Октябрь 1990 г. *Том 160, вып. 10*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

532.517

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ КРИТЕРИЙ ЛАНДАУ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТИ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

А. М. Фридман

(Астрономический совет АН СССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и план заметки [1]. Цель настоящей заметки — показать, насколько значительную роль играет в реальных системах с градиентными потоками критерий стабилизации Ландау [3]. Это хотелось отметить еще и потому, что после критической статьи Сыроватского [4] результат работы [3] был изъят как из [5] (1954 г.) (хотя в той же книге [5] (1953 г.) он содержится), так и из [2]. Работа [3] также отсутствует и в [1] с указанием на причину — критическую статью [4].

Заметка состоит из трех коротких частей. В первой части (п. 2) излагается на качественном уровне физика неустойчивости тангенциального разрыва скорости дозвукового течения и ее стабилизация в сверхзвуковом потоке. Во второй части (п. 3) сформулировано критическое замечание Сыроватского [4] (к работе [3]), являющееся корректным для бесконечно протяженной среды. В последней, третьей (п. 4), части показано, что в *реальных пространственно ограниченных* сверхзвуковых течениях с тангенциальным разрывом скорости существует стабилизирующий эффект, который количественно описывается с помощью *модифицированного критерия Ландау*. Стабилизация неустойчивости тангенциального разрыва *квазидвумерных* течений (например, таких, как мелкая вода [6, 7] и газовые диски галактик [8]), происходит в полном соответствии с критерием Ландау [3].

2. О физике неустойчивости тангенциального разрыва скорости дозвукового течения и ее стабилизации в сверхзвуковом потоке. Для рассмотренных в [3, 4] адиабатических возмущений, $S=\mathrm{const}$, связь между тепловой функцией W, давлением P и плотностью ρ определяется из соотношения $W=\int \mathrm{d}P/\rho$, а для $P=A\rho^{\gamma}$ где A, γ — постоянные (γ — показатель адиабаты, $\gamma=c_P/c_V$; c_P, c_V — теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно), имеем

$$W=\frac{\gamma}{\gamma-2}A^{1/\gamma}P^{(\gamma-1)/\gamma}=BP^{\alpha}. \qquad (1)$$

Таким образом, при любом $\gamma>1$ $(\alpha>0)$ давление P растет вместе с ростом W.

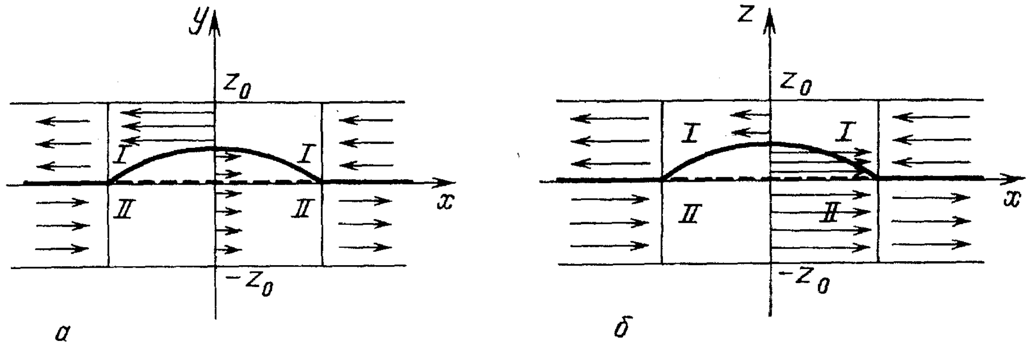

Рис. 1

На рис. 1 *а, б* изображены возмущения тангенциального разрыва скорости **v**, направленной вдоль оси x, в двух противоположных предельных случаях, когда число Маха $\mathrm{Ma}\equiv v/c\ll 1$ и $\mathrm{Ma}\gg 1$, где c — скорость звука. В [3] показано, что амплитуда возмущения по обе стороны оси z от плоскости $z=0$ тангенциального разрыва падает экспоненциально $\sim e^{-z/z_0}$. Поэтому достаточно ограничиться областью $|z|<z_0$.

Область I (над «горбом» возмущения) на рис. 1, *а* можно рассматривать как область критического сечения дозвукового сопла $(\mathrm{Ma}\ll 1)$, где, как известно [9], скорость течения максимальна. Тогда из уравнения Бернулли для изэнтропического течения

$$\frac{v^2}{2}+BP^{\alpha}=\mathrm{const} \qquad (2)$$

следует, что давление над горбом должно быть минимальным. Это приведет к дальнейшему росту амплитуды возмущения— неустойчивости.[2]

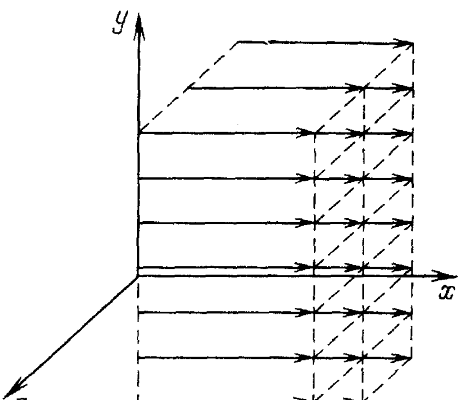

Рис. 2

Область I (над горбом) на рис. 1, *б* можно рассматривать, как область сужающегося канала сверхзвукового диффузора $(\mathrm{Ma}\gg 1)$, где скорость v уменьшается [9] и, следовательно, давление над горбом должно возрастать. Это приведет к «вдавливанию» горба назад в *II*.

В этом и состоит *эффект стабилизации* неустойчивости тангенциального разрыва скорости в сверхзвуковом потоке, впервые обнаруженный Ландау [3]. Однако на чем же тогда основано замечание Сыроватского [4] от отсутствии такого стабилизирующего эффекта?

3. Критика Сыроватским [4] **работы Ландау** [3]. Пусть задано течение вдоль оси x с тангенциальным разрывом скорости (рис. 2): $v_0=v_x\Theta(-z)$, где Θ — единичная функция. Выбрав возмущения плотности ρ и скорости v в виде

$$\rho(x,z,t)\sim v(x,z,t)\sim\exp(ikx-\lambda|z|+\gamma t), \qquad (3)$$

Ландау показал [3] отсутствие неустойчивости при условии $v_0 > v_{cr}$. Если невозмущенные плотности ρ_0 и скорости звука c_0 считать неизменными по обе стороны от разрыва: $\rho_{01}=\rho_{02}=\rho_0$, $c_{01}=c_{02}=c_0$, то в этом простейшем случае

$$v_{cr}=2\sqrt{2}c_0. \tag{4}$$

Как видно из (3), волновой вектор $\mathbf{k}$ выбран в [3] вдоль оси x, $k=k_x$. Десятью годами позже Сыроватский [4], решая аналогичную задачу относительно общего класса возмущений $\mathbf{k}=\{k_x, k_y\}=\{k\cos\theta, k\sin\theta\}$, обнаружил наличие неустойчивости при любом v_0.

Полагая $\rho_{01}=\rho_{02}=\rho_0$, $c_{01}=c_{02}=c_0$, задача об устойчивости тангенциального разрыва скорости сжимаемой жидкости относительно произвольных возмущений может быть сведена к следующему дисперсионному уравнению (временная зависимость выбрана в виде $\sim\exp(-i\omega t)$):

$$k^2c_0^2\left[\frac{1}{(\omega-kv_0)^4}-\frac{1}{\omega^4}\right]=\frac{1}{(\omega-kv_0)^2}-\frac{1}{\omega^2}. \tag{5}$$

Сокращая на общий множитель, имеющий только вещественный корень $\omega=-kv/2$, приходим к уравнению

$$f(x)=1, \tag{6}$$

где

$$f(x)\equiv\frac{1}{(x-\mathrm{Ma}\cos\theta)^2}+\frac{1}{x^2},\quad x\equiv\frac{\omega}{kc_0},\quad \mathrm{Ma}\equiv\frac{v_0}{c_0},$$

которое отличается от уравнения Ландау [3] наличием $\cos\theta$ [4]. Уравнение (6) имеет 4 корня. Все они действительны, если функция $f(x)$ аналогична изображенной на рис. 3 сплошной линией. Если же $f(x)$ аналогична изображенной на рис. 3 пунктиром, то уравнение (6) имеет

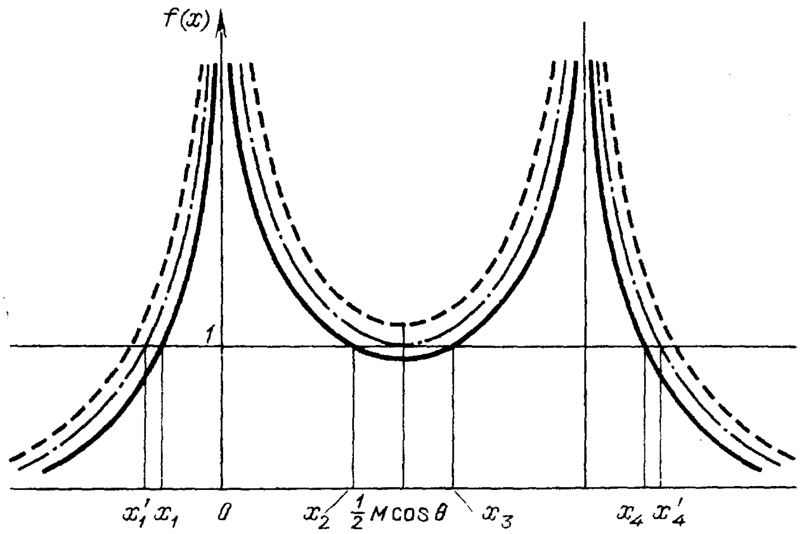

Рис. 3

только два действительных корня. Следовательно, два других — комплексно сопряженные, один из которых описывает неустойчивость. Мажорантная кривая изображена на рис. 3 штрих-пунктирной линией. В этом случае также имеем все действительные корни: x_1', x_4', $x_2'=x_3'=(1/2)\,\mathrm{Ma}\cos\theta$, два из которых кратные. Критическое число Маха, $\mathrm{Ma_{cr}}$, находится из уравнения $f((1/2)\,\mathrm{Ma}\cos\theta)=1$, определяющего точку касания мажорантной кривой с прямой $f(x)=1$. Оно оказывается равным

$$\mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}} = \frac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}\ . \tag{7}$$

Используя выражение для $\cos\theta = k_x/|k_\perp|$, где $k_\perp \equiv (k_x^2+k_y^2)^{1/2}$, получаем

$$\mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}}^2 = 8\left(1+\frac{k_y^2}{k_x^2}\right). \tag{8}$$

В квазидвумерных системах таких, например, как газовые диски галактик и мелкая вода, возможны лишь «продольные» волны, $k_y/k_x \ll 1$, рассмотренные Ландау. В этом случае $\mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}}$ (8) превращается в $\mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}}$ Ландау [3]. Основное замечание Сыроватского сводилось к тому, что произвольные возмущения допускают рассмотрение противоположного предельного случая — «поперечных» волн, $k_y/k_x \gg 1$. Очевидно, что, например, при

$$\frac{k_y}{k_x} \to \infty \tag{9}$$

стабилизация в принципе невозможна, поскольку, как следует из (8), $\mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}} \to \infty$ (3).

4. Модифицированный критерий стабилизации Ландау. В идеализированной постановке задачи — *тангенциальный* разрыв скорости в *трехмерном бесконечном* пространстве — условие (9) можно выполнить. Однако реальная ситуация вносит две существенные коррективы: 1) система имеет конечные пространственные размеры по всем трем измерениям; 2) тангенциальный разрыв скорости оказывается размытым на некоторую величину a.

Следствием этих условий является существование $(k_y/k_x)_{\max} \equiv (k_y)_{\max}/(k_x)_{\min}$. Действительно, $(k_x)_{\min} \sim 1/L$, где L — размер системы по x; $(k_y)_{\max} \sim 1/a$, что следует из необходимого условия существования неустойчивости потока с неоднородным профилем скорости, $k_y a < 1$ [11].

Итак, неустойчивость «тангенциального разрыва» скорости в реальных условиях оказывается подавленной при условии

$$\mathrm{Ma} > \mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}} \equiv 2\left[2\left(1+\frac{L^2}{a^2}\right)\right]^{1/2}. \tag{10}$$

Обычно на практике $L^2/a^2 \gg 1$ (4), в этом случае $\mathrm{Ma}_{\mathrm{rc}}$ из (10) превосходит $\mathrm{Ma}_{\mathrm{crL}}$ (Ландау) в L/a раз:

$$\mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}} \approx \frac{L}{a}\,\mathrm{Ma}_{\mathrm{crL}}. \tag{11}$$

Запишем теперь условие «сносовости» возмущений

$$\frac{1}{\gamma_{\max}} \gg \frac{L}{v}, \tag{12}$$

где $\gamma \equiv \mathrm{Im}\,\omega$ — инкремент неустойчивости тангенциального разрыва скорости. Смысл критерия (12) состоит в том, что за время прохождения любой области газа вдоль системы длиной L со скоростью v возмущения в этой области не успеют вырасти — неустойчивость при выполнении условия (12) можно считать отсутствующей. Согласно [10] $\gamma_{\max} \approx \approx 0{,}5\ (k_x)_{\max}\cdot c \approx 0{,}5\ c/a$, что при подстановке в (12) дает

$$\mathrm{Ma} \gg 0{,}18\ \mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}}. \tag{13}$$

Таким образом, выполнение условия (10) практически означает и выполнение условия (13).

Течение с разрывом скорости, характеризующееся числом Маха $\mathrm{Ma} > \mathrm{Ma}_{\mathrm{cr}}$, является устойчивым, если размер течения удовлетворяет условию

$$L < a\left(\frac{\mathrm{Ma}^2}{8} - 1\right)^{1/2} \approx \frac{a\,\mathrm{Ma}}{2\sqrt{2}} \quad \text{при } \mathrm{Ma}^2 \gg 8. \tag{14}$$

Итак, неравенство (10) определяет *модифицированный* критерий стабилизации Ландау неустойчивости тангенциального разрыва скорости *в реальной трехмерной* системе. Продольный (вдоль скорости течения) размер *устойчивой трехмерной* системы определяется при этом из формулы (14).

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

[1] Содержание данной заметки было изложено ее автором в конце 1983 г. на семинаре Астрономического совета АН СССР, посвященном 75-летию со дня рождения Л. Д. Ландау. Присутствующий там Е. М. Лифшиц предложил написать на эту тему статью с тем, чтобы можно было внести небольшие коррективы в будущие издания [1] и [2]. Последовавшие затем болезнь и смерть Е. М. Лифшица сделали проблематичной актуальность такой заметки, и лишь положительная реакция недавнего семинара В. Л. Гинзбурга на изложенные здесь замечания показала, что, возможно, они будут небезынтересны для читателей «УФН».

[2] Пояснение, почему в слабо сжимаемом газе, $\mathrm{Ma} \ll 1$, следует считать $\gamma > 1$ ($\alpha > 0$), видимо, не требуется.

[3] Заметим, однако, что при $k_y/k_x \to \infty$ инкремент неустойчивости $\gamma \to 0$ [10]. Ниже будет показано, что учет нарастания возмущений в сносовых потоках практически не меняет критерия стабилизации, основанного на формуле (8).

[4] Для трехмерных течений, ибо в случае двумерных течений, как отмечалось выше, мы получаем критерий Ландау.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д.* Собрание трудов. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1969.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика,— М.: Наука, 1986.
3. *Ландау Л. Д.*//ДАН СССР, 1944. Т. 44. С. 151.
4. *Сыроватский С. И.*//ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 121.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953, 1954.
6. *Базденков С. В., Погуце О. П.*//Письма. ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 317.
7. *Антипов С. В., Незлин М. В., Родионов В. К., Снежкин Е. Н., Трубников А. С.*// Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 37. С. 319.
8. *Фридман А. М.*//ЖЭТФ. 1990. Т. 98. С. 1121.
9. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1973.
10. *Морозов А. Г., Файнштейн В. Г., Фридман А. М.*//ДАН СССР. 1976. Т. 228. С. 1072.
11. *Михайловский А. Б.*//Теория плазменных неустойчивостей. Т 2 — М.: Атомиздат, 1977.— С. 31.