$$C(x) = \beta R_0(x) \tau_0,$$

где τ_0 — константа. Окончательно, для $\Phi(x, t)$ получаем

$$\Phi(x, t) = \frac{t - x}{\tau_0} + \beta \tau_0 \int_{-\infty}^x R_0(x') dx'. \quad (4.31)$$

Отсюда следует, что константа τ_0 определяет длительность импульса вне среды, где $R_0(x)=0$.

Определим вид $\Phi(x, t)$ для ряда профилей $R_0(x)$:

$$\begin{aligned} \text{а) } R_0(x) &= R_0/\text{ch}^2 \alpha_0 x: \\ \Phi(x, t) &= \frac{t-x}{\tau_0} + \frac{\beta \tau_0 R_0}{\alpha_0} \text{th } \alpha_0 x, \end{aligned} \quad (4.32\text{а})$$

$$\begin{aligned} \text{б) } R_0(x) &= R_0 [\text{th } \alpha_0 x + \text{th } \alpha_0 (L-x)]/2: \\ \Phi(x, t) &= \frac{t-x}{\tau_0} + \frac{\beta \tau_0 R_0}{2\alpha_0} \ln \frac{\text{ch } \alpha_0 x}{\text{ch } \alpha_0 (L-x)}; \end{aligned} \quad (4.32\text{б})$$

$$\begin{aligned} \text{в) } R_0(x) &= R_0 [\text{sgn } x + \text{sgn } (L-x)]/2: \\ \Phi(x, t) &= \frac{t-x}{\tau_0} + \frac{\beta \tau_0 R_0}{2} x [\text{sgn } x + \text{sgn } (L-x)] + \\ &\quad + \frac{\beta \tau_0 R_0 L}{2} [1 + \text{sgn } (x-L)]; \end{aligned} \quad (4.32\text{в})$$

$$\begin{aligned} \text{г) } R_0(x) &= R_0 + R_1 \cos \alpha_0 x: \\ \Phi(x, t) &= \frac{t-x}{\tau_0} + \beta \tau_0 \left(R_0 x + \frac{R_1}{\alpha_0} \sin \alpha_0 x \right) \end{aligned} \quad (4.32\text{г})$$

Поскольку уравнение (4.25) является следствием уравнений для медленноменяющихся амплитуд, то в рамках применимости этого приближения отражением поля на границах среды можно пренебречь. В (4.32б), (4.32в) L —длина среды, в использованной нами выше нормировке $L=1$.

Выражения, связывающие $a(x, t)$ и $R(x, t)$ с $\Phi(x, t)$, получаются подстановкой выражения (4.26) в формулы (4.24) и имеют вид

$$a(x, t) = \frac{1}{\beta^{1/2} \tau_0} \frac{1}{\text{ch } \Phi(x, t)}, \quad (4.33\text{а})$$

$$R(x, t) = R_0 \left(1 - \frac{2}{\text{ch}^2 \Phi(x, t)} \right). \quad (4.33\text{б})$$

Откуда следует, что при $\Phi(x, t)=0$ амплитуда поля $a(x, t)$ достигает максимума, а $R(x, t)=-R_0$. Представим $\Phi(x, t)$ в виде

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\tau_0} (t - \varphi(x)). \quad (4.34)$$

График зависимости $\varphi(x)$ для случая возбужденных в начальный момент сред ($R_0 > 0$), соответствующий профилям (4.32б), (4.32г), представлен на рис. 4. Из рис. 4, а мы видим, что в момент времени t_1 в области $-\infty < x < \infty$ мы имеем уединенный импульс с максимумом в точке x_1 , определяющейся из условия $\varphi(x_1)=t_1$, который движется в положительном направлении оси x . В момент времени $t=t_2$ мы имеем три импульса, два из которых, находящиеся вне усиливающей среды, движутся в положительном направлении оси x , а третий, находящийся в среде, движется навстречу падающему. В момент времени t_3 мы снова имеем один импульс, распространяющийся по направлению падающего импульса. Наличие трех максимумов в момент времени t_2 обусловлено тем, что в результате усиления переднего фронта импульса вида (4.33а), падающего на образец, к моменту времени t_0 разность населенностей на конце образца достигает значения $R(L, t_0)=-R_0$. В случае $\beta \tau_0^2 R_0 = 2$ и $\alpha_0 = 10$, представленном на рис. 4, а, значение $t \approx 0$. На рис. 5 показана трансформация импульса вблизи конца образца. Как видно, при $t > 0$ происходит разбиение импульса на две части, одна из которых покидает обра-

зец, а вторая движется навстречу падающему импульсу. При $\beta\tau_0^2 R_0 = 2$ эти две половинки симметричны относительно точки $x=1$. Это связано с тем, что нарастающая и убывающая части кривой $\varphi(x)$ при $\beta\tau_0^2 R_0 = 2$ имеют одинаковый наклон к оси ординат. Поэтому проекции на ось x

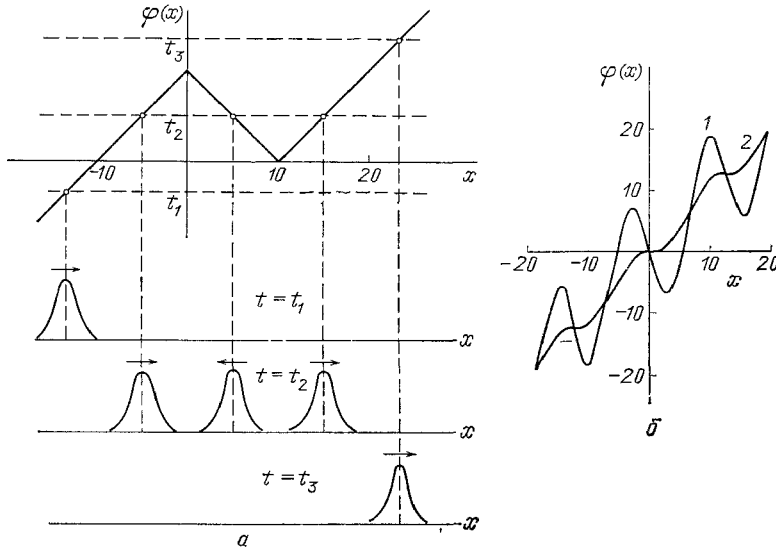


Рис. 4. К интерпретации формул (4.32)–(4.34) а—Вид функции $\varphi(x)$ в случае (4.32б) для $\alpha_0=10$, $L=10$, $\beta\tau_0^2 R_0=2$ и вид пространственного распределения поля в три момента времени, б—Вид функции $\varphi(x)$ в случае (4.32г) для следующих значений параметров: кривая 1 — $\alpha_0=0,5$, $R_0=0$, $\beta\tau_0^2 R_1=5$; кривая 2 — $\alpha_0=0,5$,

$$R_0=0, \beta\tau_0^2 R_1=1$$

участков кривой $\varphi(x)$, отсекаемых прямыми t_2 и $t_2+\tau_0$, имеют одинаковое значение. При $\beta\tau_0^2 R_0 > 2$ происходит сокращение линейных размеров импульса в активной области, при $\beta\tau_0^2 R_0 < 2$ — удлинение импульса в среде.

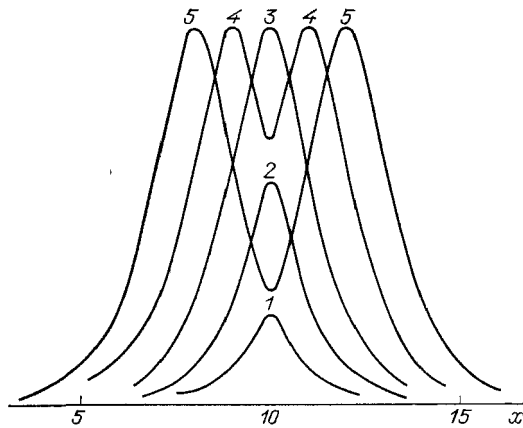


Рис. 5. Динамика формирования импульса на выходном конце активной среды; $t=-2(1)$, $-1(2)$, $0(3)$, $1(4)$, $2(5)$

Отметим, что при $t=t_0$ амплитуда падающего импульса на входной грани активного объема имеет значение

$$a_{in}(0, t_0) = \frac{1}{\tau_0 \beta^{1/2}} \frac{1}{\operatorname{ch} [(1/\tau_0) (\beta\tau_0^2 R_0 - 1)]} \approx \frac{2}{\tau_0 \beta^{1/2}} \exp \left(-\frac{\beta\tau_0^2 R_0 - 1}{\tau_0} \right),$$

а на конце образца

$$a_{\text{in}}(L, t_0) = \frac{1}{\tau_0 \beta^{1/2}} \frac{1}{\text{ch}(\beta \tau_0 R_0)} \approx \frac{2}{\tau_0 \beta^{1/2}} e^{-\beta \tau_0 R_0}.$$

Поскольку амплитуда выходного импульса в момент времени $t=0$ равна

$$a_{\text{out}}(L, t_0) = \frac{1}{\tau_0 \beta^{1/2}},$$

то можно определить коэффициент усиления из условия

$$a_{\text{out}}(L, t_0) = e^{GL} a_{\text{in}}(L, t_0),$$

откуда

$$G = \beta \tau_0 R_0 - \ln 2 \approx \beta \tau_0 R_0.$$

Сравнивая это выражение с формулой (4.21), несложно видеть, что значение коэффициента усиления соответствует первому члену в формуле (4.21). Действительно, из (4.18) следует, что $\delta = 1/\tau_0$; полагая $R_0 = 1$, получим $\beta/\delta = \beta \tau_0$. Таким образом, усиление экспоненциального входного сигнала вида $a(0, t) = a_0 \exp(t/\tau_0)$ приводит к формированию на выходе из среды солитонного импульса вида (4.33а), длительность которого τ_0 определяется инкрементом нарастания входного сигнала.

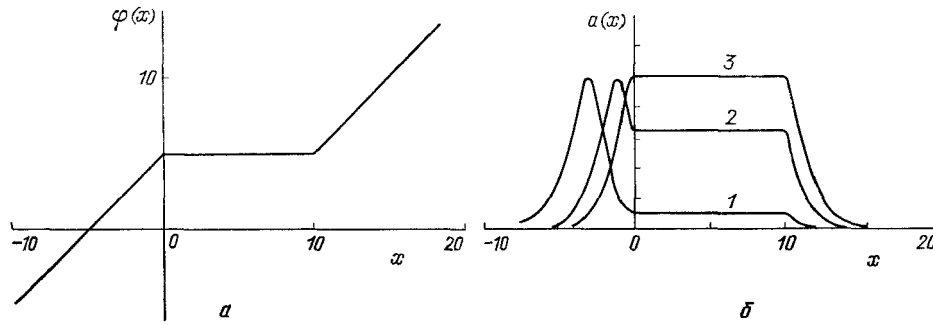


Рис. 6. а—Вид функции $\varphi(x)$ в случае (4.23б) для $\alpha_0 = 10$, $L = 10$, $\beta \tau_0^2 R_0 = 1$. б—

Динамика формы импульса в случае $\beta \tau_0^2 R_0 = 1$; $t = 2(1)$, $4(2)$, $5(3)$

В случае $\beta \tau_0^2 R_0 = 1$ кривая $\varphi(x)$ принимает вид, представленный на рис. 6. В этом случае осуществляется равномерное движение инверсии населенностей по всей длине образца. Такой режим распространения импульсов представляет несомненный интерес для схем генерации и усиления импульсов в трехуровневых системах. При определенных длительностях импульса резонансного перехода из основного состояния мы можем осуществить однородную инверсию по всей длине образца на смежном переходе.

Дальнейшие возможности управления формой импульса в среде реализуются в средах с периодическим профилем возбуждения или концентрации активных атомов. Как видно из рис. 4, б, вариация параметров R_0 , R_1 , τ_0 и α_0 (см. формулу (4.32г)) позволяет создавать периодический профиль возбуждения на смежном переходе в трехуровневой среде. Этот профиль может быть реализован как по всей длине одновременно, так и в отдельных локальных областях активного объема.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что солитонный импульс может проходить через резонансно усиливающие или поглощающие среды конечной длины без изменения своей формы. При этом форма импульса в среде может существенным образом видоизменяться, описываясь при этом одним и тем же выражением (4.33а). Им-

пульс вида (4.33а) может иметь несколько максимумов (см. рис. 5) или же достигать максимального значения в пределах макроскопической области по x , как на рис. 6. Обращению скорости солитона в бесконечность, следующему из анализа задачи в безграничной области (см. рис. 3), соответствует появление максимумов на переднем фронте импульса, возникающих в результате его усиления в среде. Действительно, из (4.34) следует, что скорость движения максимума импульса определяется выражением

$$v_{\max} = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{-1}.$$

В точке x_0 , определяющейся из условия

$$\frac{d\varphi}{dx}(x_0) = 0,$$

в момент времени $t_0 = \varphi(x_0)$ импульс вида (4.33а) достигает своего максимального значения $a(x_0, t_0) = 1/\tau_0 \beta^{1/2}$. Это и соответствует бесконечно быстрому перескоку максимума импульса. Реально же, как мы видим из рис. 5, нарастание импульса на выходе образца происходит за конечное время. Ограничение амплитуды выходного импульса величиной $1/\tau_0 \beta^{1/2}$ обусловлено тем, что максимальное значение величины поляризации на резонансном переходе ограничено законом сохранения вектора Блоха (4.6).

5. Двухволновые задачи. В настоящем разделе мы изучим зависимость характера генерации и усиления импульсов от параметров среды в моделях, учитывающих взаимодействие одномерных встречных волн. Система уравнений, описывающих динамику амплитуд полей, поляризации и разности населенностей неоднородно уширенных сред, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial x} &= \int p_1(\Delta) f(\Delta) d\Delta, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \int p_2(\Delta) f(\Delta) d\Delta, \\ \frac{\partial p_{1,2}(\Delta)}{\partial t} + (\alpha + i\alpha^* \Delta) p_{1,2}(\Delta) &= \beta a_{1,2} R(\Delta), \\ \frac{\partial R(\Delta)}{\partial t} &= -2 \sum_{n=1}^2 (a_n^* p_n(\Delta) + a_n p_n^*(\Delta)). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Начальные условия, соответствующие самопроизвольному распаду системы возбужденных атомов, можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} a_1(x, 0) = a_2(x, 0) = 0, \quad R(x, 0, \Delta) &= R_0(x, \Delta), \\ p_1(x, 0, \Delta) = p_{01}(x, \Delta), \quad p_2(x, 0, \Delta) &= p_{02}(x, \Delta), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $p_{01}(x, \Delta)$ и $p_{02}(x, \Delta)$ определяют начальную спонтанную поляризацию. Граничные условия в общем случае имеют вид

$$a_1\left(-\frac{1}{2}, t\right) = r_1 a_2\left(-\frac{1}{2}, t\right), \quad a_2\left(\frac{1}{2}, t\right) = r_2 a_1\left(\frac{1}{2}, t\right). \quad (5.3)$$

Как следует из (5.1), основными параметрами, влияющими на характер динамики распада системы, являются отношения времени пролета ($\tau = L/c$) ко времени однородной $\alpha = \tau/2T_2$ и неоднородной $\alpha^* = \tau/2T_2^*$ релаксации, а также отношение τ к времени когерентности $\beta = \tau/\tau_c$. Иссле-

дуюем влияние этих параметров на интенсивность и форму импульсов генерации.

5.1. СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ И СУПЕРЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ. Рассмотрим сначала распад свободных (беззеркальных) систем. В этом случае

$$r_1 = r_2 = 0, \quad (5.4)$$

и граничные условия (5.3) становятся однородными. На рис. 7 показан профиль интенсивности излучения полностью и равномерно возбужденных в начальный момент сред

$$R_0(x, 0) = 1 \quad (5.5)$$

в отсутствие неоднородного уширения

$$f(\Delta) = \delta(\Delta). \quad (5.6)$$

Во всех трех случаях отношение β/α имеет одну и ту же величину $\beta/\alpha = 100$, а величина параметра β меняется следующим образом: $\beta = 0,1(a)$, $1(b)$, $10(в)$. Как видно из рисунка, профиль интенсивности практически

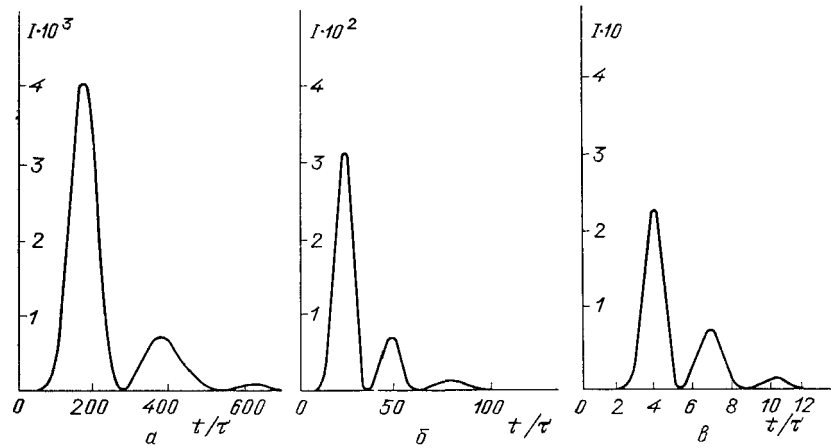


Рис. 7. Профиль интенсивности излучения для трех значений параметра β при фиксированном усилении $\mu_0 L = \beta/\alpha$. а: $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 10^{-1}$. б: $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 1$. в: $\alpha = 10^{-1}$, $\beta = 10$

не меняется при изменении β , однако максимальное значение интенсивности импульса и время наступления максимума (время задержки t_0) существенно зависят от β . Интенсивность растет с ростом β , а время задержки падает (приблизительно как β^{-1}). Рис. 8 иллюстрирует характер зависимости пикового значения интенсивности первого импульса от величины параметра β при фиксированном значении α (рис. 8, а, б) и от величины параметра α при фиксированном β (рис. 8, а). Мы видим, что с ростом параметра β в области $\beta > \alpha$ происходит сначала линейный рост интенсивности импульса, который затем выходит на насыщение, когда I_0 достигает значения $I_{0\max} = 1$. Напомним, что амплитуда поля в системе уравнений (5.1) нормирована таким образом, что

$$n(x, t) = |a(x, t)|^2$$

есть плотность числа фотонов, нормированная на плотность атомов. В свою очередь:

$$I(t) = n\left(\frac{1}{2}, t\right).$$

Следовательно, обращение $I(t)$ в единицу означает, что плотность фотонов на торце образца достигает плотности резонансных атомов. Из рис. 8, *б* видно, что в области $\alpha \ll \beta$ величина максимальной интенсивности импульса не зависит от величины параметра α , но значение величины интенсивности «насыщения» зависит от величины параметра β . При стремлении α к β максимальная интенсивность излучения начинает существенно падать, обращаясь в нуль при $\alpha \approx \beta$. Пунктирная кривая на рис. 8, *б* соответствует кривой на рис. 8, *а*. Таким образом, мы видим,

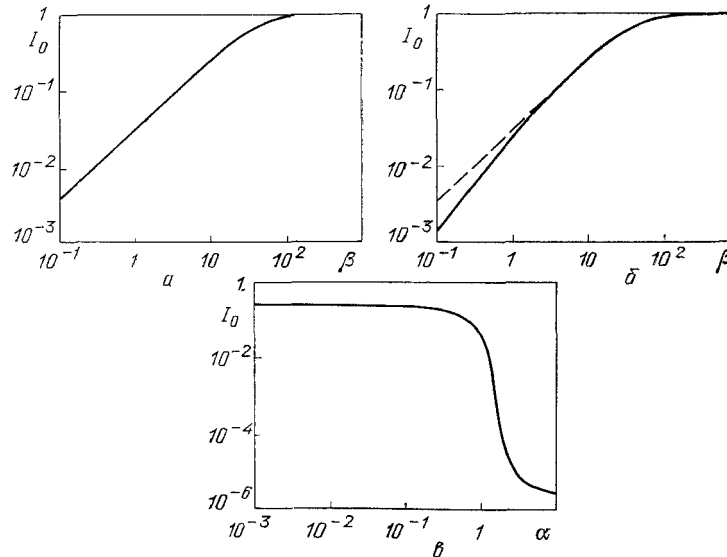


Рис. 8. Зависимость пикового значения интенсивности от величины параметра β при фиксированном значении $\alpha=10^{-3}$, (а), 10^{-2} (б) и от величины параметра α , при фиксированном $\beta=10$ (в)

что в области $\beta \ll \alpha I_0$ не зависит от α , а зависит лишь от величины параметра β . При стремлении β к α коэффициент усиления $\mu_0 L = \beta/\alpha$ падает и интенсивность излучения понижается. На рис. 9 представлена зависимость времени задержки (рис. 9, *а*) и длительности импульса (рис. 9, *б*) от величины параметра β при фиксированном значении α . Как мы уже отмечали выше, $t_0 \sim \beta^{-1}$ и $\tau_p \sim \beta^{-1}$ в области $\beta \gg \alpha$. На рис. 10 показано поведение пикового значения интенсивности на плоскости параметров (α, β) . Из рисунка следует, что интенсивность излучения превышает фон спонтанного излучения при $\beta > \alpha$. Дальнейшее нарастание интенсивности импульса при углублении в область $\beta > \alpha$ идет вдоль прямых, параллельных прямой $\lg \alpha = -\lg \beta$. На линиях, параллельных прямой $\lg \alpha = -\lg \beta$, интенсивность имеет примерно постоянное значение.

Рис. 11 и 12 иллюстрируют влияние неоднородного уширения на форму и интенсивность импульсов генерации. Из рисунков видно, что в полном соответствии с рассмотрением, проведенным в п. 3.5, генерация имеет место при $\beta/\alpha^* > 1$. При $\alpha^* \sim \beta$ величина пикового значения интенсивности импульса близка к уровню спонтанного фона.

Таким образом, результаты проведенных выше исследований позволяют сделать следующие выводы. Во-первых, в однородно уширенных средах порог генерации когерентного излучения определяется условием $\beta/\alpha > 1$. Во-вторых, в неоднородно уширенных средах при равномерном возбуждении всего неоднородного контура (см. рис. 11 и 12 относятся именно к этому случаю) условие генерации принимает вид $\beta/(\alpha + \alpha^*) > 1$. В-третьих, характер зависимости пикового значения интенсивности от

величины параметра β позволяет выделить две качественно различающиеся области по β . Как видно из рис. 8 при $\beta < 10$ имеет место квадратичная зависимость пикового значения интенсивности от начальной плотности инверсии. Действительно, при $\beta < 10$ $I_0 \sim \beta$. Учитывая используемую нами нормировку (см. (2.10), (2.14)) и выражение (2.12), получаем

$$I_{\max} \sim cW = c\hbar\omega \frac{N}{V} I_0 \sim \frac{N}{V} \beta \sim \left(\frac{N}{V}\right)^2. \quad (5.7)$$

Режим излучения с квадратичной зависимостью пикового значения интенсивности от плотности инверсии принято называть сверхизлучением.

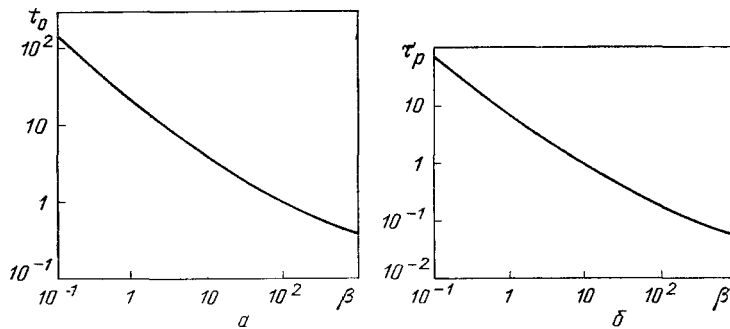
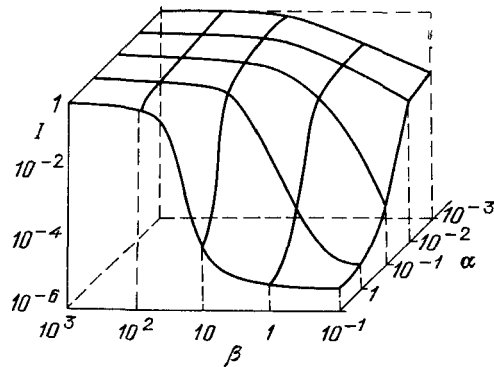


Рис. 9. Зависимость времени задержки (а) и длительности импульса (б) от величины параметра β при фиксированном значении $\alpha = 10^{-3}$

В области $\beta > 10$, как видно из рис. 8, пиковое значение интенсивности первого импульса растет более медленно с ростом β , стремясь в пределе к линейной зависимости $I_{\max} \sim N/V$. Такой режим генерации принято называть суперлюминесценцией или усилением спонтанного излучения.

5.2. СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ, СУПЕРЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ И САМОВОЗБУЖДЕНИЕ В ОПТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ. Исследуем теперь зависимость интенсивности и формы импульса излучения от пара-

Рис. 10. Пиковая интенсивность импульса как функция параметров α и β



метров среды при генерации в резонаторе. Отметим сразу, что мы не имеем в виду случай, когда активная среда помещена в высокодобротный оптический резонатор, а будем исследовать более общую задачу, касающуюся изучения влияния на характер динамики генерации учета отражения поля на границах активного объема. Мы будем полагать, что величина коэффициентов отражения $r_{1,2}$ в граничных условиях (5.3) меняется от 0 до 1. Так что случай генерации в высокодобротном оптическом резонаторе является частным случаем рассматриваемой нами общей задачи. Необходимость учета отражения поля вызвана тем, что во

всех практических случаях коэффициент отражения на границе активного объема не равен нулю, поскольку диэлектрическая проницаемость активной среды всегда отлична от диэлектрической проницаемости окружающей. Это отличие заметно уже в случае, когда в качестве активных сред используются разреженные газы, и может существенно поменять характер динамики генерации в случае твердотельных активных сред.

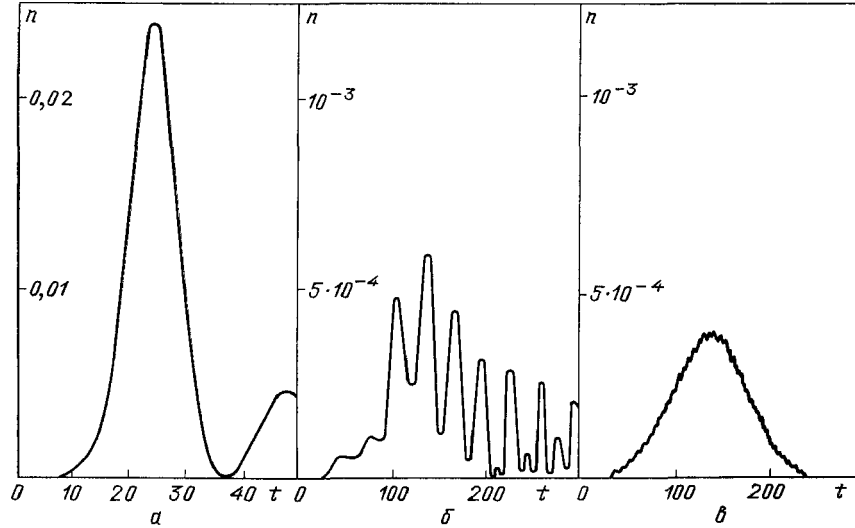


Рис 11 Влияние неоднородного уширения на профиль интенсивности излучения, $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 1$, $\alpha^* = 0,1$ (а), 1 (б), 5 (в)

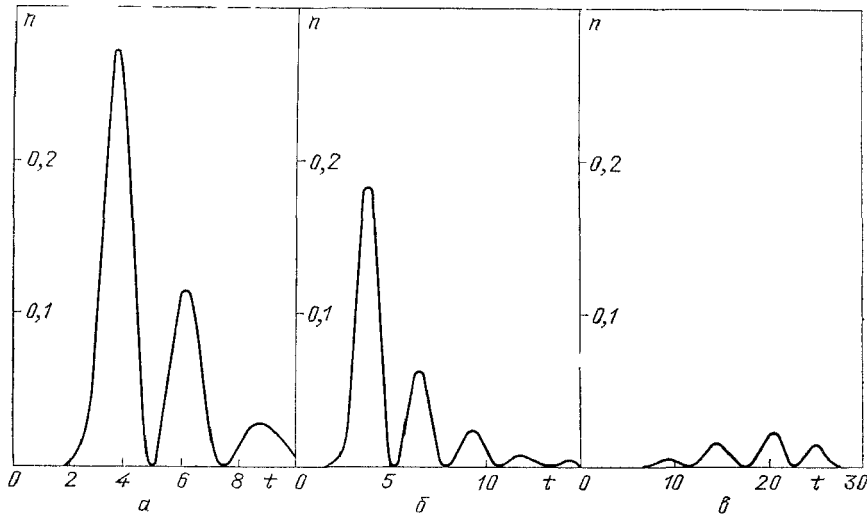


Рис 12. Влияние неоднородного уширения на профиль интенсивности излучения. $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 10$, $\alpha^* = 0,1$ (а), 1 (б), 5 (в)

Итак, распад открытых систем ($r_1 = r_2 = 0$) и распад в высокودобротном резонаторе ($r_1 \approx r_2 \approx 1$) являются двумя предельными случаями нашего общего рассмотрения.

Рис. 13 дает представление о характере изменения профиля интенсивности излучения при вариации величины коэффициентов отражения. На рис. 14 показана результирующая кривая зависимости пикового значения интенсивности от коэффициента отражения при различных значениях параметров α и β . На рис 14, а—г показана зависимость поля внутри $I_0 = |a_1(1/2, t)|^2$ и вне $I = I_0(1 - r_2^2)$ резонатора для двух предельных

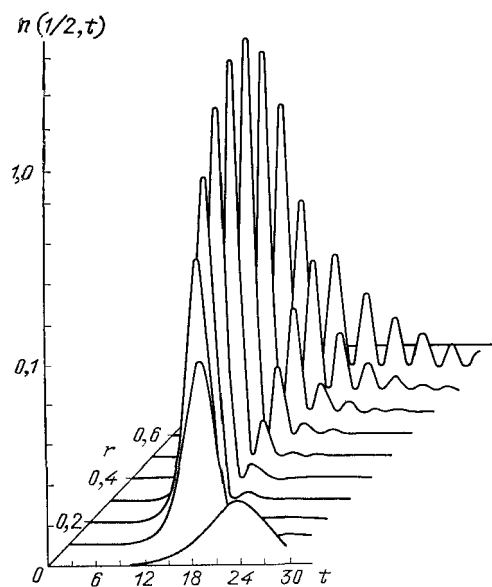


Рис. 13. Зависимость профиля импульса генерации от величины коэффициента отражения $r_1=r_2=r$ в случае $\alpha=10^{-2}$, $\beta=1$

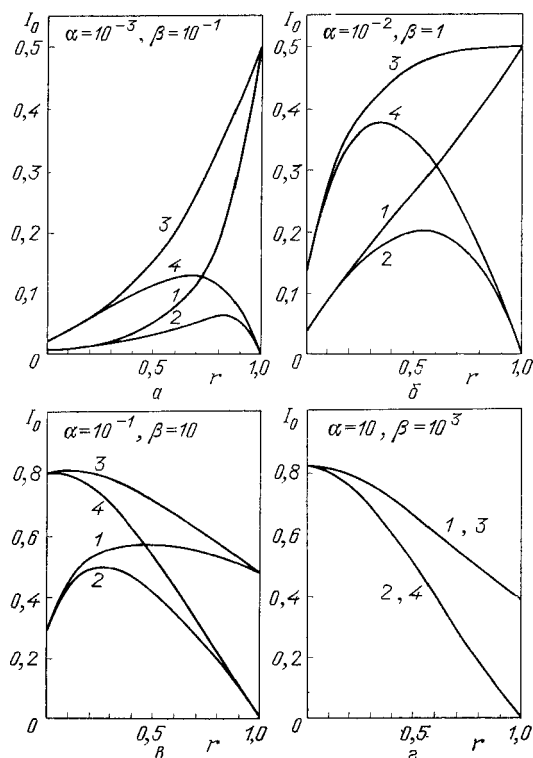


Рис. 14. Пиковое значение интенсивности внутри (кривые 1, 3) и вне (кривые 2, 4) активного объема как функция коэффициента отражения. Кривые 1, 2 соответствуют случаю $r_1=r_2=r$, кривые 3, 4—случаю $r_1=1, r_2=r$

случаев: когда оба зеркала имеют одинаковые коэффициенты отражения ($r_1 = r_2 = r$) и когда левое зеркало является полностью отражающим $r_1 = 1$, а коэффициент отражения правого зеркала варьируется от 0 до 1. Как видно из рисунков, в сверхизлучательных средах ($\alpha \ll \beta < 1$) происходит квадратичное нарастание пиковой интенсивности с ростом r . В то время как в суперлюминесцентных средах ($1 < \alpha \ll \beta$) с ростом r происходит уменьшение пикового значения интенсивности. Качественно различается поведение сверхизлучающих и суперлюминесцентных сред при стремлении r к 1. Как видно из рис. 15, а, в сверхизлучающих средах при $r=1$ происходит регулярная перекачка энергии из поля

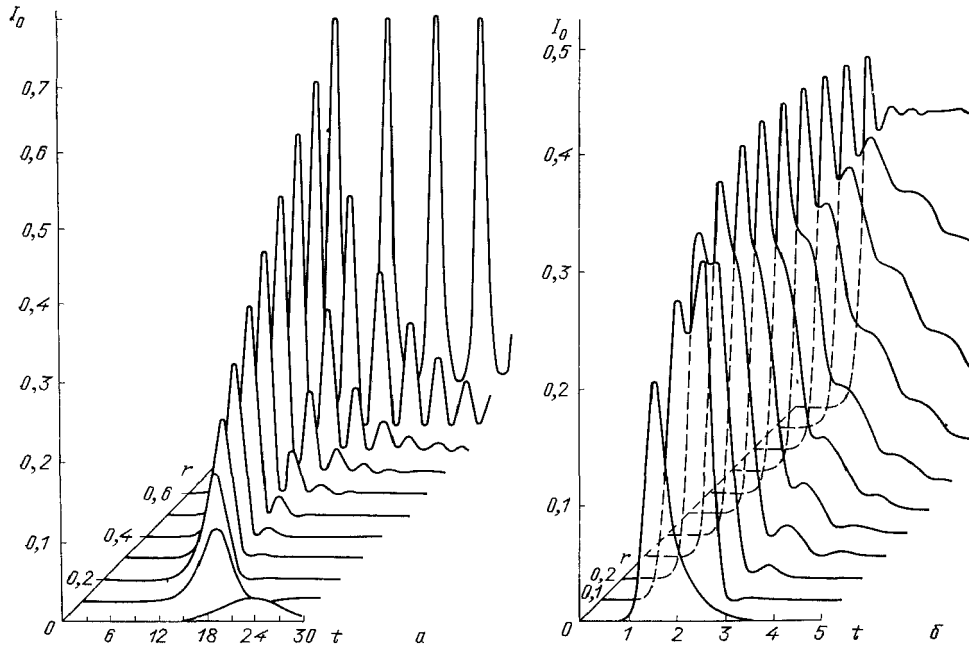


Рис 15. Влияние коэффициента отражения r на профиль интенсивности внутри активной области $I_0(t) = |a(1/2, t)|^2$. а: $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 1$. б: $\alpha = 10$, $\beta = 100$

в среду и обратно. При этом пиковое значение $I_0 = 1/2$, т. е. суммарное число квантов в двух встречных волнах в максимуме равно числу атомов. В свою очередь, в суперлюминесцентных средах при $r=1$ после нескольких переколебаний амплитуда поля не меняется, а I_0 принимает значение $1/4$. Это соответствует тому, что резонансные атомы испускают $N/2$ квантов, после чего разность населенностей обращается в нуль, и среда далее не взаимодействует с полем, находящимся в резонаторе.

На рис. 16 представлена зависимость времени задержки от коэффициентов отражения r для тех же значений параметров α и β , что и на рис. 14. Мы видим, что если в сверхизлучающих средах время задержки обратно пропорционально r , то в суперлюминесцентных средах оно практически от r не зависит.

Традиционно принято делить среды на сверхизлучающие и суперлюминесцентные по величине параметра $\alpha = \tau/T_2$. Когда время пролета кванта через образец $\tau = L/c$ меньше времени однородной релаксации T_2 , то говорят, что в этих средах реализуется СИ. При $\alpha > 1$, т. е. когда $T_2 < \tau$, считается, что в системе реализуется СЛ. Как видно из рис. 14, деление сред на указанные два класса по величине только параметра α является грубым. Весьма существенным является параметр β . На рис. 17 представлена зависимость I_0 и I от r для сред с $\alpha = 10^{-2}$ и различными

значениями β . Мы видим, что при $\beta < 1$ происходит рост I_0 с ростом r , а в средах с $\beta > 1$ — уменьшение. Таким образом, введение последовательного определения режима генерации должно быть основано на использовании качественных отличий в зависимостях характерных параметров

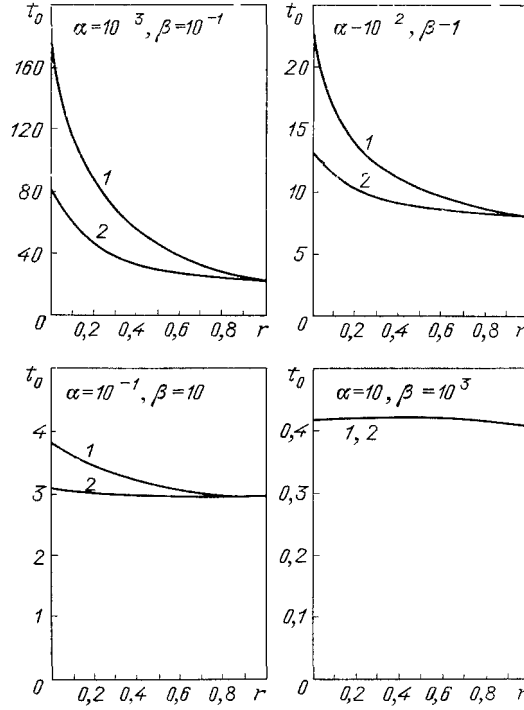


Рис 16 Зависимость времени задержки от величины коэффициента отражения. Кривые 1 соответствуют случаю $r_1 = r_2 = r$, кривые 2 — случаю $r_1 = 1, r_2 = r$

генерируемых импульсов от параметров среды. Таким критерием режима генерации может служить, на наш взгляд, критерий, основанный на знаке производных $\partial I_0 / \partial r|_{r=0}$ и $\partial I_0 / \partial r|_{r=1}$:

- 1) $\left. \frac{\partial I_0}{\partial r} \right|_{r=0} > 0, \left. \frac{\partial I_0}{\partial r} \right|_{r=1} \geq 0$ — сверхизлучение,
- 2) $\left. \frac{\partial I_0}{\partial r} \right|_{r=0} \leq 0, \left. \frac{\partial I_0}{\partial r} \right|_{r=1} < 0$ — суперлюминесценция,
- 3) $\left. \frac{\partial I_0}{\partial r} \right|_{r=0} > 0, \left. \frac{\partial I_0}{\partial r} \right|_{r=1} < 0$ — переходной режим.

Рост I_0 с ростом r в сверхизлучающих средах объясняется тем, что в этом случае ширина линии поля $\Delta\omega_f \approx 1/\tau$ больше ширины линии атомного перехода $\Delta\omega_a \approx 1/T_2$. Помещение среды в резонатор приводит в этом случае к уменьшению ширины линии поля

$$\Delta\omega_f = \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{r}$$

с ростом r , что приводит к более эффективному взаимодействию полевой и атомной подсистем. В суперлюминесцентных средах $\Delta\omega_f < \Delta\omega_a$ уже при $r=0$, поэтому увеличение r , приводящее к уменьшению $\Delta\omega_f$ лишь уменьшает эффективность взаимодействия двух указанных подсистем.

Исследуем теперь влияние неоднородного уширения на характер зависимости $I_0(r)$. На рис. 18 представлена зависимость I от r при раз-

личных значениях параметра неоднородного уширения α^* . Мы видим, что при $\alpha^* \gg \alpha$ происходит уменьшение интенсивности излучения с ростом α^* . Однако качественный вид зависимости $I_0(r)$ практически не изменяется. В частности, производная $\partial I_0 / \partial r|_{r=1}$ не меняет своего знака.

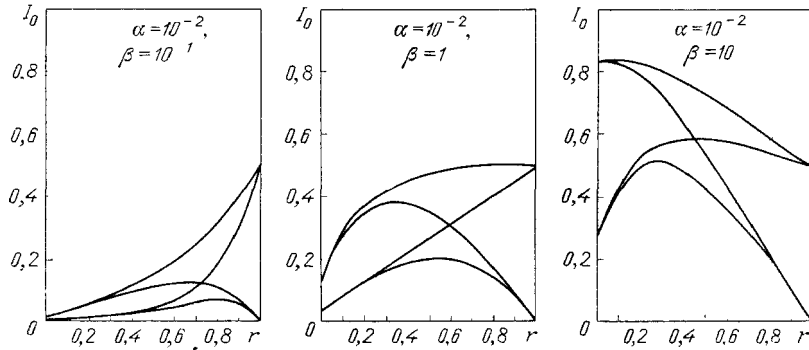


Рис. 17. Влияние параметра β на вид зависимости $I_0(r)$ и $I(r)$

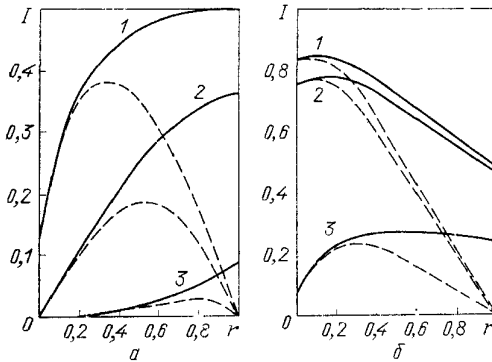


Рис. 18. Влияние неоднородного уширения на вид зависимости $I_0(r)$ и $I(r)$.
а: $\alpha=10^{-2}$, $\beta=1$, $r_1=1$, $\alpha^*=0,1(1)$, $1(2)$, $5(3)$. б: $\alpha=10^{-2}$, $\beta=10$, $r_1=1$, $\alpha^*=0,1(1)$, $1(2)$, $5(3)$.

Уменьшение интенсивности излучения с ростом α^* , как было показано в разделе 2 статьи, связано с уменьшением плотности резонансно взаимодействующих атомов.

5.3. КОЛЛЕКТИВНОЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ. Итак, выше мы исследовали зависимость интенсивности и формы импульсов генерации от основных параметров излучающей системы: α , β , α^* , r_1 , r_2 . Первые три параметра являются внутренними энергетическими параметрами, например, для увеличения β нужно увеличить мощность накачки, для уменьшения параметров α и α^* надо затратить энергию, чтобы привести атомную подсистему в более упорядоченное состояние. Параметры r_1 и r_2 являются внешними. Варьируя эти параметры в некоторой доступной экспериментатору области, мы можем осуществить управление параметрами импульсов генерации, т. е. мы можем до определенной степени оптимизировать процесс экстракции энергии, запасенной в начальный момент в атомной подсистеме.

Оптимизация по указанным выше параметрам не исчерпывает всех возможностей оптимизации процесса генерации излучения инвертированными протяженными многоатомными системами. Еще одна возможность заключена в управлении начальными условиями (5.2). Эта задача более сложная, чем предыдущая, поскольку, чтобы определить зависимость решения от параметров задачи, достаточно просто проварьировать эти параметры в определенной области, что и было сделано выше. Таким

образом, в то время как I_0 является функцией параметров $\alpha, \beta, \alpha^*, r_1, r_2$, она же является теперь функционалом на пространстве начальных условий. Эту задачу решать простым перебором начальных условий достаточно бесперспективно. Однако нас интересуют лишь экстремальные области указанного функционала. Для решения этой задачи есть более прямой путь, состоящий в анализе симметрии исследуемой математической или физической задачи. Например, в случае точечных систем, т. е. систем с размерами много меньшими длины волны излучения, симметрия атомной подсистемы, реализующаяся в сверхизлучающем состоянии, приводит к максимальной скорости распада, пропорциональной N^2 . В случае протяженных систем, как мы видели выше, эта симметрия нарушается. Это связано с тем, что в точечных системах симметрия атомной подсистемы определяет симметрию полной системы, поскольку напряженность поля одинакова во всех точках активной области, и кванты поля практически мгновенно покидают излучающий объем. В протяженных же системах неоднородность поля по длине активного объема будет нарушать симметрию атомной подсистемы, поскольку скорость индуцированного излучения зависит от амплитуды поля. Поэтому состояния, симметричные лишь относительно переменных атомной подсистемы, не будут обладать наибольшими скоростями радиационного распада, таковыми могут быть лишь состояния, учитывающие симметрию полной атомно-полевой системы.

В [27] были найдены такие высокосимметричные решения системы уравнений (5.1) с граничными условиями (5.3). Они имеют вид

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= \frac{1}{2\beta^{1/2}} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \cos \varphi(x), \\ a_2(x, t) &= \frac{1}{2\beta^{1/2}} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} \sin \varphi(x), \\ p_1(x, t) &= \frac{\beta^{1/2}}{2} R_0 \sin \theta(x, t) \cdot \cos \varphi(x), \\ p_2(x, t) &= \frac{\beta^{1/2}}{2} R_0 \sin \theta(x, t) \cdot \sin \varphi(x), \\ R(x, t) &= R_0 \cos \theta(x, t), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где угол Блоха $\theta(x, t)$ определяется выражением

$$\theta(x, t) = A (\operatorname{ch} \Phi(x))^{1/2} u(t); \quad (5.9)$$

здесь

$$A^2 = \frac{4 \ln(1/r_1 r_2)^{1/2}}{[(1-r_1^2)/r_1] + [(1-r_2^2)/r_2]}, \quad (5.10)$$

$$\Phi(x) = x \ln \frac{1}{r_1 r_2} - \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{1/2}, \quad (5.11)$$

$$\sin 2\varphi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} \Phi(x)}. \quad (5.12)$$

Как видно из выражений (5.8)—(5.12), пространственная зависимость разности населенностей, амплитуд полей и волн поляризации однозначно определяется граничными условиями. Временная динамика всех пяти неизвестных функций $a_1(x, t)$, $a_2(x, t)$, $p_1(x, t)$, $p_2(x, t)$, $R(x, t)$ определяется одним уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} = \beta R_0 \sin u, \quad (5.13)$$

где

$$\gamma = \ln \frac{1}{(r_1 r_2)^{1/2}}.$$

Из формул (5.8) видно, что $\varphi(x)$ имеет значение азимутального угла в пространстве энергетического псевдоспина (p_1, p_2, R) , где угол Блоха $\theta(x, t)$ является полярным углом. Эти два угла однозначно задают положение вектора поляризации на сфере радиуса R_0 . Отличие суперсимметричного решения (5.8) от произвольного решения системы уравнений (5.1) с $\alpha = \alpha^* = 0$ состоит в том, что в общем случае угол φ зависит от времени $\varphi(x, t)$. Поэтому можно сказать, что в общем случае конец вектора Блоха в процессе радиационного распада системы навивается на сферу Блоха (рис. 19), чем и объясняется увеличение времени радиационного распада и, как следствие, уменьшение интенсивности. В случае же решения (5.8) конец вектора Блоха движется из верхней точки сферы Блоха к нижней по наикратчайшему пути—вдоль азимута, приводя к максимальной скорости радиационного распада.

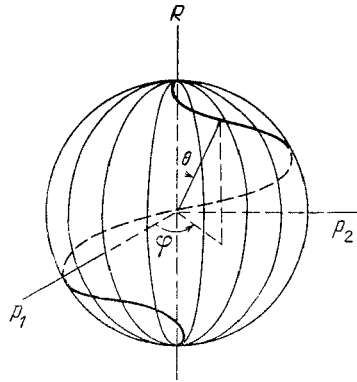


Рис. 19. Углы $\theta(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ однозначно задают положение вектора Блоха в пространстве псевдоспина (p_1, p_2, R) . В общем случае конец вектора Блоха навивается на сферу Блоха, что приводит к увеличению времени радиационного распада. Наибольшей скоростью распада обладают состояния, которым соответствует движение конца вектора Блоха по азимуту

Используя формулы (5.8)—(5.12), несложно показать, что интенсивность излучения с правого конца среды, где коэффициент отражения имеет значение r_2 , определяется выражением

$$I_1(t) = \left| a_1 \left(\frac{1}{2}, t \right) \right|^2 (1 - r_2^2) = 2\gamma a^2(t) \frac{(1 - r_2^2) r_1}{(1 - r_1^2) r_2 + (1 - r_2^2) r_1}, \quad (5.14)$$

где

$$a(t) = \frac{1}{2\beta^{1/2}} \frac{d\mu}{dt}.$$

Суммарная интенсивность излучения с обоих концов среды равна

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = 2\gamma a^2(t). \quad (5.15)$$

Интенсивность поля внутри активного объема имеет вид

$$n(x, t) = n_1(x, t) + n_2(x, t) = A^2 a^2(t) \operatorname{ch} \Phi(x). \quad (5.16)$$

Интегральная интенсивность поля внутри активного объема определяется выражением

$$I_0(t) = \int_{-1/2}^{1/2} n(x, t) dx = a^2(t). \quad (5.17)$$

Пусть в начальный момент в среде создано состояние полной инверсии, так что $R_0 = 1$. Введем новое безразмерное время

$$\tau = \beta^{1/2} t,$$

тогда уравнение (5.13) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \delta \frac{du}{d\tau} = \sin u, \quad (5.18)$$

где

$$\delta = \frac{\gamma}{\beta^{1/2}}. \quad (5.19)$$

Следовательно, форма импульса излучения зависит лишь от одного параметра δ . На рис. 20 показана форма импульса для одного из значений

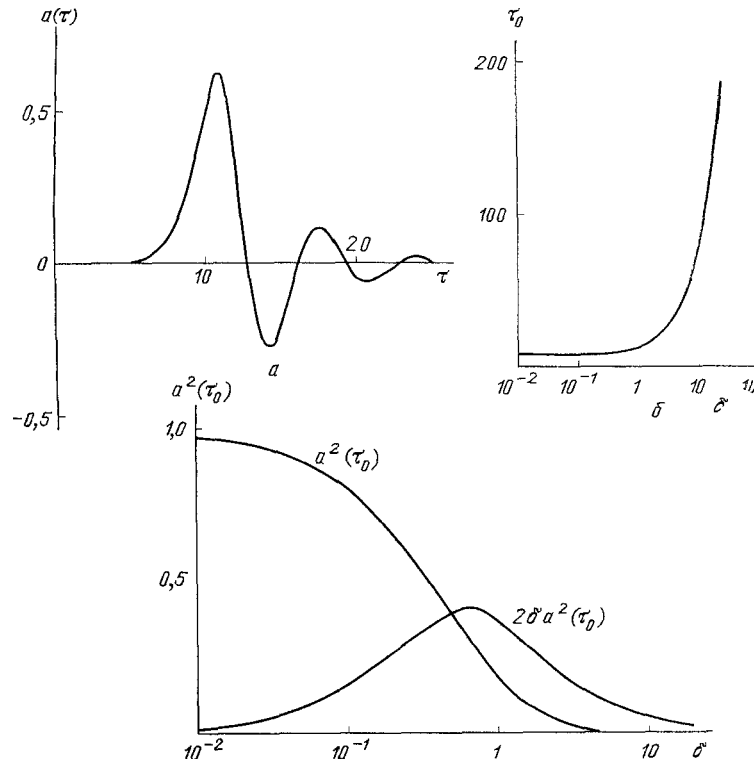


Рис. 20. а — Форма импульса коллективного СИ, $\delta=0,5$. б — Зависимость времени задержки τ_0 от величины параметра σ . в — Зависимость пикового значения $I_0(\tau_0) = a^2(\tau_0)$ и $I(\tau_0) = 2\delta a^2(\tau_0)$ от величины параметра δ

параметра δ , а также зависимость времени задержки τ_0 и квадрата максимума амплитуды $a^2(\tau_0)$ от параметра δ . Величина $2\delta a^2(\tau_0)$, как следует из (5.15), определяет суммарную интенсивность излучения с обоих концов среды. Мы видим, что она имеет экстремальную точку, в которой достигается максимум пикового значения интенсивности излучения.

Отметим, что в случае $r_1=r_2=1$ решение уравнения (5.13) имеет знакомый нам вид

$$a(t) = \frac{1}{\text{ch} [\beta^{1/2} (t - t_0)]},$$

где

$$t_0 = \frac{1}{\beta^{1/2}} \ln \frac{1}{\theta_0},$$

из которого следует, что выражения для амплитуд волн $a_{1,2}(x, t)$ имеют

вид на интервале $(0, 2t_0)$

$$a_1(x, t) = a_2(x, t) = \frac{1}{\operatorname{ch}[\beta^{1/2}(t-t_0)]} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и периодически затем повторяется на интервалах $(2nt_0, 2(n+1)t_0)$.

В [27] были исследованы также неоднородно уширенные системы. В этом случае

$$\theta(x, t, \Delta) = A (\operatorname{ch} \Phi(x))^{1/2} u(t, \Delta),$$

а функции $u(t, \Delta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u(t, \Delta)}{dt^2} + (\gamma - i\alpha^* \Delta) \frac{du(t, \Delta)}{dt} = \\ = \beta \int \exp[-i(\Delta - \Delta') \alpha^* t] \sin u(t, \Delta') \cdot f(\Delta') d\Delta'. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Как видно из (5.8), $a_n(x, t)$ и $p_n(x, t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= a(x, t) \cos \varphi(x, t), & a_2(x, t) &= a(x, t) \sin \varphi(x, t), \\ p_1(x, t) &= p(x, t) \cos \varphi(x, t), & p_2(x, t) &= p(x, t) \sin \varphi(x, t). \end{aligned}$$

Высокая симметрия решений (5.8) и соответствующих им состояний атомно-полевой системы отражается в том факте, что для этих решений наряду с интегралом сохранения Блоха

$$p^2(x, t) + \frac{\beta}{4} R^2(x, t) = p^2(x, 0) + \frac{\beta}{4} R^2(x, 0),$$

имеют место еще два интеграла движения

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= C_1(x), \\ a(x, t) [\sin(2\varphi(x, t))]^{1/2} &= C_2(t). \end{aligned}$$

После того как мы нашли суперсимметричные решения, легко ответить на вопрос, какими должны быть начальные условия, приводящие к их реализации. Согласно уравнению (5.13), мы можем выбрать два основных вида начальных условий:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad u(0) &= u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0, \\ \text{(II)} \quad u(0) &= 0, \quad \frac{du}{dt}(0) = \frac{du_0}{dt}. \end{aligned}$$

В первом случае начальные условия для $a_n(x, t)$, $p_n(x, t)$ и $R(x, t)$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_1(x, 0) &= a_2(x, 0) = 0, \\ p_1(x, 0) &= \frac{\beta^{1/2}}{2} R_0 \frac{\sin[A(\operatorname{ch} \Phi(x))^{1/2} u_0]}{(2e^{-\Phi} \operatorname{ch} \Phi)^{1/2}} \approx \frac{\beta^{1/2} R_0}{2} \frac{A u_0}{\sqrt{2}} e^{\Phi/2}, \\ p_2(x, 0) &= \frac{\beta^{1/2}}{2} R_0 \frac{e^{-\Phi} \sin[A(\operatorname{ch} \Phi(x))^{1/2} u_0]}{(2e^{-\Phi} \operatorname{ch} \Phi)^{1/2}} \approx \frac{\beta^{1/2} R_0}{2} \frac{A u_0}{\sqrt{2}} e^{-\Phi/2}, \\ R(x, 0) &= R_0 \cos[A(\operatorname{ch} \Phi(x))^{1/2} u_0]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Во втором случае начальные условия будут иметь вид (5.22)

$$\begin{aligned} a_1(x, 0) &= \frac{A}{2\beta^{1/2}} \frac{du_0}{dt} \frac{e^{\Phi/2}}{\sqrt{2}}, \\ a_2(x, 0) &= \frac{A}{2\beta^{1/2}} \frac{du_0}{dt} \frac{e^{-\Phi/2}}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(x, 0) &= p_2(x, 0) = 0, \\ R(x, 0) &= R_0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

В первом случае необходимо создать определенное пространственное распределение начальной инверсии и плотности тока поляризации. Во втором случае необходимо создать определяемое (5.22) распределение начального поля.

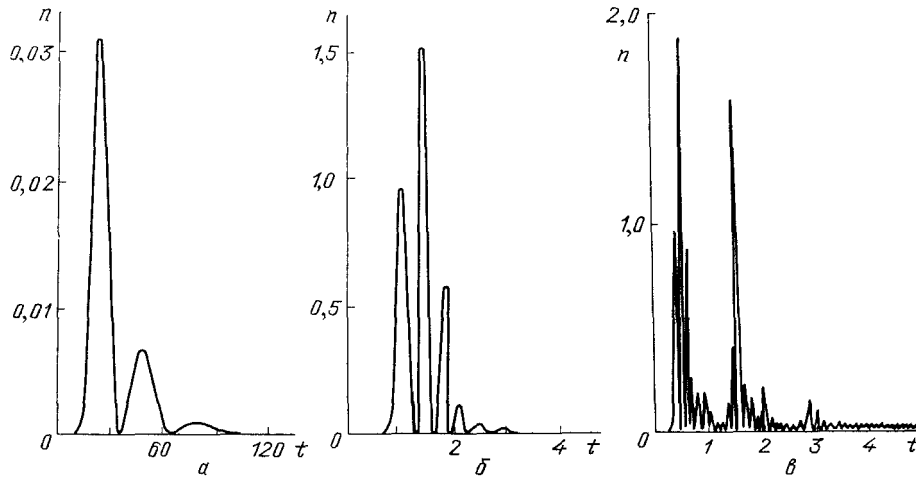


Рис. 21. Зависимость профиля интенсивности излучения от величины параметра $\beta=1$ (а), 100 (б), 10^3 (в) при фиксированном $\alpha=10^{-3}$ и начальных условиях $a_1(x, 0) = a_2(x, 0) = a_0$, $P_n(x, 0) = 0$, $R(x, 0) = R_0$

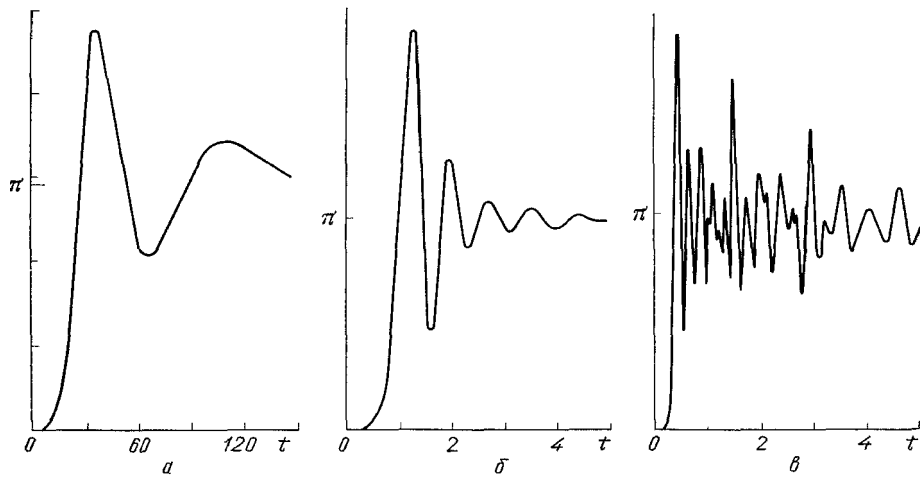


Рис 22 Динамика площади импульсов, изображенных на рис 21

Наглядную иллюстрацию возможностей оптимизации процесса экстракции энергии из возбужденной среды, возникающих в режиме коллективного спонтанного излучения, дают рис. 21—23. На рис. 21 представлена зависимость формы импульса генерации от величины параметра β (например, плотности инверсии среды) при фиксированном значении параметра $\alpha = \tau/T_2$ и равномерном возбуждении среды $R(x, 0) = 1$. Мы видим, что по мере роста плотности инверсии импульс генерации преобразуется в последовательность импульсов с нерегулярным изменением пикового значения интенсивности отдельных импульсов. Во всех представленных случаях имеет место когерентный режим генерации, что под-

тверждается временной зависимостью площади импульса, показанной на рис. 22. Мы видим, что

$$\theta\left(\frac{1}{2}, t\right)\Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \pi.$$

На рис. 23 представлена в сравнении форма импульса генерации, соответствующая начальным условиям (5.21) или (5.22). Мы видим, что вместо цуга импульсов мы снова имеем импульс формы, показанной на рис. 20, *а* и рис. 21, *а*. Интенсивность основного пика существенно превосходит интенсивность любого импульса в цуге, а энергия в этом импульсе равна суммарной энергии цуга импульсов.

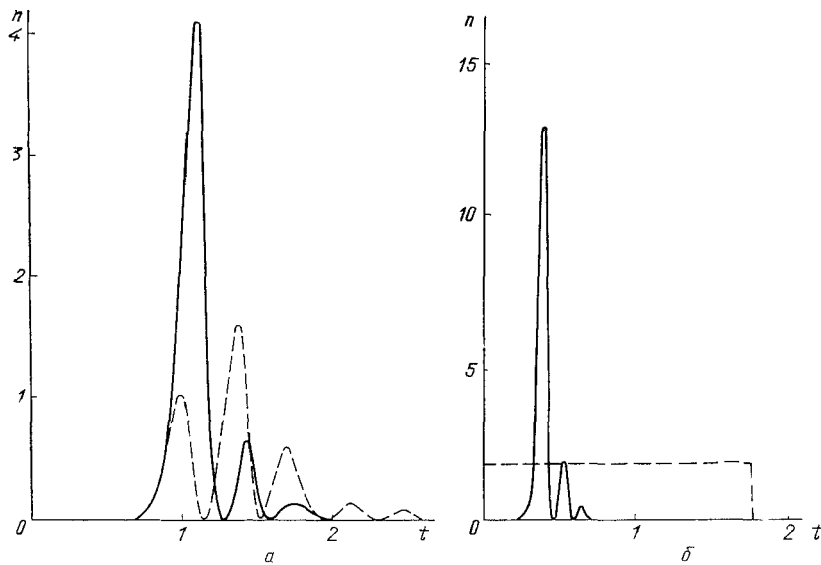


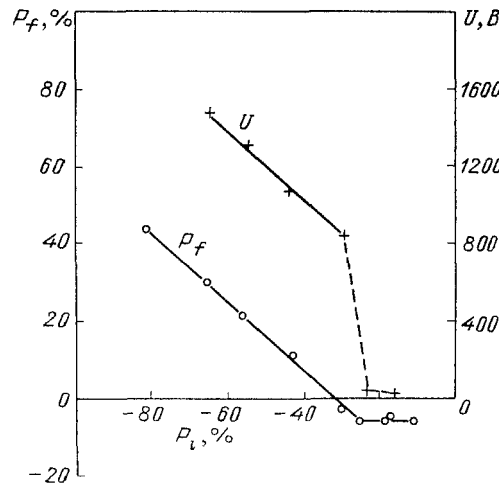
Рис. 23. Сравнение профилей импульсов коллективного СИ (сплошная кривая) и обычного СИ (рис. 21, *б*, *в*), *а*: $\alpha=10^{-3}$, $\beta=10^2$. *б*: $\alpha=10^{-3}$, $\beta=10^3$. В случае *б* высота штрихового прямоугольника равна максимальному пиковому значению интенсивности, а ширина — характерной длительности цуга импульсов, изображенных на рис. 21, *в*

6. Сверхизлучение системы ядерных спинов. Одним из наиболее заметных достижений последнего времени в экспериментальном исследовании эффекта сверхизлучения является, по-видимому, наблюдение сверхизлучения системы протонных спинов [38—40]. В этих экспериментах реализуется долгое время казавшаяся искусственной, модель о сверхизлучении точечной системы, позволившая Дике предсказать эффект сверхизлучения и вызывающая пристальное внимание теоретиков на протяжении многих десятилетий. Интерес к этим исследованиям состоит в том, что детальное сравнение результатов экспериментов с теоретическими предсказаниями позволит проверить справедливость предлагавшихся ранее моделей. В настоящем разделе мы получим уравнения динамики и проанализируем особенности сверхизлучения системы протонных спинов.

6.1. Экспериментальные исследования. Исследования радиочастотного СИ системы ядерных спинов были проведены с использованием высокочастотного колебательного контура, в катушку индуктивности которого помещался твердотельный образец с отрицательной начальной поляризацией ядерных спинов. В качестве активной среды

использовался диэлектрик с высокой концентрацией протонов—пропандиол ($C_3H_8O_2$) с парамагнитной примесью Cr^{+v} . Вещество в виде охлажденных шариков диаметром 1 мм засыпалось в камеру растворения 3He в 4He и подмагничивалось постоянным полем. Концентрация спинов составляла $N/V=3,8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ в экспериментах [38] и $N/V=4,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ в [39]. В последнем случае инверсия населенностей зеемановских уровней протонов достигалась методом динамической поляризации ядер в поле 2,45 Тл, что соответствовало частоте протонного магнитного резонанса $\nu_p=104,3 \text{ МГц}$. Образец находился в многомодовом цилиндрическом резонаторе СВЧ объемом 14 см^3 . В него была погружена катушка индуктивности, состоящая из трех витков изолированного провода. Диаметр витков 12 мм, длина катушки 8 мм. Для измерения поляризации

Рис. 24. Зависимости амплитуды радиочастотного импульса U и конечного значения поляризации P_f от начальной поляризации образца P_i , наблюдавшиеся в экспериментах [39]



катушка соединялась с Q -метром. Сначала измерялась начальная поляризация, затем Q -метр отключался, и напряженность приложенного магнитного поля начинала уменьшаться со скоростью 0,005 Тл/с. Катушка индуктивности и отрезок кабеля, находящийся в криостате, образовывали колебательный контур с резонансной частотой $\nu_r=54 \text{ МГц}$. Когда частота протонного резонанса ν_p приближалась к резонансной частоте ν_r , в колебательном контуре возникал радиочастотный импульс, который регистрировался запоминающим осциллографом. На рис. 24 представлена зависимость от начальной поляризации амплитуды радиочастотного импульса и конечного значения поляризации, наблюдавшаяся в [39]. Из рисунка видно, что имеется некоторое критическое значение начальной поляризации, после которого наблюдается линейный рост конечной поляризации. Реверс поляризации наблюдается при $|R_0| > |R_{0c}| = 0,32$.

6.2. ТЕОРИЯ СПИНОВОГО СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ. Как мы отмечали выше, спиновое СИ соответствует модели Дике для точечной системы излучателей. Однако конкретная реализация этой модели имеет ряд особенностей, отличающих ее от открытой системы двухуровневых излучателей. Эти особенности обсуждались отчасти в [38—40]. Одна из основных особенностей состоит в наличии высокодобротного резонатора, обеспечивающего частотную дискриминацию мод излучения. Вторая особенность заключается в том, что характерная длительность импульсов СИ сравнима с временем однородной поперечной релаксации T_2 . В этом случае длительность импульсов генерации существенно зависит от T_2 . Теория СИ с учетом конечности времени T_2 была построена применительно к оптическим системам в [44].

Получим уравнения динамики системы спинов, взаимодействующих друг с другом и с токами в резонансном контуре. Если в гамильтониан взаимодействия (П1.1)—(П1.4) подставить выражение для плотности тока $\mathbf{j}$ в следующем виде

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (6.1)$$

где $\mathbf{M}$ —вектор намагничивания:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (6.2)$$

то гамильтониан (П 1.4) примет вид

$$H_S = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV = - \int \mathbf{M} \mathbf{B} dV; \quad (6.3)$$

здесь $\mathbf{B}$ —вектор индукции магнитного поля, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Полагая, что магнитное поле $\mathbf{B}$ содержит постоянную компоненту B_0 , направленную вдоль оси z , и две поперечные компоненты, осциллирующие на радиочастоте, гамильтониан (6.3) можно привести к виду

$$H_S = -\hbar\gamma \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_i \mathbf{B}(\mathbf{r}_i, t) = -\frac{\hbar\gamma}{2} \sum_{i=1}^N B_0(\mathbf{r}_i) \sigma_{i3} - \frac{\hbar\gamma}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_{i1} B_1(\mathbf{r}_i, t) + \sigma_{i2} B_2(\mathbf{r}_i, t)), \quad (6.4)$$

здесь $\mathbf{I}$ —оператор спина, связанный с оператором магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ и спиновыми матрицами $\boldsymbol{\sigma}$ следующим соотношением

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\hbar\gamma}. \quad (6.5)$$

Переходя от компонент B_1 и B_2 к циркулярно поляризованным компонентам

$$\mathbf{B}_\pm = \mathbf{e}_\pm \mathbf{B}_\pm + \mathbf{e}_\mp \mathbf{B}_\mp, \quad (6.6)$$

где

$$B_\pm = \frac{1}{2} (B_1 \pm iB_2), \quad \mathbf{e}_\pm = \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2,$$

выражение (6.4) можно переписать в виде

$$H_S = -\frac{\hbar\gamma}{2} \sum_{i=1}^N B_0(\mathbf{r}_i) \sigma_{i3} - \hbar\gamma \sum_{i=1}^N (\sigma_{i+} B_-(\mathbf{r}_i) + \sigma_{i-} B_+(\mathbf{r}_i)), \quad (6.7)$$

где

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i\sigma_2). \quad (6.8)$$

Используя коммутационные соотношения для матриц Паули, несложно получить следующие уравнения движения для $\sigma_\pm, \sigma_3$:

$$\frac{\partial \sigma_{i+}}{\partial t} = -i\gamma B_{0i} \sigma_{i+} + i\gamma B_{i+} \sigma_{i3}, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial t} = 2i\gamma (\sigma_{i+} B_{i-} - B_{i+} \sigma_{i-}).$$

Уравнение для векторного потенциала радиочастотного поля

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_s) \quad (6.10)$$

содержит в правой части два слагаемых: $\mathbf{j}_c$ —плотность тока проводимости и $\mathbf{j}_s$ —плотность тока намагничения. Последняя определяется выражениями (6.1) и (6.2). Ток $\mathbf{j}_c$ обусловлен движением свободных зарядов по проводам, а ток $\mathbf{j}_s$ —вращением спинов. Ввиду линейности уравнения (6.10) векторный потенциал также можно представить в виде двух слагаемых. Первое из них связано с токами проводимости и имеет вид

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{\mathbf{j}_c(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{J_0(t) e^{-i\omega t}}{c} \oint_{\mathcal{L}} d\mathbf{l}' \frac{\exp(i\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.11)$$

где $t' = t - (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$, $J_0(t)$ —амплитуда силы тока в резонансном контуре, $\mathcal{L}$ — контур интегрирования, совпадающий с линиями тока в резонансном контуре. При выводе (6.11) мы положили, что $\mathbf{j}_c(\mathbf{r}', t')$ можно представить в виде

$$\mathbf{j}_c(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}_0(r', t) \exp(-i\omega t + i\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (6.12)$$

Итак, часть магнитного поля, обусловленная токами проводимости в резонансном контуре, может быть представлена в виде

$$\mathbf{B}_c = \text{rot } \mathbf{A}_c = \frac{J(t)}{c} \oint_{\mathcal{L}} \frac{[d\mathbf{l}', \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (1 - i\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp(i\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (6.13)$$

Представляя вектор намагничения $\mathbf{M}$ в виде, аналогичном (6.12),

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{M}_0(\mathbf{r}', t) \exp(-i\omega t + i\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (6.14)$$

несложно получить для поля $\mathbf{B}_s$ следующее выражение

$$B_{s+} = \frac{e^{-i\omega t}}{2} \int dV' \mathbf{M}_0(\mathbf{r}', t) \left[[\mathbf{e}_+^* \nabla] \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(i\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]. \quad (6.15)$$

Таким образом, в случае $\kappa r \ll 1$ положительно-частотная часть магнитного поля может быть представлена в виде

$$B_+(r, t) = b_1 J_+ + b_2 R^+, \quad (6.16)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2c} \oint_{\mathcal{L}} \frac{e_+^* [d\mathbf{l}', \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \\ b_2 &= \frac{\hbar \gamma}{4N} \sum_{i=1}^N \left([\mathbf{e}_+ [\mathbf{e}_+^* \nabla]] \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right), \\ R^+ &= \sum_{i=1}^N \langle \sigma_{i+} \rangle e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Используя (6.11)—(6.17), уравнение для тока в колебательном контуре можно представить в виде

$$L \frac{d^2 J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{C} J = -\frac{1}{c} \frac{d^2 \Phi_S}{dt^2}, \quad (6.18)$$

где L —индуктивность контура:

$$L = \frac{1}{c^2} \oint_{\mathcal{L}} \oint_{\mathcal{L}} \frac{d\mathbf{l} d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

R —активное сопротивление, а C —его емкость. Поток магнитного поля $\mathbf{B}_s$ через плоскость Σ , опирающуюся на контур $\mathcal{L}$, можно представить в виде

$$\Phi_s = \int_{\Sigma} \mathbf{B}_s d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{A}_s d\mathbf{l} = g_2 R^+, \quad (6.19)$$

где

$$g_2 = \int_{\Sigma} b_2(\mathbf{r}) \mathbf{l}_+ d\mathbf{S} = \langle b_2 \rangle \Sigma_+.$$

Окончательно, уравнение для тока в резонансном контуре принимает вид

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + 2\delta \frac{dJ}{dt} + \Omega^2 J = -v \frac{d^2 R^+}{dt^2}, \quad (6.20)$$

где

$$2\delta = \frac{R}{L}, \quad \Omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad v = \frac{g_2}{Lc}.$$

Учитывая, что L можно представить в виде

$$L = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} b_1(r) e_+ d\mathbf{S} = \frac{\langle b_1 \rangle}{c} \Sigma_+,$$

выражение для v можно переписать следующим образом

$$v = \frac{\langle b_2 \rangle \Sigma_+}{Lc} = \frac{\langle b_2 \rangle \Sigma_+}{\langle b_1 \rangle \Sigma_+} = \frac{\langle b_2 \rangle}{\langle b_1 \rangle}. \quad (6.21)$$

Отметим, что величины v и b_1 могут быть комплексными, в то время как b_2 —действительная. Таким образом, согласно (6.16), между полями B_c и B_s может иметь место фазовый сдвиг.

Объединяя уравнения для спинов (6.9) с уравнениями для тока проводимости, окончательно получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dR^+(t, \Delta)}{dt} + \left(i\Delta + \frac{1}{2T_2} \right) R^+(t, \Delta) &= i\gamma B_+ R_3(t, \Delta), \\ \frac{dR_3(t, \Delta)}{dt} &= 2i\gamma (R^+(t, \Delta) B_- - B_+ R^-(t, \Delta)), \\ \frac{dJ^+}{dt} + [\delta + i(\Omega - \omega_0)] J_+ &= i \frac{\omega_0 v}{2} \int R^+(t, \Delta) f(\Delta) d\Delta, \\ B_+(t) &= b_1 J_+(t) + b_2 \int R^+(t, \Delta) f(\Delta) d\Delta. \end{aligned} \quad (6.22)$$

В (6.22) мы учли неоднородное уширение линий протонного магнитного резонанса, $f(\Delta)$ —контур линии неоднородного уширения, ω_0 —центральная частота контура, $\Delta = \omega - \omega_0$. Пренебрежение эффектами запаздывания, справедливое для систем с размерами много меньше длины волны излучения, позволило нам свести волновое уравнение (6.10) к простой функциональной зависимости $B_+(t)$ от $J_+(t)$ и $R^+(t)$. Это приближение использовано в выражениях (6.12), (6.14).

Для анализа качественных особенностей спиновой СИ ограничимся случаем $f(\Delta) = \delta(\Delta)$. Система уравнений (6.22) содержит два характерных времени релаксации: T_2 —время релаксации спиновой системы и δ^{-1} —время жизни поля в резонаторе. Соотношение между этими временами и будет определять, в первом приближении, характер генерации. При $\delta T_2 \gg 1$ мы будем иметь сверхизлучение, при $\delta T_2 \ll 1$ —суперлюминесценцию. Более детальная классификация режимов генерации была дана ранее в разделе 5 статьи, она может быть непосредственно перене-

сена и на этот случай, если константу затухания δ и коэффициенты отражения $r_{1,2}$ выразить через добротность резонатора. На начальном (линейном) этапе, когда $R_3 \approx -|R_{30}|$, уравнение для амплитуды тока в контуре имеет вид

$$\frac{dJ}{dt} + (\delta + i\Delta) J_+ = \omega b_2 \gamma T_2 |R_{30}| J_+.$$

Следовательно, J_+ определяется выражением

$$J_+(t) = J_+(0) \exp[(g-1)\delta t - i(\Omega - \omega)t], \quad (6.23)$$

где

$$g = \frac{T_2 \omega_0 \gamma b_2 |R_{30}|}{\delta}. \quad (6.24)$$

Условие нарастания амплитуды тока в контуре имеет вид

$$g > 1. \quad (6.25)$$

Рассмотрим случай $\delta T_2 \gg 1$. В этом случае можно положить

$$J_+(t) = \frac{i\omega v}{2(\delta + i(\Omega - \omega))} R^+(t)$$

и выражение для R_3 принимает вид

$$R_3(t) = |R_{30}| \left[-\frac{1}{g(\omega)} + \left(1 - \frac{1}{g(\omega)}\right) \tanh \frac{t-t_0}{2\tau_p} \right], \quad (6.26)$$

где

$$g(\omega) = g \frac{\delta^2}{\delta^2 + (\Omega - \omega)^2}, \quad (6.27)$$

$$t_0 = \tau_p \ln \left[\frac{|R_{30}|}{|R_{+0}|} \left(1 - \frac{1}{g(\omega)}\right) \right], \quad (6.28)$$

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{|R_{30}| \omega \gamma b_2}{\delta} \frac{\delta^2}{\delta^2 + (\Omega - \omega)^2} \left(1 - \frac{1}{g(\omega)}\right). \quad (6.29)$$

Импульс тока в контуре имеет вид классического импульса СИ:

$$|J_+(t)|^2 = \frac{|R_{30}|^2}{4} \left(1 - \frac{1}{g(\omega)}\right)^2 \frac{\omega^2 |v|^2}{4} \frac{1}{\delta^2 + (\Omega - \omega)^2} \frac{1}{\cosh^2[(t-t_0)/2\tau_p]}. \quad (6.30)$$

Таким образом, как следует из вышеприведенных формул, режим генерации в этом случае соответствует режиму СИ в слабоусиливающих средах, предсказанному в [44]. Величина $g(\omega)$ в оптических системах имеет смысл коэффициента усиления. Порог генерации определяется условием $g(\omega) > 1$. В процессе СИ участвует лишь эффективное число атомов

$$N_{\text{eff}} = |R_{30}| \left(1 - \frac{1}{g(\omega)}\right),$$

так что в процессе генерации импульса СИ инвертируется лишь N спинов. Поэтому, если начальная поляризация мишени была равна

$$P_i = -\frac{|R_{30}|}{N},$$

то конечное значение поляризации мишени будет определяться, согласно (6.26), выражением

$$P_f = \frac{|R_{30}|}{N} \left(1 - P_i \frac{2}{g(\omega)}\right). \quad (6.31)$$

Следовательно, при $g(\omega) > 2$ будет наблюдаться реверс поляризации.

Такой характер зависимостей согласуется с результатами экспериментов [39].

В обратном предельном случае ($\delta T_2 \ll 1$) вращение спинов будет происходить за времена гораздо меньшие времени установления колебаний в контуре, равного δ^{-1} . Следовательно, импульс генерации будет иметь длительность порядка δ^{-1} , а на его переднем фронте будет иметь место выброс или последовательность импульсов, обусловленная движением спинов.

Приложения.

1. Вывод уравнений взаимодействия системы двухуровневых атомов с излучением. Гамильтониан системы двухуровневых атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем, имеет вид

$$H = H_a + H_f + H_{int}, \quad (\text{П1.1})$$

где H_a — гамильтониан атомной системы:

$$H_a = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar \omega_{0i}}{2} \sigma_{iz}, \quad (\text{П1.2})$$

H_f — гамильтониан свободного поля:

$$H_f = \int \left[2\pi c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 \right] dV, \quad (\text{П1.3})$$

H_{int} — гамильтониан взаимодействия:

$$H_{int} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV. \quad (\text{П1.4})$$

В (П1.3) $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — оператор векторного потенциала э.м. поля, а $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — канонически сопряженный ему обобщенный импульс

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (\text{П1.5})$$

Плотность тока перехода в (П1.4) связана с матрицами Паули σ_+ , σ_- , используемыми при описании динамики двухуровневых атомов, следующим соотношением

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N (\langle + | \mathbf{j}_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, t) | - \rangle \sigma_{i+}(t) + \langle - | \mathbf{j}_0^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, t) | + \rangle \sigma_{i-}(t)), \quad (\text{П1.6})$$

где $\mathbf{j}_0^{\pm}(\mathbf{r})$ — положительно-частотная часть оператора плотности тока перехода отдельного атома, $|+\rangle$, $|-\rangle$ — волновые функции возбужденного и основного состояний атома. Для модели точечных атомов выражение (П1.6) принимает вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{m}_i \sigma_{i+}(t) + \mathbf{m}_i^* \sigma_{i-}(t)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (\text{П1.7})$$

где $\mathbf{m}_i$ — матричный элемент тока перехода i -го атома.

Используя коммутационные соотношения операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} [A_\alpha(\mathbf{r}, t), A_\beta(\mathbf{r}', t)] &= [B_\alpha(\mathbf{r}, t), B_\beta(\mathbf{r}', t)] = 0, \\ [A_\alpha(\mathbf{r}, t), B_\beta(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \alpha, \beta = x, y, z, \end{aligned} \quad (\text{П1.8})$$

и спиновых матриц Паули:

$$[\sigma_{i+}, \sigma_{j-}] = \sigma_{i3} \delta_{ij}, \quad [\sigma_{i\pm}, \sigma_{j3}] = \mp 2\sigma_{i\pm} \delta_{ij}, \quad (\text{П1.9})$$

несложно получить следующую систему операторных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 4\pi c^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial \sigma_{i+}}{\partial t} &= i\omega_0 \sigma_{i+} + \frac{i}{\hbar c} \mathbf{m}_i^* \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \sigma_{i3}, \\ \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial t} &= \frac{2i}{\hbar c} (\mathbf{m}_i \sigma_{i+} - \mathbf{m}_i^* \sigma_{i-}) \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t). \end{aligned} \quad (\text{П1.10})$$

2. СИСТЕМА МЕДЛЕННОМЕНЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ. Представим векторный потенциал $A(\mathbf{r}, t)$ и плотность тока поляризации $j(\mathbf{r}, t)$, входящие в уравнение (2.4), в следующем виде

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &= A_1(x, t) \sin(\omega t - kx) + A_2(x, t) \sin(\omega t + kx + \varphi) + \\ &\quad + A_3(x, t) \cos(\omega t - kx) + A_4(x, t) \cos(\omega t + kx + \varphi), \\ j(\mathbf{r}, t) &= j_1(x, t) \cos(\omega t - kx) + j_2(x, t) \cos(\omega t + kx + \varphi) + \\ &\quad + j_3(x, t) \sin(\omega t - kx) + j_4(x, t) \sin(\omega t + kx + \varphi), \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

где $A_n(x, t)$ и $j_n(x, t)$ — медленноменяющиеся амплитуды. Подставляя выражения (П2.1) в систему уравнений (2.4), получим следующую систему уравнений для медленноменяющихся амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n(x, t)}{\partial t} - (-1)^n c \frac{\partial A_n(x, t)}{\partial x} &= \frac{2\pi}{\kappa} j_n(x, t), \\ \frac{\partial j_1(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2T_2} j_1(x, t) + (\omega - \omega_0) j_3(x, t) &= \frac{|m|^2}{\hbar c} (A_1 \rho_0 + A_2 \rho_1 - A_4 \rho_2), \\ \frac{\partial j_2(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2T_2} j_2(x, t) + (\omega - \omega_0) j_4(x, t) &= \frac{|m|^2}{\hbar c} (A_2 \rho_0 + A_1 \rho_1 + A_3 \rho_2), \\ \frac{\partial j_3(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2T_2} j_3(x, t) - (\omega - \omega_0) j_1(x, t) &= -\frac{|m|^2}{\hbar c} (A_3 \rho_0 + A_4 \rho_1 + A_2 \rho_2), \\ \frac{\partial j_4(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2T_2} j_4(x, t) - (\omega - \omega_0) j_2(x, t) &= -\frac{|m|^2}{\hbar c} (A_4 \rho_0 + A_3 \rho_1 - A_1 \rho_2), \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\rho_0 - \rho_e}{T_1} &= -\frac{1}{\hbar c} (A_1 j_1 + A_2 j_2 - A_3 j_3 - A_4 j_4), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\rho_1}{T_1} &= -\frac{1}{2\hbar c} (A_1 j_2 + A_2 j_1 - A_3 j_4 - A_4 j_3), \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\rho_2}{T_1} &= \frac{1}{2\hbar c} (A_1 j_4 + A_3 j_2 - A_2 j_3 - A_4 j_1), \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

где

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho_0(x, t) + \rho_+(x, t) e^{i2kx} + \rho_-(x, t) e^{-i2kx} = \\ &= \rho_0(x, t) + 2\rho_1(x, t) \cos(2kx + \varphi) - 2\rho_2(x, t) \sin(2kx + \varphi). \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Dicke R.H.* //Phys.Rev. **1954** V.93 P.99
2. *Skribanowitz N., Herman I.P., MacGillivray J.C., Feld M.S.* //Phys.Rev.Lett. **1973** V 30 P 309
3. *Файн В.М.* Фотоны и нелинейные среды — М.: Сов. радио, 1972
4. *Пантелл Р., Путхоф Г.* Основы квантовой электроники—М.: Мир, 1972
5. *Ярив А.* Квантовая электроника—М.: Сов. радио, 1980
6. *Ханин Я. И.* Динамика квантовых генераторов — М.: Сов. радио, 1975
7. *Мейтленд А., Дани М.* Введение в физику лазеров—М.: Наука, 1978
8. *Карлов Н. В.* Лекции по квантовой электронике—М.: Наука, 1988
9. *Клышко Д. Н.* Физические основы квантовой электроники—М.: Наука, 1986
10. *Шен И. Р.* Принципы нелинейной оптики—М.: Наука, 1989
- [11] *Аллен Л., Эберли Д.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы—М.: Мир, 1978
12. Cooperative Effects in Matter and Radiation/Eds. C.M. Bowden, D.W. Howgate, H.R. Robl. — New York: Plenum Press, 1977
13. Coherence and Quantum Optics IV/Eds. L. Mandel, E. Wolf—New York: Plenum Press 1978
14. Coherent Nonlinear Optics/Eds. M.S. Feld, V.S. Letokhov—Berlin a.o.: Springer-Verlag 1981
15. Dissrprative Systems in Quantum Optics: Resonance Fluorescence, Optical Bistability, Superfliorescence—Berlin a.o.: Springer Verlag, 1982
16. Теория кооперативных когерентных эффектов в излучении/Под ред. Е.Д. Трифонова—Л.: ЛГПИ, 1986
17. *Попов В Н Ярунин В С* Коллективные эффекты в квантовой статистике излучения и вещества—Л.: Изд- во Ленингр. ун-та, 1985
18. Кооперативное излучение и статистика фотонов—Л.: ЛГПИ, 1986
19. *Боголюбова Н., Шумовский А.С.* Сверхизлучение—Дубна: ОИЯИ, 1987
20. *Голенищев-Кутузов В.А., Самарцев В.В., Хабибуллин Б.М.* Импульсная оптическая и акустическая когерентная спектроскопия—М.: Наука, 1988
- [21] *Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А.* Кооперативные явления в оптике: Сверхизлучение, бистабильность, фазовые переходы—М Наука 1988
22. *Stenholm S* //Phys. Rept. **1973** V.66 P.1
23. *Андреев Л.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А.* //УФН. **1980** Т.131 С.653
24. *Gross M., Haroche S.* //Phys. Rept. **1982** V.93 P.1
25. *Боголюбов Н.Н., Плечко В.Н., Шумовский А.С.* //Физ. ЭЧАЯ. **1983** Т.14 С.1443
26. *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* //УФН **1989** Т.159 С. 193
27. *Андреев А.В.* //ЖЭТФ **1989** Т.95 С.1562
28. *McCall S.L., Hahn E.L.* //Phys. Rev. Lett. **1967** V.18 P.908 Phys. Rev. 1969 V. 183 P. 457
29. *Slusher R.E., Gibbs H.M.* //Ibidem. Ser. A **1972** V.5 P.1364
30. *Lamb G.L.* //Rev. Mod. Phys. **1971** V.43 P.99
- [31]. *Полуэкттов И.А., Попов Ю.М., Роитберг В.С.* //КЭ **1974** Т.1 С.757
32. *Голенищев-Кутузов В. А., Самарцев В. В., Соловаров Н.К., Хабибуллин Б.М.* Магнитная квантовая акустика—М.: Наука, 1977
33. *Манькин Э.А., Самарцев В.В.* Оптическая эхо-спектроскопия—М.: Наука, 1984
34. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи—М.: Наука, 1980
35. *Нагибаров И.А., Богданов Е.И., Дерюгин И.А.* Динамика квантовых систем. — Минск: Наука и техника, 1986
36. *Крюков П. Г., Летохов В. С.* //УФН **1969** Т.99 С.169
37. *Варнавский О.П., Леонтович А.М., Маликов Р.Ф., Сидорук Н.В.* //Когерентное усиление ультракоротких импульсов света в трехуровневой резонансной среде.—Препринт ФИАН СССР № 175.—Москва, 1986
38. *Киселев Ю.Ф., Прудкогляд А.Ф., Шумовский А.С., Юкалов В.Я.* //ЖЭТФ **1988** Т.94 С.344
39. *Бажанов Н.А., Буляница Д.С., Ковалев А.И. и др.* //ФТТ. **1989** Т.31 С.206
40. *Киселев Ю.Ф., Алискендеров Э.И.* //Письма ЖЭТФ. **1989** Т.51 С.14
- [41] *Егоров В.С., Чехонин И.А.* //ЖТФ **1986** Т.56 С.572
42. *Егоров В.С., Чехонин И.А., Шубин Н.Н.* //Опт. и спектр. **1987** Т.62 С.853
43. *Андреев А.В., Ильинский Ю.А., Мкоян А.С.* //ЖЭТФ **1989** Т.96 С.1598
44. *Андреев А.В.* //Письма ЖТФ **1977** Т.3 С.779