Октябрь 1990 г. *Том 160, вып. 10*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.145

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

А. С. Тарновский

(Куйбышевский государственный педагогический институт им. В. В. Куйбышева)

Для того чтобы придать смысл правилу квантования Бора—Зоммерфельда

$$\oint p\mathrm{d}q = n\hbar, \qquad (1)$$

в рамках последовательной квантовой теории в работе [1] введены «физические величины», удовлетворяющие условию

$$[\psi(q)]^{-1}\hat{f}\psi(q), \qquad (2)$$

где q — одна или совокупность переменных, определяющих положение системы. Если в уравнении (1) импульс p понимать в смысле (2), то правило квантования оказывается эквивалентным условию совпадения значений функции состояния системы $\psi(q)$ в начале и конце некоторого интервала значений обобщенной координаты q.

Покажем, что формула (2) позволяет построить новое представление квантовой механики, в котором каждой динамической переменной сопоставляется некоторая, вообще говоря, комплексная функция координат $f(q)$.

Напомним, что «все необходимые для описания квантовой системы элементы оказываются в наличии, если определены ее основные динамические переменные, коммутационные соотношения, которым подчиняются представляющие их наблюдаемые, и явное выражение через эти основные наблюдаемые гамильтониана $\hat{H}$, который определяет эволюцию системы во времени» [2, с. 313]. Заметим, что различные представления квантовой теории можно получить из некоторого ее представления с помощью унитарного преобразования вида

$$\hat{f}' = \hat{S}\hat{f}\hat{S}^{-1}, \quad \psi' = S\psi,$$

где $\hat{S}^{+} = \hat{S}^{-1}$. Однако уравнение (2) в общем случае, когда $\psi(q)$ — комплексная функция, не является унитарным преобразованием для оператора $\hat{f}$. В частном случае, когда действие оператора $\hat{S}$ сводится к умножению на фазовый множитель $e^{i\varphi}(q)$, значение функции $f(q)$ не изменяется в результате унитарного преобразования оператора $\hat{f}$ и функции состояния ψ (калибровочная иварианткость).

Далее рассмотрим, какие основные следствия для «физических» величин» $f(q)$ вытекают из стандартного представления квантовой механики, и покажем, что если найденные свойства «физической величины»

$f(q)$ и соотношения между различными «величинами» f_i принять за основу, то, рассуждая в обратном порядке, можно прийти к исходному представлению теории.

Из выражения для среднего значения физической величины [2}

$$\bar{f} = \int \psi^* \hat{f} \psi \mathrm{d}q,$$

где $\mathrm{d}q = \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \ldots \mathrm{d}q_5$, и из формулы (2) следует, что среднее значение можно представить также в виде

$$\bar{f} = \int f(q) \, |\psi|^2 \, \mathrm{d}q. \tag{3}$$

Из эрмитовости оператора $\hat{f}$ следует, что

$$\bar{f} = \int f^*(q) \, |\psi|^2 \mathrm{d}q.$$

Или

$$\bar{f}^* = \bar{f}$$

и

$$\mathrm{Im}\,\overline{f(q)} = 0. \tag{4}$$

Найдем

$$\int \psi^* \hat{f} \hat{g} \psi \mathrm{d}q = \int (\hat{f}\psi)^* \hat{g} \psi \mathrm{d}q = \int f^*(q) \, g(q) \, |\psi|^2 \, \mathrm{d}q,$$

т. е. произведению физических величин f и g следует сопоставлять произведение «величин» $f^*(q) g(q)$, заданных в определенном порядке. В случае, когда операторы $\hat{f}$ и $\hat{g}$ коммутируют, выполняется условие

$$\mathrm{Im}\,\overline{f(q)\, g(q)} = 0.$$

Введем коммутатор

$$[f, g] = f^* g - g^* f. \tag{5}$$

Будем говорить, что «физические величины» f и g коммутируют, если $[f, g] = 0$, и коммутируют в среднем, если $\overline{[f, g]} = 0$.

Из условия (2) и из эрмитовости наблюдаемых следует, что

$$\overline{[f, g]} = \int \psi^* [\hat{f}, \hat{g}] \, \psi \mathrm{d}q. \tag{6}$$

Из коммутационных соотношений для наблюдаемых

$$[\hat{f}_i, \hat{f}_k] = C^l_{ik} \hat{f}_l \tag{7}$$

и формулы (2) получим

$$\overline{[f_i, f_k]} = C^l_{ik} \bar{f}_l. \tag{8}$$

Из уравнений движения в форме Шрёдингера

$$\hat{\mathscr{E}} \psi = \hat{H} \psi, \tag{9}$$

где $\hat{\mathscr{E}} = i\hbar\, \partial/\partial t$ и $\hat{H}$ — заданная функция основных наблюдаемых, и в форме Гейзенберга

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{f}]. \tag{10}$$

С помощью условия (2) получим

$$\overline{\mathscr{E}(q)} = \overline{H(f(q))}, \tag{11}$$

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\,[\overline{H, f}]. \tag{12}$$

Из условия, что возможные значения динамической переменной f совпадают с совокупностью собственных значений наблюдаемой $\hat{f}$, и из эрмитовости и линейности оператора $\hat{f}$ следует, что физическая величина $f(q)$ может принимать лишь определенную совокупность не зависящих от координат постоянных, обязательно действительных значений λ_i, причем в общем случае

$$\overline{f} = |c_i|^2 \lambda_i. \tag{13}$$

Теперь мы можем постулировать, что каждой динамической переменной соответствует такая зависящая от состояния системы функция координат $f(q)$, что $\overline{f} = \int f(q)\, w(q)\, dq$, причем $\overline{\operatorname{Im} f} = 0$. Функция $f[\psi(q)]$ имеет определенный набор постоянных (действительных) значений λ_i, с которым совпадает набор возможных значений динамической переменной. В произвольном состоянии системы

$$\overline{f} = \lambda_i w_i. \tag{14}$$

Произведению одновременно измеримых динамических переменных f и g соответствует произведение $f^*(q)\, g(q)$ или $g^*(q)\, f(q)$.

Постулируем коммутационные соотношения

$$[f_i, f_k] = C^l_{ik} f_l \tag{15}$$

и уравнения движения

$$\mathscr{E}(q) = H(q) \tag{16}$$

и

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\,[H, f]. \tag{17}$$

Постулируем существование плотности вероятности w локализации системы в конфигурационном пространстве, удовлетворяющей условию нормировки $\int w(q)\, dq = 1$ и закону сохранения

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j}, \tag{18}$$

где

$$\mathbf{j} = \frac{w}{2m}\,(\mathbf{p} + \mathbf{p}^*). \tag{19}$$

Теперь можно показать, что постулаты и соотношения (14)—(19) позволяют в частном случае перейти к обычной форме представления квантовой теории. Допустим, что существует функция $\psi(q)$ такая, что $w = |\psi|^2$, и существуют операторы такие, что выполняется условие (2), постулаты и соотношения (14) — (19). Тогда из выполнения условия $\operatorname{Im} \overline{f} = 0$ при любой функции $\psi(q)$ получим, что оператор $\hat{f}$ должен быть эрмитовым. Полагая, что этот оператор является линейным и что его собственные функции φ_i образуют полный набор линейно независимых функций, найдем

$$\overline{f} = |c_i|^2 \lambda_i, \tag{20}$$

где c_i — коэффициенты фурье-разложения $\psi = c_i \varphi_i$.

Из уравнения (20) с (14) найдем $w_i = |c_i|^2$.

Далее, усредняя равенства (15), (16) и (17), получим уравнения (8), (11) и (12). Из произвольности $\psi(q, t)$ как функции координат в определенный момент времени получим уравнения (7), (9) и (10), которые с учетом найденных ранее свойств операторов и выражения $w(q) = |\psi(q)|^2$ определяют стандартный вид квантовомеханической теории.

Возникает вопрос, обладает ли предложенная форма представления квантовой теории какими-либо преимуществами по сравнению с известными представлениями, кроме отмеченной ранее возможности интерпретации правила квантования (1) в рамках квантовой механики. Некоторые физики, например Р. Фейнман [3], считают поиск новых представлений квантовой механики и квантовой электродинамики оправданным с точки зрения расширения возможностей интерпретации теории и поиска ее дальнейших обобщений. На наш взгляд, введенное представление обладает, по крайней мере, методическим преимуществом.

Запишем для координаты x и соответствующего импульса

$$\overline{[x, p]} = i\hbar,$$

Или

$$\int (xp - p^*x)\, w(x)\, \mathrm{d}x. \tag{21}$$

Из уравнения (21) можно обычным способом получить соотношения неопределенностей $\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta p^2} \geqslant \hbar^2/4$.

Если допустить, что равенство (21) выполняется не только в среднем, но и локально, то для мнимой части импульса получим

$$\mathrm{Im}\, p = \frac{i\hbar}{2x}\,.$$

Постулируем коммутационное соотношение

$$[\Delta x,\ \Delta p] = i\hbar \tag{22}$$

для погрешностей

$$\Delta x = x - \overline{x},\ \ \Delta p = p - \overline{p}.$$

Тогда из уравнения (21) найдем

$$\mathrm{Im}\, p = \frac{i\hbar}{2\Delta x}\,. \tag{23}$$

Из уравнения (23) следует, что с ростом Δx убывает мнимая часть (а следовательно, и модуль) погрешности импульса. При $\Delta x \to 0$, напротив, неограниченно растет мнимая часть, а следовательно, и модуль погрешности импульса.

Заметим также, что уравнение (23) и условие обращения в нуль среднего значения от мнимой части любой физической величины налагают некое дополнительное условие на функцию состояния

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 (x - \overline{x})^{-1}\, \mathrm{d}x = 0.$$

Характерной особенностью квантовой механики является наличие двух типов физических величин и двух типов состояний физического объекта: измеряемые и «вычисляемые» физические величины, реальные и виртуальные состояния объекта. Значение измеренной на опыте физической величины может быть только единственным. Никакой «суперпозиции» значений физической величины, измеренной в однократном опыте, получить нельзя. Измеряемая физическая величина всегда задается обычной математической величиной, постоянной или однозначной функцией времени, принимающей значения на множестве действительных чисел.

Любое состояние объекта можно определить, задавая значения некоторой максимально возможной совокупности физических величин (полный набор). Реальное состояние объекта можно задать, на опыте или мысленно, лишь указав единственные и точные значения полного набора «измеряемых» физических величин. То есть реальное состояние обязательно должно быть собственным состоянием некоего полного набора наблюдаемых, принадлежащим соответствующему полному набору собственных значений.

Иногда ошибочно утверждают, что состояние объекта можно задать на опыте, определив путем многократных измерений все возможные значения и их относительные частоты для каждой из динамических переменных, образующих некоторый произвольный полный набор физических величин. Однако для того чтобы это действительно сделать, нужно уметь многократно приготавливать «одно и то же» состояние объекта. Возникает вопрос, как мы можем убедиться, что каждое отдельно взятое состояние является именно тем состоянием, которое нам нужно. Статистические методы здесь не годятся. Может быть, набранная нами статистика относится к различным состояниям объекта? Ясно, что прежде чем применять статистические методы, нужно иметь какой-то пригодный на опыте критерий для установления типа одного отдельно взятого состояния и критерий тождественности или нетождественности различных таких состояний.

В понятие состояние в квантовой механике, согласно принципу дополнительности Бора, наряду с объектом должно входить и описание экспериментальной ситуации, т. е. измерительных приборов, или указания на конкетный полный набор динамических переменных, которые мы собираемся измерять. Если первый раз мы измерили один полный набор переменных, а затем сменили измерительные приборы и собираемся измерять переменные из другого полного набора, то состояние объекта, вообще говоря, уже изменилось и из реального превратилось в промежуточное или виртуальное, т. е. вычисляемое состояние, характеризуемое вычисляемыми величинами. Эти величины теперь будут многозначными, соответствующие им математические объекты могут быть операторами, матрицами и т. п. Виртуальные состояния могут быть движениями системы по классическим траекториям, хотя правила сложения амплитуд здесь оказываются отличными от классических. Меняя одновременно тип промежуточных состояний и правило сложения альтернатив, можно получить различные варианты виртуальных состояний и правил вычисления возможных конечных состояний, получаемых в результате измерений.

Промежуточные состояния и соответствующие им вычисляемые физические величины, как бы близки к классическим ни были, всегда обладают какими-то «странностями», какой-то экзотикой. Например, появление виртуальных частиц в промежуточных состояниях в квантовой теории поля ведет либо к нарушению закона сохранения энергии (в пределах соотношения неопределенностей для энергии и времени), либо к нарушению релятивистского соотношения между энергией и импульсом частицы. Однако измерение полного набора физических величин и описание возникшего нового состояния объекта с помощью полного набора тех же самых величин, которые только что были измерены, превращает промежуточное, виртуальное состояние в реальное состояние объекта и устраняет все «странности» в описании состояния и в значениях физических величин.

Любое утверждение относительно свойств вычисляемых величин и виртуальных состояний всегда может оказаться условным, зависящим от выбора представления квантовой теории. Например, в ряде статей обсуждался вопрос о возможности использования фазового пространства в квантовой механике, т. е. о возможности одновременного координатно-импульсного описания состояния объекта. В нашем случае это оказывается возможным: уже в уравнении (1) подразумевается, что импульс можно рассматривать как функцию координат. Экзотика же представления (2) заключается в том, что эта функция оказывается, вообще говоря, комплексной.

Пока автору не удалось указать какие-либо конкретные преимущества предложенного представления, которые могли бы привести к решению задач, не поддающихся решению другими методами. Возможно, такие преимущества обнаружатся позднее. Как известно, оказавшийся впоследствии весьма эффективным именно при решении конкретных задач, «практических преимуществ подход Фейнмана в первые годы не давал» [4, с. 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарновский А. С.*// УФН. **1990. Т. 160. С. 155.**
2. *Мессиа А.* Квантовая механика. Т. 1.—М.: Наука, 1978.
3. *Feynman R. P.*//Phys. Rev. **1951. V. 84. P. 108.**
4. *Менский М. Б.* Группа путей: Измерения, поля, частицы.— М.: Наука, 1983.