

532.526.3

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СТРУКТУР
В ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ

М. И. Рабинович, М. М. Сущик

(Институт прикладной физики АН СССР, Горький)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Многообразие и универсальность структур	4
2.1. Перестройка пространственной симметрии течения. Термоконвекция Рэлея — Бенара. 2.2. Усложнение временной динамики — возникновение осцилляций и «временного хаоса». Вихри Тейлора. 2.3. Турбулентные пятна. Плоское течение Пуазейля. 2.4. Мелкомасштабные структуры. Пограничный слой. 2.5. Вторичные структуры. Сдвиговые течения. 2.6. Обобщенное уравнение Гинзбурга—Ландау. 2.7. Автоструктуры. Дискретный аналог уравнений Гинзбурга—Ландау. 2.8. Структуры с особенностями. Дефекты. 2.9. Формирование решеток.	
3. Хаотическая динамика структур и турбулентность	28
3.1. Фрактальность турбулентного течения и «фазовой» жидкости. 3.2. Размерность реализации. 3.3. Размерность потока. Пространственное развитие турбулентности. 3.4. Зарождение турбулентности в структурированных течениях. Скейлинг. 3.5. Влияние внешних сосредоточенных воздействий на динамику структур. Переходы порядок—хаос. 3.6. Переходы «соизмеримость—несоизмеримость». 3.7. Хаотические блуждания дефектов. Рябь Фарадея. 3.8. Многомерный хаос. Связь размерности турбулентности с числом коллективных возбуждений. 3.9. Скейлинговые свойства развитой турбулентности, фрактальная структура поля диссипации турбулентной энергии.	
4. Заключение	58
Примечания к тексту	59
Список литературы	60

1. Введение. Вопрос о том, какое состояние неравновесной среды или поля реализуется при конечном превышении порога устойчивости тривиального равновесия, интересен для различных областей физики. Еще недавно считалось, что наиболее типично установление либо полностью упорядоченных, либо полностью неупорядоченных (турбулентных) состояний поля. В первом случае различные элементарные возбуждения в процессе нелинейного взаимодействия самосогласуются друг с другом и в результате рождается регулярное (в пространстве и времени) нетривиальное образование — структура, устойчиво существующая в конечной области параметров. Во втором — любая определенная комбинация элементарных возбуждений оказывается неустойчивой и устанавливается пространственно-временной беспорядок — турбулентность.

Хотя проблема соотношения хаоса и порядка всегда привлекала внимание физиков, теория нелинейных структур (самоорганизация) и теория турбулентности до недавнего времени сосуществовали в значительной степени независимо. Только в последние годы замечательные успехи нелинейной динамики и принципиально новые подходы к экспе-

риментальным исследованиям турбулентности позволили вплотную приблизиться к пониманию проблемы взаимосвязи структур и турбулентности. Выяснилось, что даже при весьма больших надкритичностях, когда по всем представлениям должен реализоваться беспорядок, существуют упорядоченные структуры. Эти упорядоченные структуры зачастую являются локализованными в пространстве и их можно рассматривать как сосредоточенные объекты — частицы. При анализе взаимодействия локализованных структур приходится столкнуться с важной общефизической задачей, в некотором смысле противоположной традиционной. Если, например, квантовая теория поля объединяет, т. е. описывает единым образом, частицы и силы, то здесь предстоит в рамках нелинейных уравнений поля выделить локализованные состояния — структуры — и силы, действующие на них. Переход от континуальных уравнений к дискретным (для локализованных структур или их ансамблей) возможен в тех случаях, когда поля индивидуальных структур достаточно быстро спадают от центра к периферии. Наличие малого параметра равного отношению полей i -й и j -й структур в области максимума поля j -й структуры позволяет воспользоваться асимптотическим методом и получить уравнения, описывающие динамику индивидуальных структур, связанных друг с другом слабым взаимодействием.

Проблеме структур в турбулентности и посвящена эта статья. Будет показано, что реальную турбулентность зачастую можно рассматривать как хаотическую динамику нелинейно взаимодействующих структур, причем более развитой турбулентности соответствует и более развитая хаотическая динамика, т. е. движение на стохастическом множестве более высокой размерности. Хотя многие результаты представленной ниже качественной теории турбулентности являются общими для полей различной природы, основное внимание уделяется гидродинамическим течениям, поскольку именно для них, благодаря исключительным возможностям метода визуализации, имеются воодушевляющие эксперименты, иллюстрирующие существование структур не только в области перехода, но и в уже развитой турбулентности.

2. Многообразие и универсальность структур. Структуры в гидродинамических течениях при увеличении надкритичности (числа Рейнольдса, числа Рэлея и т. п.) формируются в результате развития иерархии неустойчивостей. При этом изменяются как масштабы структур, так и их пространственная и временная симметрии. Несмотря на огромное многообразие структур и путей переходов от простых структур к более сложным, имеющиеся к настоящему времени экспериментальные и теоретические (преимущественно численные) результаты позволяют увидеть некоторую общую картину.

2.1. Перестройка пространственной симметрии течения. Термоконвекция Рэлея—Бенара. Для простых течений, к числу которых относятся, в частности, термоконвекция и течение Тейлора — Куэтта между вращающимися цилиндрами, при потере устойчивости однородного состояния спонтанно, т. е. без внешнего организующего воздействия, возникают упорядоченные структуры в виде различного рода решеток (соты или цепочка валов при термоконвекции; вихри Тейлора в течении между вращающимися цилиндрами; прямоугольные решетки ряби Фарадея в слое жидкости на вибрирующей подложке и т. п.). Дальнейшее увеличение степени неравновесности среды приводит к усложнению (также спонтанному) регулярных решеток. Для термоконвекции при малых числах Рэлея это усложнение часто не связано с изменением временной динамики и выражается в изменении лишь пространственной симметрии течения. Хотя сценарии

разрушения и изменения пространственной симметрии различных течений чрезвычайно разнообразны, можно попытаться выделить из них два наиболее типичных. Первый связан с усложнением индивидуальных структур при увеличении надкритичности и с развитием вторичной неустойчивости, второй — с появлением дислокаций в упорядоченной решетке структур. Обсудим эти сценарии на примере термоконвекции.

Термоконвекция в тонком подогреваемом снизу слое жидкости описывается уравнениями гидродинамики и теплопроводности в приближении Буссинеска (см., например, [1]):

$$\text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = - \frac{\nabla p}{\rho} + \theta \mathbf{z} + \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \theta = \text{Ra} (\mathbf{z} \mathbf{u}) + \nabla^2 \theta \quad (2.3)$$

с граничными условиями при $z = \pm 1/2$

$$u_z = \partial_z u_z = \theta = 0$$

в случае твердых границ,

$$u_z = \partial_{zz}^2 u_z = \theta = 0$$

в случае свободных границ; здесь $\mathbf{z}$ — единичный вектор, направленный против силы тяжести, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, p — давление, θ — отклонение температуры от равновесной. Число Рэлея $\text{Ra} = \gamma g (T_2 - T_1) d^3 / \nu \kappa$ и число Прандтля $\text{Pr} = \nu / \kappa$ зависят от кинематической вязкости ν и коэффициента теплопроводности κ , γ — коэффициент теплового расширения; g — ускорение свободного падения. В качестве масштаба длины выбрана толщина слоя d , масштаба времени — время диффузии тепла d^2 / κ , масштаба температур — разность $T_2 - T_1$, где T_2 и T_1 — средние температуры нижней и верхней границ.

Из уравнений (2.1)–(2.3) видно, что условия потери устойчивости статического равновесия $u=0$, определяемые из линеаризованной системы, зависят лишь от числа Рэлея. При небольшом превышении порога устойчивости Ra_c ($\text{Ra}_c = 1707,76$ в случае твердых границ и $\text{Ra}_c \approx 657$ в случае свободных границ) для безграничного слоя существует бесконечное число периодических в пространстве стационарных решений [2–4]. Как показывает анализ (в том числе и численный) системы уравнений (2.1)–(2.3), при малой надкритичности $\varepsilon = \text{Ra} / \text{Ra}_c \ll 1$ устойчивыми могут быть только решения, соответствующие периодической цепочке параллельных двумерных валов с характерным пространственным периодом $\lambda \equiv 2\pi/k \sim d$.

Задача об определении устойчивости того или иного нетривиального режима термоконвекции, требующая анализа поведения вторичных (развивающихся на фоне исходных) возмущений, чрезвычайно громоздка. Она сводится к нахождению спектра собственных значений неоднородной краевой задачи с переменными коэффициентами и лишь в редких случаях разрешается аналитически. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, приведем только некоторые результаты, которые демонстрируют разнообразие структур, возникающих при увеличении надкритичности на фоне исходных конвективных валов.

На рис. 1 (см. [1]) представлена граница Σ области устойчивости двумерных валов, построенная с применением численных методов. При увеличении надкритичности $\varepsilon = \text{Ra} / \text{Ra}_c \ll 1$ в случае больших чисел

Прандтля можно выделить два основных вида вторичных неустойчивостей. Вблизи части 1 поверхности Σ двумерная структура течения становится неустойчивой по отношению к возмущениям типа наклонных валов. В эксперименте [5] эти вторичные валы устанавливаются под углами $\pm 40^\circ$ по отношению к исходным (зигзагообразная неустойчивость). Развитие этой неустойчивости приводит к образованию новых стационарных структур, которые выглядят как синусоидально деформированные первичные валы. Вблизи другой части 2 поверхности Σ проявляется неустойчивость типа поперечных валов [6].

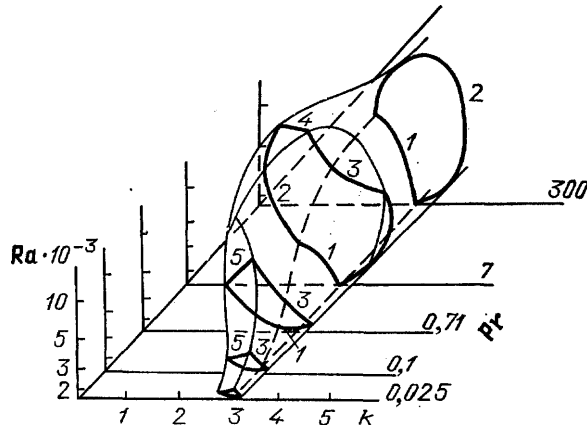


Рис. 1. Поверхность Σ , определяющая значения параметров Ra , Pr и k , при которых конвективные валы теряют устойчивость; утолщенные линии — пересечения поверхности Σ с плоскостями $Pr = \text{const}$ (см. [1])

При меньших числах Прандтля (вблизи части 3 поверхности Σ) становится существенной неустойчивость типа варикозных расширений [6, 7]. На верхней части 4 поверхности Σ эта неустойчивость, как и неустойчивость поперечных валов, переходит в узелковую неустойчивость, порождающую более сложные структуры. При малых числах Прандтля ($Pr < 1,1$ для жестких и $Pr < 3,5$ для свободных границ) на нижней части поверхности Σ проявляется чисто двумерный механизм неустойчивости — одновременно нарастают два двумерных возмущения, волновое число у одного из которых немного больше, а у другого немного меньше, чем у исходных валов (неустойчивость Экхауса [8—10] ⁽¹⁾; см. список примечаний к тексту в конце статьи). Наконец, вблизи части 5 поверхности Σ происходит переход к осциллирующим во времени структурам (колебательная неустойчивость) с волнообразными поперечными движениями валов [12, 13]. При больших числах Прандтля переход к колебательной неустойчивости наблюдается лишь после образования чисто трехмерных структур.

Второй из основных путей спонтанного изменения симметрии течения при увеличении надкритичности связан не с усложнением индивидуальных структур, образующих решетку, а с появлением в ней дефектов. Между рассматриваемыми дефектами, возникающими в структурах нелинейных полей, и дефектами в конденсированных средах (кристаллах, магнетиках и т. п.) имеется глубокая аналогия — свойства и симметрия дефектов определяются в основном свойствами решетки [14, 15]. Хотя такие дефекты при увеличении надкритичности возникают спонтанно в результате развития неустойчивости, для их создания или разрушения в установившемся течении требуется приложить конечное возмущение [16], т. е. дефекты являются устойчивыми образованиями и их можно рассматривать как самостоятельные структуры (об этом будет идти речь несколько позже).

2.2. Усложнение временной динамики — возникновение осцилляций и «временного хаоса». Вихри Тейлора. Возникновение нетривиального временного поведения в различных течениях происходит либо за счет изменения собственной динамики индивидуальных структур, либо благодаря появлению в ансамбле структур коллективных возбуждений. При этом сложное поведение и даже хаотическая динамика могут возникнуть в пространственно упорядоченных течениях без изменения их структуры. Очевидно, что переходы от простой динамики к сложной при сохранении пространственной структуры ничем не отличаются от известных бифуркаций в системах с сосредоточенными параметрами и для них без всяких оговорок справедливы результаты теории конечномерных динамических систем (см., например, [17, 18]). Это, в частности, относится к динамике азимутальных мод на вихрях Тейлора в течении между вращающимися цилиндрами.

Представление о многообразии структур в таком течении дает диаграмма [19] (рис. 2), построенная по экспериментальным данным при

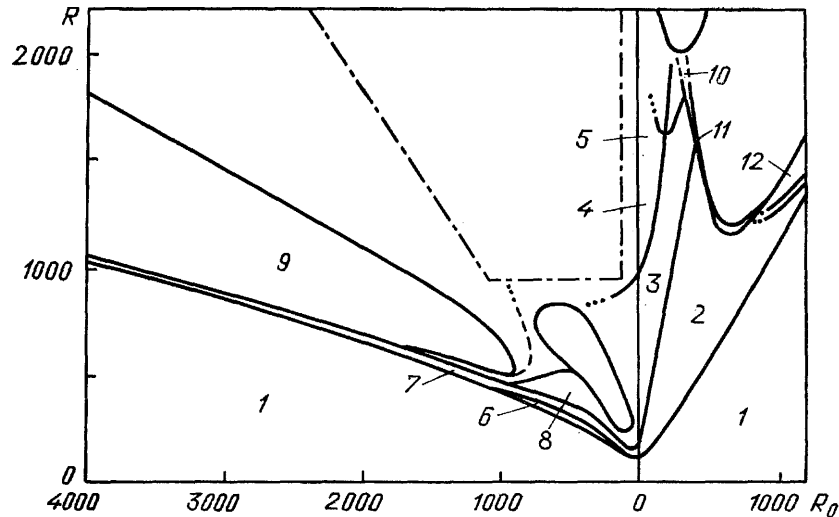


Рис. 2. Режимы течения между независимо вращающимися цилиндрами. 1 — течение Куэтта; 2 — вихри Тейлора; 3 — азимутальные волны на вихрях Тейлора; 4 — модулированные азимутальные волны на вихрях Тейлора; 5 — стохастизация волн на вихрях Тейлора; 6 — спиральные вихри Тейлора; 7 — перекрывающиеся спирали; 8 — волновые возбуждения на спирали; 9 — спиральная турбулентность (описание структур 10—12 см. в [19])

заданном значении числа Рейнольдса $Re_0 = b(b-a)\Omega_0/\nu$ внешнего цилиндра и медленном (квазистатическом) увеличении числа Рейнольдса внутреннего цилиндра $Re = a(b-a)\Omega/\nu$. Здесь $b = 59,46$ мм, $a = 52,5$ мм — радиусы, а Ω_0 , Ω — угловые скорости вращения внешнего и внутреннего цилиндров соответственно (длина цилиндров $L \approx 30(b-a)$; торцевые крышки вращаются вместе с внешним цилиндром).

Если цилиндры вращаются в одну сторону, то после потери устойчивости течения Куэтта формируются вихри Тейлора (область 2 на рис. 2), которые при дальнейшем увеличении Re в свою очередь становятся неустойчивыми. Однако даже при значительном превышении порога устойчивости вихрей Тейлора они полностью не разрушаются — на них возникают возмущения в виде азимутальных волн (области 3, 10, 11 и 12). При малых скоростях вращения внешнего цилиндра ($Re_0 < 400$, область 3) эти возмущения выглядят как периодические по азимутальному углу изгибы вихрей Тейлора. С ростом Re (область 4) на азиму-

тальных волнах возникает периодическая модуляция, а в спектре прослеживаются две независимые частоты и их комбинации. В фазовом пространстве эквивалентной динамической системы образом такого течения является незамкнутая намотка на двумерном торе. Как известно [20, 21], при увеличении надкритичности появление новых частот и разрушение N -мерного тора при $N \geq 3$ может привести к возникновению странного аттрактора—переход к хаосу через квазипериодичность. Именно это и наблюдается при определенных условиях (область 5) в течении Тейлора — Куэтта — ранее возбужденные азимутальные волны на вихрях Тейлора стохастизируются, хотя при этом новые пространственные моды не возбуждаются [22]. Даже при значительном превышении порога стохастизации течение сохраняет хорошо выраженную структуру вихрей Тейлора с возбужденными на них азимутальными модами [22].

2.3. Турбулентные пятна. Плоское течение Пуазейля. Наряду с поэтапными переходами, связанными с последовательным увеличением числа возбужденных степеней свободы, встречаются и другие — более резкие переходы, непосредственно переводящие течение из стационарного (или даже статического) состояния в хаотическое во времени с существенным усложнением пространственной структуры (см., например, [23]). Такие переходы с образованием уединенных турбулентных структур являются характерными для строго параллельных течений, например, плоского течения Пуазейля.

Плоское течение Пуазейля (с зависимостью продольной компоненты средней скорости поперек канала $U = U_0[1 - (z^2/h^2)]$, h — полуширина канала) становится неустойчивым к бесконечно малым возмущениям при $Re = Re_c = 5772$ (см. [24, 25]). Однако по отношению к двумерным волнам конечной амплитуды течение неустойчиво и при $Re < Re_c$ (докритическая неустойчивость) [25]. Эти волны, в свою очередь, являются неустойчивыми по отношению к трехмерным бесконечно малым возмущениям ⁽²⁾. Более того, как показывают численные [25] и физические эксперименты [26], неустойчивость по отношению к трехмерным возмущениям сохраняется для двумерных волн и при таких числах Рейнольдса, при которых они являются затухающими (при $700 \leq Re \leq 2900$). Поскольку характерные времена затухания двумерной волны больше времен нарастания трехмерных возмущений, то они успевают вырасти раньше, чем затухнет первичная волна. В дальнейшем, как можно судить по экспериментам [27], этот каскад повторяется, и из-за неоднородности начальных возмущений и зависимости порога от амплитуды при малых Re обычно возникают уединенные турбулентные пятна, окруженные ламинарным течением.

Хотя турбулентные пятна в плоском течении Пуазейля не являются идентичными и изменяются со временем, они характеризуются универсальными свойствами, связанными с проявлением их собственной динамики. На рис. 3 схематично представлено турбулентное пятно и его фотографии, полученные при визуализации течения [27]. Турбулентные пятна при $Re = 840$ —1500 имеют форму треугольного крыла с углом раскрытия 15 — 20° , и по мере сноса вниз по потоку их размеры растут. Внутри пятна возникает турбулентное вихревое движение, которое можно рассматривать как результат сильного взаимодействия наклонных волн. На границе пятна происходит излучение волн в ламинарную область течения. Первоначально эти волны являются достаточно регулярными, но затем из-за вторичной неустойчивости они разрушаются, приводя, таким образом, к росту турбулентного ядра. При меньших числах Рейнольдса ($Re < 840$) полностью развитые турбулентные пятна не успевают сформироваться — они преобразуются в продольные вихревые

структуры, затухающие со временем. Рост надкритичности приводит сначала к увеличению числа случайно разбросанных турбулентных пятен, а затем (при $Re > 1500$) — к турбулизации всего течения. Подобным же образом (т. е. через турбулентные структуры — пятна) переход к турбулентности происходит в плоском течении Куэтта и в осесимметричном течении Пуазейля (см., например, [28]).

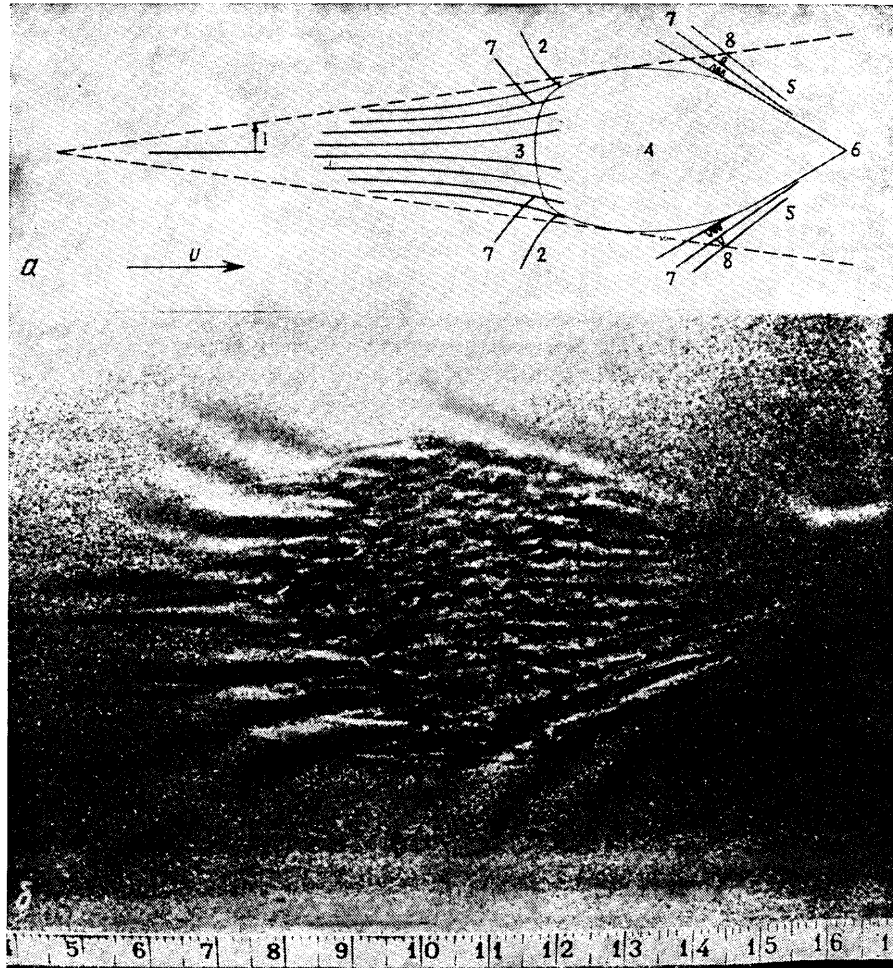


Рис. 3. Схематическое изображение (а) и визуализация (б) турбулентного пятна в плоском течении Пуазейля. $Re=10^3$, $x/h=64$. На рис. а: 1 — полуугол расширения; 2 — боковая вершина; 3 — след, состоящий из структур, вытянутых в продольном направлении; 4 — область мелкомасштабной турбулентности; 5 — передние кромки пятна; 6 — передняя вершина; 7 — волны, убегające от пятна; 8 — возбуждения на убегających волнах. (См. [27])

2.4. Мелкомасштабные структуры. Пограничный слой. Мелкомасштабная турбулентность, возникающая в результате последовательного каскада большого числа пространственных и временных бифуркаций, в конце концов оказывается устроенной настолько сложным образом, что представление ее в виде ансамбля структур, строго говоря, теряет практический смысл (тем более что одновременно с этим растет и число различных типов структур). Однако оказывается, что в сильно неоднородных и анизотропных течениях, таких, на-

пример, как двумерные пограничные и свободные сдвиговые слои, возможна безкаскадная (в результате небольшого числа бифуркаций) генерация мелкомасштабных структур. В этом случае на их симметрию существенно влияют динамические и кинематические ограничения, связанные с геометрией потока, и такие структуры оказываются сравнительно простыми и легко идентифицируемыми в эксперименте. Примерами подобных структур могут служить: мелкомасштабная насечка на вихрях Тейлора, возникающая в пристеночной области внешнего цилиндра в течении Тейлора — Куэтта [19]; продольные вихри в сдвиговых течениях, генерируемые вблизи седловых точек поля скорости крупномасштабных структур [29—34]; рябь и «подковы» на спиральных вихрях при обтекании вращающихся тел [35—39] и т. п.

Для понимания природы турбулентности принципиально, что такие структуры сохраняются не только в области перехода, но и в полностью турбулентном течении. Показательна с этой точки зрения структура турбулентного пограничного слоя — значительная часть его трехмерной завихренности сосредоточена в «шпилькообразных» вихрях, которые наклонены вниз по потоку под углом около 45° , сносятся потоком примерно с одинаковой скоростью и сравнительно слабо взаимодействуют друг с другом [40]. Поперечные размеры таких вихрей [41] $\sim (10—100)v/U_\tau$ существенно меньше толщины пограничного слоя $\delta \sim 10^3 v/U_\tau$, где

$$U_\tau = \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2$$

— скорость трения, зависящая от касательных напряжений на стенке $y=0$ (рис. 4). Модель пограничного слоя в виде статистического ансамбля таких структур в общих чертах правильно описывает связь между формой профиля средней скорости, распределением интенсивности турбулентности и ее спектрами [42].

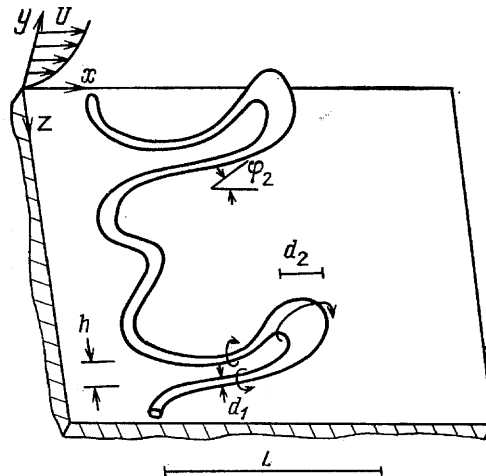


Рис. 4. Подковообразный вихрь, формирующийся в переходной области пограничного слоя на плоской пластине. Угол наклона подковы $\varphi \approx 45^\circ$, ширина подковы $h \approx (50—60)v/U_\tau$, протяженность вихря вдоль потока $L \approx 10^3 v/U_\tau$, диаметр вихря у основания $d_1 \approx (30—40)v/U_\tau$, диаметр вихря на вершине подковы $d_2 \approx (100—400)v/U_\tau$ (см. [41])

Хотя механизмы формирования шпилькообразных вихрей до конца не исследованы, тем не менее из анализа экспериментов [43—45] следует, что их рождению, действительно, предшествует небольшое число бифуркаций. При движении вниз по потоку последовательно прослежи-

ваются⁽³⁾: потеря устойчивости пограничного слоя и развитие двумерных волн; возникновение на их фоне трехмерности и генерация в окрестности критического слоя продольной завихренности (см. [46]); вынос низкоскоростной жидкости и образование тонких трехмерных сдвиговых слоев; развитие невязкой неустойчивости трехмерных сдвиговых слоев с образованием подковообразного вихря и его последующим вытягиванием в поле деформирующей скорости крупномасштабного течения.

2.5. Вторичные структуры. Сдвиговые течения.

Продemonстрируем здесь на примере сдвиговых течений, что крупномасштабные когерентные образования могут устойчиво существовать и в нестационарной неоднородной среде, в частности, в уже турбулизованном сдвиговом течении. Такая ситуация типична для гидродинамики, если характерные масштабы L неустойчивости существенно превышают масштабы l фоновой турбулентности потока ($l \ll L$).

Экспериментально реализуемые сдвиговые слои обычно развиваются в пространстве — вдоль по течению за пластиной, разделяющей два потока с разными скоростями. Если сдвиговый слой сформирован слиянием ламинарных потоков, то при достаточно больших числах Рейнольдса характерные времена невязкой неустойчивости значительно меньше времен вязкой диффузии, и поэтому сначала формируются квазистационарные структуры — цепочка двумерных вихрей (под влиянием бездиссипативного механизма стабилизации неустойчивости). Турбулизация набегающего потока не влияет на характер процесса — она лишь приводит к появлению малой поправки к инкременту невязкой неустойчивости и турбулентной диффузии, что может проявляться только на больших расстояниях вниз по потоку. Однако существенно раньше сказываются процессы, определяемые динамикой крупномасштабных структур — сформировавшаяся на начальном этапе цепочка турбулентных вихрей, в свою очередь, является неустойчивой по отношению к более длинноволновым возмущениям, прежде всего удвоенного пространственного периода (см. [47]). Развитие этой неустойчивости ниже по течению приводит к слиянию (преимущественно парному) первичных структур и формированию новой цепочки и т. д. Усиление трехмерных возмущений — конкурирующий процесс, который мог бы привести к разрушению двумерных структур — оказывается подавленным из-за таких слияний [48—50]. Поэтому даже при искусственной турбулизации набегающего потока и пограничного слоя на расщепляющей пластине или при установлении на ней устройства, генерирующего трехмерные вихри, степень двумерности крупномасштабных структур растет после первых нескольких слияний, т. е. вниз по потоку [50]. В результате в сдвиговых слоях крупномасштабные когерентные структуры (т. е. структуры, динамика которых устойчива к воздействию мелкомасштабной турбулентности) наблюдаются на всех расстояниях вниз по течению, для которых к настоящему времени выполнены лабораторные измерения, вплоть до $x=5000\theta \approx 3$ м (см. [51]), где θ — толщина потери импульса сдвигового слоя около кромки пластины.

В другом предельном случае, когда инкременты неустойчивости среднего течения малы или оно вообще является устойчивым, наличие мелкомасштабных структур или мелкомасштабной турбулентности может играть качественно иную роль. В частности, анализ [52—61] решений уравнений Навье—Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

с внешней силой $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, обеспечивающей стационарное периодическое в пространстве мелкомасштабное течение, показывает, что возможно спонтанное образование крупномасштабных структур в результате развития длинноволновой неустойчивости, обусловленной именно микроструктурой течения.

Передача энергии от мелких масштабов (которые, как правило, являются трехмерными) к более крупным, как следует из линейного анализа [57—61] устойчивости структурированных течений, требует достаточно сильной анизотропии таких течений. При этом образование крупномасштабных структур вновь приводит к разрушению исходной симметрии течения—как показывают численные расчеты [59], энергия в крупномасштабном вторичном течении заключена преимущественно в тех составляющих скорости, которые в первичном течении имеют наименьшую энергию. Кроме анизотропии, на обратный каскад передачи энергии может влиять также спиральность мелкомасштабной турбулентности и слабая сжимаемость [55, 56].

Конечно, в реальных экспериментах трудно выделить механизмы формирования вторичных структур, связанные непосредственно с мелкомасштабной турбулентностью и с неустойчивостью среднего профиля температуры, скорости и т. п. Тем не менее в некоторых течениях можно обнаружить подтверждения нетривиального влияния мелкомасштабной турбулентности на вторичные структуры. Так, в развитой турбулентной конвекции при $Ra \sim 10^7$ механизм образования почти стационарных структур, напоминающих гексагональные ячейки, по-видимому, существенно отличен от механизма их образования в отсутствие мелкомасштабных структур — теперь нет предпочтения для холодной или горячей жидкости в центре ячейки, и в различных частях слоя можно обычно обнаружить ячейки обоих типов [62]. Другими известными примерами вторичных крупномасштабных структур являются турбулентные вихри Тейлора, наблюдавшиеся вплоть до $R \sim 10^8$ (см. [63, 64]), и крупномасштабные дрейфовые течения в термоконвекции [65, 66].

2.6. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ.

Как показывают эксперименты, перестройка течения, приводящая к образованию и трансформации структур, очень часто происходит при весьма малых значениях надкритичности ϵ . Следовательно, инкременты пространственных возбуждений, определяющих формирование структур, невелики. Кроме того, при увеличении ϵ усложнение течения обычно происходит в результате последовательных трансформаций — бифуркаций при $\epsilon = \epsilon_i$ ($i=1, 2, \dots$). Это означает, что при построении теории формирования структур на первом этапе можно воспользоваться схемой Ландау [67]. Например, если после первой бифуркации поле течения представимо в виде $u(\mathbf{r}, t) = A(t)f(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$ (пространственная структура поля $f(\mathbf{r})$, определяемая геометрией задачи, фиксирована), для $A(t)$ получается уравнение Ландау [24, 67]

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2 - l|A|^4. \quad (2.6)$$

Здесь инкремент γ определяется из линейного приближения, а l — постоянная Ландау, которая при $l > 0$ характеризует нелинейную стабилизацию в низшем порядке теории возмущений.

В безграничных течениях пространственный спектр нарастающих возбуждений, очевидно, сплошной, и поэтому при любом малом превышении порога устойчивости пространственная структура течения должна определяться из решения нелинейной задачи. При конечном превышении порога устойчивости это справедливо и для ограниченных, но достаточно протяженных течений. Для таких течений достаточно акку-

ратные модели, основанные на асимптотическом анализе исходных уравнений (2.1)–(2.3) или (2.4), (2.5), удастся построить лишь при некоторых ограничениях на пространственную структуру поля скорости.

Наиболее исследованными к настоящему времени являются модели течений, в которых изменение скорости (температуры) по одной из координат z задано ($\sim \xi(z)$), а в нормальной к оси z плоскости x, y определяется узким пакетом мод, например, описывающим слабо изогнутые валы в конвекции Рэлея — Бенара, квазидвумерные волны Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое и т. п. При указанных ограничениях медленная огибающая поля $A(x, y, t)$ будет описываться достаточно общей моделью — двумерным аналогом комплексного уравнения Гинзбурга — Ландау (ГЛ) (см., например, [68, 69]). Остановимся кратко на выводе этого уравнения для случая, когда в линейном приближении выполняются условия вращательной симметрии (хотя бы при малых углах поворота относительно основного волнового вектора пакета k_0 в горизонтальной плоскости xy). Исходной будет задача о линейной устойчивости

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}; -\nabla^2; \frac{\partial}{\partial z}; \text{Re}\right) u(x, y, t) \xi(z) = 0,$$

решение которой записывается в виде

$$u_i(x, y, t) = u_{i,0} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + \gamma t - i\omega t),$$

где

$$L\{\gamma(\mathbf{k}, \text{Re}) - i\omega(\mathbf{k}, \text{Re}); k^2; \text{Re}\} = 0, \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y).$$

Кривая $\gamma(\mathbf{k}, \text{Re}) = 0$ — это кривая нейтральной устойчивости, минимальное значение $\text{Re} = \text{Re}_c$ на которой определяет моду $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$, возбуждающуюся первой при потере устойчивости. Пакет мод с центром $\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_c$ (для определенности $\mathbf{k}_c = (k_c, 0)$ при $\text{Re} = \text{Re}_c(1 + \varepsilon)$, близких к Re_c ($\varepsilon \ll 1$)) аппроксимируется выражением (для одной из компонент поля скорости):

$$u(x, y, t) = \varepsilon^{1/2} A(X, Y, T) \exp[i(k_c x - \omega_c t)] + \varepsilon u_2 + \varepsilon^{3/2} u_3 + \dots$$

Здесь огибающая A является медленно изменяющейся функцией пространства и времени: $X = \varepsilon^{1/2} x$, $Y = \varepsilon^{1/4} y$, $T = \varepsilon^{1/2} t$. Подстановка этого решения в исходные нелинейные уравнения порождает систему для возмущенного поля $\sim \varepsilon^{1/2} A(X, Y, T)$ и поправок к нему $\sim \varepsilon^{n/2}$. Из условия разрешимости полученной системы и следует обобщенное уравнение Гинзбурга — Ландау (ГЛ) для функции $A(X, Y, T)$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'_c \frac{\partial A}{\partial x} - i \frac{\omega_c}{2k_c} \nabla^2 A + \frac{1}{2} [\gamma'' - i(\omega'_c - \omega'_c k_c^{-1})] \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 A = \gamma A - l A^2 A^*, \quad (2.7)$$

где ω'_c — групповая скорость пакета в x -направлении, ω''_c и ω'_c/k_c характеризуют диффузионное распыление пакета, γ'' — отрицательная константа, определяющая уменьшение инкрементов при отклонении волновых чисел k от волнового числа k_c наиболее неустойчивой моды, инкремент которой равен γ ; $l = l_r + i l_i$ — комплексная постоянная Ландау, характеризующая насыщение и нелинейную модуляцию волны.

Несмотря на то, что обобщенное уравнение ГЛ получено для течения, формирующегося вблизи первой бифуркации — потери устойчивости стационарным течением, оно пригодно и для исследования последующих переходов, если при этом амплитуды возмущений остаются малыми. В ряде случаев (например, в бинарных смесях, жидких кристаллах) сложные свойства течений проявляются уже при малых ε , и полученные «медленные» уравнения применимы даже для описания перехода к турбулентности.

2.7. Автоструктуры. Дискретный аналог уравнений Гинзбурга—Ландау. При всей разноликости гидродинамических структур — пространственно-временных образований в непрерывных средах — их естественно разделить на три группы, пользуясь аналогией с колебаниями в сосредоточенных системах. Как известно, среди колебаний выделяют свободные, вынужденные и автоколебания. Тогда свободные структуры — это, например, вихри в сдвиговых течениях идеальной жидкости (т. е. при $Re \rightarrow \infty$); примером вынужденных структур могут служить валы в конвекции Рэлея — Бенара, повторяющие форму границы цилиндрического контейнера при малом его диаметре (см. [70]), или более сложные вихревые образования, формирующиеся при обтекании мелких углублений на гладкой поверхности [71]. Автоструктуры — гораздо менее тривиальный объект — это локализованные пространственные образования, устойчиво существующие в диссипативных и неравновесных средах и не зависящие (в конечных пределах) ни от граничных, ни от начальных условий [72]. Подобно тому, как автоколебания в качестве порождающих решений могут иметь семейство консервативных (свободных) колебаний, среди которых вводимые малые диссипация и подкачка энергии лишь выбирают определенное движение, сохраняя его форму, так и автоструктуры в слабонеравновесных средах могут наследовать свойства свободных структур в невязких течениях. Примеры таких квазиконсервативных структур хорошо известны — это, например, самоподдерживающиеся солитоны, в частности, солитоны Россби, к числу которых относится, возможно, и Большое Красное Пятно Юпитера [73, 74]. Следует, однако, подчеркнуть, что в большинстве гидродинамических экспериментов наблюдаются не индивидуальные структуры, а ансамбли структур (цепочки вихрей Тейлора, решетки из гексагональных или

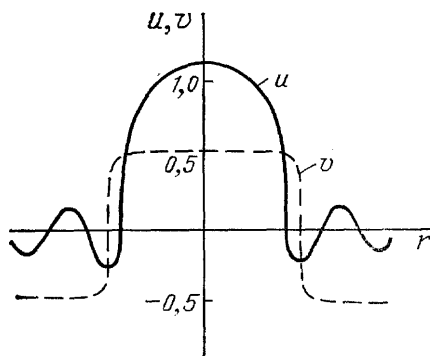


Рис. 5. Распределение поля в локализованных структурах, описываемых моделью (2.8), (2.9) при $\beta=0,9$, $\gamma=4$, $\delta=0,15$, $D=0,3$ (см. [75])

прямоугольных ячеек и т. п.), и для их формирования и динамики принципиальным оказывается наличие соседей. Тем не менее и такие течения во многих случаях можно рассматривать как ансамбли связанных автоструктур (см. ниже). В то же время дефекты в таких ансамблях-решетках структур естественно рассматривать как вторичные автоструктуры.

Чтобы пояснить механизм рождения конвективных автоструктур, рассмотрим двумерную модель:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [(v - \alpha) - (1 + \nabla^2)^2] u + \beta u^2 - u^3, \quad (2.8)$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = v - lv^3 + \delta u + D \nabla^2 v. \quad (2.9)$$

Можно показать [75], что при малых β ($\beta \ll 1$) эта система допускает стационарные решения в виде дисков, характерные размеры и стационарная интенсивность которых определяются только параметрами уравнений и не зависят от граничных и начальных условий. Число и взаимное расположение автоструктур определяется начальными условиями, но они не могут сближаться на расстояния меньше L_c , которое соответствует характерному размеру пограничной с автоструктурой

области, где поле u становится отрицательным (рис. 5). В общем случае ($\beta \sim 1$) возможно образование и других нетривиальных структур, что определяется разнообразием начальных возбуждений, которые служат затравкой для последующего нелинейного роста и формирования автоструктур. Простейшие нетривиальные структуры с центром симметрии — это многогранники. Они порождаются двумя модами круглой мембраны — радиальной и азимутальной.

Из рис. 5 видно, что в сформировавшихся автоструктурах влияние поля v на поле u сводится к созданию профиля неравновесности среды (слагаемые $\sim u$ в уравнении (2.8)). С другой стороны, как показывает численное моделирование [75] и эксперименты по термоконвекции с неоднородным подогревом [76], устойчивые автоструктуры формируются и в том случае, когда поле $v(x, y)$ не является самосогласованным, а задается извне. При этом тонкие детали поля $v(x, y)$ слабо влияют на их топологию.

Для аналитического описания слабонадкритических локализованных конвективных структур в ситуации, приближенной к эксперименту с неоднородным подогревом [76], будем считать надкритичность радиально симметричной функцией

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \geq 0, \quad r \leq r_0, \\ = \varepsilon' < 0, \quad r > r_0. \quad (2.10)$$

При $\varepsilon \ll 1$ уравнения (1.1)–(1.3) сводятся к уравнению (2.8), в котором $v - \alpha \equiv \varepsilon(r)$, переменная u имеет смысл отклонения температуры θ от равновесной, а квадратичное слагаемое связано, например, с зависимостью капиллярного натяжения и (или) вязкости от температуры (уравнение Хакена [77]). Считая формально нелинейность слабой $|u|^2 \ll 1$, будем искать решение (2.8) (2.10) в виде суперпозиции собственных функций линеаризованной вблизи $u=0$ задачи, решение которой представим в виде

$$u(r, t) = \sum_n F_n(r) \sin(n\varphi) \cdot \exp(\lambda_n t),$$

где функции $F_n(r)$ удовлетворяют условиям: $F_n(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $|F_n(r)| < \infty$ при $r \rightarrow 0$. Собственные функции $F_n(r)$ можно найти, сшивая решения уравнения Лапласа на границе $r=r_0$. Однако представляют интерес лишь те функции, которым соответствуют нарастающие во времени возмущения, т. е. с $\lambda_n > 0$. Вне области положительного ε ($r > r_0$) этому условию могут удовлетворять только функции Неймана от комплексного аргумента $K_n(ikr)$ ($k^2 = -1 + iq$). Внутри области $r \leq r_0$ — функции Бесселя действительного аргумента $J_n(kr)$. Величины q, k в силу действительности λ_n должны удовлетворять соотношению $\lambda_n = \varepsilon_0 - (1 - k^2)^2 = q^2 > 0$ и определяются из дисперсионного уравнения

$$\frac{J_n'(kr_0)}{kJ_n^*(kr_0)} = \frac{\text{Re } K_n(ikr_0)}{\text{Re}(ikK_n'(ikr_0))}.$$

Это уравнение следует из условий непрерывности F_n и dF_n/dr на границе $r=r_0$.

Предположим теперь, что параметры r_0, ε_0 таковы, что несколько показателей λ_n , соответствующих, например, осесимметричному с $n=0$ и азимутальному с $n=3$ возмущениям, положительны. Тогда, подставляя в (2.8) решение в виде $u(r, \varphi, t) = A_0(t)F_0(r) + A_3(t)F_3(r) \sin 3\varphi$ и считая амплитуды возмущений медленными функциями сопряженной системы, получим для A_0, A_3 систему уравнений второго порядка вида [78, 79]:

$$\frac{dA_0}{dt} = \lambda_0 A_0 + c_1 A_0^2 + c_2 A_3^2 - c_3 A_0^3 + c_4 A_0 A_3^2, \\ \frac{dA_3}{dt} = \lambda_3 A_3 + d_1 A_0 A_3 - d_2 A_0 A_3 - d_3 A_3 A_0^2.$$

При $c_1, d_1 \neq 0$ (т. е. при наличии квадратичной нелинейности в (2.8)) эта система имеет устойчивое стационарное решение с $A_0, A_3 \neq 0$, которому соответствует уединенная шестигранная ячейка. В тех случаях, когда число таких взаимодействующих мод больше двух, уравнения для амплитуд этих мод могут иметь устойчивые движения с нетривиальной (в том числе и хаотической) динамикой. Такая ситуация, по-видимому, описывает наблюдавшийся в эксперименте [76] режим неперидического рождения и исчезновения ячеек. Подобные решения в виде уединенной ячейки могут быть получены и для однородной, но двухкомпонентной среды, описываемой системой (2.8), (2.9)

Физические механизмы, лежащие в основе спонтанного формирования локализованных структур — двумерных и трехмерных, связанные с характером взаимодействия компонент u и v и с пространственной дисперсией поля, представляются достаточно общими и могут реализовываться в самых различных неравновесных средах. Трехмерные устойчивые структуры обнаруживаются уже в рамках модели (2.8), (2.9) при $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Локализованные структуры — частицы с различной топологией исследовались с помощью компьютерного эксперимента [80]. Наблюдались три «элементарные» структуры — шар, тор и «бейсбол» (рис. 6, *а*). Ориентация элементарных структур в пространстве произвольна — она определяется лишь начальными условиями, а топология и размеры универсальны и не меняются при изменении граничных условий и размеров области. При надлежащем образом выбранных начальных условиях реализовались устойчивые образования в виде связанных элементарных структур — одинаковых или разных (рис. 6, *б*). В определенной области начальных условий нелинейное поле (2.8), (2.9) допускает формирование образований, непосредственно не являющихся связанными состояниями элементарных структур (например, рис. 6, *в*). Однако подобные образования не являются аттракторами (в данном случае — состояниями равновесия) исследуемой системы и при $t \rightarrow \infty$ переходят в связанные состояния элементарных структур.

Топология и характер взаимодействия локализованных структур, как оказалось, слабо зависят от конкретного вида связи между полями u и v . В частности, представленные на рис. 6, *а* элементарные структуры — шар, тор и «бейсбол» обнаружились и в модельной среде, в которой эти поля связаны линейно ⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= [\bar{\varepsilon} - (1 + \nabla^2)^2] u + \beta u^2 - u^3 + qv \equiv - \frac{\delta F}{\delta u}, \\ \mu \frac{\partial v}{\partial t} &= (1 + D\nabla^2) v - \gamma v^3 + qu \equiv - \frac{\delta F}{\delta v}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Структуры, изображенные на рис. 6, *а*, наблюдаются в этой среде, например, при $\bar{\varepsilon} = -0,007$, $\beta = 1$, $q = 0,15$, $\mu = 0,1$, $D = 0,06$, $\gamma = 4$.

Универсальность обнаруженных локализованных образований говорит о том, что модельные уравнения, в рамках которых найденные локализованные решения существуют и устойчивы, должны следовать из самых общих предположений о характере полей (симметрия, однородность, изотропность и т. п.). Действительно, будем искать эти уравнения в классе градиентных систем $\partial u/\partial t = -\delta F/\delta u$, плотность энергии которых

$$\mathcal{F} \left(F = \int_V \mathcal{F} dV \right)$$

допускает разложение в ряд по степеням поля и степеням градиента поля вблизи точки потери устойчивости однородным состоянием. Полагая, что скалярное действительное поле u может терять устойчивость не только «мягким», но и «жестким» образом и, кроме того, имея в виду, что неустойчивость может проявиться не на максимально больших, а на конечных масштабах, мы помимо традиционных главных членов разложения должны оставить и следующие за ними слагаемые. В результате будем иметь

$$\mathcal{F} = \frac{\alpha}{2} u^2 - \frac{\beta}{3} u^3 + \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} [(k_0^2 + \nabla^2)^2 u]^2. \quad (2.12)$$

Соответствующее (2.12) искомое уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 - (k_0^2 + \nabla^2)^2 u. \quad (2.13)$$

Это обобщение известного уравнения Свифта — Хоэнберга [81], которое при $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ (случай мягкого самовозбуждения) имеет локализованные решения. Они, однако, неустойчивы и переходят в периодические структуры. Если для среды характерна жесткая потеря устойчивости ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$), то ситуация меняется — в этом случае возможно существование изолированных структур.

Устойчивость индивидуальных автоструктур, а в некоторых случаях и относительная автономность их динамики (см., например, [82]), позволяют при описании их взаимодействия и динамики ансамблей перейти от уравнений в частных производных для полей к обыкновенным или дифференциально-разностным уравнениям для параметров структур. Обратим внимание на то, что при различных параметрах неравновесной среды регулярная пространственная решетка из тождественных элементов может представлять собой либо ансамбль слабо связанных автоструктур, либо являться просто результатом резонансного взаимодействия небольшого числа возбуждений среды (обычно гармонических). Наиболее наглядный и простой пример — шестигранные ячейки Бенара. При малой надкритичности они, как известно [70], образуются благодаря синхронизации фаз трех плоских волн, развернутых друг относительно друга под углом 60° . С ростом надкритичности (а, следовательно, и нелинейности) рождается большое число гармоник этих волн, и решетка шестигранников, сохраняя внешнее сходство с исходной, превращается уже в набор слабо связанных друг с другом индивидуальных шестигранников. Эффекты дальнего действия при этом уже мало существенны. Ситуация здесь напоминает формирование периодической цепочки солитонов из стационарной синусоидальной волны при увеличении энергии возбуждения, скажем, в уравнении Кортевега — де Фриза. Такую цепочку солитонов естественно рассматривать как дискретный ансамбль слабо связанных элементов.

Представим пример описания взаимодействия связанных «элементарных частиц» типа шаров в модели (2.8), (2.9), где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Используя асимптотический метод, для координат центров шаров $\mathbf{r}_{0j} = (x_{0j}, y_{0j}, z_{0j})$ можно получить уравнения в обыкновенных производных вида [83]

$$\frac{d\mathbf{r}_{0j}}{dt} = \nabla \mathbf{r}_{0j} \sum_{l \neq j} \operatorname{Re} \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_{0j} - \mathbf{r}_{0l}|)}{|\mathbf{r}_{0j} - \mathbf{r}_{0l}|}.$$

Если шаров только два, то согласно этим уравнениям они будут двигаться по прямой, соединяющей их центры, до тех пор, пока не установится устойчивое состояние равновесия — связанное состояние. Устойчивых связанных состояний даже для двух «частиц» — бесконечное число, а для нескольких — тем более. Это могут быть правильные многогранники из шаров (см. рис. 6, б), разного рода решетки — периодические и «квазикристаллические» и т. д.

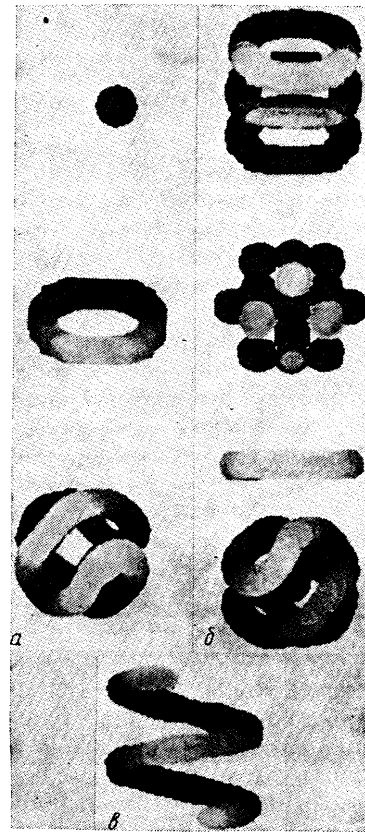


Рис. 6. Трехмерные локализованные структуры при $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$, $0,05 \leq \mu \leq 0,1$, $\gamma = 0,15$, $D = 0,1$, формирующиеся при разных начальных условиях [80]

В консервативной системе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = [(v - \alpha) - (1 + \nabla^2)^2] u + \beta u^2 - u^3, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v - \gamma v^3 + \delta u + D \nabla^2 v,$$

устойчивые статические решения которой совпадают с рассмотренными, динамика и характер взаимодействия «элементарных частиц» гораздо богаче. Они, в частности, могут вращаться друг относительно друга, образуя планетоподобные системы, хаотически сближаться и расходиться, и т.д. [83].

Хотя строгое обоснование такого перехода «от полей к структурам» — достаточно сложная задача, которую пока удалось разрешить лишь в немногих случаях (см. [72, 84]), качественные соображения, лежащие в основе феноменологического вывода, достаточно прозрачны. Описанные выше эксперименты, а также численные решения исходных гидродинамических уравнений (2.1)—(2.3) или (2.4), (2.5) показывают, что в результате развития первичных неустойчивостей довольно часто формируется, например, цепочка структур в виде двумерных вихрей,

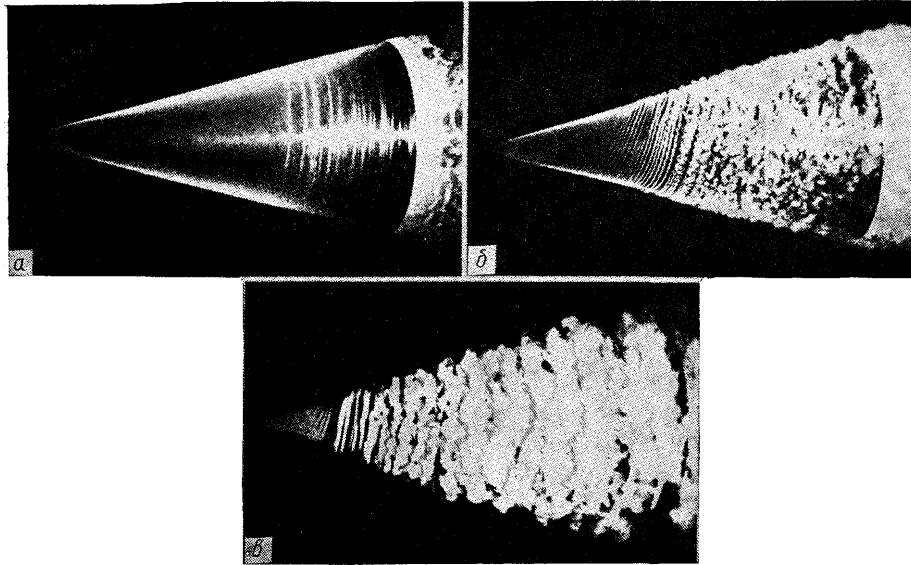


Рис. 7. Развитие возмущений на спиральных вихрях, формирующихся при обтекании вращающегося конуса, *a* — $U=2,05$ м/с, $n=300$ об/мин, *б* — $U=1,7$ м/с, $n=670$ об/мин, *в* — $U=1$ м/с, $n=1200$ об/мин. (См. [36])

конвективных валов Бенара, вихрей Тейлора, спиралей на обтекаемых вращающихся телах (рис. 7) [35—39], поперечных вихрей в пограничном слое [85], вихревой дорожки в следе за цилиндром [86] (рис. 8) и т. п. Вторичные возбуждения при малых ($\epsilon \ll 1$) и умеренных ($\epsilon \sim 1$) превышениях надкритичности приводят к модуляции этих структур — вихрей, т. е. проявляют их внутреннюю динамику. Естественно предположить, что процедура вывода уравнений для медленной амплитуды вторичных возбуждений на j -м уединенном вихре опять приведет к уравнению ГЛ (2.7), но теперь уже в одномерном варианте (координата y изменяется вдоль вихря):

$$\frac{\partial A_j(y, t)}{\partial t} = \Phi(A_j(y, t), \epsilon) + \xi \frac{\partial^2 A_j(y, t)}{\partial y^2}, \quad (2.13')$$

где ξ — комплексный параметр.

Если при описании взаимодействия возбуждений на соседних вихрях ограничиться лишь линейным приближением $\sim \kappa (A_{j+1} - A_j)$, $\sim \gamma (A_{j-1} - A_j)$ (см., например, [84]), то приходим к модели [87]:

$$\frac{\partial A_j(y, t)}{\partial t} = \Phi(A_j, \varepsilon) - \gamma(A_j - A_{j-1}) + \kappa(A_{j+1} - A_j) + \xi \frac{\partial^2 A_j}{\partial y^2}. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) могут быть существенно упрощены, если структуру возбуждений на вихрях считать заданной. Так, например, для

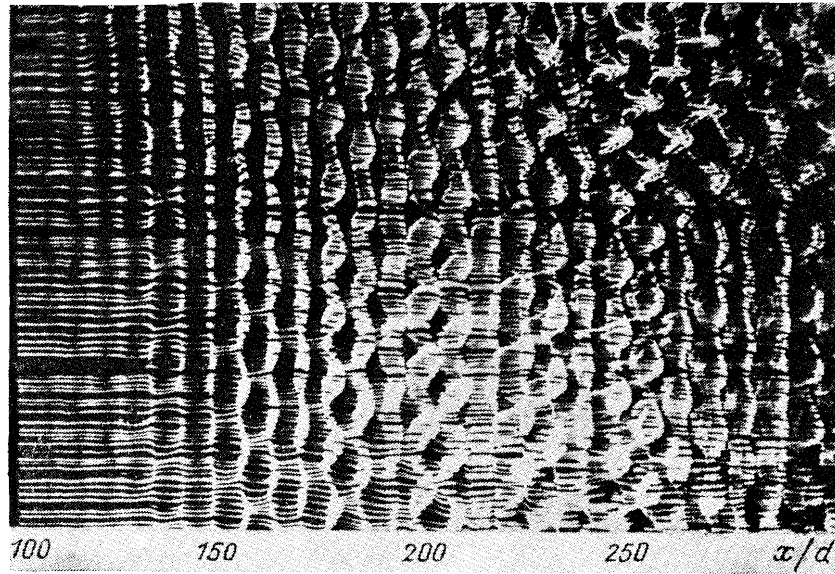


Рис. 8. Развитие трехмерных возмущений в следе за круглым цилиндром при $Re = 150$ (см. [86])

кольцевых вихрей, полагая, что возбуждена лишь одна азимутальная мода, можно перейти к модели, описываемой уравнениями (2.14) при $\xi = 0$.

2.8. СТРУКТУРЫ С ОСОБЕННОСТЯМИ. ДЕФЕКТЫ. В случае, когда вторичные возбуждения на уже сформировавшихся структурах являются периодическими, возможно формирование решеток, подобных представленным на рис. 9 (см. [88, 89]). Однако такие регулярные решетки исключение, а не правило. Так, например, при термоконвекции в протяженных тонких слоях чаще всего наблюдаются упорядоченные островки валов, связанные между собой дислокациями различных видов. Несмотря на то, что конкретные свойства таких дефектов определяются типом течения, в ансамбле структур, который имеет волновую природу, можно указать достаточно общий механизм их образования. Представим себе, что при одних и тех же значениях параметров в течении могут устойчиво существовать периодические возбуждения — моды или волны — с различными волновыми числами (мультистабильность). Если такие моды сильно конкурируют друг с другом, то, в зависимости от начальных условий, устанавливается какой-либо определенный режим [90, 91]. Если же конкуренция недостаточно сильная (или одна из «слабых» мод поддерживается неоднородностью среды или внешним возбуждением), то моды могут сосуществовать в пространстве. На линии контакта мод с разными волновыми числами «лишние» фазовые

фронты, очевидно, должны обрываться. В результате будут наблюдаться дислокации, подобные представленным на рис. 10, *а*, которые возникают в результате развития электрогидродинамической неустойчивости в жидких кристаллах при наложении пространственно-периодического напряжения [92]. Аналогичным образом выглядят дислокации волн модуляции (рис. 10, *б*) на фоне капиллярной ряби — ряби

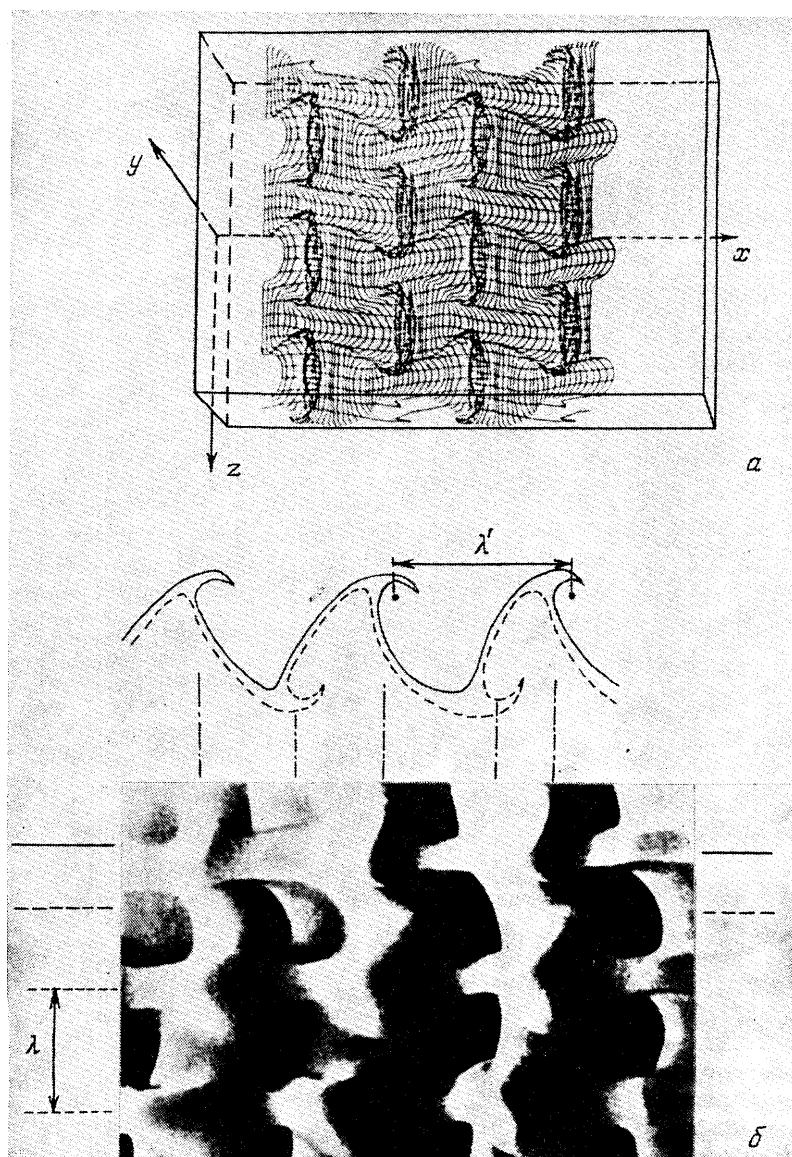


Рис. 9. Визуализация вихревой решетки в следе за плоской пластиной с синусоидальной задней кромкой в численном (*а*) и физическом (*б*) экспериментах. Сплошными и штриховыми линиями представлены сечения решетки плоскостями, параллельными плоскостям x, y (см. [88])

Фарадея (см. [93] и обсуждение в п. 3.7). Образование дислокаций, как результат сосуществования в соседних областях возбуждений с различными пространственными периодами, также хорошо прослеживается и в следе за цилиндром с переменным диаметром [94]. Если изменения

диаметра цилиндра вдоль его оси достаточно медленные, то в следе возникает ячеистая структура течения — в каждой ячейке формируются вихри Кармана, период следования которых связан с локальной частотой Струхала $f_s \sim U_0/d$ и изменяется от ячейки к ячейке. Из-за несовпадения периода следования вихрей в соседних ячейках в местах их стыковки возникают дефекты (рис.10, в) [94].

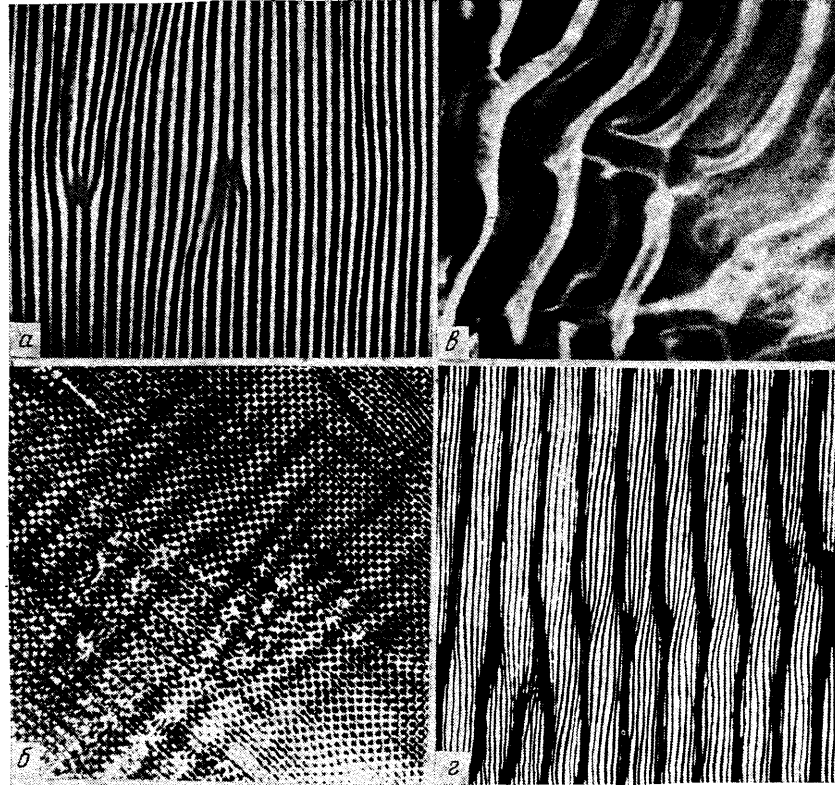


Рис. 10. Дислокации: а — возникающие при электрогидродинамической неустойчивости в жидких кристаллах [92], б — в волнах модуляции ряби Фарадея [93], в — в следе за цилиндром [94], з — в сдвиговом слое [95]

Таким же образом проявляется обсуждаемый механизм образования дислокаций и в другом сдвиговом течении — неоднородном по ширине уединенном сдвиговом слое [95]. Интересно, что возникновение дислокаций возможно и в том случае, когда периоды следования вихрей в отдельных ячейках совпадают, но различаются моменты их образования. На рис. 10, з приведен пример таких дислокаций в сдвиговом слое, возбуждаемом вблизи кромки формирующей его пластины внешним акустическим полем, которое имеет одинаковую частоту везде вдоль кромки, но в некоторой его точке испытывает резкое изменение фазы на 180° .

Естественно, что в решетках, образуемых устойчивыми структурами, дислокации также зачастую оказываются устойчивыми — для их формирования или разрушения в установившемся течении требуется достаточно сильное воздействие [16]. Поэтому их можно рассматривать как вторичные автоструктуры, возникающие на фоне регулярных ячеистых решеток.

Хотя само по себе описание дислокаций является сложной задачей, течение на больших расстояниях от них может быть рассчитано доста-

точно точно. Ситуация здесь сходна с той, которая возникает в гидродинамике несжимаемой идеальной жидкости, — при наличии локализованных областей концентрированной завихренности течение вне этих областей можно считать потенциальным, а сами вихревые области рассматривать как дефекты среды, в которых нарушена ее «потенциальность». Таким образом, возникает проблема, общая как для обычных, так и для структурированных течений, о представлении гидродинамических полей через их особенности и об отыскании закона движения этих особенностей. В основе такого описания лежит формализм, связанный с представлением решений уравнений в частных производных для комплексного поля через его особенности, в частности, полюсы.

Простейшим примером являются решения [96, 97]

$$u(x, t) = -2\Gamma \sum_{\alpha} (x - z_{\alpha}(t))^{-1}, \quad \dot{z}_{\alpha} = -2\Gamma \sum_{\beta \neq \alpha} (z_{\alpha} - z_{\beta})^{-1},$$

$$z_{\alpha} = x_{\alpha} + iy_{\alpha}$$

для интегрируемого уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Не намного сложнее выглядит и представление аналогичных решений [98]

$$u(x, t) = -(i\beta + \nu) \sum_{j=1}^n (x - x_j)^{-1} + \text{к. с.},$$

$$\dot{x}_j = -i\mu - (i\beta + \nu) \sum_{l \neq j}^n 2(x_j - x_l)^{-1} + (i\beta - \nu) \sum_{l=1}^n 2(x - x_l^*)^{-1}$$

для неинтегрируемого диссипативного уравнения Бенжамина — Оно

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu H \frac{\partial u}{\partial x} + \beta H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x - x'} dx',$$

моделирующего турбулентность внутренних волн в стратифицированной жидкости.

В случае набора периодических цепочек полюсов $x_{ij} = x_i \pm 2j\pi$, $j=1, 2, \dots$,

$$u(x, t) = -\frac{i\beta + \nu}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{ctg} \frac{x - x_j(t)}{2} + \text{к. с.},$$

$$\dot{x}_j(t) = -i\mu - (i\beta + \nu) \sum_{l \neq j}^n \operatorname{ctg} \frac{x_j - x_l}{2} + (i\beta - \nu) \sum_{l=1}^n \operatorname{ctg} \frac{x_j - x_l^*}{2}.$$

Это представление решения $u(x, t)$ внешне напоминает разложение по линейным модам, однако с той принципиальной разницей, что нелинейные моды не являются независимыми, а обрывание суммы при любом n дает точное решение. Эти решения описывают волновые структуры солитонного типа, которые сохраняются в асимптотике и почти восстанавливают свою форму после столкновений. Однако движение этих структур и изменения их параметров могут быть очень сложными, в том числе и хаотическими. Они, в отличие от консервативных солитонов, могут нарастать или затухать, а их столкновения не являются упругими (эти и другие свойства решений, а также вопросы устойчивости и полноты подробно рассмотрены в работе [98]).

Для классической идеальной жидкости, описываемой уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0,$$

представление двумерного поля скорости посредством дискретного набора особенностей — точечных вихрей [99]

$$u^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} (z - z_{\alpha})^{-1}, \quad \dot{z}_{\alpha}^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\beta} (z_{\alpha} - z_{\beta})^{-1}$$

$$(u = u_x + iu_y, \quad z = x + iy)$$

является идеализацией, поскольку теперь особенности расположены в реальном пространстве, занятом течением. Это при некоторых постановках задач приводит к принципиальным трудностям (см., например, [97, 100]), тем не менее можно указать многочисленные примеры течений, в которых завихренность действительно концентрируется в тонких нитях. В частности, такие вихревые нити наблюдались при термоконвективном [101, 102] и турбулентном [103] перемешивании жидкости во вращающемся сосуде.

Простейшими дефектами структурированных течений являются плоские фронты, разделяющие устойчивые и неустойчивые состояния течения при малых надкритичностях, которые могут быть описаны в рамках модели ГЛ. Такие фронты формируются, например, из локализованных возмущений при быстром включении неравновесности — сначала в области, занятой возмущением, устанавливается периодическое в пространстве течение, которое постепенно захватывает оставшуюся часть пространства, все еще занятую течением в неустойчивом состоянии [104, 105]. Скорость стационарного фронта однозначно определяется линейной частью уравнения ГЛ, а его форма — решением соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения [106]. Аналогичные результаты справедливы и для более широкого класса уравнений [107—109]. При этом для достаточно малых начальных возбуждений оказывается возможным связать временную асимптотику решений с данными задачи Коши. Эксперименты подтверждают, что при быстром «включении» неравновесности и неоднородных начальных условиях именно через движение фронтов происходит формирование структурированных течений как стационарных, так и нестационарных: термоконвекции Рэлея — Бенара [105], течения Тейлора — Куэтта [104], капиллярной ряби при параметрическом возбуждении [109].

В более общем случае в течении возможно формирование искривленных фронтов или фронтов, распространяющихся под углом друг к другу. Их столкновение и взаимодействие приводит к образованию дефектов, движение которых и определяет дальнейшую динамику структурированных течений. Описание полей, создаваемых такими дефектами, и их динамики зависит от типа течения в большей степени, чем в случае регулярных структур-ячеек. Такое описание требует учета не только дисперсионных и нелинейных свойств элементарных возбуждений, формирующих структуры, но и так называемых «дрейфовых течений», связанных с поперечной к плоскости решетки компонентой завихренности, неизменно возникающей при наличии дислокаций или искривлений конвективных валов [110, 111]. Трудности получения упрощенных уравнений для этой проблемы в значительной степени обусловлены наличием нескольких пространственно-временных масштабов с различающимися порядками величин. При этом приближенное описание нормальной к плоскости решетки компоненты завихренности Ω в различных течениях требует, как правило, привлечения слагаемых разных порядков теории возмущений. Тем не менее при малой надкритичности учет средней дрейфовой скорости, определяемой вертикальной завихренностью (или градиентом давления, как, например, в случае плоского течения Пуазейля), приводит к амплитудным уравнениям, похожим даже для, казалось бы, совершенно различных течений: плоского сдвигового слоя, термоконвекции Рэлея — Бенара, течения Тейлора — Куэтта, плоского течения Пуазейля вблизи точки бифуркации Хопфа (см., например, [112]). Для однородного сдвигового слоя соответствующие уравнения имеют вид [112]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - |A|^2 A - iBA; \quad (2.14')$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\nabla^2 B, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \Omega = \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(A^* \frac{\partial A}{\partial x} + \text{к. с.} \right). \quad (2.15)$$

Похожим образом выглядят и уравнения, описывающие термоконвекцию в слое со свободными границами (в обозначениях работы [1131]):

$$\frac{1 + \text{Pr}}{\text{Pr}} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{3\pi^2}{8} \epsilon A + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2q_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 A - \frac{1}{8} |A|^2 A - iq \frac{1 + \text{Pr}}{\text{Pr}} BA, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\nabla^2 B, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pr} \nabla^2 \right) \Omega = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[A^* \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2q_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A + \text{к. с.} \right]. \quad (2.17)$$

Отличия в структуре дифференциальных операторов уравнений (2.14'), (2.15) и уравнений (2.16), (2.17) по координатам x, y обусловлены разными свойствами пространственной симметрии соответствующих течений [112].

Из уравнений (2.16), (2.17) видно, что при наличии дефектов в решетке конвективных валов ($B \neq 0$) при конечных числах Прандтля уравнения для параметра порядка A и вертикальной компоненты завихренности Ω связаны друг с другом. Роль этой связи при больших надкритичностях остается невыясненной, но при умеренных надкритичностях ($\epsilon \leq 1$), как было обнаружено в [110, 111], амплитудные уравнения при $B=0$ правильно описывают движение дислокаций — не обнаружено качественных отличий, которые могли бы быть приписаны влиянию Ω и конечным Pr , хотя количественные зависимости при $\text{Pr} \leq 60$ начинают различаться. Причина такого качественного сходства результатов более и менее точных описаний связана с тем, что дрейфовые течения не изменяют топологию структур, а, следовательно, и не влияют на механизм образования дефектов. Это, в частности, позволяет для их описания использовать топологический подход, в значительной степени основанный на свойствах симметрии и аналогичный используемому для описания дефектов в жидких кристаллах (см., например, [14]).

Для анализа динамики структурированных течений с дефектами удобно обобщить амплитудное уравнение таким образом, чтобы оно описывало как структуры-ячейки, так и структуры-дефекта. В случае конвективных валов, которые описываются уравнением (2.7) с действительными коэффициентами, это можно сделать, введя действительную функцию $\psi = A(x, y, z) \exp(ik_x x) + \text{к. с.}$ (по аналогии с теорией фазовых переходов ее называют параметром порядка). Тогда для нее простейшее уравнение, переходящее при медленных $A(x, y, t)$ в уравнение (2.7), будет иметь вид уравнения Свифта — Хоэнберга [81]:

$$\tau_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \epsilon \psi - \frac{\xi_0^2}{4k_c^2} (\nabla^2 + k_c^2) \psi - g\psi^3. \quad (2.18)$$

Одним из замечательных свойств этого уравнения (как и уравнения Гинзбурга — Ландау (2.7) с действительными коэффициентами при $\omega_c = 0$) является возможность его записи в градиентной форме

$$\tau_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta \psi}, \quad (2.19)$$

$$F = \int d^2 r \left\{ \frac{1}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \epsilon \psi^2 + \frac{1}{4} g \psi^4 + \frac{1}{2} \frac{\xi_0^2}{4k_c^2} [(\nabla^2 + k_c^2) \psi]^2 \right\}, \quad (2.20)$$

где $\delta F / \delta \psi$ — вариационная производная, а свободная энергия имеет смысл функционала Ляпунова

$$\frac{dF}{dt} = - \tau_0 \int d^2 r (\dot{\psi})^2 \leq 0. \quad (2.21)$$

При этом задача отыскания устойчивых стационарных состояний сводится к отысканию минимумов F .

Для потенциальных систем вида (2.19), (2.20) динамика дефектов исследована наиболее подробно [14, 110, 111, 114—117]. Процесс движения дефектов в таких системах всегда завершается установлением одного из стационарных состояний, которому соответствует локальный минимум функционала F (дефекты при этом либо останавливаются, либо исчезают). Изменение свободной энергии в этом случае можно рассматривать как работу некоторой силы, которую по аналогии с силой, дейст-

вующей на дислокацию в кристалле при наложении давления, называют силой Пич — Келера (см. [14]). Для простых дислокаций, в частности, представляющих собой переход от роликовой структуры с волновым числом $2\pi(n+l)/L$ к решетке с волновым числом $2\pi n/L$ (подобно рис. 10), эту силу легко вычислить [115]. Изменение свободной энергии F в рассматриваемом случае

$$dF \sim \frac{dF}{dk} \frac{2\pi}{L} dy$$

а сила, действующая на дислокацию,—

$$f_{\text{ПК}} = \frac{dF}{dy} \sim \frac{dF}{dk}.$$

Движение дефекта, очевидно, будет продолжаться до тех пор, пока сила $f_{\text{ПК}}$ не сравняется с действующей на дефект силой трения f_v , зависящей от величины диффузии в неравновесной среде [115]. Таким образом, движение дефекта подобно движению шарика по бугристой дну ванны, заполненной вязкой жидкостью.

2.9. ФОРМИРОВАНИЕ РЕШЕТОК. Для гидродинамических течений, описываемых уравнениями в градиентной форме типа (2.19), (2.20), характерно сильное вырождение и наличие множества локальных минимумов F , соответствующих различным локально устойчивым состояниям [114] (рис. 11). В присутствии достаточно интенсивных фоновых шумов такие структурированные состояния будут релаксировать к единому глобально устойчивому, которому и соответствует абсолютный минимум F . Однако в системах с низким уровнем шумов могут устойчиво наблюдаться и состояния, соответствующие локальным минимумам. В этом случае конечное состояние определяется характером начального возбуждения. Например, при быстром увеличении числа Рэлея конвекция, ввиду малости времени термодиффузии, устанавливается независимо в отдельных областях. Причем ролики в каждой из областей могут быть ориентированы по-разному. По мере развития конвекции различные области приходят в контакт и формируются паттерны с дислокациями, которые могут существовать неограниченно долго.

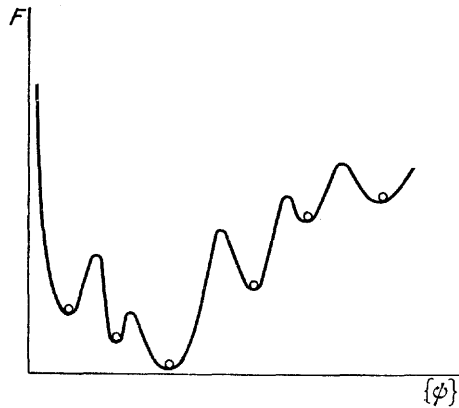


Рис. 11. Схематическое представление функционала Ляпунова (2.20) в конфигурационном пространстве решений (2.18)

Вблизи порога потери устойчивости ($\epsilon \ll 1$) для достаточно удаленных границ ($\epsilon^{1/2}L/d \gg 1$) F можно представить в виде суммы трех компонент $F = F_B + F_S + F_D$ (см. [116, 117]). Объемный вклад

$$F_B \approx \epsilon \xi_0^2 \int d^2r \left[(k - k_c)^2 + \frac{1}{4} k_c^{-2} (\nabla k)^2 \right]$$

в основном определяется квадратом отклонения локального волнового числа $(k(\mathbf{r}) - k_c)^2$ и квадратом дивергенции волнового вектора $(\nabla k)^2$, характеризующих кривизну конвективных валов. Эффект подавления конвекции вблизи боковых стенок определяется слагаемым

$$F_S \approx \frac{2\sqrt{2}}{3} \epsilon^{3/2} \xi_0^2 \oint \frac{(k_s)}{k} dl,$$

которое минимально в случае, когда конвективные валы ориентированы перпендикулярно боковой стенке ($\mathbf{s}$ — единичный вектор, нормальный к боковой стенке). Наконец, вклад F_D , определяемый дефектами, может быть приближенно представлен в виде

$$F_D \approx \frac{1}{2} \varepsilon^2 N_D \pi r_c^2,$$

где N_D — число точечных дефектов, а r_c — характерное расстояние, на котором ψ существенно искажается этими дефектами. Конкуренция между этими тремя слагаемыми и определяет минимум (локальный) функционала. Основанная на вариационном принципе модель, как показало сопоставление с экспериментом [78, 118], оказалась адекватно описывающей отмеченные выше свойства термоконвекции, в том числе и количественно при умеренных превышениях порога потери устойчивости статического равновесия $0,3 < \varepsilon < 2,0$.

Очевидно, что пути формирования одной и той же структуры течения могут быть разными и зависят от начальных условий. Наглядным примером служит процесс установления регулярной шестигранной решетки в модели (2.8) при $v - \alpha = \text{const} = \varepsilon$, которая описывает конвекцию Бенара — Марангони в подогреваемом снизу плоском слое жидкости:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\varepsilon - (1 + \nabla^2)^2] \psi + \beta \psi^2 - \psi^3. \quad (2.22)$$

В случае рассматриваемых здесь периодических граничных условий

$$\psi(x, y, t) = \psi(x + L, y + L, t) \quad (2.23)$$

предельные режимы статические и определяются минимумом функционала Ляпунова для уравнения (2.22):

$$F = \int d^2 r \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} \psi^2 - \frac{\beta}{3} \psi^3 + \frac{1}{4} \psi^4 + \frac{1}{2} [(1 + \nabla^2)^2 \psi]^2 \right\}. \quad (2.24)$$

Как показывает анализ этого функционала [78, 118], при не слишком малых ε он имеет множество локальных минимумов, отвечающих различным устойчивым пространственным формам — роликам ($\beta < \beta^*$) или шестигранникам ($\beta > \beta^*$). Локальным минимумам отвечают решетки с различными дефектами, реализующимися при различных начальных условиях. Однако во всех случаях, когда в начальных условиях присутствует локализованное возмущение (в том числе и на фоне периодического), происходит переход системы в одно и то же состояние с наименьшей свободной энергией $F = -38$.

На рис. 12 представлены результаты численного эксперимента [118], иллюстрирующие множественность путей формообразования шестигранной решетки. В некоторых случаях, как, например, при возникновении решетки из стоячей волны и близкого к точечному возмущения (см. рис. 12), формирование решетки шестигранников происходит за счет последовательного развития неустойчивостей основной и затем модуляционной. Поясним это на примере развития шестигранной решетки из локализованного возмущения цилиндрической формы. Линеаризация уравнения (2.22) дает уравнение для возмущения $a(x, y, t)$ в виде

$$\frac{da}{dt} = [\varepsilon - (1 + \nabla^2)^2] a. \quad (2.25)$$

Его решение в цилиндрической системе координат при граничных условиях $a|_{r=R} = 0$ имеет вид цилиндрических волн

$$a(r, t) = A_0 e^{ct} J_0 [(1 - (\varepsilon - c)^{1/2})^{1/2} r], \quad (2.26)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, а постоянная c определяется из соотношения

$$c = - \left[\left(\frac{\alpha_j}{R} \right)^2 - 1 \right]^2; \quad (2.27)$$

α_j — j -й корень функции Бесселя. Нам интересны лишь нарастающие во времени решения вида (2.26), т. е. те, которым отвечают положительные c . Так, для $R=32$ $c>0$ лишь для $\alpha=\alpha_1$ ($c\approx 0,04$). Убедимся, что при достаточно большом β возникшие цилиндрические волны неустойчивы по отношению к азимутальным возмущениям $b(\varphi, t) \sim \exp[i(\omega t - n\varphi)]$. Именно эта вторичная неустойчивость и приведет при

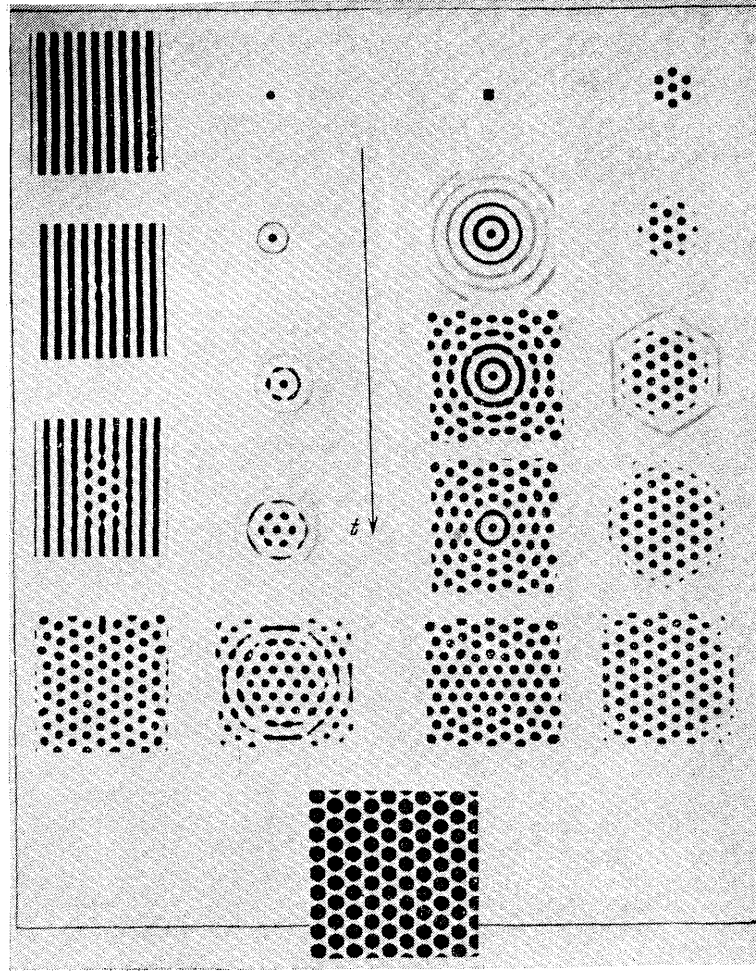


Рис. 12. Многообразие путей установления регулярной решетки в модели (2.22), (2.23) (см. [78]). Переход от строки к строке соответствует росту времени t

$t \rightarrow \infty$ к формированию шестигранной решетки при рассматриваемых начальных условиях. Поясним задачу сразу в нелинейной постановке. Для этого представим решение уравнения (2.22) в виде цилиндрической волны, на которой заданы азимутальные возмущения:

$$a(r, \varphi, t) = A_0(t) J_0(k_0 r) + A_3(t) J_3(k_3 r) \sin 3\varphi. \quad (2.28)$$

Для удовлетворения краевых условий необходимо $J_0(k_0 r_0) = 0$; $J_3(k_3 r_0) = 0$. Вблизи границы неустойчивости цилиндрической волны $A(t)$ и $A_3(t)$ можно считать медленными функциями времени. Тогда, подставляя выражение (2.28) в исходное уравнение (2.22) и пользуясь

асимптотическим методом, можно получить для A_0 и A_3 уравнения вида

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dt} &= \lambda_0 A_0 + c_1 A_0^2 + c_2 A_3^3 - c_3 A_0^3 + c_4 A_0 A_3^2; \\ \frac{dA_3}{dt} &= \lambda_3 A_3 + d_1 A_0 A_3 - d_2 A_0 A_3 - d_3 A_3 A_0^2,\end{aligned}\quad (2.29)$$

где квадратичные слагаемые с A_0^2 и $A_0 A_3$ пропорциональны параметру β . Даже при наличии декремента в моде A_3 азимутальные волны при достаточно большом β будут нарастать, и при увеличении t возникнет шестигранник — см. вторую и третью строки во втором ряду слева на рис. 12.

Статические, в частности, топологические характеристики дефектов, возникающих на фоне регулярных решеток в различных течениях жидкости (см. рис. 10), как упоминалось, очень похожи на соответствующие дефекты в кристаллах, где они подробно изучены [119]. Специфика неравновесных сред здесь в том, что топологические дефекты поля непрерывно движутся, рождаются и умирают, т. е. для полей в неравновесных средах основной интерес представляет нелинейная динамика дефектов. В частности, турбулентность в таких средах может, в определенной области надкритичности, рассматриваться как хаотическая динамика дефектов (см. п. 3.7).

3. Хаотическая динамика структур и турбулентность.

3.1. ФРАКТАЛЬНОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ И «ФАЗОВОЙ» ЖИДКОСТИ. Широко используемое в теории динамических систем понятие «фазовая жидкость», призванное сделать более осязаемым векторное поле в фазовом пространстве системы, в действительности есть больше чем просто аналогия. Дело в том, что при легко устанавливаемых в каждом конкретном случае условиях движение частиц, примеси в реальных стационарных течениях описывается динамическими уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

траектории в фазовом пространстве которых в буквальном смысле совпадают с траекториями частиц примеси в потоке. Поэтому многие выводы, в частности, о возможности возникновения хаоса, относящиеся к динамическим системам, справедливы и для переноса частиц. Например, образование областей хаотического перемешивания примеси возможно уже в сравнительно простом поле скорости [120]

$$\mathbf{u} = (A \sin z + C \cos y, B \sin x + A \cos z, C \sin y + B \cos x), \quad (3.2)$$

удовлетворяющем уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.3)$$

или уравнениям Навье—Стокса (2.4), (2.5) с внешней силой. Хаотизация перемешивания примеси возможна и в двумерном регулярном поле скорости, если оно нестационарно, например, периодическое во времени $\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}(x, y, t+T)$ (см. [97, 121—127]). На рис. 13 представлено распределение красителя в жидкости, приводимой в движение попеременным периодическим вращением внутреннего и внешнего цилиндра [125]. Здесь же приведено двумерное отображение соответствующей динамической модели. Наблюдаемая при этом картина течения с перемешивающимися (запутанными) маршрутами частиц — это, ко-

нечно, не турбулентность. Под турбулентностью обычно подразумевается нерегулярное в пространстве и времени поведение самого поля скорости. Здесь же поле скорости строго периодически. Такую псевдотурбулентность иногда называют «лагранжевой турбулентностью». Тем не менее анализ хаотического движения примеси позволяет приблизиться и к пониманию механизмов возникновения «настоящей турбулентности». Так, в частности, при некоторых предположениях роль примеси могут играть особенности или локализованные структуры самого поля скорости (например, вихри), и в этом случае его хаотизация в пространстве и времени происходит за счет тех же механизмов, что и стохастизация переноса частиц [121—123, 128—131]. Эти аналогии качественно объясняют, почему структура турбулентных течений столь же сложна, как и структура фазового пространства динамических систем с хаотическим поведением. В частности, как свидетельствуют эксперименты [132], турбулентные течения имеют фрактальную структуру.

Фрактальные множества, будь то сложно устроенные множества траекторий жидких частиц турбулентного течения в реальном пространстве или странные аттракторы в фазовом пространстве, описываются специальными характеристиками. Наиболее важные из них — это размерность реализации и связанная с ней размерность динамической системы, полностью воспроизводящей свойства течения. Турбулентное течение, как и «собственно шумовые пульсации», характеризуется сплошным спектром Фурье и спадающей автокорреляционной функции.

Отличает же динамическую турбулентность от случайных флуктуаций именно то обстоятельство, что она может порождаться динамической системой с конечным, хотя и большим, числом степеней свободы (в то время как генерация «истинного» шума требует от системы возбуждения бесконечного числа степеней свободы). Именно оценка размерности числа степеней свободы, нужного для воспроизведения турбулентного течения, и позволяет отличать динамическую турбулентность от, скажем, случайных гидродинамических флуктуаций.

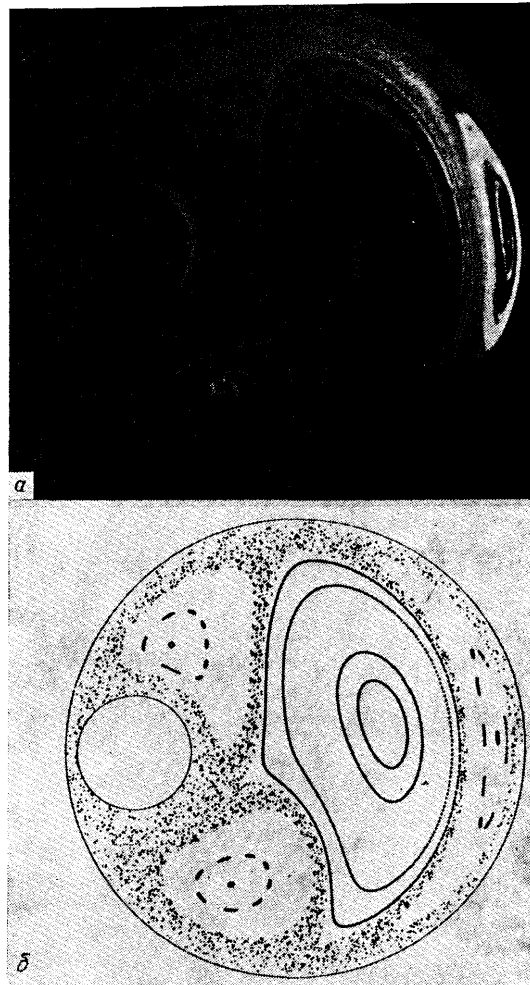


Рис. 13. Сопоставление распределения красителя в физическом эксперименте (а) и точек отображения Пуанкаре (б) в соответствующей модели для течения между попеременно вращающимися цилиндрами (см. [125])

Физическая природа нерегулярного запутанного поведения конечно-мерной системы, как известно [21], связана с неустойчивостью всех (или большинства) индивидуальных движений конечной энергии. На языке фазового пространства это можно пояснить так: в органиченной области располагаются неустойчивые траектории, из-за неустойчивости они расходятся друг от друга, благодаря же ограниченности области, в которой располагаются, перепутываются очень сложным образом. Эта сложность стохастического множества может быть описана количественно.

Для наглядности будем говорить о трехмерном фазовом пространстве. Представим себе аттрактор, расположенный в объеме, ограниченном поверхностью двумерного тора. Рассмотрим пучок траекторий на пути к аттрактору (ими описываются переходные режимы движения системы, ведущие к установлению «стационарного» хаоса). В поперечном сечении пучка траектории (точнее, их следы на секущей плоскости) располагаются в определенной области; проследим за изменением величины и формы этой области вдоль пучка. Учтем, что элемент объема в окрестности седловой траектории в одном из (поперечных) направлений растягивается, а в другом — сжимается; ввиду диссипативности системы сжатие сильнее, чем растяжение, — объемы должны уменьшаться. По ходу траекторий эти направления должны меняться, в противном случае траектории ушли бы на бесконечность. Все это приведет к тому, что сечение пучка уменьшится по площади и приобретет сплюснутую, и в то же время изогнутую форму. Но этот процесс должен происходить не только с сечением пучка в целом, но и с каждым элементом его площади. В результате сечение пучка разбивается на систему вложенных друг в друга полос, разделенных пустотами. С течением времени (т. е. вдоль пучка траекторий) число полос быстро возрастает, а их ширины убывают. Возникающий в пределе $t \rightarrow \infty$ аттрактор представляет собой несчетное множество не касающихся друг друга слоев — поверхностей, на которых располагаются седловые траектории. Своими боковыми сторонами и своими концами эти слои сложным образом соединяются друг с другом; каждая из принадлежащих аттрактору траекторий блуждает по всем слоям и по прошествии достаточно большого времени пройдет достаточно близко к любой точке аттрактора (свойство эргодичности). Общий объем слоев и общая площадь их сечений равны нулю. Такие множества в одном из направлений являются канторовыми [21]. Именно канторовость структуры следует считать наиболее характерным свойством аттрактора и в более общем случае n -мерного ($n > 3$) фазового пространства.

Объем странного аттрактора в исходном фазовом пространстве всегда равен нулю. Но он будет ненулевым в другом пространстве — меньшей размерности. Последнее определяется следующим образом. Разобьем все n -мерное пространство на малые кубики с длиной ребра ϵ и объемом ϵ^n . Пусть $N(\epsilon)$ — минимальное число кубиков, совокупность которых полностью покрывает аттрактор. Определим размерность D аттрактора как предел

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (3.4)$$

Существование предела (3.4) означает конечность объема аттрактора в D -мерном пространстве: при малом ϵ имеем $N(\epsilon) \approx V\epsilon^{-D}$ (где V — постоянная), откуда видно, что $N(\epsilon)$ можно рассматривать как число D -мерных кубиков, покрывающих в D -мерном пространстве объем V . Определенная согласно (3.4) размерность не может, очевидно, превышать полную размерность n фазового пространства, но может быть меньше ее и, в отличие от привычной размерности, может быть дробной; именно такова она для канторовых множеств ⁽⁵⁾.

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Для установившегося движения на аттракторе диссипация энергии в среднем компенсируется энергией, поступающей от источника неравновесности системы. Следовательно, если следить за эволюцией во времени принадлежащего аттрактору элемента «объема» (в некотором пространстве, размерность которого определяется размерностью аттрактора), то этот объем в среднем будет сохраняться — его сжатие в одних направлениях будет компенсироваться растяжением за счет расходимости близких траекторий в других направлениях. Этим свойством можно воспользоваться, чтобы получить иным способом оценку размерности аттрактора.

Для аттракторов, обладающих свойством эргодичности движения, их средние характеристики могут быть установлены путем анализа движения уже вдоль одной принадлежащей аттрактору неустойчивой траектории. Индивидуальная траектория воспроизводит все свойства аттрактора, если двигаться по ней бесконечно долгое время.

Пусть $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)$ — уравнение такой траектории, одно из решений исходных нелинейных уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}). \quad (3.5)$$

Рассмотрим деформацию «сферического» элемента объема при его перемещении вдоль этой траектории. Такая деформация определяется уравнениями (3.5), линеаризованными по разности $\xi=\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_0(t)$ — отклонению траекторий, соседних с данной. Эти уравнения, написанные в компонентах, имеют вид

$$\dot{\xi}_i = A_{ik}(t) \xi_k, \quad A_{ik}(t) = \left. \frac{\partial F_i}{\partial X_k} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)}. \quad (3.6)$$

При сдвиге вдоль траектории элемент объема в одних направлениях сжимается, в других растягивается, и сфера превращается в эллипсоид. По мере движения вдоль траектории как направления полуосей эллипсоида, так и их длины меняются: обозначим последние посредством $l_j(t)$, где j нумерует направления. Ляпуновскими характеристическими показателями называют предельные значения

$$\Lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \frac{\ln l_j(t)}{\ln l(0)} \right), \quad (3.7)$$

где $l(0)$ — радиус исходной сферы (в момент времени, условно выбранный как $t=0$). Определенные таким образом величины — вещественные числа, их число равно размерности n -пространства. Одно из этих чисел (отвечающее направлению вдоль самой траектории) равно нулю⁽⁶⁾.

Сумма ляпуновских показателей определяет среднее вдоль траектории изменение элементарного объема в фазовом пространстве. Местное изменение объема в каждой из точек траектории дается дивергенцией $\text{div} \mathbf{X} = \text{div} \xi = A_{ii}(t)$. Можно показать, что среднее вдоль траектории значение дивергенции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \text{div} \xi \, dt \right) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j. \quad (3.8)$$

Для диссипативной системы эта сумма всегда отрицательна — произвольные объемы в n -мерном фазовом пространстве сжимаются. Расположим ляпуновские показатели в порядке $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_k \geq 0 \geq \Lambda_{k+1} \geq \dots \geq \Lambda_n$ и учтем столько устойчивых направлений, сколько надо для компенсации растяжения сжатием. Если бы полученная при

этом сумма $\sum_{j=1}^m \Lambda_j$ точно равнялась нулю, то целая величина m и была бы определенной через ляпуновские показатели размерностью аттрактора. Однако сумма целого числа показателей обычно не равна нулю, и для удовлетворения требования «о сохранении фазового объема на аттракторе» мы должны учесть некоторую долю следующего $m+1$ «сжимающего» показателя. Таким образом, размерность аттрактора будет лежать между $m+1$ и m , где m — число показателей в указанной последовательности, сумма которых еще положительна, но после прибавления Λ_{m+1} становится отрицательной ⁽⁷⁾. Дробная часть $d < 1$ размерности $D_A = m + d$ находится из равенства [133]

$$\sum_{j=1}^m \Lambda_j + d\Lambda_{m+1} = 0. \quad (3.9)$$

Поскольку при вычислении d учитываются лишь наименее устойчивые направления (отбрасываются наибольшие по абсолютной величине, отвечающие быстрым движениям, отрицательные показатели Λ_j , в конце их последовательности), то даваемая величиной D_A оценка размерности есть, вообще говоря, оценка сверху.

3.2. РАЗМЕРНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ. Размерностные характеристики стохастического движения чрезвычайно важны с различных точек зрения. С одной стороны, они позволяют приблизиться к пониманию сути случайного, с другой, весьма полезны для сугубо прикладных задач, связанных с обработкой сигналов (их кодированием, распознаванием и т. д.). Действительно, с помощью традиционного анализа случайного сигнала (спектрального, корреляционного) обычно трудно что-либо сказать об источнике, его породившем. В частности, является ли сигнал шумовым в обычном смысле (т. е. невозпроизводимым с помощью алгоритма) или этот сигнал — продукт деятельности некоторой детерминированной системы, хотя бы и весьма сложной? Если же каким-то образом определить размерность этого сигнала (см. ниже), то проблему удастся решить. Конечная размерность D_A означает, что данный сигнал в принципе можно воссоздать с помощью динамической системы порядка, не более высокого, чем $2D_A + 1$ (см. [134]). Таким образом, значение размерности D_A дает оценку числа степеней свободы системы (среды), занятых в формировании рассматриваемого стохастического сигнала. По мере возрастания размерности реализации (стремления к бесконечности) хаотический сигнал все более приближается к абсолютно случайному. С этой точки зрения источник, который мы привыкли считать случайным, можно рассматривать как движение динамической системы на странном аттракторе бесконечной размерности.

Идеи обработки случайных сигналов с целью реконструкции свойств порождающих их источников были высказаны сравнительно недавно Такенсом [135]. Они основываются на точке зрения, что если хаотический сигнал генерируется конечномерной динамической системой, то возможно вначале восстановление соответствующего предельного множества (в частности, странного аттрактора) в некотором эффективном фазовом пространстве, а затем определение на этом множестве таких характеристик движения, как энтропия и размерность. Принципиальный шаг в развитии этих идей и их практическом воплощении был сделан в 1983 г. Грассбергером и Прокаччиа [136]. Было предложено вообще не рассматривать предельные множества в фазовом пространстве, а всю диагностику строить лишь на обработке конкретной (достаточно длинной) временной реализации исследуемой физической величины.

Обычно мы имеем единственную наблюдаемую, например, одну компоненту поля скорости гидродинамического течения, измеряемую как функцию времени в одной точке. Поскольку размерность эффективного фазового пространства, в которое вложено соответствующее данной реализации стохастическое множество, имеет размерность M' необходимо иметь M' независимых функций времени $u^{(k)}(t)$. По предложению Такенса они получаются следующим образом: наблюдаемая рассматривается в дискретные моменты времени $1, t+\tau, \dots, t+k\tau, \dots, t+(M'-1)\tau$, эти значения $u^{(k)}(t)$ описывают координату точки в M' -мерном пространстве, соответствующую моменту t . При изменении t мы получим в этом пространстве траекторию, воспроизводящую некоторое множество. По формулам (3.4) или (3.9) можно вычислить размерность D этого множества. Следующий шаг заключается в анализе зависимости D от M' . Очевидно, что при малых M' с ростом M' размерность $D(M')$ также должна увеличиваться. Если сигнал шумовой, то это будет рост без насыщения. Если же сигнал продуцируется динамической системой, то при некотором $M'=M$ рост прекратится — величина $D(M)$ и есть размерность реконструированного таким образом предельного множества, в частности, странного аттрактора. Заметим, что по формулам (3.4) или (3.9) вычислять размерность реконструированного аттрактора не очень удобно (не ясно, в частности, до каких пределов уменьшать ε). Как показали исследования последних лет [136—145], гораздо более эффективно использование корреляционного интеграла. Его приближенное выражение ⁽⁸⁾:

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(\varepsilon - \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N N_i(\varepsilon) = \frac{N(\varepsilon)}{N}; \quad (3.10)$$

здесь $\mathbf{u}_j = (u^{(1)}(j\tau); u^{(2)}(j\tau); \dots)$ — точка на траектории в M' -мерном пространстве, N — полное число точек в обрабатываемом временном отрезке наблюдаемой, H — функция Хевисайда, а $\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|$ — расстояние между соседней парой точек. Таким образом, корреляционный интеграл — это среднее число пар точек в реализации, расстояние между которыми в пространстве $\mathbf{u}_j$ меньше ε . При малых ε корреляционный интеграл зависит от ε степенным образом [142]:

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{\nu} e^{-KM'\tau} \quad (3.11)$$

(K — энтропия Колмогорова). Согласно (3.10) и (3.11) можно ввести корреляционную размерность ν :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\nu + \frac{\ln N - KM'\tau}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \equiv \nu. \quad (3.12)$$

При реальной обработке экспериментальных данных размерность обычно вычисляют приближенно — непосредственно по наклону зависимости $\ln C$ от $\ln \varepsilon$. Эти зависимости для сигналов различного происхождения ведут себя по-разному, что и позволяет диагностировать сигналы неизвестной природы и, в некоторых случаях, отделять динамическую (т. е. имеющую конечную размерность) компоненту сигнала от шумовой.

При попытке определить наклон кривой — графика $\ln C = f(\ln \varepsilon)$ — практически для любой конкретной ситуации мы сразу сталкиваемся с неожиданностью: график имеет разные наклоны для разных интервалов ε (рис. 14). Какой из наклонов считать «истинной» размерностью? Прежде чем ответить на этот вопрос, задумаемся о причинах изломов на нашем графике. Сразу можно сказать, что они могут быть «аппаратными», т. е. вызванными техническими особенностями обработки реализации (например, ее недостаточной временной длительностью), либо

принципиальными, обусловленными особенностями динамики системы, породившей данную реализацию.

Если, например, аттрактор в эффективном фазовом пространстве неоднороден (один из его участков чаще посещается изображающей точкой, а другие—реже), то значение ν при разных ε будет разным ⁽⁹⁾.

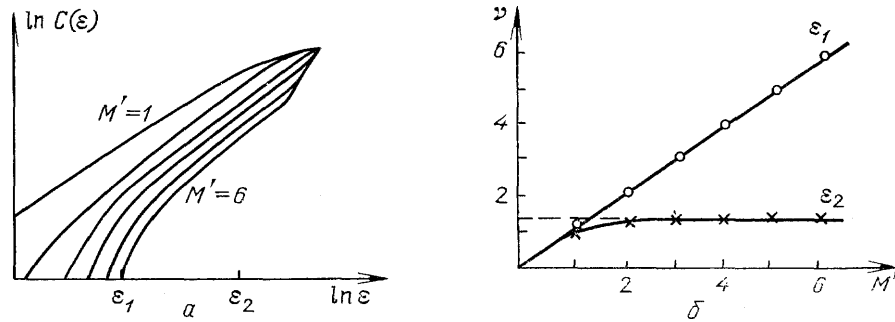


Рис. 14. Корреляционный интеграл (а) и локальный наклон $d \ln C / d \ln \varepsilon$ (б) при различных ε для отображения Эно с шумом

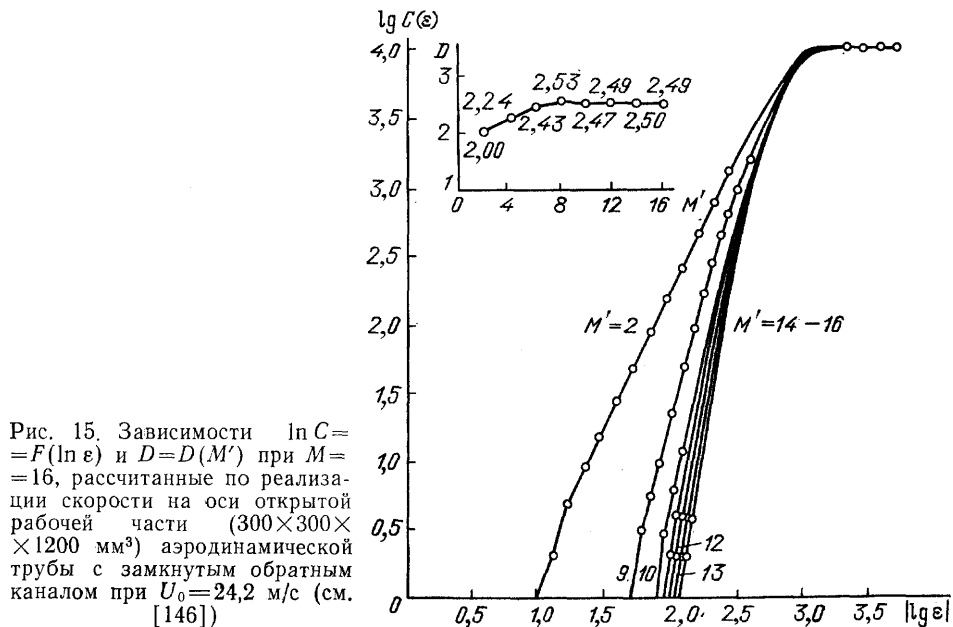
Однако при достаточно большом N плотность точек на аттракторе будет действительно отражать его структуру. Таким образом, «неоднородность» аттрактора приводит к аппаратным, в принципе, устранимым изломам. Подчеркнем здесь, что необходимая длина реализации связана с измеряемой размерностью. Чем больше размерность, тем большую длину реализации нужно иметь, чтобы обеспечить достаточное заполнение аттрактора точками. Известна [143] эмпирическая оценка — $\ln N \sim \nu(\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})$, где $(\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min})$ — интервал ε , на котором $C \sim \varepsilon^\nu$ (см. (3.11)).

Существенные изломы в корреляционном интеграле чаще всего обусловлены «структурированностью» наблюдаемой, т. е. наличием в сигнале компонент с разной размерностью. Эти компоненты, соответственно, порождаются разными системами, в том числе и шумовыми (например, зашумленным каналом связи). В простейшем случае структурированный сигнал $u(t) = v_0(t) + \delta_1 v_1(t) + \dots + \delta_k v_k(t)$, где $v_k(t)$ генерируется динамической системой, размерность аттрактора которой равна ν_i причем $1 > \delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_k$, $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_k$. Тогда при последовательном уменьшении ε в корреляционном интеграле будут проявляться составляющие с все меньшими амплитудами δ_i , и мы, таким образом обнаружим на графике интервалы $(\varepsilon'_i, \varepsilon''_i)$, тангенс угла наклона которых будет $\sim \nu_i$. Число изломов $(k-1)$ для подобного сигнала естественно назвать степенью структурированности. Подчеркнем, что увеличение длины реализации не уничтожает такие изломы, а, наоборот, делает их более отчетливыми.

Поскольку любая наблюдаемая, отвечающая реальному процессу, содержит в себе шум, продуцирующая в точности эту наблюдаемую динамическая система должна быть бесконечномерной. Если отношение сигнал/шум не слишком мало, корреляционный интеграл для реального сигнала обязательно будет иметь излом, отделяющий масштаб динамической составляющей от малых масштабов ε , где размерность не определена из-за шума. Это позволяет, анализируя локальные наклоны графика $\ln C = f(\ln \varepsilon)$, отделить хаотический сигнал динамического происхождения от аддитивного белого шума. Иллюстрирующий этот алгоритм пример представлен на рис. 14, где приведены корреляционный интеграл и локальные наклоны для различных ε для отображения Эно с шумом.

3.3. Размерность потока. Пространственное развитие турбулентности. Эксперименты с внутренними течениями [18, 144, 145] не только подтвердили представления о том, что хаотическое во времени поле скорости в течении вязкой жидкости при $t \rightarrow \infty$ можно описать конечным (малым) числом пространственных функций, но и позволили определить скорость роста размерности турбулентного движения (числа эффективных возбуждений) от надкритичности непосредственно за точкой возникновения турбулентности [145]. Более того, было установлено [146—148], что и в открытых течениях типа сдвиговых слоев и струй, при наличии обратной связи, осуществляющей передачу возмущений вверх по потоку, также имеются хаотические пульсации скорости, соответствующие движению на аттракторе с малой размерностью.

На рис. 15 приведены значения размерности D , измеренные по сигналу с однопроводного датчика термоанемометра на оси струи в открытой рабочей части аэродинамической трубы при числах Рейнольдса



$Re \sim 10^5$ (см. [146]). Обратная связь в исследуемом течении возникала за счет акустического поля, возбуждавшегося струей в обратном канале трубы. Из-за наличия сравнительно сильной обратной связи основной вклад в пульсации скорости давали возбуждения, охваченные глобальной обратной связью, и поэтому размерность практически не изменялась на всей длине струи (длина открытой рабочей части $L = 1200$ мм, начальное сечение струи 300×300 мм²).

Если динамическая теория, действительно, применима для описания реально текущей жидкости, то она должна описывать феномен возникновения и пространственного развития «неупорядоченности» вниз по течению. Очевидно, это наиболее принципиально для сдвиговых течений (пограничные слои, затопленные струи, следы и т. д.). Каким образом происходит самозарождение динамического хаоса вдоль потока? Подобны ли сценарии его появления сценариям, обнаруживаемым в простых системах при изменении управляющего параметра, и какова при этом роль структур в потоке? На эти вопросы мы и попытаемся дать ответ.

Для адекватного описания неоднородных течений введем понятие размерности потока — размерности временной реализации как функции пространственных координат. Предположим, что измеряемая датчиком временная реализация поля $u(x, t)$ в каждой точке вдоль течения продуцируется динамической системой, движение которой в M' -мерном фазовом пространстве описывается траекторией $U(x, t) = \{u(x, t), u(x, t+\tau), \dots, u(x, t+(M'-1)\tau)\}$. Для вычисления размерности воспользуемся корреляционным интегралом (аналогично см, (3.10)):

$$C(x, \varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(\varepsilon - \|U_i(x) - U_j(x)\|). \quad (3.13)$$

В конечном интервале $\varepsilon \in [\varepsilon'_i, \varepsilon''_i]$ корреляционный интеграл аппроксимируется выражением

$$C(x, \varepsilon) \sim \varepsilon^{v_i(x)}. \quad (3.14)$$

Функции $v_i(x)$ и есть интересующие нас размерности потока. Конструктивность этих характеристик подтверждается прямыми экспериментами.

В группе экспериментов [149–151] исследовалось развитие турбулентности и изменение размерности вдоль потока, возбужденного на границе регулярными пульсациями. Было установлено, что как в цилиндрической струе с параболическим начальным профилем [149] ($Re_d = 500$), так и в пограничном слое [150, 151] ($Re_x = 10^5$) переходу к турбулентности предшествует развитие когерентных структур и возникновение маломерного хаоса. Как в том, так и другом случае наличие упорядоченных структур коррелировало с низкой измеренной размерностью реализации сигнала скорости.

Отметим, что для потоковых систем, в частности, пограничного слоя, интерпретация размерности реализации отличается от традиционной. Дело в том, что в таких системах зачастую развитие возмущений определяется не только абсолютной, но и конвективной (или только ею) неустойчивостью, а формирующиеся при этом структуры сносятся вниз по течению. Для восстановления «собственной» динамики таких структур требуется реализация, полученная в движущейся системе координат [152], измерения в которой не всегда осуществимы на практике. В то же время результаты измерений размерности в неподвижной системе координат при наличии среднего потока неизбежно зависят от свойств набегающего потока, размерность пульсации в котором определяется его предысторией и может быть слишком большой. Однако наличие во многих течениях квазиупорядоченных повторяющихся структур свидетельствует о том, что в их формировании участвуют не все возмущения набегающего потока (см., например, [148]), а их вклад зависит от расстояния вниз по течению — в общем случае нетривиальным образом (ср. кривые 1 и 2 на рис. 16). Благодаря последовательному (вниз по потоку) развитию новых неустойчивостей на фоне нелинейных структур в нем нарастают новые возбуждения (в том числе и те, которые на начальном участке затухали) и в результате перестроек (бифуркаций) течения вдоль x возникает турбулентность. Поскольку размерность рассчитывается по реализации, измеренной с конечной точностью (или специально огрубленной, как при получении кривой 2 на рис. 16), то она учитывает лишь возбуждения, дающие наибольший вклад в суммарный сигнал, и может оказаться конечной. В этой ситуации и представляется естественным использование размерности $v(x)$ (или функции размерности $v(x, \varepsilon)$; см. [87]) в качестве одной из характеристик, описывающих пространственное развитие течения. Она не является универсальной в том смысле, что характеризует данное конкретное течение и становится

универсальной для однотипных течений, преобладающим фактором в развитии которых являются абсолютные неустойчивости. Именно для таких течений и представляет наибольший интерес построение общих моделей и исследование их скейлинговых свойств.

Детальное измерение зависимости размерности от координаты вдоль потока выполнено в случае пограничного слоя [150, 151]. В этих измерениях корреляционный интеграл на конечных интервалах $\varepsilon \in [\varepsilon'_i, \varepsilon''_i]$, соответствующих разным масштабам в фазовом пространстве, аппроксимировался степенной функцией (3.14), а размерность оценивалась непосредственно по зависимости $d \ln C/d \ln \varepsilon$.

Измеренная величина размерности зависит от исследуемого диапазона $[\varepsilon'_i, \varepsilon''_i]$ пульсации скорости. Их изменения, которые существенно меньше, чем ε_i , не вносят вклад в рассчитанные значения v_i . Наличие такой дифференцированности вкладов различных масштабов $u(t)$ позволяет оценить число мод или, при наличии дополнительной информации, даже идентифицировать эти моды, что существенно для построения динамической модели развития течения вниз по потоку.

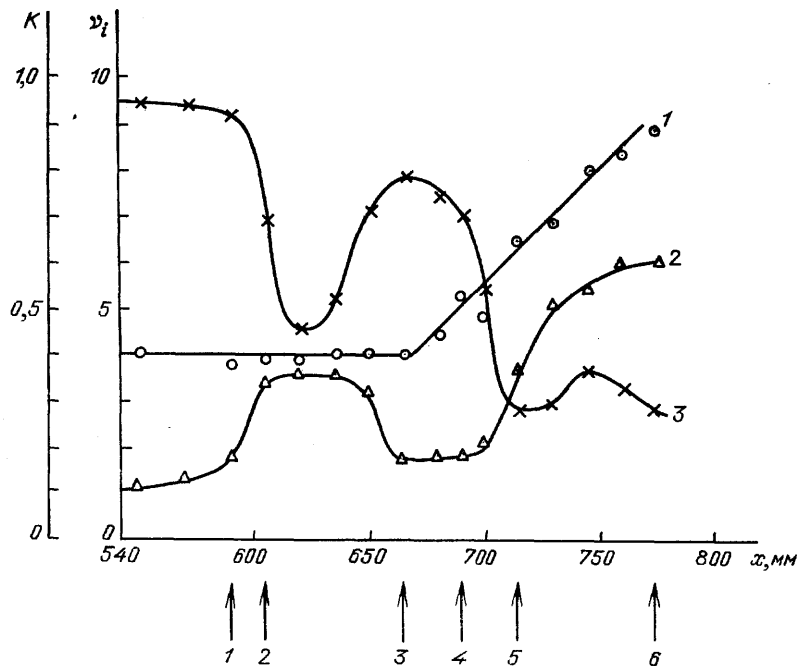


Рис. 16. Изменение характеристик реализации $u(t)$ вдоль потока в пограничном слое. 1 — корреляционная размерность $v_1(x)$, рассчитанная по малым масштабам в фазовом пространстве динамической системы при $M'=12$; 2 — то же при больших масштабах — $v_2(x)$; 3 — коэффициент взаимной корреляции K сигнала $u(t)$ и сигнала, подаваемого на вибрирующую ленту. (Скорость потока $U_0 = 9,18$ м/с, расстояние от датчика термоанемометра до поверхности пластины 3 мм (см. [150]))

На рис. 16 приведены зависимости измеренной размерности реализации от продольной координаты для двух интервалов $[\varepsilon'_i, \varepsilon''_i]$, простирающихся на ≈ 10 дБ каждый и разделенных между собой примерно таким же интервалом. На основе анализа этих зависимостей и спектров (рис. 17) было установлено, что в обсуждаемом эксперименте реализацию на начальном участке пластины $x \leq 590$ мм (даже при учете «тонких» измерений реализации — кривая 1 на рис. 16) можно представить как результат возбуждения четырех мод: генерируемых лентой на частоте внешнего воздействия (≈ 87 Гц), на частоте наводки (50 Гц), на частоте собственных колебаний ленты в потоке (≈ 60 Гц), и моды, возбуждаемой вибрациями пластины (≈ 3 Гц). Эти моды фактически независимы. Большие же изменения скорости связаны лишь с одной модой, возбуждающейся на частоте воздействия; как видно из рис. 16 (см. кривую 2), при $x < 590$ мм $v_2=1$.

В области $590 \text{ мм} < x < 665 \text{ мм}$ даже при грубой аппроксимации $u(t)$ требуется учет всех четырех мод ($v_2=4$). Однако ниже по течению ($x \approx 665$ мм) в области образования на осциллограммах «шипов», характерных для катастрофического (клебанов-

ского) типа перехода к турбулентности, размерность при той же аппроксимации реализации уменьшается до двух. При этом, как следует из данных измерений, кросс-корреляции сигнала, подаваемого на ленту, и сигнала с термоанемометра (кривая 3 на рис. 16) основной вклад в формирование шипов дают волны Толлмина — Шлихтинга на частоте воздействия 87 Гц и ее сфазированные гармоники.

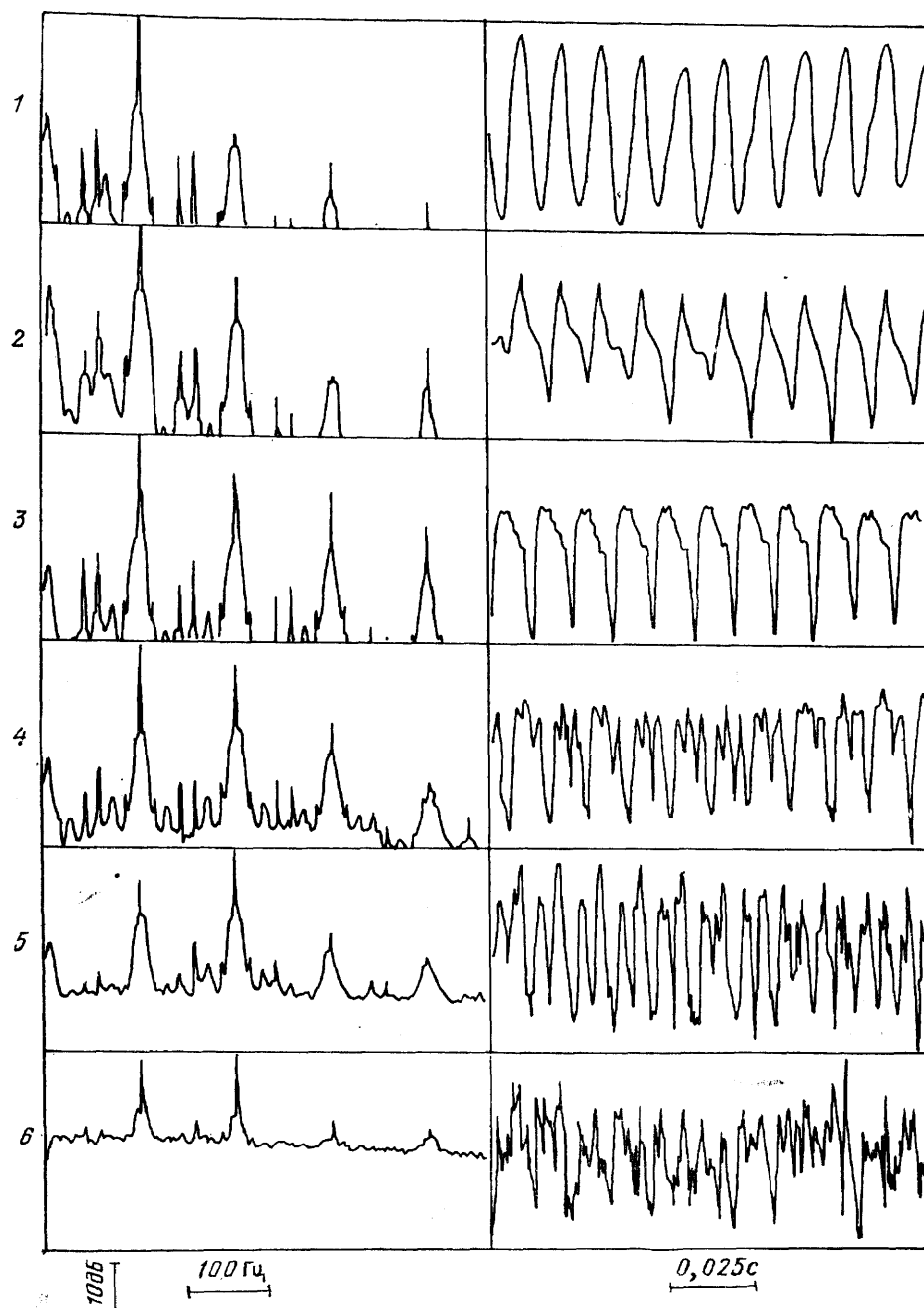


Рис. 17. Спектры и реализации сигнала $u(t)$ в точках x , указанных на рис. 16

Как известно (см., например, [153]), сильные отрицательные выбросы на осциллограммах скорости («шипы») свидетельствуют о локальном торможении жидкости и образовании в профиле скорости точки перегиба, следствием чего является возникновение вторичной неустойчивости. Положение вдоль потока ($x \approx 665$ мм), где в результате развития этой неустойчивости возбуждаются новые моды в течении, определяется изменением в ходе зависимости $v(x)$. Еще ниже по течению ($x > 700$) эти моды ста-

новятся определяющими в формировании пульсации с большими амплитудами и хаотизации всех масштабов. Примечательно, что именно при этом значении координаты $x \approx 700$ мм, как следует из визуальных наблюдений течения, в пограничном слое происходит разрушение двумерных структур и формирование трехмерных.

3.4. ЗАРОЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТРУКТУРИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ. Скейлинг. Одним из наиболее важных результатов в теории конечномерной динамической турбулентности явилось обнаружение универсальности в основных сценариях перехода «порядок — хаос». Эти универсальные свойства определяются типом динамической системы (свойствами течения) и не зависят от ее деталей, аналогично тому, как свойства перехода в критических явлениях не зависят от конкретного вида гамильтониана микромасштабных движений. Природа такой универсальности связана именно с близостью демонстрирующих ее систем к критической точке. Действительно, рассмотрим поведение системы при близких значениях параметра $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_{cr} - \mu$ и $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_{cr} + \mu$ ($\mu \ll \varepsilon$). Ввиду непрерывной зависимости от параметра соответствующие этим ситуациям уравнения будут совпадать с точностью до поправок $\sim \mu$ в правых частях. При одинаковых начальных условиях поведение системы при $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ будет различимо только через очень большое время T , причем $T \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow 0$. Величина T и есть характерный временной масштаб, на котором проявляется различие между регулярной динамикой при $\varepsilon = \varepsilon_{cr} - \mu$ и хаотической динамикой при $\varepsilon = \varepsilon_{cr} + \mu$. Это время (при $\mu \rightarrow 0$) может сколь угодно превышать все характерные времена нашей динамической системы. Именно поэтому естественно ожидать, что с точки зрения перехода к хаосу локальные во времени детали поведения конкретной системы малосущественны. Таким образом, закономерности перехода к хаосу вблизи критической точки должны быть универсальны. Из этой универсальности, в частности, следует, что для описания основных типов критического поведения можно использовать наиболее простые модели, демонстрирующие основные пути перехода к хаосу. В рамках этих моделей удается получить количественные характеристики универсального поведения — константы подобия⁽¹⁰⁾ и критические индексы. В такой ситуации весьма эффективными оказались идеи метода ренормгруппы, развитые в теории критических явлений и теории поля, и впервые примененные Фейгенбаумом [154] при исследовании перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения (см. также [155]). В дальнейшем метод ренормгруппы был использован для исследования скейлинговых свойств перехода к турбулентности через перемежаемость [156] и через разрушение квазипериодических движений [157, 158]. Здесь фундаментальную роль играет наибольший показатель Ляпунова. Его изменения демонстрируют универсальные свойства, аналогичные свойствам параметра порядка вблизи критической точки, — он равен нулю ниже порога перехода к хаосу и зависит степенным образом от критического параметра выше порога.

Наиболее сложными и пока наименее исследованными являются скейлинговые свойства перехода к турбулентности, развивающейся в пространстве в таких течениях, как, например, струи, сдвиговые слои, течения за плохо обтекаемыми телами и т. п. Хотя обнаружение в этих течениях квазикогерентных структур указывает на принципиальную возможность построения моделей в виде ансамбля структур со сравнительно простой (маломерной) динамикой, информации об их свойствах пока недостаточно для проведения конкретного анализа. Поэтому исследования скейлинговых свойств переходов в пространстве пока ограничены лишь теми моделями, которые в однородном приближении демонстрируют те же свойства критического поведения, что и маломерные динамические системы. В частности, для двух типов критического

поведения проведено ренормгрупповое описание пространственного развития турбулентности в потоковых системах и построена теория перехода через перемежаемость в пространственно-однородных изотропных ансамблях структур [87, 159].

При построении динамической модели пространственного развития турбулентности будем иметь в виду, что в результате развития первичных неустойчивостей в среде с потоком сформировались структуры, аналогичные представленным на рис. 7—9, коллективная динамика возбуждений которых и приводит в дальнейшем к возникновению пространственно-временного беспорядка — турбулентности. В простейшей постановке, обсуждавшейся в п. 2.7, для описания одномерной цепочки структур воспользуемся системой уравнений (2.14), полагая $\xi=0$ (т. е. считая пространственную зависимость возбуждения на структуре заданной):

$$\frac{dA_j}{dt} = \Phi(A_j, \varepsilon) + \gamma(A_j - A_{j-1}) + \kappa(A_{j+1} + A_{j-1} - 2A_j); \quad (3.15)$$

здесь $\Phi(A_j, \varepsilon)$ характеризует динамику возбуждения на элементарной структуре; γ определяет воздействие одного элемента на другой вниз по потоку; от κ зависит обратная связь вверх по течению. Уравнение (3.15) дополняется граничными условиями, например, $A_0(t) = A \exp(i\omega t) + \text{к. с.}$ — это соответствует периодическому во времени возбуждению потока.

При пренебрежении диффузией ($\kappa=0$) проблема рождения пространственно-временного хаоса вдоль потока сводится к проблеме возникновения странного аттрактора в цепочке последовательно воздействующих друг на друга элементов с регулярной индивидуальной динамикой. Характерным для такого «дискретного потока» является существование пространственно-неоднородных стационарных решений $A_j(t) = \bar{A}_j$, определяемых соотношением $\bar{A}_{j-1} = (\Phi(\bar{A}_j, \varepsilon) + \gamma\bar{A}_j) / \gamma$. Если такое пространственное распределение устойчиво, то хаос вдоль потока не возникает — движение остается ламинарным. Если же при некотором $j=j^*$ решение становится неустойчивым, то при $j > j^*$ устанавливается более сложное движение (в общем случае характеризующееся большей размерностью). Это движение, например, квазипериодическое, может стать неустойчивым при $j=j^{**}$ и, таким образом, движение может усложняться вдоль потока, пока при некотором j_{cr} не возникнет хаос. Более строго это означает, что в фазовом пространстве системы из $j=j_{\text{cr}}$ динамических элементов (при исследуемых граничных условиях) существует притягивающее предельное множество — странный аттрактор. Параметром, управляющим переходом к динамическому хаосу вдоль цепочки, в данной теории являются значения, определяющие неоднородное пространственное распределение поля. В задачу об определении ляпуновских характеристических показателей вдоль j этот параметр в типичных ситуациях входит подобно управляющему параметру ε . Отсюда естественно следует гипотеза о подобии между сценариями перехода к хаосу в точечной системе при изменении ε и разворачивающимся в пространстве (вдоль j) сценарием зарождения динамической турбулентности в потоковой системе.

Для исследования процессов возникновения и развития хаоса вниз по потоку — определения числа пространственных бифуркаций, нахождения соответствующих им законов подобия и т. д., предельно упростим задачу, полагая, что структуры не сносятся потоком. Подобная ситуация встречается довольно часто, например, в гидродинамике — пограничные слои на вращающихся и гофрированных поверхностях, течения над углублениями и т. п. При анализе взаимодействия «закрепленных» структур, обтекаемых потоком, пренебречь обратной связью «вверх по

потоку», т. е. в (3.15) положить $\varkappa=0$ и строго поставить задачу о возникновении странного аттрактора вдоль j .

Рассмотрим случай, когда развитие хаоса вдоль цепочки происходит через последовательность удвоений периода. Имея в виду, что динамика индивидуальных элементов может быть описана и с помощью отображений помимо (3.15), при $\varkappa=0$ будем пользоваться системой

$$A_j(n+1) = f_0(A_j(n), \varepsilon) + \gamma_1(A_j(n) - A_{j-1}(n)) + \gamma_2(A_j^2(n) - A_{j-1}^2(n)) \quad (3.16)$$

при граничных условиях $A_0(n)=A_0$; здесь γ_1 ответственно за «инерционную» связь, а γ_2 — за «диссипативную». Конкретизируя вид функций $f_0(A_j, \varepsilon)$, мы сможем рассмотреть переходы в цепочках с различной динамикой индивидуальных элементов.

Полагая $f_0(A_j, \varepsilon) = \varepsilon - A_j^2(n)$, запишем уравнение (3.16) в более общем виде

$$A_j(n+1) = f_0(A_j(n)) + \gamma\varphi_0(A_j(n), A_{j-1}(n)) = F_0(A_j(n), A_{j-1}(n)). \quad (3.17)$$

Связь будем считать слабой — $|\gamma| \ll 1$, а относительно $\varphi(A_j, A_{j-1})$ положим $\varphi_0(u, u) = \varphi_0(0, 0) = 0$. Ввиду тождественности элементов слабость связи гарантирует плавную зависимость стационарного режима от координаты j в интервале от одной пространственной бифуркации до другой. Поскольку мы задали тип критического поведения — удвоение периода, нас будет интересовать развитие хаоса вдоль по цепочке из исходного 2^N -периодического режима. Такое развитие хаоса через последовательность удвоений периода осуществляется, когда на всех элементах $\varepsilon - \varepsilon_{cr} > 0$ ⁽¹¹⁾, в то время как на первом — $\varepsilon(1-\gamma) < \varepsilon_{cr}$ (считаем для определенности $A_0=0$). При этом в начале цепочки реализуется устойчивый 2^N -периодический режим, который по мере увеличения j трансформируется в хаотический.

Для построения уравнения ренормгруппы подвергнем (3.16) масштабному преобразованию (преобразованию удвоения): выразим переменные через две единицы дискретного времени — $(A_j(n+2))$ через $A_j(n)$ и выполним замену $A_j \rightarrow A_j/a$. Применяя эту процедуру N раз, получаем уравнение ренормгруппы (РГ)

$$A_j(n+2^N) = F_N(A_j(n), A_{j-1}(n)) = f_N(A_j(n)) + \gamma\varphi_N(A_j(n), A_{j-1}(n)) + O(\gamma^2),$$

которое распадается на два

$$f_N(A_j(n)) = af_N f_N\left(\frac{A_j(n)}{a}\right), \quad (3.18)$$

$$\varphi_{N+1}(A_j, A_{j-1}) = af_N f_N\left(\frac{A_j}{a}\right) \varphi_N\left(\frac{A_j}{a}, \frac{A_{j-1}}{a}\right) + \varphi_N\left[f_N\left(\frac{A_j}{a}\right), f_N\left(\frac{A_{j-1}}{a}\right)\right].$$

Первое из уравнений (3.18) является частным случаем универсального операторного уравнения ренормгруппы

$$F_{N+1}U = S^{-1}F_N F_N S U, \quad (3.19)$$

в котором, однако, при переходе к отображению через две единицы времени масштабному преобразованию подвергаются не только функции (операторы), определяющие динамику индивидуального элемента, но и пространственные координаты ⁽¹²⁾. Здесь введены обозначения $S = S_1 S_2$, $S_1 U = U/a$; $S_2 U = U/b$. Переменная U в общем случае может быть вектором или матрицей. В уравнении (3.18) вследствие дискретности координаты j изменение пространственного масштаба достигается перенормировкой величины связи γ . Как будет далее показано, в длинноволновом пределе уравнение (3.18) дает те же законы подобия, что и (3.19).

Цель применения метода ренормгруппы в данном случае заключается в нахождении критических индексов и масштабных множителей, определяющих подобие пространственных бифуркаций при заданном типе критического поведения в окрестности критической точки. В то же время решение РГ уравнения, если и может быть найдено, то обычно лишь в самой критической точке

$$G\dot{U} = S' G G S U, \quad (3.20)$$

где оператор G инвариантен относительно действия ренормгруппы. Кроме того, для отыскания масштабных констант можно воспользоваться решениями линеаризованного вблизи неподвижной точки G уравнения ренормгруппы. В общем случае этого мало. Однако при некоторых ограничениях на структуру оператора F_N поставленная задача может быть решена. Для этого необходимо иметь возможность по «последующим», непосредственно примыкающим к неподвижной точке РГ итерациям действия F_N вычислить «предыдущие», все более удаленные итерации, и, таким образом, предсказы-

вать поведение системы при изменении параметра во все более расширяющейся окрестности критической точки.

Чтобы такое вычисление было возможно, неподвижная точка РГ уравнения должна иметь растягивающие, т. е. неустойчивые направления. Только вдоль таких направлений действие оператора F_N в узкой окрестности критической точки определяет поведение системы в более широкой окрестности. Подчеркнем при этом, что множество неустойчивых направлений в функциональном пространстве, где определен оператор F_N , не может быть непрерывным. В противном случае критическое поведение перестает быть универсальным — сколь угодно малые изменения затравочного оператора F_N приведут к совершенно иным законам подобия. Таким образом, неподвижная точка РГ уравнения, описывающего универсальное поведение в критической точке, должна быть седловой. Причем для определения законов подобия необходимо знать лишь те возмущения оператора F_N , которым соответствуют большие единицы собственные значения (мультипликаторы) линеаризованной задачи. В дальнейшем будем называть их существенными. Сами эти мультипликаторы и есть искомые постоянные, определяющие масштабное подобие при преобразованиях, которые задаются соответствующим этим мультипликаторам возмущающими операторами.

Воспользуемся этими соображениями при анализе РГ уравнения (3.18). Это уравнение имеет неподвижную точку

$$G = \begin{Bmatrix} f_N \\ \Phi_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

Здесь функция g совпадает с универсальной функцией Фейгенбаума (удвоения периода) [155], которая является решением функционального уравнения

$$g(U) = agg(U/a). \quad (3.22)$$

Исследуем РГ уравнение (3.18) в окрестности неподвижной точки (3.21). Представляя $F_N(A_j, A_{j-1})$ в виде

$$F_N(A_j, A_{j-1}) = g(A_j) + \mu [h_N(A_j) + \tilde{\varphi}_N(A_j, A_{j-1})], \quad (3.23)$$

для функций h_N и $\tilde{\varphi}_N$ в первом по μ приближении получаем

$$h_{N+1}(A_j) = ag'g\left(\frac{A_j}{a}\right) h_N\left(\frac{A_j}{a}\right) + h_N g\left(\frac{A_j}{a}\right); \quad (3.24)$$

$$\varphi_{N+1}(A_j, A_{j-1}) = ag'g\left(\frac{A_j}{a}\right) \tilde{\varphi}_N\left(\frac{A_j}{a}, \frac{A_{j-1}}{a}\right) + \tilde{\varphi}_N\left[g\left(\frac{A_j}{a}\right), g\left(\frac{A_{j-1}}{a}\right)\right]. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.24) есть просто линеаризованное в неподвижной точке $g(A)$ уравнение Фейгенбаума, и, следовательно, имеет единственное существенное собственное значение $\delta=4.669$, соответствующее собственной функции $h_0(A)=1+O(A^2)$. Уравнение же (3.25) совпадает с РГ уравнением, описывающим переход к хаосу в системе двух связанных параболических отображений [162]. Это уравнение, согласно [162], имеет два существенных собственных значения: $\nu_1=a=-2.5029\dots$ и $\nu_2=2$. Значение ν_1 соответствует собственной функции

$$\tilde{\varphi}_1(A_j, A_{j-1}) = (A_j - A_{j-1}) \Phi_1(A_j, A_{j-1}), \quad \Phi_1(A_j, A_{j-1}) \sim 1.$$

Этот тип возмущений можно интерпретировать как введение инерционной связи между точечными элементами. Значение $\nu_2=2$ соответствует собственной функции $\tilde{\varphi}_2(A_j, A_{j-1}) = (A_j^2 - A_{j-1}^2) \Phi_2(A_j, A_{j-1})$; $\Phi_2(A_j, A_{j-1}) \sim 1$, которая ответственна за введение диссипативной связи.

При учете тех собственных функций, которые соответствуют лишь существенным собственным значениям, уравнение (3.17) потоковой системы запишется в универсальном виде:

$$\begin{aligned} A_j(n+2^N) = & g(A_j(n)) + \mu \delta^N h_0(A_j(n)) + \\ & + \gamma c_1(A_j(n) - A_{j-1}(n)) \Phi_1(A_j(n), A_{j-1}(n)) + \\ & + \gamma c_2(A_j^2(n) - A_{j-1}^2(n)) \Phi_2(A_j(n), A_{j-1}(n)), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где c_1, c_2 — постоянные, определяющие величины инерционной и диссипативной связи соответственно. Непосредственно из вида полученных уравнений следует, что в окрестности критической точки действие преобразования РГ сводится к увеличению параметра надкритичности μ в $\delta = 4,669\dots$ раз, величины инерционной связи в γ раз и диссипативной — вдвое. Для системы (3.17) этот результат приближенно был впервые получен в [163].

Особенностью рассмотренных в этом разделе систем является однонаправленная связь между элементами. В подобных системах существуют сильно неоднородные стационарные режимы (например, с границей 2^N -цикл — хаос). Процедура РГ формально применима и к таким решениям, так как в отличие от [164] здесь пространственная однородность решения в критической точке не принципиальна. Это нетривиальное обстоятельство позволяет получать из (3.25) законы подобия для характеристик этих режимов, в частности:

1. Закон подобия для периода цикла $T(\mu, \gamma)$ в элементе, после которого возникает хаос. Поскольку под действием преобразования РГ временной масштаб и величина связи γ изменяются вдвое ($c_1=0$), а параметр надкритичности μ — в δ раз, то для величины $T(\mu, \gamma)$ имеем следующий закон подобия: $T(\mu, \gamma) \sim \gamma^{-1} \tilde{f}_0(\mu/\gamma^\alpha)$, $\alpha = \ln \delta / \ln 2$.

2. Законы подобия для числа пространственных бифуркаций и номера j^* , с которого возникает хаос. Поскольку под действием преобразования РГ обе эти величины не изменяются, то для них должны выполняться следующие законы подобия:

$N_k(\mu, \gamma) \sim \tilde{f}_1(\mu/\gamma^\alpha)$, $j^*(\mu, \gamma) \sim \tilde{f}_2(\mu/\gamma^\alpha)$, где $\tilde{f}_{0,1,2}$ — некоторые функции.

3.5. Влияние внешних сосредоточенных воздействий на динамику структур. Переходы порядок—хаос. Близкий к пространственно-однородному хаотический режим, устанавливающийся в потоковой системе из последовательно связанных структур при достаточно больших j , может оказаться неустойчивым по отношению к синхронизирующему воздействию внешнего периодического поля, подаваемого на границу системы. Покажем это на примере однонаправленной цепочки, описываемой уравнениями (3.15) при $\Phi(A, \varepsilon) = A - (1 + i\beta)|A|^2 A$ и $\kappa = 0$:

$$\frac{dA_j}{dt} = [1 - (1 + i\beta)|A|^2] A_j + \gamma(A_j - A_{j-1}). \quad (3.27)$$

В отсутствие синхронизирующего воздействия в такой цепочке происходит [163, 165, 166] стабилизация турбулентности — установление вдоль цепочки пространственно-однородного хаотического режима, у которого размерность, энтропия и другие средние характеристики при $j > \bar{j}$ перестают зависеть от j .

Пусть теперь на вход цепочки подано синхронизирующее воздействие

$$A_0(t) = A_B e^{i\omega_B t}. \quad (3.28)$$

Наиболее чувствительной к синхронизации цепочка должна быть на частоте ω_B , близкой к парциальным частотам ω_n составляющих ее элементов, т. е. (при учете комплексной связи γ) на частоте $\omega_B \approx \omega_n = \beta(1 - \operatorname{Re} \gamma) + \operatorname{Im} \gamma \operatorname{Re}$. Интенсивность $I_j = |A|^2$ в стационарном пространственно-однородном режиме синхронизации описывается отображением

$$I_j(1 - I_j)^2 = \frac{|\gamma|^2}{1 + \beta^2} I_{j-1}, \quad I_0 = A_B^2. \quad (3.29)$$

Это отображение при любых значениях параметров β и γ имеет устойчивую неподвижную точку $I_1^0 = 1 + |\gamma|(1 + \beta^2)^{-1/2}$, и при произвольной амплитуде внешнего поля существует траектория отображения, целиком располагающаяся в области устойчивости. Более того, режим

полной синхронизации — (3.29) оказывается и глобально устойчивым, т. е. в бесконечномерном фазовом пространстве системы (3.27), (3.28) при $\omega_b = \omega_n$ не существует никаких других притягивающих множеств [166].

Время установления режима синхронизации, однако, может оказаться весьма большим — оно определяется не только параметрами системы, но и начальным уровнем возбуждения образующих ее элементов.

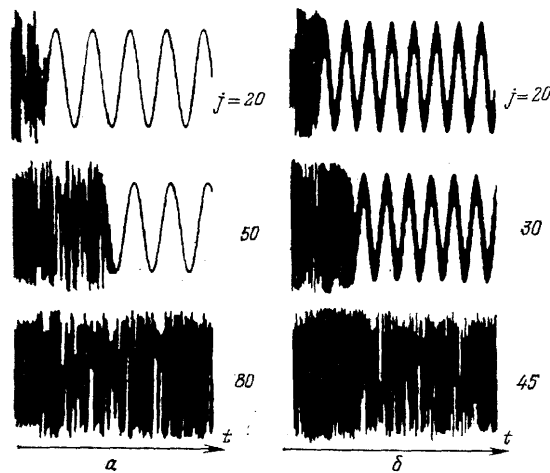


Рис. 18. Волны фазового перехода ($\gamma=0,7(1-1,7i)$, $\beta=3,42$). *a* — Регулярные колебания — хаос ($I_0 > 1/2$), *б* — Биения — хаос ($I_0 < 1/2$). (См. [166])

Поскольку колебания элементов неизохронны, при достаточном разбросе начальных условий в системе должен быстро установиться хаотический режим. Синхронизация этого режима, начинающаяся с первого элемента, будет постепенно захватывать элементы «вниз по потоку» — образуется распространяющийся фронт синхронизации. В случае, когда расстройка между частотой внешнего поля и парциальной частотой колебаний элементов цепочки больше полосы синхронизации, на левом краю дорожки возникает регулярный режим биений, который, подобно однопериодическому режиму, будет вытеснять

хаос — образуется волна перехода «биения — хаос» (рис. 18) [166]. Если длительность управляющего периодического сигнала конечна, то конечной в пространстве (по j) окажется и движущаяся область синхронизации — регулярное пятно на фоне турбулентности.

Таким образом, если в течении возможны различные асимптотические состояния (мультистабильность), в том числе и турбулентные, реализация которых зависит от начальных и/или граничных условий, то сосредоточенное воздействие может оказаться достаточно эффективным. В связи с этим возникает вопрос, насколько реальна такая ситуация в сформировавшихся сдвиговых течениях, поскольку в соответствии с гипотезой Таунсенда [167, 168], подтверждаемой рядом экспериментов, в таких течениях в автомоделной области устанавливается турбулентность с универсальными свойствами. Доминирующие структуры в этой области можно представить в виде вихревых пар, расположенных вдоль главной оси скорости деформаций, наклоненных под углом 45° к средней скорости. Эти вихри возникают из-за растяжения исходной (неуниверсальной) турбулентности средним сдвиговым потоком и служат связующим звеном между средним течением и мелкомасштабной турбулентностью, и таким образом, определяют ее свойства. В автомоделном режиме доминирующие структуры — вихревые пары — достигают квазистационарного состояния, которое определяется условием баланса между усилением — из-за деформаций в среднем сдвиговом течении — и диссипацией — из-за взаимодействия с более мелкими вихрями. На основании того, что полностью развитое состояние зависит только от баланса турбулентной энергии, Таунсендом и была высказана гипотеза, что течение теряет память о начальных (граничных) условиях — его состояние зависит от общей геометрии, а не от тонких деталей

приложенных сил. Однако в ряде выполненных позже работ имеются веские доказательства, что память о начальных условиях простирается в область, где течение обычно считается автомодельным. Из результатов [169], полученных при исследовании следов за пористым диском и за сферой ($Re \sim 10^4$) с одинаковыми радиусом и сопротивлением обтекания, можно заключить, что в первом случае сход кольцевых Вихрей отсутствует, и на достаточно больших расстояниях, действительно, формируется автомодельная турбулентность Таунсенда с доминирующими вихревыми парами. В то же время крупные кольцевые (возможно, и спиральные [170]) сошедшие со сферы вихри наблюдаются на расстояниях до нескольких сотен диаметров и определяют свойства течения. В частности, турбулентное число Рейнольдса $R_T = 31$ существенно отличается в этом случае от соответствующего значения $R_T = 4$ в следе за пористым диском. Другими примерами структур, не соответствующих механизму автомодельности Таунсенда, служат уже обсуждавшиеся крупномасштабные поперечные двумерные и кольцевые вихри в сдвиговых слоях и струях.

Таким образом, даже при развитой турбулентности возможны либо различные асимптотические состояния (мультистабильность), реализуемые при разных начальных и/или граничных условиях, либо состояния, переход из которых к асимптотике происходит на таких больших временах и/или расстояниях, что влияние конечных возмущений на этот переход существенно. Это подтверждает принципиальную возможность качественного изменения свойств течений с помощью сосредоточенного воздействия. Однако в выполненных к настоящему времени экспериментах с представляющими практический интерес слабыми воздействиями ⁽¹³⁾ удалось осуществить управление течением лишь до и в окрестности области перехода к турбулентности.

Среди множества наблюдаемых эффектов при сосредоточенном воздействии на сдвиговые течения (см. обзоры [173—180]) наибольший интерес представляет подавление турбулентности. В звуковых струях такое подавление было впервые обнаружено в работе [181]. Представленные в ней и последующие эксперименты [182—192] показали, что подавление наиболее существенно на начальном участке струи и осуществляется при высокочастотном воздействии. Объясняется (см. [189, 190]) оно тем, что внешнее высокочастотное поле инициирует формирование в сдвиговом слое струи регулярной цепочки тонких кольцевых вихрей с пространственным периодом Λ , существенно меньшим, чем диаметр струи d . Развивающиеся на их фоне наиболее опасные длинноволновые ($\Lambda \sim d$) возмущения обладают меньшими инкрементами, чем в случае сплошного сдвигового слоя, что и приводит к задержке их развития и к уменьшению энергии пульсации на начальном участке струи ($x \leq 8d$). Воздействие на частотах, близких к частотам наиболее опасных возбуждений, приводит к регуляризации течения, однако интегральная энергия пульсации при этом обычно не уменьшается. Тем не менее подавление пульсации возможно и в этом случае, если амплитуда и фаза воздействия выбраны так, чтобы возбуждения, развивающиеся в течении естественным образом, и возбуждения, инициированные внешним воздействием, компенсировали друг друга [147, 193—196]. Такая компенсация с помощью сосредоточенного воздействия сравнительно легко осуществима в случае, когда наиболее опасные возбуждения обладают узкополосным спектром. В частности, она позволяет полностью подавить автоколебания в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью [147, 195, 196]. Вопрос о возможности использования этого механизма для подавления широкополосных возбуждений приводит фактически к проблеме о распределенном воздействии [194, 197, 198].

3.6. ПЕРЕХОДЫ «СОИЗМЕРИМОСТЬ — НЕСОИЗМЕРИМОСТЬ».

Рассмотрим стационарную периодическую решетку структур, подверженную внешнему статическому воздействию, периодическому в пространстве. При этом течение может переходить в новые состояния, стационарные или нестационарные, в зависимости от амплитуды и периода воздействия. Среди вновь возникающих стационарных состояний естественно выделить три основных состояния, качественно различных и переходящих одно в другое в результате бифуркации при критических значениях параметров — надкритичности, амплитуды и длины волны воздействия. Первое — состояние «соизмеримости», когда период установившейся решетки связан рациональным соотношением с пространственным периодом воздействия. Второе — состояние «несоизмеримости» — характеризуется наличием в течении областей, где период решетки несоизмерим с периодом воздействия. Наконец, третье — хаотическое — когда период решетки изменяется в пространстве нерегулярным образом. Такие состояния могут наблюдаться как в статических твердотельных решетках (в частности, в криптоне, обсорбированном на графите [199]; в магнитоупорядоченных системах [200]), так и в об-суждаемых здесь ансамблях гидродинамических структур, образующихся, например, при термоконвекции Рэлея — Бенара [201—202] или при электрогидродинамической неустойчивости в тонких слоях жидких кристаллов [92, 203, 204]. При малых надкритичностях последние два случая не имеют принципиальных различий, однако из-за чисто технических трудностей экспериментальные исследования проведены лишь для жидких кристаллов.

В тонких слоях жидких кристаллов течение в виде валов (домены Вильямса), по свойствам похожее на конвекцию Рэлея — Бенара, возникает в результате электрогидродинамической неустойчивости, когда напряжение на слое V превышает критическое значение V_{cr} . Введение периодической вдоль слоя добавки к напряжению $\Delta V = (\alpha/2)V_{cr} \cos k_1 x$ приводит к конкуренции мод с двумя разными масштабами и, как следствие, к рассматриваемым здесь эффектам (см. [92, 203—204]). На рис. 19 приведен пример [204] соизмеримых состояний m/n , в которых на $m=1$ периодах воздействия формируется $n=1, 2, 3$ гидродинамических периода. В эксперименте [204] наблюдались также соизмеримые состояния более высокого порядка с пространственным периодом ml_1 , однако с ростом m наблюдение этих чисто двумерных состояний затруднялось трехмерными эффектами. При больших расстройках значений l_0/l_1 от отношения малых простых чисел возникали несоизмеримые фазы, характеризуемые амплитудной и фазовой модуляцией. В несоизмеримых фазах, представленных на рис. 20, период большей части роликов диктуется периодом внешнего воздействия, как в соизмеримой фазе $1/1$, но между ними имеются также области локального сжатия роликов. Сдвиг $\varphi(x_k)$ пространственной фазы k -й пары роликов относительно фазы внешнего воздействия

$$\varphi(x_k) = 2\pi \left(\frac{x_k}{l_1} - k \right) \quad (3.30)$$

оказался близким к решению уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = c \sin \varphi \quad (3.31)$$

с соответствующим образом подобранными константами a, b, δ :

$$\varphi(x) = 2\pi \left[a - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2b}{s} x + \delta \right) \right]; \quad (3.32)$$

здесь $\text{am}(u)$ — амплитуда эллиптического интеграла первого рода, а s — расстояние между точками сгущения роликов.

Объяснение этого явления заключается в следующем. При малых надкритичностях в отсутствие воздействия течение может быть описано

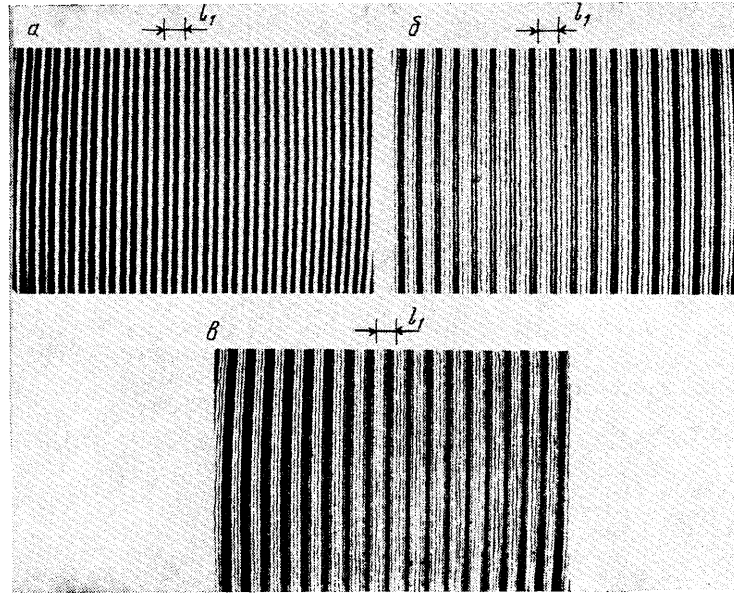


Рис. 19. Соизмеримые состояния, a — $1/1$, $l_0/l_1 = 0,928$, $\alpha = 0,097$. b — $1/2$, $l_0/l_1 = 0,460$, $\alpha = 0,114$. v — $1/3$, $l_0/l_1 = 0,370$, $\alpha = 0,114$. (См. [204])

уравнениями ГЛ. Периодическое в пространстве воздействие должно приводить к соответствующим изменениям в симметрии амплитудных уравнений. В двумерном случае (одномерные цепочки структур) использование того факта, что малое внешнее возмущение с волновым

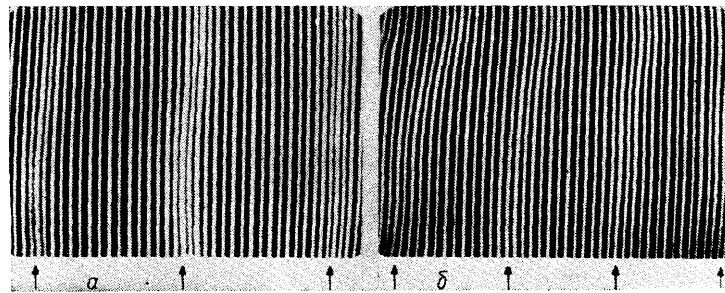


Рис. 20. Несоизмеримые состояния. $\alpha = 0,032$; стрелками указаны области локального сжатия роликов, a — $l_0/l_1 = 0,866$. b — $l_0/l_1 = 0,816$. (См. [204])

числом k_1 нарушает инвариантность по отношению к произвольным трансляциям и допускает инвариантность относительно группы дискретных трансляций $x \rightarrow x + 2\pi N/k_1$ ($k_1 = nk_0/m$, n , m — целые), приводит к амплитудному уравнению вида [205]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon A - |A|^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \alpha (A^*)^{n-1}, \quad (3.33)$$

где α — малый параметр, обычно пропорциональный m -й степени внешнего воздействия. При отклонении от резонанса $mk_1 = n(k_0 + q)$ ($q \ll k_0$) в амплитудное уравнение в соответствии с теорией возмущений следует ввести медленную функцию $\exp(inqx)$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon A - |A|^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \alpha (A^*)^{n-1} \exp(inqx) = -\frac{\delta F}{\delta A^*}, \quad (3.34)$$

где

$$F = \int dx \left\{ -\varepsilon |A|^2 + \frac{1}{2} |A|^4 + \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|^2 - \frac{\alpha}{n} [(A^*)^n \exp(inqx) + A^n \exp(inqx)] \right\}. \quad (3.35)$$

Стационарные однородные решения $A = Q \exp(i\bar{\varphi})$ определяются соотношениями $\varphi = qx + k\pi/n$; $\varepsilon - q^2 - Q^2 + \alpha(-1)^k Q^{n-2} = 0$. При $-\varepsilon - q^2 + \alpha(n-1)Q^{n-2} - 3Q^2 = 2P^2 \gg n\alpha Q^{-2}$ решения с четными k можно разбить на амплитудные моды с декрементом $\gamma_A = -2P^2$ и фазовые моды с декрементом $\gamma_\varphi = -n\alpha Q^{n-2}$. В силу условия $2P^2 \gg n\alpha Q^{-2}$ изменения амплитуды следят за изменениями фазы, которые описываются в этом приближении уравнениями [205]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -V \sin(n\varphi) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi}, \\ H &= \int \left[-\frac{v}{m} \cos n\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - q \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где $V = \alpha Q^{n-2}$, $\varphi = \theta - qx$. Сопоставление (3.31), (3.36) показывает, что это приближение хорошо описывает изменение размеров структур, определяемых фазовой переменной в стационарном случае $\partial/\partial t = 0$.

Обобщение на вырожденный случай, когда имеются два типа возмущений с одинаковыми (близкими) пространственными периодами, при малых надкритичностях также может быть осуществлено при самых общих предположениях. Соответствующее уравнение для $\bar{A} = A \exp(-iqx)$ в низших порядках по ε имеет вид [205, 206]:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - v \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} = (\varepsilon - q^2) \bar{A} + 2iq \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} - |\bar{A}|^2 \bar{A} + c_1 (\bar{A}^*)^{n-1} \quad (3.37)$$

и в пределе малых расстройк $q^2 \ll \varepsilon$, $c_1^{2/(4-n)}$, $|v| \ll \varepsilon^{1/2}$ переходит в уравнение для фазы:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - v \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -c_1 \varepsilon^{(n-2)/2} \sin(n\varphi). \quad (3.38)$$

Как следует из обсуждавшихся выше результатов экспериментов и анализа амплитудных уравнений (3.34), (3.37), для одномерных цепочек ориентированных конвективных валов, даже в самых простых случаях, течение нетривиальным образом откликается на внешнее воздействие. Если же граничные условия не накладывают жестких ограничений на ориентацию конвективных валов, то в широкой области параметров воздействия более устойчивым оказывается трехмерное течение (рис. 21). Хотя возможность возникновения трехмерного течения, по видимому (см. обсуждение [204]), можно предсказать из оценки функционала Ляпунова F , получаемого при соответствующем обобщении (3.34) с учетом изменений по второй координате, само это течение не может быть описано в рамках амплитудных уравнений.

3.7. ХАОТИЧЕСКИЕ БЛУЖДЕНИЯ ДЕФЕКТОВ. РЯБЬ ФАРАДЕЯ. Развитие динамической теории турбулентности и высказанная

в связи с этим гипотеза об универсальности сценариев перехода к пространственно-временному хаосу стимулировали новые постановки экспериментов, направленные на выявление таких сценариев [93, 207—214]. Эти эксперименты, в частности, подтверждают подобие общих свойств переходов к пространственно-временному хаосу, наблюдаемых в реальных течениях, переходам, обнаруживаемым в модельных уравнениях и в системах связанных отображений. Однако непосредственное наблюдение сценариев перехода в ансамбле структур зачастую осложняется тем, что идентификация индивидуальных структур в турбулентном режиме очень трудная задача. Одним из немногих исключений в этом смысле являются ячейки капиллярной ряби Фарадея, возникающие на поверхности глубокой жидкости при ее параметрическом возбуждении. Эти ячейки являются настолько устойчивыми образованиями, что легко идентифицируются как в переходном, так и в турбулентном режимах. Проиллюстрируем на примере ряби Фарадея наиболее типичные для ансамбля неразрушающихся структур сценарии перехода к пространственно-временному хаосу [93, 214].

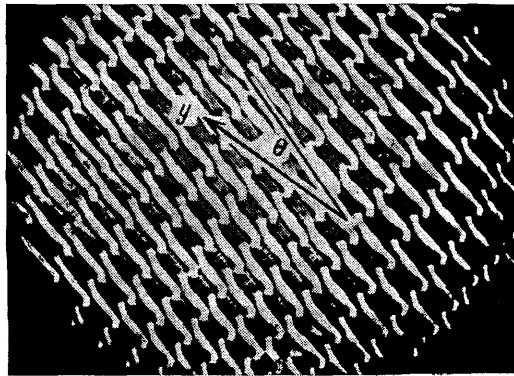


Рис. 21. Трехмерные неизомерные состояния при $l_0/l_1=0,91$ (см. [204])

В обсуждаемом эксперименте [93, 214] горизонтально расположенная мембрана однородно в пространстве осциллирует на вполне определенной частоте f . На поверхности слоя жидкости, расположенной на мембране, в осциллирующем «гравитационном» поле, возникают пары параметрически связанных капиллярно-гравитационных волн. При не слишком большой амплитуде вибраций (накачки) эти пары волн образуют исключительно регулярную пространственную решетку с квадратными ячейками. Однако если увеличить амплитуду колебаний мембраны (т. е. параметр надкритичности), обнаруживается неожиданное явление — возникает пространственно-временной беспорядок, но ячейки не разрушаются (рис. 22). Переходу от регулярного расположения ячеек к неупорядоченному соответствует переход от дискретного пространственного спектра к сплошному.

В эксперименте [93, 214] наблюдались три сценария возникновения пространственно-временного хаоса: 1) появление одномерной периодической модуляции (рис. 22, б) и ее последующая стохастизация; 2) появление двумерной «суперрешетки» — решетки огибающей (рис. 22, в); 3) образование дислокаций в результате обсуждавшегося в п. 2.8 механизма конкуренции одномерных волн модуляции с близкими волновыми числами (рис. 22, в). Отметим, что число дислокаций растет с увеличением надкритичности, и установившаяся турбулентность представляет собой хаотическую динамику взаимодействующих дислокаций (рис. 22, г).

Подобная, хотя и несколько отличающаяся картина хаотического движения дислокаций наблюдается и при термоконвекции в горизонтальном слое аргона ($Pr \ll 1$), помещенного в цилиндрический контейнер (рис. 23) [212]. Отличие состоит в том, что здесь возникают дислокации не в решетке волн модуляции, а в решетке исходных структур — конвективных валов Бенара. При увеличении числа Рэлея конвектив-

ные валы совершают вначале периодические движения, которые затем переходят в случайные блуждания, сопровождающиеся рождением, движением и исчезновением дислокаций.

Рассмотрим более подробно первый сценарий перехода к хаосу, для которого в работе [114] построена теория, согласующаяся с экспериментом. Воспользовавшись процедурой, описанной в п. 2.7, из исходных континуальных уравнений для комплексной амплитуды волны

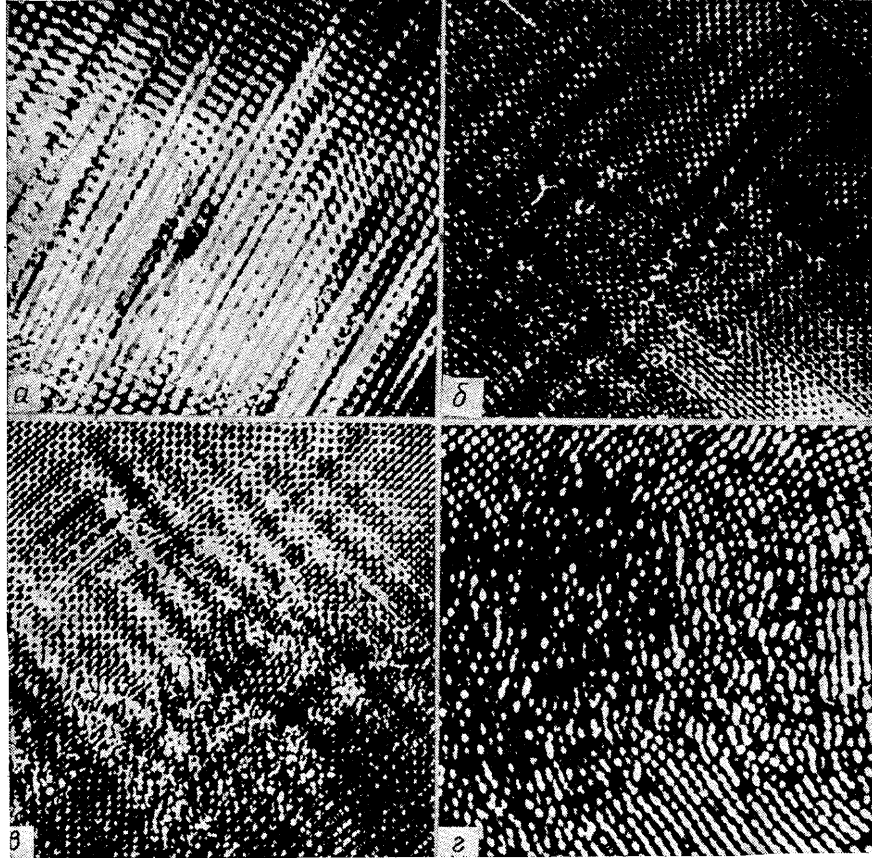


Рис. 22. Структуры капиллярной ряби на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении [93, 214]. *а* — Волны модуляции на фоне квадратных ячеек, *б* — Волны модуляции с дислокациями, *в* — Двумерная суперрешетка с дислокациями, *г* — Хаотическое движение элементарных ячеек

модуляции можно получить дискретный аналог уравнений ГЛ, но теперь в параметрическом варианте

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = i(hA_j^* - \sigma A_j) + i|A_j|^2 A_j + iQ(A_{j+1} + A_{j-1} - 2A_j), \quad (3.39)$$

где Q определяется через параметр q , равный числу звеньев дискретизации на длине волны заполнения λ : $Q = (v_g/\gamma\lambda)q^2/4\pi$, где v_g и γ — групповая скорость и декремент затухания капиллярных волн. Система (3.39) заменяет активную среду цепочкой связанных параметрических генераторов, каждый из которых эквивалентен элементарному блоку среды с характерным масштабом λ/q .

Система уравнений (3.39) решалась численно для двух типов начальных условий: а) малые отклонения на фоне однородного равнове-

ного состояния $\bar{A}$; б) быстро осциллирующие вдоль цепочки распределения A_j большой амплитуды.

При малых надкритичностях в цепочке возникают сложные стационарные состояния с большим числом осцилляций на профиле A_j . В случае начальных условий типа а) выход на стационарный режим происходит через вторичную неустойчивость периодической пространственной.

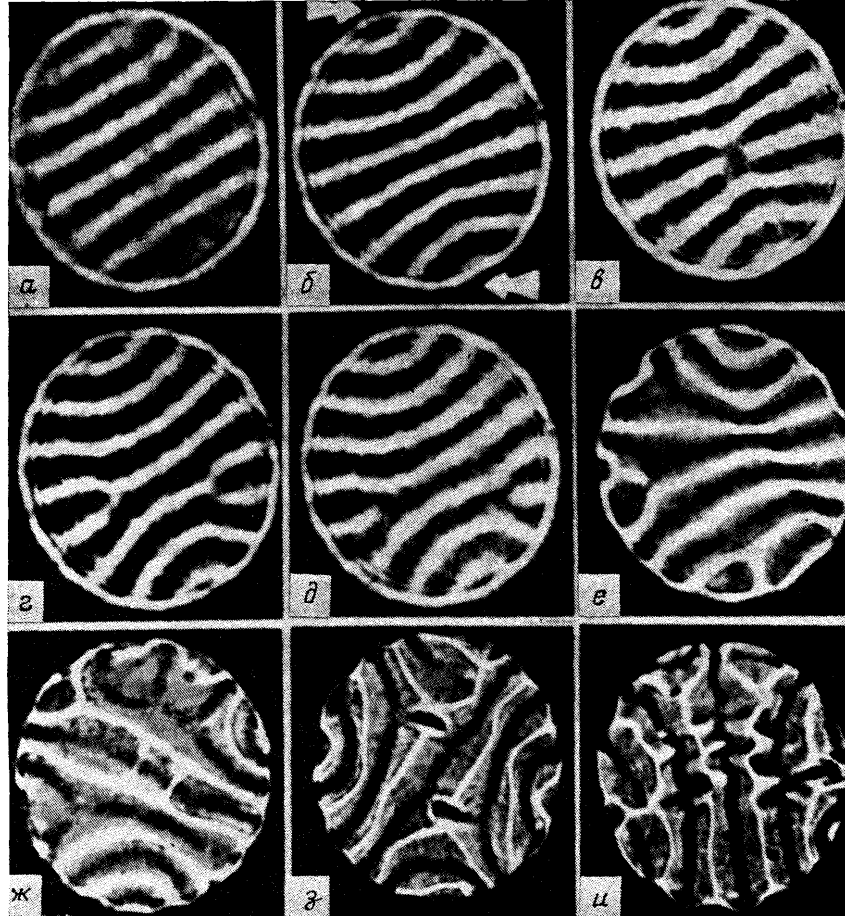


Рис. 23. Переход к турбулентности при термоконвекции аргона в цилиндрической ячейке [212]. а: $\epsilon=0,05$ — стационарные валы. б — д: $\epsilon=0,14$ — однопериодические колебания с образованием дислокаций, е: $\epsilon=1$ — деформации валов, ж: $\epsilon=2$ — появление поперечных валов: з: $\epsilon \approx 4$ — образование пар малых валов около дислокации, и: $\epsilon \approx 4$ — нестационарные структуры

модуляции [214]. Стационарные режимы другого типа формируются при начальных условиях б). Их пространственная структура моделируется произведением комплексной функции координат с относительно небольшими изменениями фазы и быстро осциллирующим модулем на действительную знакопеременную функцию. При увеличении надкритичности $\epsilon=(h-1)$ провалы между биениями на профиле $|A_j|$ сокращаются. При $h=1,85$ стационарное состояние становится неустойчивым — появляются слабые колебания во времени. Характер колебаний свидетельствует, что переход к хаосу осуществляется через перемежаемость. [215].

Полученная выше картина хаотической динамики пиков модуляции находится в хорошем качественном соответствии с результатами экспе-

риментов. Результаты счета при небольших надкритичностях предсказывают образование больших провалов на профиле модуляции, наблюдаемом в эксперименте. Кроме того, времена перемещения темных полос согласуются с временами перестроек при установлении стационарных состояний в численном счете. Например, при $h=1,4$ ($\varepsilon=0,4$) — это времена $t \sim 100 \gamma^{-1} \approx 3$ с. В реальном времени наиболее быстрые перестройки при $h=2,2$ имеют масштаб $t_2 \approx \tau_2 \gamma^{-1} \approx 12$ с, что также согласуется с визуальными оценками для режима развитого хаоса. Как показывают численные эксперименты, уравнение (3.39) при одних и тех же значениях параметров может описывать различные установившиеся хаотические режимы. Это означает, что в ее фазовом пространстве одновременно существует несколько различных стохастических аттракторов, выход на один из которых определяется начальными условиями. Визуально в эксперименте этой множественности аттракторов соответствует множественность пространственных образов (структур), устанавливающихся на фоне капиллярной ряби при одной и той же надкритичности.

Отметим здесь следующее важное обстоятельство. Наблюдавшийся в эксперименте [214] хаос практически всегда был двумерным. Однако вблизи порога возникновения он представляет собой почти суперпозицию одномерных взаимоортогональных структур модуляции, что и оправдывает построение одномерной теории на основе уравнений (3.39).

3.8. МНОГОМЕРНЫЙ ХАОС. Связь размерности турбулентности с числом коллективных возбуждений. При достаточно большой надкритичности (амплитуде вибраций) свойства наблюдаемой турбулентности уже не зависят от пути ее возникновения — турбулентность представляет собой пространственно-временной динамический хаос в ансамбле взаимодействующих капиллярных ячеек. Для построения модельной теории (см. [216]) подобной турбулентности можно воспользоваться дискретным аналогом уравнения (2.14)

$$\frac{dA_{j,l}}{dt} = A_{j,l} - (1 + i\beta) |A|^2 A_{j,l} + \kappa (1 - ic) (A_{j,l+1} + A_{j,l-1} + A_{j+1,l} + A_{j-1,l} - 4A_{j,l}) \quad (3.40)$$

или в одномерном варианте — уравнения (3.15). Граничные условия при анализе коллективных движений в ансамблях вида (3.15), (3.42) будем считать периодическими (соответственно):

$$A_j(t) = A_{j+N}(t), \quad (3.41)$$

$$A_{j,l}(t) = A_{j+N,l}(t), \quad A_{j,l}(t) = A_{j,l+N}(t). \quad (3.42)$$

Предполагая, что в некоторой области параметров в ансамбле (3.15) или (3.40) реализуется устойчивый стохастический режим, определим зависимости характеристик хаоса от параметров ансамбля — числа элементов N и величины связи κ между автоструктурами — элементарными ячейками ряби Фарадея. Полагая, что установившаяся турбулентность в среднем пространственно однородна, т. е.

$$\overline{|A_j|^2}^t = |a|^2, \quad \overline{A_j^2}^t = a^2, \quad (3.43)$$

и, кроме того, средние пульсации интенсивности малы:

$$|A_j|^2 - |a|^2 = z_j, \quad \overline{z_j^2}^t \ll |a|^4, \quad (3.44)$$

можно в явном виде вычислить показатели Ляпунова исследуемого движения на странном аттракторе и рассчитать зависимость ляпуновской

размерности D_L от параметра κ . В частности, при $\kappa < 1/4$ имеем [216]:

$$D_L \leq N \left(1 + \frac{1-2\kappa}{4|a|^2-1} \right) \quad (3.45)$$

в одномерном варианте и

$$D_L \approx 2N(1-2\kappa) \{[(1+\beta^2)^{1/2} + 2]|a|^2 - 1\}^{-1} \quad (3.46)$$

в случае квадратной решетки.

Естественно сравнить размерности стохастических множеств в одномерном и двумерном ансамблях структур с одинаковыми параметрами и одинаковым числом элементов (рис. 24). Видно, что размерность хаоса в двумерном ансамбле при данной величине связи между структурами всегда меньше, чем в одномерном с тем же числом элементов. Объясняется это тем, что степень автономности структур (с уменьшением которой растет размерность хаоса) определяется не только величиной связи между соседями, но и их числом: с ростом числа связей автономность элементарной структуры эффективно снижается и, следовательно, упорядоченность коллективных движений возрастает. Это и соответствует меньшему значению размерности.

С ростом автономности структур число коллективных возбуждений, которые могут существовать в ансамблях вида (3.15), (3.40), как мы сейчас убедимся, непрерывно возрастает. Поэтому кажется естественным, что обсуждавшееся выше увеличение размерности хаоса по мере уменьшения κ должно быть связано с появлением новых независимых движений в ансамбле. При этом они, очевидно, должны быть неустойчивыми.

Продемонстрируем правильность этого предположения на примере системы (3.15), (3.40), в которой коллективные возбуждения имеют вид стационарных бегущих волн:

$$A_j(t) = A^{(n)} \exp [i(\omega^{(n)}t + j\theta^{(n)})]. \quad (3.47)$$

Подстановка (3.47) в (3.15) дает зависимость интенсивности этих волн от постоянной распространения

$$|A^{(n)}|^2 = 1 - 4\kappa \sin^2 \frac{\theta^{(n)}}{2} \quad (3.48)$$

и закон дисперсии этих волн

$$\omega^{(n)} = -\beta + 4\kappa(\beta + c) \sin^2 \frac{\theta^{(n)}}{2}, \quad (3.49)$$

где $\theta^{(n)} = \pm 2\pi n/N$; $n = 0, 1, \dots, N/2$. Непосредственно за порогом возникновения структур, т. е. при не слишком большой надкритичности, связь между ячейками достаточно сильная. При этом ансамбль структур демонстрирует лишь тривиальное регулярное поведение. Устойчивость пространственно-однородного режима определяется показателями (см. [216]):

$$\lambda^{(i)} = -1 - 4\kappa \sin^2 \frac{\theta^{(i)}}{2} \pm \left[1 - \left(4\kappa c \sin^2 \frac{\theta^{(i)}}{2} \right)^2 + 8\beta\kappa \sin^2 \frac{\theta^{(i)}}{2} \right]^{1/2}, \quad (3.50)$$

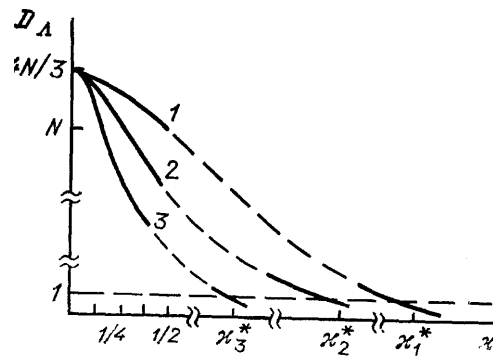


Рис. 24. Ляпуновская размерность D_L стохастического множества в ансамбле из N автоструктур [216]. 1 — Для одномерной «решетки» ($\kappa_1^* = N^2/4\pi^2$). 2 — Для квадратной ($\kappa_2^* = \kappa_1^*/2N$). 3 — Для кубической ($\kappa_3^* = \kappa_1^*/3N^{4/3}$)

откуда следует, что при

$$\kappa > \kappa_0 = (\beta c - 1) \left[2 (1 + c^2) \sin^2 \frac{\pi}{N} \right]^{-1} \quad (3.51)$$

все $\lambda^{(i)} \leq 0$ и режим пространственно-однородных колебаний в ансамбле из N ячеек устойчив.

При $\beta c > 1$ по мере уменьшения κ (от значения κ_0) из тривиального состояния равновесия $A_j = 0$ в системе последовательно (при $\kappa = \kappa_k$) рождаются новые коллективные движения. В фазовом пространстве системы (3.15) этому соответствует мягкое рождение при $\kappa = \kappa_k$ из состояний равновесия пар предельных циклов (отвечающих встречным волнам), причем все рождающиеся таким образом периодические движения неустойчивы. Убедиться в этом можно, рассмотрев характеристические показатели тривиального равновесия A_j :

$$\lambda^{(i)} = 1 - 4\kappa \sin^2 \frac{\theta^{(i)}}{2} + 4i\kappa \sin^2 \frac{\theta^{(i)}}{2}. \quad (3.52)$$

Сравнивая (3.52) и (3.34), нетрудно заметить, что число неустойчивых направлений в фазовом пространстве, т. е. число положительных $\text{Re} \lambda^{(i)}$ при данном κ , совпадает с числом родившихся при уменьшении κ от κ_0 до κ стационарных волн, а инкременты возмущений по неустойчивым направлениям определяются интенсивностями этих волн: $\text{Re} \lambda^{(i)} = |A^{(i)}|^2$. Поскольку периодические движения появляются из тривиального равновесия мягким образом, они (в момент рождения нового неустойчивого направления) наследуют показатели состояния равновесия по оставшимся независимым направлениям. Поэтому в момент рождения периодическое движение с $i=1$ характеризуется одним неустойчивым направлением (оно соответствует росту пространственно-однородных возмущений) движения, с $i=2$ — тремя и т. д. Если теперь предположить, что вновь рождающиеся неустойчивые движения принадлежат странному аттрактору, то легко интерпретировать результат о монотонном нарастании размерности хаоса с ростом автономности структур — по мере уменьшения κ в аттракторе появляются траектории, число неустойчивых направлений у которых имеет порядок номера родившегося цикла (периодического движения с $\theta = \theta^{(i)}$). Таким образом, число неустойчивых периодических решений вида (3.47), существующих при данном κ , — оценка снизу на размерность аттрактора.

3.9. Скейлинговые свойства развитой турбулентности. ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ ДИССИПАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ. Одним из наиболее фундаментальных свойств развитой гидродинамической турбулентности является наличие интервала масштабов $L \ll l \ll l_d$ (инерционного интервала), в котором статистические характеристики поля скорости удовлетворяют определенному скейлинговому закону (здесь L — глобальный масштаб течения, определяемый внешними силами и/или граничными условиями, а l_d — масштаб, на котором становится существенной вязкая диссипация $l_d \sim L/\text{Re}^{3/4}$). Первым и наиболее известным примером такого скейлинга является закон « $-5/3$ » Колмогорова [217] для энергетического спектра $E(k)$ пульсации скорости:

$$E(k) = C \varepsilon k^{-5/3}. \quad (3.53)$$

Этот универсальный степенной спектр при достаточно общих предположениях о локальной однородности и изотропности турбулентности при больших Re получается методом размерностей (14). Здесь ε — скорость диссипации турбулентной энергии в единице объема, C — константа Колмогорова. Простота размерностного подхода, приводящего к результатам, которые хорошо согласуются с физическими и численными экспериментами [218—224], поразительна на фоне сложной математической структуры уравнений Навье — Стокса. Более того, в экспериментах колмогоровский спектр наблюдается даже при умеренных числах Рейнольдса и/или в диапазоне сравнительно малых волновых чисел, при которых по всем критериям турбулентность не является изотропной и однородной. Это тем более удивительно, если учесть, что подобный размерностный подход оказывается неприменимым для бюргеровской модели турбулентности, уравнения которой, так же как и уравнения

Навье — Стокса, имеют единственный размерный параметр — вязкость, а в невязком пределе — интеграл энергии [225]. Принципиальной особенностью бюргеровской модели является отсутствие в ней внутренней, т. е. не связанной с внешними шумами стохастичности, которая свойственна реальной трехмерной гидродинамической турбулентности. Численные эксперименты с динамическими системами высокого порядка подтверждают, что универсальные скейлинговые законы в инерционном интервале действительно характерны для любых нелинейных систем с сохраняющимися в невязком пределе инвариантом и внутренней стохастичностью и могут быть определены из анализа размерностей [225—227].

Очевидно, что упомянутое «скейлинговое свойство» не исчерпывает всего многообразия свойств уравнений Навье — Стокса и не могут определять детальную структуру турбулентности, даже если речь идет о предельно больших числах Рейнольдса. В частности, из масштабной инвариантности уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости (2.4), (2.5) относительно преобразований

$$\begin{aligned} r' &= \lambda r, \quad u' = \lambda^{\alpha/3} u, \quad t' = \lambda^{1-\alpha/3} t, \\ \left(\frac{\rho}{\rho}\right)' &= \lambda^{2\alpha/3} \frac{\rho}{\rho}, \quad v' = \lambda^{1+\alpha/3} v \end{aligned} \quad (3.54)$$

в инерционном интервале следует, что показатель α не определяется из анализа размерностей без привлечения дополнительных гипотез. Колмогоровская теория инерционного интервала предполагает, что усредненная по области с размерами r скорость диссипации турбулентной энергии $\varepsilon \sim \langle |\Delta u|^3 \rangle / r \sim \varepsilon_0 (r/r_0)^{\alpha-1}$ не зависит от размеров этой области, т. е. $\alpha=1$. В этом случае для моментов $\langle |\Delta u|^p \rangle$ ($\langle \rangle$ — пространственное усреднение) справедлив следующий скейлинговый закон Колмогорова — Обухова [217, 228]:

$$\langle |\Delta u|^p \rangle \sim r^{\xi_p}, \quad (3.55)$$

где $\xi_p = p/3$.

Однако в экспериментах [229], выполненных при больших числах Рейнольдса, обнаружено, что $\xi_p \neq p/3$, и это расхождение растет с ростом p . Противоречие может быть устранено, если предположить, что активная (с точки зрения передачи энергии вверх по спектру) часть турбулентности распределена на фрактальном подпространстве. Физическую интерпретацию происхождения таких фракталов рассмотрим на примере простейшей модели, идея которой сформулирована в работах [230—233] и которая впоследствии получила название β -модели.

Будем считать, что в процесс каскадной передачи энергии от крупных вихрей к мелким вовлечен не весь объем крупного вихря, а лишь его активная часть, и введем коэффициент $\beta = 2^{D\beta-3}$, равный отношению объема вновь образующихся вихрей с масштабом $l_{n+1} \sim 2^{-(n+1)} l_0$ к объему исходного вихря с масштабом $l_n \sim 2^{-n} l_0$, где l_0 — характерный масштаб всего течения. Так как скорость передачи энергии постоянна в каскадном процессе, то

$$\varepsilon_n = \beta \varepsilon_{n+1}, \quad \frac{\Delta u_n^3}{l_n} = \frac{\beta \Delta u_{n+1}^3}{l_{n+1}}, \quad (3.56)$$

откуда следует

$$\Delta u_n \sim l_n^{1/3} \left(\frac{l}{l_0} \right)^{(D\beta-3)/3},$$

$$\langle |\Delta u|^p \rangle \sim r^{\xi_p}, \quad (3.57)$$

$$\xi_p = \frac{p(D_\beta - 2)}{3} + (3 - D_\beta).$$

Легко убедиться, что в соответствии с определением (3.4) D_β есть фрактальная размерность области, занятой активными вихрями (при этом, естественно, в (3.4) подразумевается «физический» переход к пределу при условии, что $r > r_d$). Хотя в этой модели свободный параметр D_β не определен, ее точным следствием является линейная зависимость ξ_p от p . На рис. 25 представлены экспериментальные данные

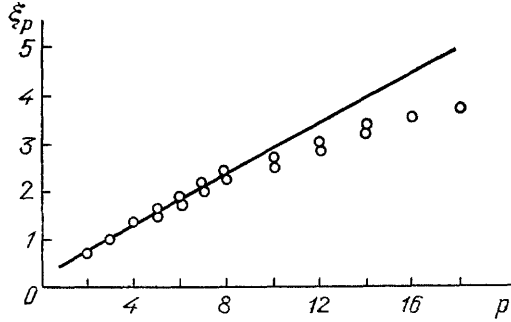


Рис. 25. Зависимость (3.54) показателя скейлинга ξ_p от номера момента p в модели однородных фракталов с $D_\beta = 2.83$ (прямая линия) и экспериментальные данные работы [229] (кружки)

[229], которые подтверждают линейную зависимость ξ_p от p при $p < 7$, однако при больших p наблюдается отклонение от этой зависимости. Это, как мы увидим, может быть объяснено мультифрактальной структурой турбулентности.

Для построения мультифрактальной модели [234—236] предположим, что диссипация сосредоточена на множествах $S(h)$ с размерностью $D(h)$, на каждом из которых в инерционном интервале выполняется скейлинг, аналогичный рассмотренному выше, но со своим показателем h :

$$\Delta u(r) \sim r^h.$$

Естественно считать, что относительное число кубов с ребром r на множестве $S(h)$ будет пропорционально $r^{-D(h)}/r^{-3} = r^{3-D(h)}$, так что

$$\langle |\Delta u|^p \rangle \sim \int dp(h) r^{ph+3-D(h)} \sim r^{\xi_p}. \quad (3.58)$$

В пределе малых r весовая функция $\rho(h)$ может считаться медленной, так что при вычислении интеграла в (3.58) можно воспользоваться методом наискорейшего спуска, что приводит к соотношениям

$$\rho(h) \left(\frac{2\pi}{D^4(h)} \right)^{1/2} (\ln r)^{-1/2} r^{ph+3-D(h^*)} \sim r^{\xi_p}, \quad (3.59)$$

где h^* определено условиями

$$\left. \frac{\partial D(h)}{\partial h} \right|_{h=h^*} = p, \quad \left. \frac{\partial^2 D(h)}{\partial h^2} \right|_{h=h^*} \leq 0.$$

При малых r можно считать, что

$$ph^* + 3 - D(h^*) = \xi_p, \quad (3.60)$$

так что по измеренной зависимости $\xi_p = \xi(p)$ мы можем определить фрактальный спектр $D(h)$ в параметрическом виде:

$$D(h) = ph + 3 - \xi_p, \quad (3.61)$$

$$h = d\xi_p / dp. \quad (3.62)$$

В частности, для колмогоровской турбулентности $\xi_p = p/3$; и поэтому фрактальный спектр состоит из одной точки $h=1/3$, в которой $D(1/3)=3$. Для β -модели $\xi_p = [p(D_\beta - 2)/3] + 3 - D$; $h = (D_\beta - 2)/3$ и естественно $D(h) = D_\beta$. В β -модели обеспечивается наилучшее соответствие экспериментальным данным при $p < 7$, если $D = 2,83$. Столь малое отличие D от соответствующего значения для колмогоровской турбулентности объясняет, почему закон « $-5/3$ » с таким постоянством наблюдается во многих экспериментах. Действительно, если для приближенных оценок воспользоваться локальной связью масштабов r и волновых чисел k и считать $k \sim r^{-1}$, то для спектра в β -модели получим

$$E(k) \sim k^{(-5/3) - [(3-D)/3]} \approx k^{(-5/3) - (1/18)}.$$

Малая поправка к показателю вряд ли может быть надежно измерена в экспериментах, обычно имеющих дело со сравнительно малым диапазоном волновых чисел (в логарифмическом масштабе). Тем не менее отличие $D \neq 3$ является принципиальным, так как означает чрезвычайно большую неоднородность турбулентности — доля объема, занятая активными вихрями r^{-D}/r^{-3} , стремится к нулю при достаточно малых r . Иначе говоря, эта часть пространства имеет структуру канторова множества U . Между его размерностью D и размерностью множества, образованного пересечением U с плоскостью S или линией L , в изотропном случае почти всегда справедлива следующая простая связь (см., например, обсуждение [132, 237]):

$$D = 1 + D_s = 2 + D_L,$$

что чрезвычайно важно для экспериментального определения значений D , так как зачастую приходится ограничиваться одномерными измерениями. Если кроме этой связи воспользоваться гипотезой Тейлора и считать, что временная реализация соответствует пересечению вмерзженной турбулентности линией (например, прямой OX вдоль потока: $\partial/\partial t = -U_0 \partial/\partial x$), то удастся экспериментально определить $D_L(h)$. В работе [237] такие измерения были выполнены для одного из слагаемых, входящих в выражение для диссипации турбулентной энергии $\varepsilon \sim (\partial u/\partial x)^2 \sim (U_0 \partial u/\partial x)^2$. Результаты [237] измерений $D_L(h)$ спектров развитой турбулентности при различных геометриях течений и числе Рейнольдса (рис. 26) мало отличаются друг от друга и простираются от $h = \alpha_{\min} = 0,51$ до $h = \alpha_{\max} = 1,78$, а максимальное значение $f(\alpha_0) = 1$ достигается при $\alpha_0 = 1,117$. Из приведенных зависимостей следует, что наибольшая диссипация энергии $\varepsilon \sim r^{\alpha-1}$ при малых r (сингулярная при $r \rightarrow 0$) происходит на фрактальных подпространствах с размерностью f ($\alpha < 1$) $< f(1) \approx 0,95$ (здесь, как уже отмечалось, фракталы подразумеваются в физическом смысле, так как предполагается, что все масштабы r больше колмогоровского l_d).

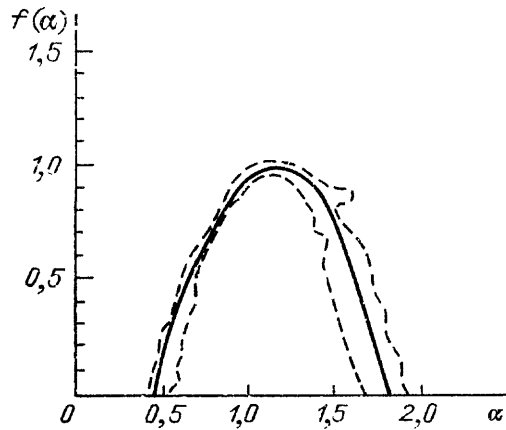


Рис. 26. Усредненная зависимость мультифрактального спектра для развитой турбулентности, формирующейся в различных течениях: в лабораторном пограничном слое, за решеткой, в следе за цилиндром, в атмосферном пограничном слое. Штриховая кривая ограничивает область, в которую попадают экспериментальные точки [237]

Приведенные выше результаты свидетельствуют, что при больших числах Рейнольдса подавляющая часть объема турбулентной жидкости является пассивной относительно диссипации энергии, а следовательно, и относительно преобразования ее вверх по спектру. В уравнении Навье — Стокса для завихренности

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}] = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3.63)$$

единственным нелинейным слагаемым, непосредственно ответственным за это преобразование, является $\text{rot} [\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}]$. Отсюда можно сделать вывод, что в развитой турбулентности наиболее вероятными являются распределения завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$, которые минимизируют это слагаемое (за исключением, возможно, составляющей, описывающей тривиальный перенос завихренности). Недавно выполненные исследования [238] свидетельствуют, что подобный принцип подавления нелинейности не является уникальным свойством уравнений Навье — Стокса и справедлив для более широкого класса нелинейных систем. Качественная интерпретация подавления нелинейности при малой диссипации ($\text{Re} \rightarrow \infty$) состоит в том, что система имеет наибольшую вероятность находиться в области фазового пространства (или функционального пространства, если речь идет о полях), где она движется наиболее медленно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \text{Re}^{-1}.$$

Можно ожидать, что дальнейшие исследования этой проблемы позволят сформулировать более строгие вариационные принципы, пригодные для отыскания квазиравновесных когерентных структур с большими временами жизни. Возможно, к этому классу принадлежат широко обсуждаемые в последнее время спиральные структуры [239—243], в которых поле скорости и завихренности ориентированы преимущественно параллельно друг другу.

4. Заключение. Еще сравнительно недавно три направления теории турбулентности — статистическое, структурное и динамическое — развивались параллельно и практически независимо. Результаты, полученные в каждом из них, относились к различным задачам и отвечали на вопросы, возникающие в качественно различных экспериментальных ситуациях. Сейчас кажется удивительным, что такая автономия просуществовала столь долго и лишь в последние пять лет появилось стремление и возможность (!) построения единой цельной теории.

Особенно явно сегодня взаимодействие структурного и динамического подходов к турбулентности. Это, в частности, связано со многими экспериментальными успехами, убеждающими исследователей в том, что при умеренных числах Рейнольдса турбулентность представляет собой пространственно-временной хаос взаимодействующих структур. Качественное доказательство этого факта дают эксперименты с визуализацией гидродинамических течений, количественное же его обоснование получается при специальной обработке измерений и сравнительно просто добывается в численном эксперименте. Так, при компьютерном исследовании двумерной турбулентности, описываемой уравнениями Навье — Стокса с периодическими граничными условиями [244], было обнаружено, что размерность хаотического множества, вычисленная с помощью определения ляпуновских показателей, обычно много меньше числа элементарных (гармонических) возбуждений, создающих течение. Этот факт допускает наглядную интерпретацию — хаотическая динамика течения определяется лишь небольшим числом независимых (в данном случае — крупномасштабных) возбуждений, остальные же с

ними жестко связаны, т. е. образуют когерентные структуры. Подобный же результат был получен ранее для турбулентности, описываемой двумерным уравнением Гинзбурга — Ландау [216]. Можно утверждать, что размерность хаотического движения — турбулентности коррелирует с числом структур (спиральных волн, дефектов волновой решетки и т. д.), взаимодействующих друг с другом.

Чрезвычайный интерес представляет обнаружение связи между размерностью турбулентности при больших числах Рейнольдса и числом мод в инерционном интервале. Пока здесь имеются лишь единичные результаты (см., например, [245]), однако именно при анализе многомерных стохастических множеств, весьма своеобразно меняющихся при увеличении ширины инерционного интервала, возможно, удастся объяснить явление автомодельности турбулентности с точки зрения нелинейной динамики.

Авторы признательны И. С. Арансону, А. В. Гапонову-Грехову и М. В. Незлину за плодотворные дискуссии.

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

¹ Для волновых полей она известна как модуляционная неустойчивость [11], иногда называемая также неустойчивостью Бенжамина—Фейра [9].

² В отсутствие двумерной волны такие возмущения при $Re \leq 5772$ затухают.

³ Здесь представлена картина [45], наиболее типичная для лабораторных экспериментов, хотя очевидно, что возможны и другие переходы в зависимости от свойств возмущений в набегающем потоке.

⁴ Замечательным свойством этой системы является ее градиентность. Благодаря этому свойству полученные результаты об устойчивости «элементарных» локализованных структур можно распространить и на гамильтонову систему вида $\partial^2 u / \partial t^2 = -\delta F / \delta u$, $\partial^2 v / \partial t^2 = -\delta F / \delta v$. Подчеркнем, что устойчивость решений, обращающихся в минимум функционал F — лишь необходимое условие устойчивости этих статических решений в гамильтоновой системе с той же потенциальной функцией. Однако в случае отсутствия внутренних резонансов (отвечающих нелинейному возбуждению собственных степеней свободы локализованной структуры) это условие является и достаточным. Прямые компьютерные эксперименты подтвердили существование в приведенной гамильтоновой системе устойчивых трехмерных «частиц» вида рис. 6.

⁵ Покрывающие множество n -мерные кубики могут оказаться «почти пустыми», именно поэтому может быть $D < n$. Для обычных множеств определение (3.4) даст очевидные результаты. Так, для множества изолированных точек имеем $N(\epsilon) = N$ и $D = 0$, для отрезка L линии $N(\epsilon) = L/\epsilon$, $D = 1$, для площадки S двумерной поверхности $N(\epsilon) = S/\epsilon^2$, $D = 2$ и т. д.

⁶ Разумеется, решение уравнений (3.6) (с заданными начальными условиями при $t = 0$) фактически описывает соседнюю траекторию лишь до тех пор, пока все расстояния $l_i(t)$ остаются малыми. Это обстоятельство, однако, не лишает смысла определение (3.7), в котором используются сколь угодно большие времена. В (3.7) фигурирует относительное изменение длин за большое время t ; в рамках линейного приближения оно совпадает с результатом последовательных относительных изменений за промежутки времени, в течение каждого из которых линеаризация уравнений допустима.

⁷ Учет равного нулю ляпуновского показателя вносит в размерность D_L вклад +1, отвечающий размерности вдоль самой траектории.

⁸ Строгое определение корреляционного интеграла предполагает переход к пределу при $N \rightarrow \infty$.

⁹ Может оказаться даже, что отдельные детали аттрактора короткая реализация просто не успеет проявить.

¹⁰ Как известно, состояния вещества вблизи критической точки при разных температурах отличаются только пространственным масштабом дальних корреляций. Поэтому термодинамические функции того или иного состояния ведут себя подобно и могут быть получены друг из друга соответствующим масштабным преобразованием. Такое свойство критических явлений называется скейлингом. Закономерности типа скейлинга свойственны и переходам к хаосу [154]; природа скейлинга, по существу, та же, что и универсальности вообще.

¹¹ Значение параметра $\epsilon = \epsilon_{cr}$ является критической точкой при переходе к хаосу в каждом индивидуальном элементе.

¹² Уравнение (3.19) для описания перехода к хаосу в среде с диффузией, состоящей из элементов, описываемых отображением Фейгенбаума, впервые было исследовано в [160, 161].

¹³ Такие воздействия обычно реализуются с помощью вибраций кромок, формирующих течение, или внесенных дополнительно в течение вибрирующих лент. Малые пульсации расхода в струях и акустическое облучение при дозвуковых скоростях в большинстве случаев можно отнести к сосредоточенным воздействиям, так как вносимые ими возмущения лишь вблизи кромок эффективно преобразуются в моды гидродинамического течения [171, 172].

¹⁴ Термин размерность в данном случае используется в его будничном смысле и относится к единицам измерений физических величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

(Обзоры и статьи, содержащие подробное обсуждение рассматриваемых здесь вопросов, помещены в списке звездочкой после номера ссылки)

- [1*] Буссе Ф. Г. // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. — М.: Мир, 1984. — С. 124.
- 2. Горьков Л. Я. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 402.
- 3. Malkus V. W. R., Veronis G. // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 225.
- 4. Schluter A., Lortz D., Busse F. H. // Ibidem. 1965. V. 23. P. 129.
- 5. Busse F. H., Whitehead J. A. // Ibidem. 1971. V. 47. P. 305.
- 6. Busse F. H., Clever R. M. // Ibidem. 1979. V. 91. P. 319.
- 7. Clever R. M., Busse F. H. // J. Appl. Math. Phys. (JAMP). 1978. V. 29. P. 711.
- 8. Eckhaus W. // Studies in Non-Linear Stability Theory. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1965. — (Springer Tracts in Natural Philosophy. V. 6).
- 9. Stuart J. T., Di Prima R. C. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1978. V. 362. P. 27.
- 10. Lowe M., Gollub J. P. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2575.
- [11] Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
- 12. Busse F. H. // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. P. 97.
- 13. Jakeman E. // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 10.
- 14*. Chandrasekhar S., Ranganath G. S. // Adv. Phys. 1986. V. 35. P. 507.
- 15. Cross M. C. // Phys. Rev. Ser. A. 1982. V. 25. P. 1065.
- 16. Whitehead J. A. // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 2899.
- 17*. Рабинович М. И. // УФН. 1979. Т. 125. С. 123.
- 18*. Eckman J. R. // Rev. Mod. Phys. 1984. V. 53. P. 643.
- 19*. Andereck C. D., Liu S. S., Swinney H. L. // J. Fluid Mech. 1986. V. 164. P. 155.
- 20. Newhouse S., Ruell D., Takens F. // Commun. Math. Phys. 1987. V. 64. P. 35.
- [21*] Eckman J.-P., Ruelle D. // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 617.
- 22. Fenstermaker P. R., Swinney H. L., Gollub J. P. // J. Fluid Mech. 1979. V. 94. P. 103.
- 23*. Spiegel E. A. // Theoretical Approach to Turbulence / Eds I. L. Dwyer, M. Y. Hussaini, R. G. Voigt — New York: Springer-Verlag, 1985. — P. 303.
- 24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
- 25*. Orszag S. A., Patera A. T. // Transition and Turbulence / Ed. R. E. Meyer. — New York: Academic Press, 1981. — P. 127.
- 26. Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y. // J. Fluid Mech. 1975. V. 72. P. 731.
- 27. Carlson D. R., Widnall S. E., Peefers M. F. // Ibidem. 1982. V. 121. P. 487.
- 28*. Stuart J. T. // [25].
- 29. Breidenthal R. // J. Fluid Mech. 1981. V. 116. P. 1.
- 30. Neu I. C. // Ibidem. 1984. V. 143. P. 253.
- [31*] Lin S. J., Corcos G. M. // Ibidem. V. 141. P. 139.
- 32. Limenez J., Cogollos M., Bernal P. L. // Ibidem. 1985. V. 152. P. 125.
- 33. Bernal L. P., Roshko A. // Ibidem. 1986. V. 170. P. 499.
- 34*. Lasheras J. C., Cho J. S., Maxworthy T. // Ibidem. V. 172. P. 231.
- 35. Mueller T. J., Nelson R. C., Kegelman J. T. // AJAA J. 1981. V. 19. P. 1607.
- 36. Kobayashi R., Kohama Y., Kurosawa M. // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 341.
- 37. Kobayashi R., Izumi H. // Ibidem. P. 353.
- 38*. Kohama Y. // Phys.-Chem. Hydrodynamics. 1985. V. 6. P. 659.
- 39. Kohama Y., Kobayashi R. // J. Fluids Mech. 1983. V. 137. P. 153.
- 40*. Head M. R., Bandyopadhyay P. // Ibidem. 1981. V. 107. P. 297.
- [41*] Wallace J. M. // Flow of Real Fluids / Eds G. E. A. Meier, F. Obermeier — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. — P. 253.
- 42*. Perry A. E., Chang M. S. // J. Fluid Mech. 1982. V. 119. P. 173.
- 43. Blackwelder R. F. // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 2807.
- 44. Perry A. E., Lim T. T., Teh E. W. // J. Fluid Mech. 1981. V. 104. P. 387.
- 45. Williams D. R., Fasel H., Hama F. R. // Ibidem. 1984. V. 149. P. 179.
- 46. Рейтов В. П. // ПИМТФ. 1987. № 5. С. 107.
- 47*. Corcos G. M., Sherman F. S. // J. Fluid Mech. 1984. V. 139. P. 29.
- 48*. Corcos G. M., Lin S. J. // Ibidem. P. 67.
- 49. Wygnanski I., Oster D., Fiedler H., Dziomba B. // Ibidem. 1979. V. 93. P. 325.
- 50. Breidenthal R. // Phys. Fluids. 1980. V. 23. P. 1929.
- [51] Hussain A. K. M. F., Zaman K. B. M. // J. Fluid Mech. 1985. V. 159. P. 85.
- 52. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. // ПИММ. 1961. Т. 25. С. 1140.

- 53*. Обухов А. М. // УМН. **1983**. Т. 38, вып. 1. С. 101.
- 54*. Довженко В. А., Должанский Ф. В. // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. — М.: Наука, 1987. — С. 132.
- 55*. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Хоменко Г. А., Яновский В. В. // ЖЭТФ. **1983**. Т. 85. С. 1979.
56. Гварамадзе В. В., Тур А. В., Хоменко Г. А. // Взаимодействие стационарного потока со спиральной турбулентностью. — Препринт ИКИ АН СССР № 121. — Москва, 1987.
57. Sivashinsky G., Yakhot V. // Phys. Fluids. **1985**. V. 28. P. 1040.
58. Yakhot V., Sivashinsky G. N. // Phys. Rev. Ser. A. **1987**. V. 35. P. 815.
59. Yakhot V., Pelz R. // Phys. Fluids. **1987**. V. 30. P. 1272.
60. Galloway D., Frisch V. // J. Fluid Mech. **1987**. V. 180. P. 557.
- [61] Frisch V., She Z. S., Sulem P. L. // Physica. Ser. D. **1987**. V. 28. P. 382.
62. Basse F. H., Whitehead J. A. // J. Fluids Mech. **1974**. V. 66. P. 67.
63. Barcilon A., Brindley J., Lessen M., Mobs F. R. // Ibidem. **1979**. V. 94. P. 453.
64. Barcilon A., Brindley J. // Ibidem. **1984**. V. 143. P. 429.
65. Krishnamurti R., Howard N. L. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **1981**. V. 78. P. 1981.
- 66*. Howard N. L., Krishnamurti R. // J. Fluid Mech. **1986**. V. 170. P. 385.
67. Ландау Л. Д. // ДАН СССР. **1944**. Т. 44. С. 339.
68. Brand H. R., Lomdahl P. S., Newell A. C. // Phys. Lett. Ser. A. **1986**. V. 118. P. 67.
69. Brand H. R., Lomdahl P. S., Newell A. C. // Physica. Ser. D. **1986**. V. 23. P. 345.
- 70*. Normand C., Pomeau Y., Velarde M. G. // Rev. Mod. Phys. **1977**. V. 49. P. 591.
- [71] Громов П. Р., Зобнин А. Б., Рабинович М. И., Суцник М. М. // Письма ЖТФ. **1987**. Т. 12 С. 1323
- 72*. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. Я. // [54]. — С. 7.
73. Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. // Письма ЖЭТФ. **1982**. Т. 36. С. 190.
- 74*. Незлин М. В. // УФН. **1986**. Т. 150. С. 3.
75. Гапонов-Грехов А. В., Ломов А. С., Рабинович М. И. // Письма ЖЭТФ. **1986**. Т. 44. С. 242.
76. Вашкевич О. В., Гапонов-Грехов А. В., Езерский А. Б., Рабинович М. Я. // ДАН СССР. **1987**. Т. 293. С. 563.
77. Хакен Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир. 1985.
78. Гапонов-Грехов А. В., Ломов А. С., Осипов Г. В., Рабинович М. И. Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных средах. — Препринт ИПФ АН СССР № 199 — Горький, 1988.
79. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. // Изв. АН СССР. Сер. физ. **1987**. Т. 51 С. 1133
80. Ломов А. С., Рабинович М. И. // Письма ЖЭТФ. **1988**. Т. 48. С. 598.
- [81*] Swift J. S., Hohenberg P. C. // Phys. Rev. Ser. A. **1977**. V. 15. P. 319.
82. Ciliberto S., Rubio M. A. // Phys. Rev. Lett. **1987**. V. 58. P. 2652.
83. Gorskikh K. A., Lomov A. S., Rabinovich M. I. // Phys. Lett. Ser. A. **1989**. V. 137. P. 250.
- 84*. Львов В. С., Предтеченский А. А. // Нелинейные волны: Стохастичность и турбулентность / Под ред. М. И. Рабиновича. — Горький, 1980. С. 57.
85. Thomas A. S. // J. Fluid Mech. **1983**. V. 137. P. 233.
- 86*. Cimbalá J. M., Nagib H. M., Roshko A. // Ibidem. **1988**. V. 190. P. 265.
- 87*. Aranson I. S., Gaponov-Grekhov A. V., Rabinovich M. I. // Physica. Ser. D. **1988**. V. 33. P. 1.
88. Meiburg E., Lasheras J. C. // Phys. Fluids. **1987**. V. 30. P. 623.
- 89*. Meiburg E., Lasheras J. C. // J. Fluid Mech. **1988**. V. 190. P. 1.
90. Whitehead J. A. // Ibidem. **1976**. V. 75. P. 715.
- [91] Pomeau Y. // Physica Ser. D. **1986**. V. 23. P. 3.
92. Lowe M., Gollub J. P., Lubensky T. C. // Phys. Rev. Lett. **1983**. V. 51. P. 786.
93. Езерский А. Б., Коротин Н. И., Рабинович М. Я. // Письма ЖЭТФ. **1985**. Т. 41. С. 129.
94. Зобнин А. Б., Рабинович М. И., Суцник М. М. Динамика дефектов в дорожке Кармана. — Препринт ИПФ АН СССР № 245. — Горький, 1989.
95. Browand F. K.; Ho C.-M. // Nucl. Phys. Ser. B. **1987**. V. 2. P. 139.
96. Choodnovsky D. V., Choodnovsky G. V. // Nuovo Cimento. Ser. B. **1977**. V. 40. P. 339.
- 97*. Aref H. // Ann. Rev. Fluid Mech. **1983**. V. 15. P. 345.
- 98*. Qian S., Lee Y. C., Chen H. H. // Phys. Fluids. Ser. B. **1989**. V. 1. P. 87.
99. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.
- 100*. Saffman P. G., Baker G. R. // Ann. Rev. Fluid Mech. **1979**. V. 11. P. 95.
- [101] Бубнов Б. М., Голицын Г. С. // ДАН СССР. **1985**. Т. 281. С. 552.
- 102*. Boubnou B. M., Golitsyn G. S. // J. Fluid Mech. **1986**. V. 167. P. 503.
- 103*. Hopfinger E. J., Browand F. K.; Gagne Y. // Ibidem. **1982**. V. 125. P. 505.
104. Ahlers G., Cannell D. S. // Phys. Rev. Lett. **1983**. V. 50. P. 1583.
105. Lüke M., Mihelcic M., Kowalski B. // Phys. Rev. Ser. A. **1987**. V. 35. P. 4001.

106. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Бюл. МГУ. Сер. «Математика и механика». **1937**. Т. 1. С. 1.
- 107*. Ben-Jacob E., Brand H., Dee G., Kramer L., Longer J. S. // Physica. Ser. D. **1985**. V. 14. P. 348.
108. Каменский В. Г., Манаков С. В. // Письма ЖЭТФ. **1987**. Т. 45. С. 499.
109. Мату сов П. А., Цимринг Л. Ш. Распространение фронта параметрических возбуждаемых капиллярной ряби.—Препринт ИПФ АН СССР.—Горький 1989
110. Siggia E. D., Zippelius A. // Phys. Rev. Ser. A. **1981**. V. 24 P. 1036
- [111] Tesaro G., Cross M. C. // Ibidem. **1986**. V. 34. P. 1363
- 112*. Huerre P. // Nucl. Ser. B. **1987**. V. 2. P. 159.
113. Zippelius A., Sigia E. D. // Phys. Fluids. **1983**. V. 26. P. 2905
- 114*. Greenside H. S., Coughran W. M. // Phys. Rev. Ser. A. **1984**. V. 31. P. 398
115. Croquette V., Pocheau A. // Lect. Not. Phys. **1984**. V. 210. P. 104
116. Cross M. C. // Phys. Rev. Ser. A. **1982**. V. 25. P. 1065.
117. Heutmaker M. S., Fraenkel P. N., Gollub J. P. // Phys. Rev. Lett. **1985**. V. 54. P. 1369.
- 118*. Gaponov-Grekhov A. V., Lomov A. S., Osipov G. V., Rablnovich M. // Nonlinear Waves. Pt. I // Eds A. Gaponov-Grekhov, M. Rabinovich, J. Engelbreht — Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1989.—P. 65.
119. Roberts M., Swift S. W., Wagner D. H. // Contem. Math. **1986**. V. 56. P. 283
120. Henon M. // C. R. Ac. Sci. Paris. Ser. A. **1966**. T. 262. P. 312.
- [121] Aranson I. S., Rabinovich M. I., Sushchik M. M. // Chaos and Order in Nature/Ed. H. Haken.—Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1981.—P. 54.
122. Кузнецова Л. М., Рабинович М. И., Сущик М. М. // Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». **1983**. Т. 19. С. 53.
- 123*. Рабинович М. И., Сущик М. М. // Нелинейные волны: Самоорганизация/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича.—М.: Наука, 1983.—С. 58
124. Aref H. // S. Fluid Mech. **1984**. V. 143. P. 1.
125. Chaiken J., Chevray R., Tabor M., Tam Q. M. // Proc. Roy Soc London Ser A **1986**. V. 408. P. 165.
126. Leonard A., Rom-Kedar V., Wiggins S. // Nucl. Phys. Ser. B. **1987**. V. 2. P. 179.
127. Falcioni M., Paladin G., Vulpiani A. // J. Phys. Ser. A. **1987**. V. 2. P. 3451.
128. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. // Письма ЖЭТФ. **1979**. Т. 29. С. 737.
129. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. // ЖЭТФ. **1979**. Т. 77. С. 588.
130. Зиглин С. Л. // ДАН СССР. **1980**. Т. 250. С. 1296.
- [131] Finn J. M., Ott E. // Phys. Rev. Lett. **1988**. V. 60. P. 760.
- 132*. Sreenivasan K. R., Meneveau C. // J. Fluid Mech. **1986**. V. 173. P. 357.
133. Ledrappier F. // Comm. Math. Phys. **1981**. V. 81. P. 229.
134. Mane R. // Dynamical Systems and Turbulence.—Berlin a. o.: Springer, 1981.—P. 230.—(Lecture Notes in Mathematics. V. 898).
- 135*. Takens F. // Ibidem. P. 3661.
136. Grassberger P., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. **1983**. V. 50. P. 346.
137. Gassberger P. // Phys. Lett. Ser. A. **1983**. V. 97. P. 227-
138. Hentschel H. G. E., Procaccia I. // Physica. Ser. D. **1983**. V. 8. P. 435.
139. Grassberger P. // Phys. Lett. Ser. A. **1985**. V. 107. P. 103.
140. Halsey M., Jensen J., Kadanoff L. P., Procaccia I., Shraiman B. I. // Phys. Rev. Ser. A. **1986**. V. 33. P. 1141.
- [141*]. Афраймович В. С., Рейман А. М. // Нелинейные волны: Динамика и эволюция/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича.—М.: Наука, 1989.
142. Grassberger P., Procaccia I. // Phys. Rev. Ser. A. **1983**. V. 28. P. 2591.
143. Громов П. Р., Зобнин А. Б., Рабинович М. И., Рейман А. М., Сущик М. М. // Численные методы механики сплошной среды/Под ред. Г. В. Годияка.—Новосибирск, 1986—С. 30.
144. Brandstätter A., Swift J., Swinney H. L., Wolf A., Farmer J. D., Jen E., Crutchfield P. J. // Phys. Rev. Lett. **1983**. V. 51. P. 1442.
145. Malraison B., Atten P., Berge P., Dubuis M. // J. de Phys. Lett. **1983**. Т. 44. P. L-897.
146. Громов П. Р., Зобнин А. Б., Рабинович М. И., Рейман А. М., Сущик М. М. // ДАН СССР. **1987**. Т. 292. С. 284.
147. Rabinovich M. I., Sushchik M. M. // Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Symposium Novosibirsk, 1984/Ed. V. V. Kozlov—Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.—P. 375.
- 148*. Сущик М. М. // [54].—С. 104.
149. Bonett M., Meynart R., Boon I. P., Olivari D. // Phys. Rev. Lett. **1985**. V. 55. P. 492.
150. Козлов В. В., Рабинович М. И., Рамазанов М. П., Рейман А. М., Сущик М. М. // Письма ЖТФ. **1987**. Т. 13. С. 986.
- [151] Kozlov V. V., Rabinovich M. I., Ramazanov M. P., Reiman A. M., Sushchik M. M. // Dhys. Lett. Ser. A. **1988**. V. 128. P. 479.
- 152*. Deissler R. L., Kaneko K. // Ibidem. **1987**. V. 119. P. 397.
153. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое.—Новосибирск: Наука, 1982.
154. Feigenbaum M. J. // J. Stat. Phys. **1979**. V. 21. P. 669.
- 155*. Фейгенбаум М. // УФН. **1983**. Т. 141. С. 343.
156. Manneville P., Pomeau K. // Physica. Ser. D. **1980**. V. 1. P. 219.

157. *Feigenbaum M. J., Kadanoff L. P., Shenker S.J.*//*Ibidem*. **1982**. V. 5. P. 370.
158. *Sinai Ya. G., Khanin K. M.*//*Renormalization Group/Eds D. V. Shirkov, D. I. Kazakov, A. A. Vladimirov.*—Singapore, N. J.; Hong Kong: World Scientific, 1988.—P. 251.
159. *Арансон И. С., Рабинович М. И.*//Ренормгрупповое описание пространственного развития турбулентности.—Препринт ИПФ АН СССР № 152.—Горький, 1987.
160. *Кузнецов С. П., Пиковский А. С.* //Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1985.. Т.28 С. 308.
- [161] *Кузнецов С. А.*//*Ibidem*. **1986**. Т. 29. С. 887.
162. *Кузнецов С. А.*//*Ibidem*. **1985**. Т. 28. С. 991.
163. *Анищенко В. С., Арансон И. С., Постное Д. Е., Рабинович М. И.*//ДАН СССР. **1986**. Т. 286. С. 1120.
164. *Кузнецов С. П.*//Изв. вузов СССР. Сер. «Физика». **1984**. Вып. 6. С. 87.
165. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. Я., Старобинец И. М.*//Письма ЖЭТФ. **1984**. Т. 39. С. 561.
166. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.*//ЖЭТФ. **1986**. Т. 90. С. 1707.
167. *Таунсенд А. А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом.—М.: ИЛ. 1959.
168. *Townsend A. A.*//*J. Fluid Mech.* **1970**. V. 41. P. 13.
169. *Beuillaqua P. M., Lykoudis P. S.*//*Ibidem*. **1978**. V. 89. P. 589.
170. *Achenbach E.*//*Ibidem*. **1974**. V. 62. P. 209.
- [171] *Tarn C. K. W.*//*Ibidem*. **1987**. V. 89. P. 257.
172. *Tarn C. K. W.*//*Ibidem*. P. 373.
173. *Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В.* Аэроакустическис взаимодействий.—М.: Машиностроение. 1978.
- 174*. *Власов Е. В., Гиневский А. С.*//Акуст. ж. **1980**. Т. 26. С. 1.
- 175*. *Мансфельд А. Д., Рабинович М. И., Сущик. М. М.*//Труды II Всесоюзного симпозиума по физике акустогидродинамических явлений и оптоакустике.—М.: Наука, 1982.—С. 12.
- 176*. *Гиневский А. С., Власов Е. В.* //Модели механики сплошных сред/Под ред. Г. В. Годияка.—Новосибирск, 1983.—С. 91.
- 177*. *Hussain A. K. M. F.*//*Phys. Fluids*. **1983**. V. 26. P. 2816.
- 178* *Hussain A. K. M. F.*//*J. Fluid Mech.* **1986**. V. 173. P. 303.
- 179*. *Ho C. M., Huerre P.* //Ann. Rev. Fluid Mech. **1984**. V. 16. P. 365.
- 180*. *Власов Е. В., Гиневский А. С.*//Итоги науки и техники. Сер. «Механика жидкости и газа».—М.: ВИНТИ АН СССР, 1986—Т. 20. С. 3.
- [181] *Власов Е. В., Гиневский А. С.*//Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа». **1967**. № 4. С. 133.
182. *Власов Е. В., Гиневский А. С.*//*Ibidem*. **1973**. № 6. P. 37.
183. *Исатаев С. И., Тарасов С. Б.*//*Ibidem*. **1971**. № 2. С. 164.
184. *Фурлетов В. И.*//*Ibidem*. **1969**. № 5. С. 166.
185. *Иванов Н. Н.*//*Ibidem*. **1970**. № 4. С. 182.
186. *Иванов Н. Н.*//ЖПМ и ТФ. **1972**. № 1. С. 58.
187. *Навознов О. И., Павельев А. А.* //Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа». **1980**. № 4. С. 18.
188. *Павельев А. А., Цыганок В. И.*//*Ibidem*. **1982**. № 6. P. 36.
189. *Кудряшов А. В., Мансфельд А. Д., Рабинович М. И., Сущик М. М.*//ДАН СССР. **1984**. Т. 277. С. 61.
190. *Кудряшов А. В., Мансфельд А. Д., Рабинович М. И., Сущик М. М.*//Ультразвуковая диагностика.—Горький: ИПФ АН СССР, 1983.—С. 182.
- [191] *Hussain A. K. M. F., Hasan M. A. Z.*//*J. Fluid Mech.* **1985**. V. 150. P. 159.
192. *Hussain A. K. M. F., Zaman K. B. M. Q.*//*Ibidem*. **1980**. V. 101. P. 493.
193. *Liepmann H. W.; Nosenchuck D. M.*//*Ibidem*. **1982**. V. 118. P. 201.
194. *Thomas A.S.*//*Ibidem*. **1983**. V. 137. P. 233.
195. *Громов П. Р., Зобнич А. Б., Кияшко С. В., Рабинович М. И., Сущик М. М.*//Автоколебания в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью.—Препринт ИПФ АН СССР № 135—Горький, 1986.
196. *Громов П. Р., Зобнин А. Б., Кияшко С. В., Сущик М. М.*//Акуст. ж. **1988**. Т. 34. С. 349.
197. *Domaradzki J. A., Metcalfe R. W.*//*Phys. Fluids*. **1987**. V. 30. P. 695.
198. *Carpenter P. W., Garrad A. D.*//*J. Fluid Mech.* **1986**. V. 170. P. 199.
199. *Bak B.*//Rep. Prog. Phys. **1982**. V. 45. P. 587.
200. *Aubry S.*//Physica. Ser. D. **1983**. V. 7. P. 240.
- [201] *Pal D., Kelly R.E.*//Proc. of the 6th Internat. Heat Transfer Conference.—Toronto: Natl. Res. Council of Canada, 1978—V. 2. P. 235.
202. *Kelly R. E., Pal D.*//*J. Fluid Mech.* **1978**. V. 86. P. 433.
203. *Lowe M., Gollub J. P.*//Phys. Rev. Ser. A. **1985**. V. 31. P. 3893.
- 204*. *Lowe M., Albert B. S., Gollub J. P.*//*J. Fluid Mech.* **1986**. V. 173. P. 253.
205. *Coulett P.*//Phys. Rev. Lett. **1986**. V. 56. P. 724.
206. *Elphick C.*//*J. Phys. Ser. A*. **1986**. V. 19. P. L877.

- 207*. *Lvov V. S., Predtechensky A. A., Chernykh A. I.*//Nonlinear Dynamics and Turbulents/Eds G. I. Barenblatt et al.—Boston; London; Melbourne: Pitman, 1983.— P. 238.
208. *Беляев Ю. Н., Монахов А. А., Щербаков С. А., Яворская И. М.*//ДАН СССР. **1984**. Т. 279. С. 51.
209. *Couillet P., Elphick C., Repaux D.*//Phys. Rev. Lett. **1987**. V. 58. P. 431.
210. *Ciliberto S., Rubio M. A.*//Ibidem. P. 2652.
- [211] *Ciliberto S., Bigazzi P.*//Ibidem. **1988**. V. 60. P. 286.
212. *Pocheau A., Croquette V., Le Gal P.*//Phys. Rev. Lett. **1985**. V. 55. P. 1094.
213. *Croquette V., Le Gal P., Pocheau A.*//Phys. Scripta. **1986**. V. 113. P. 135.
- 214*. *Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М.*//Ж.ЭТФ. **1986**. Т. 91. С. 2070.
215. *PotEAU Y., Manneville P.*//Comm. Math. Phys. **1980**. V. 79. P. 189.
216. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.*//ЖЭТФ. **1985**. Т. 89. С. 92.
217. *Колмогоров А. Я.*//ДАН СССР. **1941**. Т. 30. С. 299.
218. *Taylor R. J.*//Austr. J. Phys. **1955**. V. 8. P. 535.
219. *Gibson M. M.*//J. Fluid. Mech. **1963**. V. 15. P. 161.
220. *Ueroi M. S., Freymyth P.*//Phys. Fluids. **1969**. V. 12. P. 1359.
- [221] *Champagne F. H., Harris V. G., Corsin S.*//J. Fluid. Mech. **1970**. V. 41. P. 81.
- 222*. *Champagne F. H.*//Ibidem. **1978**. V. 86. P. 67.
223. *Bracket M. E. et al.*//Pkys. Rev. Lett. **1986**. V. 57. P. 683.
224. *Babino A. et al.*//J. Fluid. Mech. **1987**. V. 183. P. 379.
225. *Kida S., Sugihara M.*//J. Phys. Soc. Japan. **1981**. V. 50 P. 1785.
226. *Yamada M., Ohkitani K.*//Phys. Rev. Lett. **1988**. V. 60. P. 983.
227. *Yamada M., Ohkitani K.*//Phys. Lett. Ser. A. **1988**. V. 134. P. 165.
228. *Обухов А. М.*//ДАН СССР. **1941**. Т. 32. С. 22.
229. *Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E. J., Antonia A. R.*//J. Fluid. Mech. **1984**. V. 140. P. 63.
230. *Новиков Е. А., Стюарт Р. В.*//Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». **1964**. Т. 3. С. 408.
- [231] *Новиков Е. Л.*//ДАН СССР. **1969**. Т. 184. С. 1072.
232. *Новиков Е. Л.*//ПММ. **1970**. Т. 35. С. 266.
233. *Kraichman R. H.*//J. Fluid Mech. **1974**. V. 63. P. 305.
234. *Frisch U., Parisi G.*//Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics/Eds M. Ghil, R. Benzi, G. Paris.— Amsterdam: North-Holland, 1984.—P. 84.
235. *Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A.*//J. Phys. Ser. A. **1984**. V. 17. P. 3521.
236. *Paladin G., Vulpiani A.*//Phys. Rep. **1987**. V. 156. P. 147.
237. *Meneveau C., Sreenivasan K. P.*//Nucl. Phys. Ser. B. **1987**. V. 2. P. 49.
238. *Kraichnan R. H., Panda R.*//Phys. Fluids. **1988**. V. 31. P. 2395.
239. *Tsinober A., Levich E.*//Phys. Lett. Ser. A. **1983**. V. 99. P. 231.
240. *Levich E.*//Phys. Rep. **1987**. V. 151. P. 129.
- [241] *Pelz R. B., Yakhoi V., Orszag S. A., Shtilman L., Levich E.*//Phys. Rev. Lett. **1985**. V. 54. P. 2505
242. *Kit E., Tsinober A., Balint J. L., Wallace J. M., Levich E.*//Phys. Fluids. **1987**. V. 30. P. 3323
243. *Rogers M. M., Moin P.*//Ibidem. P. 2662.
244. *Grappin R., Leorat J.*//Phys. Rev. Lett. **1987**. V. 50. P. 1100.
245. *Grappin R., Lsorat J., Pouquet A.*//J. de Phys. **1986**. T. 47. P. 1127.