

533.9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СДВИГОВЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

Ю. А. Степаняни, А. Л. Фабрикант

(Институт прикладной физики АН СССР, Горький)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	83
2. Энергия и импульс волн в движущейся среде	84
2.1. Волновой импульс и квазичастицы. 2.2. Импульс волнового пакета. 2.3. Поглощение пакета поверхностных волн. Остаточный вихрь.	
3. Сверхотражение	93
3.1. Задача Майлса — Рибнера. 3.2. Возбуждение тангенциального разрыва падающей волной. 3.3. Отрицательная диссипация в движущейся среде.	
4. Волны на тангенциальном разрыве	100
4.1. Граница раздела между тяжелой и легкой жидкостью. 4.2. Внутренние гравитационные волны. 4.3. Волны Россби на тангенциальном разрыве.	
5. Резонансное взаимодействие волн с течением	108
5.1. Плазменно-гидродинамическая аналогия. 5.2. Резонансное усиление звука. 5.3. Резонансный механизм генерации ветровых волн. 5.4. Внутренние гравитационные волны в критическом слое.	
6. Рассеяние волн на вихрях	116
6.1. Алгебраический метод для цилиндрических вихрей. 6.2. Усиление звука вихрями.	
7. Заключение	120
Список литературы	121

1. Введение. Колебания и волны в гидродинамических течениях могут рассматриваться в различных аспектах. Во-первых, сюда относятся вопросы генерации волновых возмущений сдвиговыми потоками, что составляет одну из основных задач теории гидродинамической неустойчивости. Простейшие типы неустойчивости для течений типа тангенциального разрыва скорости найдены еще в прошлом веке (см., например, [1]); их качественное объяснение приведено в работах [2, 3]. Исследование волновых возмущений в течениях с непрерывным профилем скорости, начатое в основополагающих работах Рэлея и Гейзенберга [4, 5], оказалось весьма трудной задачей. Для ее решения были развиты асимптотическая теория уравнений с сингулярными возмущениями [6, 7], а также численные методы [1, 8], позволяющие провести детальный анализ широкого класса течений.

Однако усилия, затраченные на преодоление математических трудностей в развитии теории, зачастую не способствовали прояснению физической картины происходящих процессов. В этом отношении весьма полезной для выработки интуиции, понимания качественной стороны явлений, а нередко и для выбора наиболее оптимальных методов расчета оказалась развитая к настоящему времени аналогия между взаимодействием волна — поток в гидродинамических системах и соответствующими явлениями в электродинамике, физике плазмы и электронике. Такая аналогия, впервые отмеченная в работе Кейса [9], далее развивалась в различных направлениях [10—20]. В результате было уста-

новлено, что такие понятия, как волны отрицательной энергии, отрицательная диссипация, резонанс волны с потоком и т. д., лежащие в основе теории плазменных неустойчивостей, успешно работают и в гидродинамических задачах. На основе плазменно-гидродинамической аналогии дано физическое объяснение известных результатов гидродинамики (правило обхода Линя резонансных особых точек в сдвиговых течениях, неустойчивость течений с точкой перегиба в профиле скорости [14], теория Майлса генерации ветровых волн [20], а также исследован ряд новых гидродинамических эффектов — аналоги линейного и нелинейного затухания Ландау в сдвиговых течениях [20], квазилинейного взаимодействия и вынужденного рассеяния волн на частицах для ветрового волнения в океане [21, 22], циклотронного поглощения при рассеянии звука на вихрях [23, 24] и др. Аналогия может «работать» и в обратную сторону, позволяя исследовать, например, некоторые типы плазменных неустойчивостей, отталкиваясь от известных результатов гидродинамики [14]. Подобного рода исследования выделяют некоторые эффекты, общие для систем различной физической природы, и помогают вырабатывать единый общезначимый язык, облегчающий взаимообмен идеями и методами различных областей физики.

Такой подход оказывается полезным и для исследования другого широкого класса задач — о преломлении, поглощении и усилении в гидродинамических течениях волн, генерируемых внешними источниками. В настоящее время механизмы взаимодействия волн со сдвиговыми потоками изучены в физике атмосферы и океана для ветровых волн [25], внутренних гравитационных [26] и других волн гидродинамического типа [27]. Аналогичные процессы для звуковых волн рассматривает интенсивно развивающаяся в последнее время аэрогидроакустика (в связи с проблемой генерации и поглощения аэродинамических шумов и другими практически важными задачами [28]). Исследование распространения электромагнитных волн в среде со сдвиговыми потоками (см., например, [29, 30]) представляет также большой интерес для различных задач физики плазмы (лабораторной и космической), электроники СВЧ, магнитной гидродинамики.

Можно выделить два основных механизма усиления (поглощения) волн, распространяющихся в потоках идеальной жидкости. Один из них определяется взаимодействием с волнами отрицательной энергии в движущейся среде [31] (это соответствует механизму так называемой «гидродинамической» неустойчивости потока в плазме), а другой — за счет резонансного взаимодействия с неравновесными частицами (аналог механизма кинетической неустойчивости плазменных волн). Возможен также диссипативный механизм, когда усиление волн в потоке возникает лишь при наличии вязкой диссипации, потерь на излучение и т. п. — это соответствует механизму диссипативной неустойчивости волн в плазме.

Наметившийся единый подход к задачам распространения волн различной физической природы в сдвиговых течениях позволяет подытожить исследования различных колебательных и волновых явлений в гидродинамических потоках, а также предложить возможные направления дальнейших исследований.

2. Энергия и импульс волн в движущейся среде. При интерпретации результатов теории волн в потоках широко используются законы сохранения энергии и импульса волн. Однако определение энергии и импульса волн в среде обычно обходит стороной некоторые не вполне ясные аспекты этих понятий. Возникает неудовлетворенность, связанная с тем известным обстоятельством, что при вычислении величин второго порядка малости по амплитуде волны, какими являются, вообще

говоря, импульс и энергия, необходимо, очевидно, учитывать изменения средних параметров среды и, в частности, индуцированные волной течения. При этом существует неоднозначность разделения полей физических переменных на поле волны и движение среды. В электродинамике отражением этих вопросов является длительная дискуссия об импульсе Абрагама и Минковского для электромагнитных волн в диэлектрике [32]. В гидродинамических задачах вопрос об импульсе квазимонохроматических волн также достаточно запутан (см., например, [33]).

Настоящий раздел посвящен детальной расшифровке понятий импульса и энергии волн в среде и уточнению их физического смысла. Анализ этих вопросов, основанный на сравнении с классическими гидродинамическими течениями [34], приводит к такому определению импульса квазимонохроматической волны, которое естественным образом вписывается в общезначимые представления о квазичастицах как квантах волновых возбуждений в среде, и в то же время учитывает наличие индуцированных волной средних течений, определяющих ряд физических эффектов.

Таким образом, изложенный ниже подход дает физическое обоснование традиционному (как правило, формальному) использованию понятий квазиэнергии и квазиимпульса.

2.1. Волновой импульс и квазичастицы. Энергия и импульс волн должны, строго говоря, определяться в рамках нелинейной задачи и учитывать изменения средних значений физических полей [35], возникающие как результат «детектирования» волны, т. е. нелинейной генерации низкочастотного возмущения, повторяющего форму огибающей высокочастотного поля. Обычно, однако, поступают иначе. Решая линеаризованную задачу, определяют плотность квазиэнергии \mathcal{E} и квазиимпульса \mathbf{P}_w через адиабатический инвариант (волновое действие) N , имеющий смысл числа квазичастиц при квантовом подходе:

$$\mathcal{E} = \omega N, \quad \mathbf{P} = \mathbf{k}N. \quad (2.1)$$

Величина N не зависит от выбора системы координат, и поэтому удобно вычислять квазиэнергию $\mathcal{E}_0 > 0$ в неподвижной среде, а затем, пользуясь преобразованием Галилея, можно получить в движущейся со скоростью \mathbf{U} среде:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathbf{P}_w \mathbf{U} = \mathcal{E}_0 \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{U}}. \quad (2.2)$$

Отметим, что при $\omega - \mathbf{k} \mathbf{U} < 0$ величина \mathcal{E} становится отрицательной: именно в этом смысле говорят о волнах отрицательной энергии [35].

Для широкого класса задач (в частности линейных) мы можем пользоваться представлениями о квазичастицах, опираясь на формулы (2.1), (2.2). Законы сохранения квазиэнергии и квазиимпульса следуют из линеаризованных уравнений движения, усредненных по фазе волны, и связаны с однородностью и стационарностью невозмущенной среды [33]. Однако при исследовании таких вопросов, как взаимодействие волн с течениями, нелинейные эффекты самовоздействия волн и др., приходится вспоминать первичные определения энергии и импульса как сохраняющихся величин, связанных с независимостью законов движения от времени и места. При этом необходимо усреднить по фазе волны полные выражения для энергии и импульса, вытекающие из исходной (нелинейной) системы уравнений, выделяя затем квадратичную по амплитуде часть, обусловленную волной. Квадратичные слагаемые, которые отбрасывались при линеаризации исходной системы, могут, вообще говоря, дать вклад, сравнимый с величинами \mathcal{E} и \mathbf{P}_w . Движения

соответствующие этим слагаемым, имеют смысл индуцированных волной течений.

Если невозмущенная среда неподвижна, то индуцированное волной течение, скорость которого квадратична по амплитуде, очевидно, не дает вклада в кинетическую энергию. Что же касается импульса волнового движения, то его удобно разделить на квазиимпульс («псевдоимпульс» по терминологии [33]), получаемый в рамках линейного приближения, и импульс индуцированного волной течения. Характерные черты этих двух составляющих можно увидеть на примере гравитационных волн на поверхности тяжелой жидкости.

Двумерные гравитационные волны на глубокой воде описываются нелинейной граничной задачей:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 &= 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

при $y = \eta$,

где φ — потенциал скорости, $\mathbf{V} = (u, v) = \nabla\varphi$, η — вертикальная компонента смещения частиц $\xi = (\xi, \eta)$. Решения линеаризованной задачи имеют вид

$$\varphi = \varphi_0 \exp(-i\omega t + ikx + |k|y)$$

при условии

$$\omega^2 = g|k|.$$

Если среднее течение отсутствует ($\langle \mathbf{V} \rangle = 0$), то средняя лагранжева скорость частицы (лагранжев дрейф) [25] такова:

$$\langle u_L \rangle = \langle u \rangle + \langle (\xi \nabla) V \rangle = \left\langle \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle = \frac{k}{\omega} \langle u^2 + v^2 \rangle. \quad (2.4)$$

Средняя лагранжева скорость уменьшается с глубиной $\sim \exp(2|k|y)$ и определяет горизонтальный перенос массы:

$$S = \rho \int_{-\infty}^0 \langle u_L \rangle dy = \frac{\rho}{2|k|} \langle u_L(0) \rangle = \rho \langle u(0) \eta \rangle. \quad (2.5)$$

Этот же поток массы можно получить и в эйлеровом описании, если учитывать перенос массы в слое между вершинами и впадинами волн (стоксов перенос):

$$S = \left\langle \rho \int_{-\infty}^{\eta} u dy \right\rangle = \rho \langle u(0) \eta \rangle. \quad (2.6)$$

Стоксов перенос однозначно связан с квазиимпульсом волны:

$$P_W = \int_{-\infty}^0 \langle \rho u_L \rangle dy \equiv S = \frac{k}{\omega} \mathcal{E}. \quad (2.7)$$

Индуцированное квазимонохроматической волной среднее течение в идеальной несжимаемой жидкости может быть найдено во втором

порядке по амплитуде путем усреднения граничной задачи (23):

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\langle \eta \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\rangle_{y=0}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + gh &= 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где $\Phi = \langle \phi \rangle$ и $h = \langle \eta \rangle$ — средние по периоду потенциал и отклонение поверхности. Учитывая, что групповая скорость волн мала по сравнению с фазовой скоростью длинноволновых возмущений, имеющих масштаб среднего течения, можно пренебречь производными по времени. В результате получаем квазистатическую задачу о течении под движущимся распределением источников массы на поверхности $y=0$. Очевидно, источником массы служит градиент потока массы S , связанного со стоковым переносом. Для пакета поверхностных волн возникает картина линий тока, которую в этом приближении легко найти, пользуясь аналогией с электростатикой: она совпадает с картиной силовых линий зарядов на плоскости $y=0$ (рис. 1).

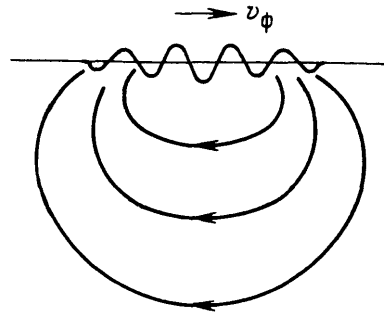


Рис. 1. Среднее течение, индуцируемое пакетом гравитационных поверхностных волн в идеальной жидкости

Нетрудно показать, что в каждом сечении $x = \text{const}$ стоков перенос массы полностью компенсируется индуцированным противотечением. Действительно, из (2.8) имеет в квазистатическом приближении:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \int_{-\infty}^0 \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy + \rho \left\langle \eta \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\rangle_{y=0} \right) = 0.\tag{2.9}$$

Первое слагаемое в круглой скобке дает поток массы в индуцированном течении через сечение $x = \text{const}$, а второе — поток массы стокова переноса.

Если определить полный импульс среды, связанный с бегущим волновым пакетом, как интеграл по объему

$$\mathbf{I} = \int \rho \mathbf{V} d^3r,\tag{2.10}$$

то для решения, типа изображенного на рис. 1, придем к выводу, что полный импульс пакета гравитационных волн равен нулю. В действительности определение величины полного импульса волнового пакета требует более тщательного решения, которое может быть проведено путем сравнения с определением импульса локализованных течений в гидродинамике.

2.2. Импульс волнового пакета. Локализованные течения в идеальной несжимаемой жидкости генерируются распределением источников массы или завихренности в ограниченной области. К этому классу течений относятся, в частности, потенциальное обтекание твердых тел и локализованные вихри. Нетрудно определить перенос массы в таких течениях. Для вихрей полный поток массы через любую заданную поверхность, очевидно, равен нулю (следствие несжимаемости). Для равномерно движущегося шара поток массы через плоскость S

(рис. 2) направлен назад — в направлении, противоположном скорости шара U .

В то же время величину полного импульса течения вычислить не просто. В частности, интеграл

$$I = \int \rho \mathbf{V} d^3r, \quad (2.11)$$

взятый по бесконечному объему, как известно, не является абсолютно сходящимся [36], так как потенциал скорости на больших расстояниях имеет вид

$$\varphi = \left(\mathbf{A} \nabla \frac{1}{r} \right) = - \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{r})}{r^3}, \quad (2.12)$$

а поле скорости спадает $\sim r^{-3}$, создавая неинтегрируемую особенность при $r \rightarrow \infty$.

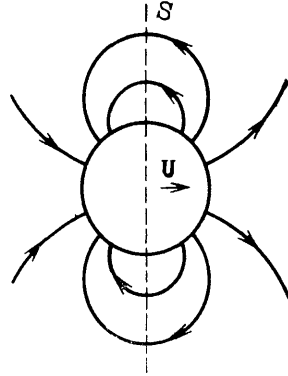


Рис. 2. Потенциальное обтекание шара

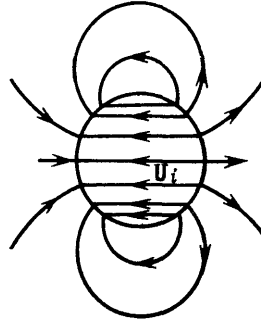


Рис. 3. Потенциальное течение, генерируемое сферическим распределением источников

Импульс течения определяют, рассматривая нестационарные процессы, связанные с изменением кинетической энергии $dE = U dP$. В частности, для шара радиуса R имеем [36]

$$\mathbf{A} = \frac{UR^3}{2}, \quad \mathbf{P} = \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{A}. \quad (2.13)$$

Отметим, что интеграл (2.11) по сферическому слою конечной толщины, окружающему шар, обращается в нуль. Импульс течения (2.13), таким образом, задается вкладом от бесконечно удаленной области, который однозначно определяется дипольным моментом \mathbf{A} .

Физический смысл этого результата можно понять, заменяя потенциальное обтекание шара некоторым искусственным течением, генерируемым распределением источников и стоков по сфере радиуса R (рис. 3). Во внешней области сферы течение имеет вид (2.12), а внутри сферы — это однородное поле скорости $\mathbf{U}_i = -\mathbf{A}/R^3$. Такое поле является решением известной электростатической задачи о поляризации диэлектрического шара в однородном электрическом поле [37]. Интегрируя по внутренности сферы, получим

$$\mathbf{P}_i = \int \rho \mathbf{V} d^3r = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \mathbf{U}_i = -\frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{A}.$$

В то же время вклад \mathbf{P}_e внешней области в величину полного импульса такой же, как и для обтекания шара, и определяется выражением (2.13). В результате полный импульс этого течения

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_i = 0.$$

Рассмотрим теперь элементарную пару точечных источника и стока с расходом Q , расположенных на расстоянии l и образующих диполь с моментом $\mathbf{A} = Ql/4\pi$. Если источник и сток возникли одновременно в момент $t_0 = 0$, то течение представляет собой суперпозицию поля точечного источника, ограниченного сферическим скачком уплотнения и поля точечного стока, ограниченного скачком разрежения (рис. 4). При $t \gg l/c$ (c — скорость звука) течение внутри сферы радиуса $r = ct$ совпадает с течением идеальной несжимаемой жидкости и имеет дипольную асимптотику (2.12). Слои v_+ и v_- , образованные двумя эксцентрическими сферами, содержат поле скорости $\mathbf{V}_e = Q\mathbf{r}/4\pi r^3$. Именно эти слои определяют импульс дипольного течения:

$$\mathbf{P}_e = 2 \int_{v_+} \rho \mathbf{V}_e d^3r = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{A}. \quad (2.14)$$

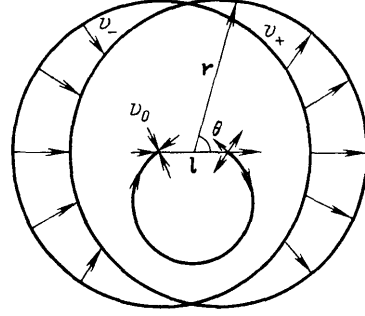


Рис. 4. Нестационарное течение, образуемое диполем, возникшим в начальный момент времени $t_0 = 0$

Произвольное распределение источников $Q(\mathbf{r})$ создает более сложное течение, потенциал которого определяется уравнением Пуассона $\Delta\phi = Q(\mathbf{r})$. Но если $\int Q d\mathbf{v} = 0$, то в дальней зоне — на расстоянии, превышающем размер области источников, — потенциал (2.12) определяется полным дипольным моментом \mathbf{A} . Выражение (2.13) дает вклад в импульс \mathbf{P}_e от этой дальней зоны. Для потенциального обтекания шара это выражение определяет полный импульс: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_e$. Для других течений необходимо учитывать вклад \mathbf{P}_i области источников. Таким образом, можно, в частности, найти импульс локализованного вихря, для которого [3]:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{r}\Omega] d^3r, \quad \mathbf{P}_i = \frac{1}{3} \rho \int [\mathbf{r}\Omega] d^3r, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e = \frac{1}{2} \rho \int [\mathbf{r}\Omega] d^3r, \quad \mathbf{P}_e = \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{A} = \frac{1}{6} \rho \int [\mathbf{r}\Omega] d^3r.$$

Из всего сказанного следует, что импульс локализованного течения в несжимаемой жидкости необходимо определять с учетом реакции бесконечно удаленной области, возникающей при генерации этого течения. Для расчета этой реакции в явном виде необходимо учитывать конечную скорость распространения возмущений. В частности, при учете сжимаемости часть импульса уносят звуковые волны, генерируемые возникающим локализованным течением. Результат, однако, не зависит от типа распространяющихся возмущений и от эволюции течения во времени: полный импульс дальней зоны определяется выражением (2.13) и зависит от дипольного момента \mathbf{A} .

Развитый выше подход к определению импульса естественным образом распространяется и на локализованные течения, индуцированные квазимонохроматическими волновыми цугами. Рассмотрим здесь наиболее простую модель поверхностных гравитационных волн, когда протяженность волнового пакета $l \gg H \gg \lambda = 2\pi/k$, так что для средних течений справедливо приближение мелкой воды, в то время как распространение гравитационных волн можно рассматривать в приближении глубокой воды. Генерация волнового пакета сопровождается возникновением источника на переднем фронте и стока на заднем фронте волны. Распределение источников связано со стоковым переносом массы, а

их производительность (см. (2.7))

$$Q = -\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial P_w}{\partial x}.$$

При возникновении источника и стока происходит излучение перепадов уровня поверхности

$$\Delta h = \frac{1}{2\rho c_H} \int_{x-c_H t}^{x+c_H t} Q dx$$

(рис. 5), которые в приближении мелкой воды распространяются без дисперсии со скоростью $c_H = (gH)^{1/2}$ [36]. В несжимаемой жидкости, очевидно, скорость течения под волной подъема уровня

$$u = \Delta h c_H H^{-1} = \frac{1}{2\rho H} \left(\int Q dx \right)^{-1} = \frac{P_w}{2\rho H}.$$

Уходящие от волнового пакета возмущения с масштабом огибающей уносятся с собой импульс:

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} H u dx = \int_{-\infty}^{\infty} P_w dx. \quad (2.16)$$

Таким образом, хотя стоков перенос полностью компенсируется индуцированным противотечением и поток массы через любое сечение равен нулю, полный импульс с учетом быстро ушедших длинноволновых

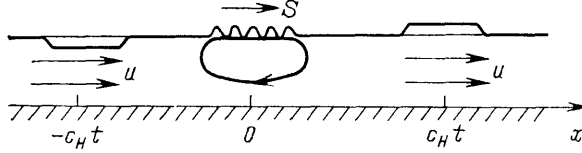


Рис. 5. Среднее течение, возникающее на мелкой воде при генерации пакета поверхностных волн

возмущений равен в точности квазиимпульсу (2.16). Естественно, для того чтобы возбудить волновой пакет, необходимо приложить импульс силы точно такой же величины (2.16). В этом случае импульс и энергию излучаемых квазимонохроматических волн можно рассматривать в рамках линейной теории, игнорируя индуцированные течения.

Аналогичная картина будет и при $H \rightarrow \infty$. При этом течение, изображенное на рис. 1, имеет дипольный момент

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} x Q dx.$$

Импульс течения складывается из двух частей. Первая обусловлена областью вблизи волнового пакета — этот вклад в точности равен нулю, так как здесь стоков перенос компенсируется индуцированным противотечением. Вторая часть импульса представлена вкладом от дальней зоны — она обусловлена распространяющимися длинноволновыми возмущениями, излученными в момент возникновения пакета. В данном случае, очевидно, такими возмущениями являются длинные гравитационные волны [33, 34].

Импульс могут уносить и другие типы возмущений. Например, если вблизи поверхности имеется скачок плотности (пикноклин), то возникновение пакета поверхностных волн сопровождается излучением внутренней волны на пикноклине с длиной волны порядка размера огибающей [38]. При этом, если пикноклин находится достаточно глубоко, то

поверхностные волны непосредственно с пикноклином не взаимодействуют, а возмущение пикноклина определяется лишь индуцированным течением. Распространяющиеся внутренние волны также уносят с собой часть импульса. Однако полный импульс, излучаемый всеми длинноволновыми модами при возникновении волнового пакета, равен в точности квазиимпульсу

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_w dx.$$

2.3. Поглощение пакета поверхностных волн. Остаточный вихрь. Рассмотрим изменения среднего течения, возникающие в результате диссипации волны. Простейший пример здесь — двумерный цуг поверхностной волны. Диссипация его под действием вязкости в пограничном слое на свободной поверхности приводит к возникновению приповерхностного течения [25]. Плотность импульса, связанного со стоковым переносом, после затухания волны переходит в плотность импульса приповерхностного течения. Таким образом, вместо системы источников и стоков, обусловленных градиентами интенсивности стокова переноса, возникает система приповерхностных течений с тем же расходом массы, который был сосредоточен между вершинами и впадинами волны, и с теми же источниками и стоками, обусловленными градиентами этого расхода. В результате на месте затухшего пакета, с которым было связано индуцированное дипольное противотечение (см. рис. 1), в глубине жидкости остается вихрь, составленный из точно такого же дипольного противотечения и приповерхностного течения, принявшего на себя квазиимпульс волны (рис. 6).

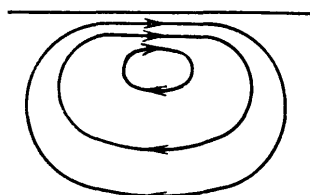


Рис. 6. Остаточный вихрь, возникающий в результате вязкой диссипации поверхностной волны

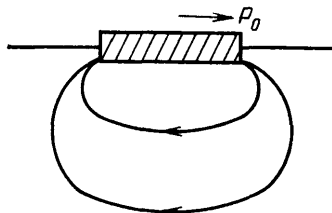


Рис. 7. Движение поплавка, поглотившего поверхностную волну

Отметим, что если волновой пакет распространялся с групповой скоростью, то остаточный вихрь, возникший после затухания волны, движется намного медленнее — со скоростью, пропорциональной интенсивности приповерхностного потока. Чтобы возбудить такой вихрь каким-либо внешним воздействием, пришлось бы приложить импульс силы P_0 . При этом такую же величину импульса унесли бы с собой быстрые длинноволновые возмущения.

Таким образом, при вязком затухании пакета гравитационных волн образуется остаточный вихрь, импульс которого равен импульсу волнового пакета. Картина приповерхностных источников и стоков для средних течений (величина правых частей в системе (2.8)) при этом не меняется, так что излучение длинных волн с масштабом огибающей здесь не происходит *).

Аналогичным образом происходит поглощение волны тонким свободно плавающим телом — поплавком (рис. 7). Поглощенный волновой

*) Однако дальнейшая эволюция вихрей под поверхностью тяжелой жидкости может в некоторых случаях сопровождаться излучением гравитационных волн [128].

пакет отдает поплавок свой импульс, связанный со стоковым переносом (квазиимпульс). В результате поплавков начинает двигаться вдоль фазовой скорости волны и приобретает импульс P_0 . Вес поплавок в гидростатическом равновесии равен весу вытесненной им жидкости. Следовательно, поплавок создает такую же картину дипольного течения и имеет такой же импульс, какой имел бы объем жидкости, заполняющий погруженную часть и движущийся с такой же скоростью. Таким образом, полный импульс течения эквивалентен импульсу вихря на рис. 6, с той разницей, что роль приповерхностного течения играет движущийся поплавок. Как и при образовании остаточного вихря, здесь не происходит излучение длинноволновых возмущений. Индуцированное дипольное противотечение переходит в данном случае в потенциальное обтекание поплавка. Заметим, что обтекание тела в несжимаемой жидкости характеризуется некоторой присоединенной массой [36]. Для тонкого тела эта присоединенная масса равна нулю, и полный импульс совпадает с импульсом самого поплавка P_0 .

По-другому выглядит поглощение волнового пакета закрепленным волнопоглотителем. В этом случае источники и стоки, связанные с градиентом потока массы, исчезают, а вместе с ними исчезает и индуцированное противотечение. Волнопоглотитель принимает в себя импульс P_0 . Одновременно, вследствие изменения поля источников массы, происходит излучение длинноволновых возмущений, которые уносят импульс $(-P_0)$. Эти возмущения уходят, а окрестность волнопоглотителя остается в состоянии полного покоя.

Мы рассматривали выше индуцированные волнами движения в идеальной несжимаемой жидкости. Для волнового пакета в сплошной среде другого типа соответствующая картина может выглядеть по-иному. Например, для электромагнитной волны в упругой среде возникает пондеромоторная сила, действующая на частицы среды в области переднего и заднего фронтов волнового пакета. Результатом действия этой силы в твердом теле является не свободное течение, как это было в однородной жидкости, а конечное смещение частиц, пропорциональное интенсивности волны. При диссипации волны в этом случае не образуется остаточный вихрь, а происходит излучение длинноволновых акустических возмущений [39]. Другая интересная возможность, указанная в работе [39], — черенковское излучение звука волновым пакетом в среде, если его групповая скорость превышает скорость звука.

Индуцированные течения для внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде представляют собой промежуточный случай. В горизонтальной плоскости возникает индуцированное вихревое течение, а движение по вертикали происходит, как в упругой среде: силы плавучести компенсируют действие пондеромоторных сил и возникает конечное вертикальное смещение частиц жидкости, пропорциональное интенсивности волны [40]. Расчет излучения длинноволновых возмущений (с масштабом огибающей волнового пакета) при генерации, диссипации и рассеянии внутренних волн представляет значительный интерес для геофизики (см. работу [41], где сделан первый шаг в этом направлении).

Резюмируя результаты этого раздела, приходим к выводу, что традиционное описание волновых возбуждений в среде, основанное на использовании понятий квазиэнергии, квазиимпульса и волнового действия (числа квазичастиц), имеет определенный физический смысл (см. также [42]). В большинстве случаев квазиэнергия и квазиимпульс могут быть приняты в качестве «истинных» энергии и импульса волнового пакета в движущейся среде. Это обстоятельство имеет место, в частности, при исследовании различных задач поглощения и излучения волн, а также в задачах нелинейного взаимодействия волн малой амплитуды [16].

В дальнейшем, рассматривая различные вопросы взаимодействия волн с течениями, мы будем использовать понятие энергии волны именно в принятом здесь значении.

3. Сверхотражение. Здесь мы рассмотрим различные аспекты одного из наиболее эффективных механизмов усиления и поглощения волн в неоднородно движущейся среде, связанного с наличием волн отрицательной энергии или изменением знака диссипации в гидродинамическом потоке. Особенности этого механизма удобно изучать на примере простейших гидродинамических течений — тангенциального разрыва (ТР) скорости и других течений с кусочно-постоянной завихренностью, — где эффект проявляется в чистом виде и допускает аналитическое исследование. Эффект усиления (сверхотражение) впервые был отмечен для звука, падающего на ТР [43, 44], а затем рассматривался и для других типов волн: внутренних гравитационных [45], электромагнитных [46] и др.

3.1. Задача Майлса — Рибнера. Обсудим детально наиболее простую задачу об отражении монохроматической $\exp(-i\omega t + ikx)$ звуковой волны от ТР (рис. 8). Сшивая решения для потенциала, давления p и вертикального (в направлении y) смещения η частиц в неподвижной (1) и движущейся (2) средах

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{iq_1 y} + R e^{-iq_1 y}, \quad p_1 = i\omega \rho \varphi_1, \\ \eta_1 &= -\frac{q_1}{\omega} (e^{iq_1 y} - R e^{-iq_1 y}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\varphi_2 = T e^{iq_2 y}, \quad p_2 = i(\omega - kU) \rho \varphi_2,$$

$$\eta_2 = -\frac{q_2}{\omega - kU} T e^{iq_2 y},$$

с помощью граничных условий

$$p_1 = p_2|_{y=0}, \quad \eta_1 = \eta_2|_{y=0}$$

найдем коэффициенты отражения и преломления волн давления:

$$R = \frac{(q_1/\omega^2) - [q_2/(\omega - kU)^2]}{(q_1/\omega^2) + [q_2/(\omega - kU)^2]}, \quad T = \frac{2q_1/\omega(\omega - kU)}{(q_1/\omega^2) + [q_2/(\omega - kU)^2]}, \quad (3.2)$$

где $q_1 = [(\omega^2/c^2) - k^2]^{1/2}$, $q_2 = \{[(\omega - kU)^2/c^2] - k^2\}^{1/2}$, c — скорость звука. Знак вертикальной компоненты волнового вектора в движущейся среде определяется условием излучения $v_{\text{гп}y} > 0$, которое может быть получено из решения начальной задачи [47]. Из дисперсионного уравнения $(\omega - kU)^2 = c^2(k^2 + q_2^2)$ следует

$$v_{\text{гп}y} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial q_2} = \frac{c^2 q_2}{\omega - kU}.$$

При $\omega - kU < 0$ условие излучения требует выбрать ветвь $q_2 < 0$. При этом отраженная волна усиливается: $|R| > 1$.

Интерпретация эффекта сверхотражения связана с выяснением знака энергии преломленной волны. Полагая среднюю эйлерову скорость $\langle \mathbf{V} \rangle = 0$ (нет индуцированных течений), получим среднюю плотность

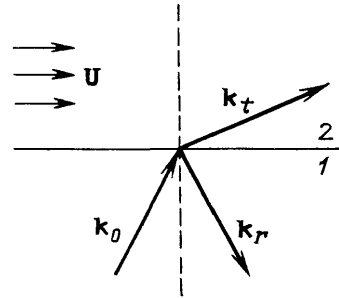


Рис. 8. Отражение и преломление звуковых волн на тангенциальном разрыве. \mathbf{k}_0 — волновой вектор падающей волны, \mathbf{k}_r и \mathbf{k}_t — волновые векторы отраженной и преломленной волн

импульса монохроматической звуковой волны в покоящейся среде:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \tilde{\rho} \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{k}}{2\rho c^2 \omega} |\rho|^2 = \frac{k}{\omega} \mathcal{E}_0 \quad (3.3)$$

(звездочкой обозначено комплексное сопряжение), где $\tilde{\rho} = \rho/c^2$, ρ и $\mathbf{v} = (\mathbf{k}/\omega)\rho$ — амплитуды колебаний плотности, давления и скорости, рассчитанные в рамках линейной задачи, а

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\rho|^2}{2\rho c^2} \right) = \frac{|\rho|^2}{2\rho c^2}$$

— средняя плотность энергии в покоящейся среде (учитывается равенство средних кинетической и потенциальной энергий в звуковой волне) [36]. Заметим, что импульс здесь, как и для поверхностных волн, связан с дрейфом частиц (средней лагранжевой скоростью):

$$\mathbf{P} = \rho \langle \mathbf{V}_L \rangle = \frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} [(\zeta, i, \mathbf{k}) \mathbf{v}] = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \frac{|\rho|^2}{2\rho c^2}.$$

В движущейся среде, учитывая, что амплитуда давления не зависит от системы отсчета, получаем из (2.2) среднюю плотность энергии:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{U}} = \frac{\omega |\rho|^2}{2\rho c^2 (\omega - \mathbf{k} \mathbf{U})}. \quad (3.4)$$

При $\omega - \mathbf{k} \mathbf{U} < 0$ плотность энергии отрицательна. Вертикальная компонента плотности потока энергии

$$S_y = v_{\text{гp}} \mathcal{E} = \frac{q_2 \omega |\rho|^2}{2\rho (\omega - \mathbf{k} \mathbf{U})^2} = \frac{\rho \omega}{2} q_2 |\varphi|^2.$$

При $q_2 < 0$ поток энергии преломленной волны направлен к разрыву: $S_y < 0$. Таким образом, усиление происходит за счет притока энергии из движущейся среды. При этом в движущуюся среду уходит волна отрицательной энергии. Закон сохранения энергии: $q_1(1 - |R|^2) = q_2|T|^2$ — может быть проверен непосредственно из выражений (9).

Рассмотрим различные режимы отражения в зависимости от угла падения θ и числа Маха $\text{Ma} = U/c$. Представляя волновой вектор падающей волны в виде $\mathbf{k}_0 = (\omega/c)(\sin \theta, \cos \theta)$, перепишем коэффициент отражения (3.2) в виде

$$R = \frac{\cos \theta - [1 - \sin^2 \theta (1 - \text{Ma} \sin \theta)^{-2}]^{1/2}}{\cos \theta + [1 - \sin^2 \theta (1 - \text{Ma} \sin \theta)^{-2}]^{1/2}}. \quad (3.5)$$

Возможны три различных режима отражения (рис. 9):

- 1) Нормальное отражение ($q_2 > 0$, $|R| < 1$) при $\sin \theta < (\text{Ma} + 1)^{-1}$.
- 2) Полное отражение ($\operatorname{Re} q_2 = 0$, $|R| = 1$) при $(\text{Ma} + 1)^{-1} \leq \sin \theta \leq 1$, если $\text{Ma} \leq 2$, и при $(\text{Ma} + 1)^{-1} \leq \sin \theta \leq (\text{Ma} - 1)^{-1}$, если $\text{Ma} > 2$.
- 3) Сверхотражение ($q_2 < 0$, $|R| > 1$) при $\text{Ma} > 2$ и $\sin \theta > (\text{Ma} - 1)^{-1}$.

В последнем случае существует резонансный угол падения

$$\theta_0 = \arcsin \frac{2}{\text{Ma}},$$

для которого $|R| = \infty$. Под этим углом происходит спонтанное черенковское излучение вихревой пелены — бесконечно узкого слоя жидкости, движущегося со скоростью $U/2$, в котором завихренность $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ не равна нулю [43, 44]. В процессе спонтанного излучения в движущуюся среду уходит волна отрицательной энергии, а в неподвижную — волна

положительной энергии. Колебания ТР не затухают и не усиливаются, а энергия излучаемого в неподвижную среду звука черпается из всей движущейся среды.

При

$$Ma \geq 2\sqrt{2}$$

ТР становится устойчивым [36], а неустойчивые поверхностные моды

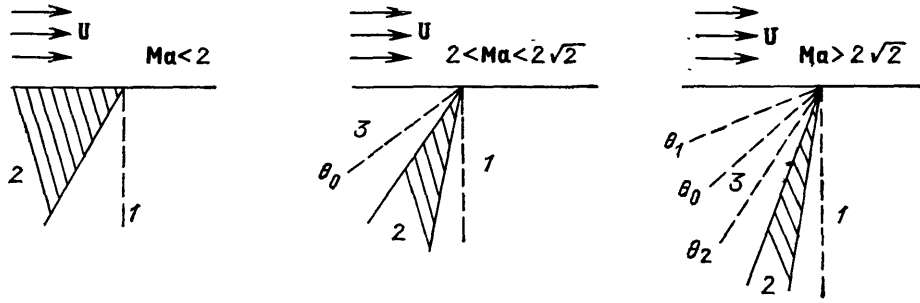


Рис. 9. Различные режимы отражения звука от тангенциального разрыва. Указаны диапазоны углов падения. 1 — нормальное отражение, 2 — полное отражение, 3 — сверхотражение

Кельвина — Гельмгольца превращаются в бегущие по разрыву волны с фазовой скоростью (относительно вихревой пелены):

$$V = \pm c \left[1 + \frac{Ma^2}{4} - (1 + Ma^2)^{1/2} \right].$$

Так как

$$V + \frac{U}{2} > c,$$

то должно возникать излучение Вавилова — Черенкова. Бегущие по ТР возмущения излучают звук под углами $\theta_{1,2}$, для которых

$$\sin \theta_{1,2} = \left\{ \frac{Ma}{2} \pm \left[1 + \frac{Ma^2}{4} - (1 - Ma^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (3.6)$$

Стабилизация ТР в сжимаемом газе при

$$Ma \geq 2\sqrt{2}$$

происходит лишь в рамках двумерной модели. Для возмущений, бегущих под углом к плоскости, изображенной на рис. 8, уменьшается проекция скорости среды на направление волнового вектора, определяющая воздействие движения среды на распространение волн (т. е. фактически доплеровский сдвиг). В результате условие устойчивости таких возмущений принимает вид

$$Ma \cos \theta \geq 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, возмущения, бегущие под достаточно большим углом θ , всегда оказываются неустойчивыми — полная стабилизация сверхзвукового ТР в газе невозможна [48]. Учитывая, что при $\theta = \pi/2$ волна перестает «чувствовать» движение среды, а неустойчивость исчезает, приходим к выводу о существовании максимально неустойчивых возмущений, для которых величина $\text{Im}(\omega/k)$ и соответствующий угол θ_{\max} зависят от параметра Ma [49].

Заметим однако, что решения, полученные в рамках модели двумерной газодинамики, могут быть реализованы для волн на мелкой воде

[36]. Здесь, в частности, становится возможной и рассмотренная выше стабилизация ТР [50] при

$$Ma \equiv \frac{U}{(gH)^{1/2}} > 2\sqrt{2}.$$

Наличие волн отрицательной энергии в сверхзвуковом ТР может приводить также к различным диссипативным неустойчивостям. Например, поместив в движущуюся среду отражающую звук границу, мы добавим тем самым акустическую обратную связь к усиливающему отраженный звук ТР [51]. Возникающую при этом неустойчивость можно интерпретировать как диссипативную неустойчивость мод волновода, образованного ТР и отражающей границей. Эти моды обладают отрицательной энергией, а диссипация происходит за счет излучения звука в неподвижную среду. Неустойчивость такого рода найдена в сверхзвуковых пограничных слоях [1].

«Размытие» ТР, т. е. замена его переходным слоем конечной толщины, также приводит к неустойчивости [52]. Полюса коэффициента отражения $R(\omega, k)$ уходят с действительной оси ω в комплексную плоскость [53]. При этом нейтрально устойчивые собственные моды ТР, сопровождаемые спонтанным излучением звука, превращаются в неустойчивые моды.

Если ТР неустойчив, то задача об отражении плоской монохроматической волны может оказаться некорректной. Правомерность получаемых решений может быть исследована в рамках более сложных моделей, учитывающих нестационарность и неоднородность волнового поля, конечную ширину слоя сдвига и т. д. Ниже мы рассмотрим некоторые результаты для ограниченных в пространстве и времени источников вблизи ТР, позволяющие оценить применимость решения Майлса для плоских волн.

3.2. Возбуждение тангенциального разрыва падающей волной. Рассматривая плоские монохроматические волны, мы полагали звук и собственные колебания разрыва линейно независимыми модами. В то же время звуковые волны от реального источника, обладающего конечными размерами и конечной длительностью, инициируют неустойчивость Кельвина — Гельмгольца на ТР. Решение такой задачи представляет определенные трудности как технического характера, так и в плане физической интерпретации результатов [54]. Трудности возникают даже в простейшей постановке задачи об отражении плоского импульса от границы раздела равновесных стационарных сред, поскольку в отраженном поле формально возникают предвестники, противоречащие соображениям причинности. Проблема устранения предвестников подробно исследована в работе [54], где указано, что предвестники формируются, только если пересечение фронта падающей волны с границей раздела сред длится бесконечно долго. Еще большие трудности возникают при решении задач об отражении волны от неравновесных сред, примером которых может служить ТР; здесь существуют проблемы выбора структуры волнового поля в прошедшей волне, описания формы отраженного сигнала и т. д.

Всех этих трудностей можно избежать, применяя метод Лапласа для решения указанных задач в начальной постановке [55, 56].

Рассмотрим в качестве примера излучение монохроматического точечного источника массы единичной производительности на расстоянии h от ТР [56]. Волновые уравнения в неподвижной и движущейся средах

имеют соответственно вид

$$\Delta\varphi_1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi_1 = \delta(x, y + h), \quad \Delta\varphi_2 - \frac{1}{c^2} \left(-i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi_2 = 0. \quad (3.7)$$

С учетом граничных условий на ТР нетрудно получить решение методом преобразования Фурье по координате x :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2\pi} \int \frac{iR(\omega, k)}{2q_1} \exp[ikx - iq_2(y - h)] dk, \quad (3.8)$$

где φ_0 — поле источника в безграничной неподвижной среде, а $R(\omega, k)$ определяется выражением (3.2).

Контур интегрирования в плоскости переменного k необходимо выбирать исходя из принципа причинности. Имея в виду решение начальной задачи методом Лапласа, мы должны рассматривать комплексные значения ω , соответствующие нарастающим волнам, т. е. лежащие достаточно далеко в верхней полуплоскости ω . При этом полюса коэффициента отражения $R(\omega, k)$ лежат в верхней полуплоскости комплексного k . Тогда интегрирование можно производить по действительной оси k . Для того чтобы аналитически продолжить полученное решение на действительные ω , надо деформировать путь интегрирования в комплексной плоскости k , дополнив действительную ось петлями, обходящими полюса k_i в нижней полуплоскости и дугами, обходящими полюса k_s на действительной оси (рис. 10).

Полюса k_i соответствуют собственным колебаниям разрыва, нарастающим вдоль оси x . Таким образом, полное решение задачи о точечном источнике включает в себя не только бегущие звуковые волны (получаемые интегрированием по действительной оси в (3.8)), но и нарастающую вдоль оси x поверхностную волну на разрыве.

Найденное таким образом решение позволяет установить пределы применимости результатов, относящихся к отражению от неустойчивого ТР монохроматических плоских волн. Действительно, при удалении точечного источника ($h \rightarrow \infty$) падающая цилиндрическая волна стремится к плоской вблизи заданного направления. При этом эффективность возбуждения поверхностной волны экспоненциально убывает. Заметим также, что линии равной амплитуды поверхностной волны — лучи с наклоном $\operatorname{tg} \theta_c = \operatorname{Im} q / \operatorname{Im} k = 1$ ($\theta_c = 45^\circ$) [56]. При углах падения $\theta > \theta_c$ решение в виде преломленных и отраженных волн теряет смысл, так как оно существует на фоне экспоненциально растущего решения типа поверхностной волны. В то же время при $\theta < \theta_c$ поверхностной волной можно пренебречь.

Интересные особенности возникают при возбуждении ТР нестационарным источником [57]. Здесь неприменима модель источника в виде мгновенного точечного импульса $\delta(t)\delta(\mathbf{r})$. В этом случае решение начальной задачи методом Лапласа сильно осложняется: из-за наличия инкремента неустойчивости собственных колебаний ТР, неограниченно растущего с ростом волнового числа, особые точки подынтегрального выражения уходят на бесконечность по мнимой оси в комплексной плоскости ω . Поэтому не удастся выбрать контур в плоскости ω так, чтобы он проходил выше всех особенностей. В работе [57] исследовано отражение звуковых импульсов от ТР. Показано, что для устойчивого ТР ($Ma < 2\sqrt{2}$) звуковое поле является суперпозицией отраженной и боко-

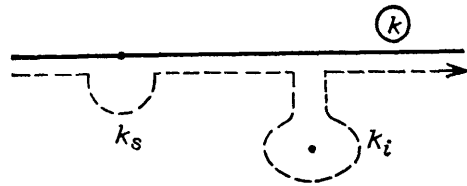


Рис. 10. Контур интегрирования в плоскости комплексного k

вой волн, а также трех собственных волн, излучаемых разрывом под углами $\theta_0, \theta_1, \theta_2$. Для неустойчивого ТР падающий звуковой импульс возбуждает, наряду с боковой и отраженной волнами, расширяющуюся вдоль ТР область нарастающих возмущений, что приводит уже в линейном приближении, по существу, к взрывному (т. е. за конечное время) разрушению ТР. Область неустойчивости в пространстве имеет вид треугольника, форма которого сильно зависит от пространственного спектра источника (это явление названо конфигурационной неустойчивостью).

Особенности конфигурационной неустойчивости ТР в несжимаемой среде с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения проанализированы в [58].

Выражение для звукового поля, возбуждаемого источником вблизи ТР, позволяет найти важную характеристику источника — его акустический импеданс (отношение амплитуды звукового давления на источнике и его производительности [59]). В частности, решение (3.8) позволяет вычислить акустическое сопротивление излучения точечного источника вблизи ТР: $r_a = -\text{Im}[\rho\omega\phi(x=0, y=-h)]$. Для дозвуковых разрывов при $Ma \rightarrow 0$ имеем $q_{1,2} = ik$, и коэффициент отражения имеет простой вид:

$$R = [(\omega - kU)^2 - \omega^2][(\omega - kU)^2 + \omega^2]^{-1}.$$

В этом случае интеграл по действительной оси в (3.8) не дает, очевидно, вклада в r_a . Сопротивление излучения определяется возбуждаемой поверхностной волной, которой соответствует интеграл по контуру вокруг полюса $k_i = (1-i)\omega/U$. В результате имеем

$$r_a = -\frac{1}{4}\rho\omega \sin\left(\frac{2\omega h}{U} + \frac{\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{2\omega h}{U}\right). \quad (3.9)$$

Величина r_a зависит от параметра $2\omega h/U$ и может изменять знак. Последнее обстоятельство позволяет объяснить механизм самовозбуждения некоторых типов свистков [20, 60]. В самом деле, если в качестве источника массы взять, например, резонатор Гельмгольца, то при $r_a < 0$ колебания в резонаторе будут усиливаться.

Следует подчеркнуть, что для самовозбуждения резонатора существенной является не столько неустойчивость потока, сколько наличие собственных колебаний потока, его инерционные свойства. В частности, источник может иметь отрицательное сопротивление излучения, возбуждая даже нейтрально устойчивые колебания в потоке, за счет развития этих колебаний при пролете струи через область, где происходит эффективное взаимодействие с источником [60]. Характерный размер этой области — «длина пролета» — в приведенном выше примере определяется расстоянием h от источника до ТР. Такой механизм аналогичен механизму самовозбуждения электронных СВЧ приборов, где развитие возмущений в электронном потоке на длине пролета h определяется параметром $\omega h/U$ и приводит к группировке электронов [61]. В гидродинамическом потоке внешний толчок (со стороны акустического резонатора) также приводит к эффекту, подобному группировке: в процессе развития собственной моды колебаний потока возмущения скорости переходят в возмущения давления. Последние, в свою очередь, возбуждают резонатор, замыкая таким образом петлю обратной связи. Заметим здесь, что в тех случаях, когда собственные моды электронного потока неустойчивы, инкремент раскачки электромагнитного резонатора определяется, как и в гидродинамике, интегралом в комплексной плоскости волнового числа по контуру, обходящему полюса, соответствующие нарастающим вниз по потоку волнам [62].

3.3. Отрицательная диссипация в движущейся среде. В вязкой среде разрывы размываются в сдвиговые слои конечной

ширины, внутри которых малые возмущения имеют сложную структуру [1]. Можно, однако, оценить влияние вязкой диссипации на отражение звука от движущейся среды, оставаясь в рамках модели ТР, подобно тому, как это сделано в работах [63, 64]. Для этого рассмотрим разрыв между вязкой и идеальной жидкостью, т. е. учтем вязкость только в движущемся слое при $y > 0$. Следует подчеркнуть, что эта простая модель с разрывом вязкости пригодна лишь для качественных оценок и может быть использована для исследования определенных физических эффектов, например влияния слабой диссипации в движущейся среде на распространение звука с заданной амплитудой на границе. Для задач другого типа, в частности при исследовании устойчивости малых возмущений, такая модель может оказаться неприменимой.

Возмущения скорости в движущейся вязкой среде можно представить в виде

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Амплитуды потенциала Φ и функции тока Ψ удовлетворяют уравнениям [63]

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} + q_2^2 \Phi = 0, \quad \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + q_1^2 \Psi = 0, \quad (3.10)$$

где

$$q_1 = [\ell(\omega - kU)v^{-1} - k^2]^{1/2},$$

$$q_2 = \left\{ \frac{(\omega - kU)^2}{c^2} \left[1 - \frac{4iv}{3c^2}(\omega - kU) \right]^{-1} - k^2 \right\}^{1/2},$$

а амплитуда давления

$$P = i(\omega - kU)\rho\Phi \left[1 - \frac{4iv}{3c^2}(\omega - kU) \right]^{-1}. \quad (3.11)$$

Таким образом, общее решение

$$u = ik\Phi_0 e^{iq_2 y} - iq_1 \Psi_0 e^{iq_1 y}, \quad (3.12)$$

$$v = iq_2 \Phi_0 e^{iq_2 y} + ik\Psi_0 e^{iq_1 y}$$

является суперпозицией двух мод: потенциальной, представляющей собой модифицированную вязкостью звуковую волну, и вихревую моду, для которой в линейном приближении отсутствуют колебания давления. При больших числах Рейнольдса $Re = v|\omega - kU|/c^2$ вихревая вязкая мода быстро осциллирует и затухает при $y \rightarrow \infty$.

Динамические граничные условия на ТР — непрерывность нормальных к разрыву компонент потока импульса, т. е. компонент

$$\sigma_{xy} = \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3.13)$$

$$\sigma_{yy} = -P + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\rho v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

тензора напряжений [36]. Эти граничные условия вместе с кинематическим условием*) (непрерывность смещения $\eta = iv(\omega - kU)^{-1}$ позволяет сшить вязкое решение (3.11), (3.12) при $y > 0$ и решение (3.1) для Φ_1, p_1

*) Неправильное кинематическое граничное условие в работе [63] привело к ошибочному результату.

в покоящейся идеальной жидкости при $\text{Re}^{-1} \ll 1$. В результате получим коэффициент отражения звука:

$$R = \frac{[q_1(\omega - kU)^2/q_2\omega^2] - 1 + [4i\nu k^2/(\omega - kU)]}{[q_1(\omega - kU)^2/q_2\omega^2] + 1 - [4i\nu k^2/(\omega - kU)]}. \quad (3.14)$$

При $\nu \rightarrow 0$ выражение (3.14) переходит в (3.2). В диапазоне полного отражения, где при $\nu = 0$ коэффициент отражения $|R| = 1$, поправка, обусловленная вязкостью, определяет величину относительной диссипации:

$$1 - |R|^2 = 16\nu k^2(\omega - kU) \frac{q_1 |q_2| \omega^2}{q_1^2(\omega - kU)^4 + |q_2|^2 \omega^4}. \quad (3.15)$$

При $\omega - kU < 0$ диссипация в движущейся среде становится отрицательной, что приводит к усилению отраженной волны: $|R| > 1$.

4. Волны на тангенциальном разрыве. Механизм взаимодействия волн с противоположными знаками энергии и возникающие при этом разнообразные эффекты можно проследить, рассматривая взаимодействие различных типов волн с ТР. Отметим при этом, что такая модель течения является наиболее удобной для исследования широкого класса гидродинамических явлений в различных средах: атмосфере и океане, движущейся плазме, многих астрофизических объектах и т. д.

4.1. Граница раздела между тяжелой и легкой жидкостью. Волны на поверхности раздела сред разной плотности, взаимодействующие с ТР, — классический объект исследования в теории гидродинамической неустойчивости. Отметим, в частности, большое число работ, посвященных неустойчивости Кельвина — Гельмгольца (см., например, обзор [65]). Здесь мы рассмотрим лишь некоторые относительно новые и пока малоизвестные результаты.

4.1.1. Усиление поверхностных гравитационных волн при отражении от тангенциального разрыва. Значительный интерес для физики океана представляет исследование эффекта сверхотражения поверхностных волн на глубокой воде, падающих на ТР (рис. 11). Соответствующая краевая

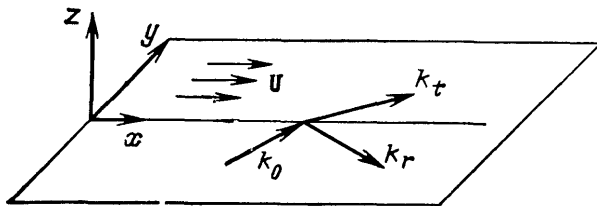


Рис. 11. Отражение и преломление поверхностных волн на глубокой воде, падающих на тангенциальный разрыв

задача сводится к решению системы интегральных уравнений, что связано с немалыми математическими трудностями [66]. В работе [67] найдено приближенное решение этой задачи. С помощью метода Галеркина получено выражение для коэффициента отражения амплитуды отклонений свободной поверхности:

$$R = \frac{(k_{y1}/k_{y2}) N^2 - 1 - iX}{(k_{y1}/k_{y2}) N^2 + 1 - iX}, \quad (4.1)$$

где

$$k_{y1} = \frac{\omega^2}{g} \cos \theta,$$

$$k_{y2} = \frac{\omega^2}{g} (1 - \text{Ma} \sin \theta) \left[(1 - \sin \theta)^2 - \frac{\sin^2 \theta_1}{(1 - \text{Ma} \sin \theta_1)^2} \right]^{1/2}$$

— проекции волнового вектора для падающей и преломленной волны, N и X — действительные функции углов падения θ_1 и преломления θ_2 , а также параметра отношения скачка скорости к фазовой скорости гравитационной волны $Ma = \omega U/g$, аналогичного числу Маха в акустике.

Асимптотика преломленного поля при $y \rightarrow \infty$ и режим отражения определяются волновым числом k_{y2} . При

$$Ma < Ma_1 \equiv \frac{1 - (\sin \theta_1)^{1/2}}{\sin \theta_1}$$

происходит нормальное отражение: $k_{y2} > 0$; $|R| < 1$. В диапазоне

$$Ma_1 < Ma < Ma_2 \equiv \frac{1 + (\sin \theta)^{1/2}}{\sin \theta_1}$$

осуществляется полное отражение: $k_{y2} = 0$, $|R| = 1$. Наконец, при $Ma > Ma_2$ возникает режим сверхотражения, когда $k_{y2} < 0$ и $|R| > 1$. В этом случае для преломленной волны

$$\omega - kU = \omega(1 - Ma \sin \theta_1) < 0$$

и энергия волны отрицательна. При этом фазовая скорость преломленной волны направлена к разрыву, в то время как волновой пакет уходит от разрыва, двигаясь по направлению групповой скорости, соответствующая проекция которой

$$v_{гpy}^{(2)} = \frac{g^2 k_{y2}}{2(\omega - kU)^3} > 0.$$

В случае, когда $\sin \theta_1 = 2/Ma$ ($|\omega - kU| = \omega$), возникает резонанс падающей волны с собственной модой разрыва, при этом $|R| = \infty$. Единственная собственная мода частоты ω существует при $Ma > 2$ и представляет собой неоднородную плоскую волну с волновым вектором, направленным под углом

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta_1 = \arccos \frac{2}{Ma}$$

к разрыву. Групповая скорость в ней имеет разное направление по обе стороны от разрыва. Эта мода представляет собой, по существу, черенковское излучение возмущений вихревой пелены.

Сверхотражение поверхностных волн может приводить, в частности, к неустойчивости струйных течений относительно возмущений свободной поверхности [67].

4.1.2. Неустойчивость тангенциального разрыва в стратифицированной среде. Рассмотрим теперь разрыв плотности $\Delta \rho = \rho_0 - \rho_1$, совпадающий с ТР, при наличии поля тяжести g и поверхностного натяжения σ . Мы будем полагать, что $a \equiv \rho_1/\rho_0 \ll 1$, имея в виду практически важный случай границы раздела между водой и воздухом ($\rho_1/\rho_0 \approx 10^{-3}$). В системе отсчета, где покоится нижняя тяжелая жидкость, проследим за эволюцией дисперсионной кривой $\omega(k)$ поверхностных волн на разрыве [36, 68]

$$\omega = \frac{a}{a+1} kU \pm \left[\frac{1-a}{1+a} gk + \frac{\sigma k^3}{\rho_0(1+a)} - \frac{a}{(1+a)^2} k^2 U^2 \right]^{1/2}. \quad (4.2)$$

происходящей при изменении величины скачка скорости U . При $U=0$ выражение (4.2) характеризует обычные гравитационно-капиллярные волны, бегущие в противоположных направлениях (рис. 12, кривая 1). При $U \neq 0$ дисперсионные кривые становятся несимметричными из-за сноса волн течением. При

$$U > U_c = \left(4 \frac{1-a}{a^2} \frac{g\sigma}{\rho_0} \right)^{1/4}$$

на нижней ветви дисперсионной кривой (см. рис. 12, 2) появляется участок, где частота изменяет знак: $\omega - kU < 0$. Этому участку соответствуют волны отрицательной энергии. При дальнейшем увеличении U обе ветви продолжают сближаться, и, наконец, когда

$$U = U_{\text{кр}} = U_c(1+a)^{1/2},$$

происходит их перезамыкание (рис. 12, 3); возникает неустойчивость Кельвина — Гельмгольца. Таким образом, возникновение этой неустойчивости можно рассматривать как результат взаимодействия волн разного знака энергии [68, 69].

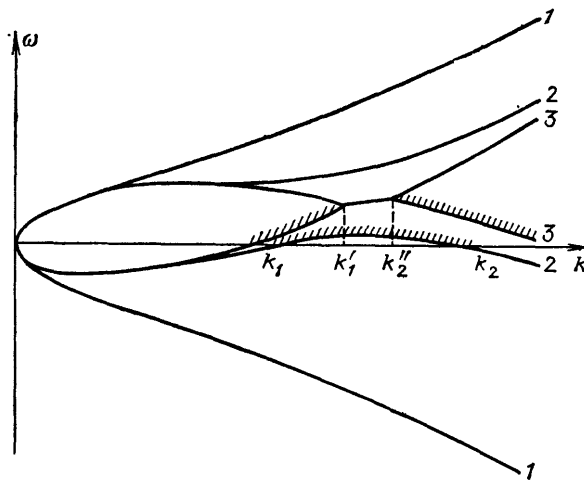


Рис. 12. Дисперсионные кривые для модели Кельвина — Гельмгольца с поверхностным натяжением $l - U = 0$, $2 - U_c < U < U_{\text{кр}}$, $3 - U > U_{\text{кр}}$. Заштрихованные участки соответствуют волнам с отрицательной энергией в системе отсчета, неподвижной относительно нижнего слоя жидкости

Нарастание волн отрицательной энергии может происходить не только за счет взаимодействия с волнами положительной энергии, но и вследствие каких-либо других механизмов отбора энергии. Так, аналогично плазменной диссипативной неустойчивости [70], учет вязкости в неподвижном слое приводит к нарастанию волн отрицательной энергии [68]. Такие волны становятся затухающими, если вязким является верхний движущийся слой. Однако в этом случае могут нарастать волны положительной энергии на верхней ветви дисперсионной кривой, поскольку вязкость в движущейся среде при

$$U > U'_c = [(1-a)g\sigma\rho_0^{-1}]^{1/2}$$

приводит к отрицательному затуханию волн, для которых $\omega - kU < 0$. Действительно, при переходе в систему отсчета, где покоится верхний слой, меняется знак энергии нарастающей моды и одновременно меняется знак диссипации [68]: в этой системе отсчета волна отрицательной энергии растет под действием положительной диссипации. При этом, очевидно, наличие неустойчивости на данной моде инвариантно к выбору системы отсчета.

Возникновение диссипативной неустойчивости можно наглядно проиллюстрировать в системе, движущейся со «среднемассовой» скоростью:

$$V = \frac{a}{1+a} U.$$

В этой системе отсчета легкая жидкость движется в положительном направлении со скоростью $U/(1+a)$, а тяжелая — в противоположную сторону с меньшей скоростью

$$U \frac{a}{1+a}.$$

Ветви дисперсионной кривой здесь становятся симметричными относительно оси k (рис. 13). При достаточно большом скачке скорости на дисперсионной кривой появляются участки, где возмущения обладают фазовой скоростью меньше, чем скорость среды — на рис. 13 они отсекаются лучами с наклоном $U/(1+a)$ (для верхней легкой среды) и $-Ua \times (1+a)^{-1}$ (для нижней более тяжелой среды). Наличие замедленных относительно движущейся среды волн, для которых $\omega - kU < 0$, может приводить к диссипативной неустойчивости.

Очевидно, диссипация прежде изменяет знак в легкой среде. На границе воды и воздуха это происходит при скорости ветра, превышающей минимальную скорость гравитационно - капиллярных волн.

При этом, однако, диссипация в тяжелой среде (воде) остается положительной вплоть до скоростей $U = U_c \gg U'_c$. Это обстоятельство задерживает развитие неустойчивости ветровых волн, повышая пороговую скорость ветра (см. [25]).

При дальнейшем увеличении скорости диссипация в нижнем (тяжелом) слое также изменяет знак (при $U > U_c$ см. рис. 12, кривая 2), а затем почти сразу же при $U > U_{кр}$ ($\approx U_c$, если $a \ll 1$) происходит перезамыкание дисперсионных ветвей и возникает неустойчивость Кельвина — Гельмгольца (см. рис. 12, 3). Для границы воды и воздуха это происходит при весьма значительных скоростях ветра: $U_{кр} \approx 6,5$ м/с. В реальных условиях ветровая неустойчивость поверхностных волн наступает гораздо раньше при $U \approx 1,3$ м/с [25].

Из изложенного выше следует, что при $\rho_1 \ll \rho_0$ нижний слой тяжелой жидкости «несет» на себе поверхностные волны, дисперсионные свойства которых (при $U \ll U_{кр}$) лишь слабо возмущаются под действием верхнего слоя легкой среды. В то же время именно диссипация в воздухе, движущемся быстрее волны, изменяя свой знак, обеспечивает развитие неустойчивости поверхностных волн, т. е. возникновение ветрового волнения. Развитие такой неустойчивости можно оценить в рамках простейшей модели, представляющей собой границу между идеальной жидкостью и вязкой (легкой) средой. Инкремент неустойчивости здесь имеет вид [71] (в предположении $\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$)

$$\gamma = -2\nu k^2 \frac{a}{1+a} \frac{\omega - kU}{\omega}. \quad (4.3)$$

Подчеркнем, однако, что изменение знака диссипации при $\omega - kU < 0$ не связано с ее конкретным физическим механизмом. В частности, ветровая неустойчивость поверхностных волн может быть обусловлена различными факторами, среди которых вязкость (возможно, турбулентная) в ветровом потоке может играть заметную роль (см. [72]), наряду с механизмом неустойчивости Майлса и другими известными механизмами [25].

Неустойчивость, связанная с отрицательной диссипацией, приводит к усилению волн в широком диапазоне углов, когда неустойчивость Кель-

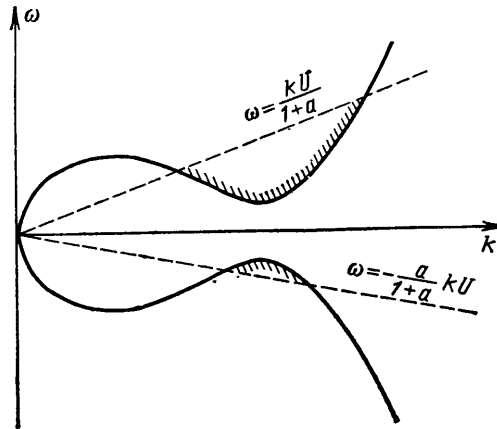


Рис. 13. Дисперсионные кривые для волн на ТР в «среднемассовой» системе отсчета. Заштрихованные участки соответствуют потенциально неустойчивым поверхностным волнам

вина — Гельмгольца еще не имеет места. Это позволяет экспериментально отличать эти две неустойчивости. К сожалению, гидрофизических экспериментов с участием волн отрицательной энергии известно очень мало. Не касаясь многочисленных работ по возбуждению волн Толмина — Шлихтинга в пограничных слоях, которые, согласно Бенджамину [73], также обладают отрицательной энергией, отметим лишь лабораторный эксперимент [74], где на границе раздела двух слоев жидкости, находящихся в относительном движении, наряду с неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца наблюдалось развитие неустойчивости, которую можно проинтерпретировать как неустойчивость волн с отрицательной энергией [75].

4.2. Внутренние гравитационные волны. Волны плавучести — внутренние гравитационные волны (ВГВ) в стратифицированной среде — представляют, по-видимому, наиболее важные для геофизических приложений примеры взаимодействия волн с гидродинамическими потоками [26, 76], так как их фазовая скорость нередко оказывается соизмеримой со скоростью реальных течений в атмосфере и океане.

Уравнения для двумерных колебаний слоистой несжимаемой среды имеют вид [26]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{g\tilde{\rho}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{v}{dy} \frac{d\rho}{dy} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для ВГВ, как правило, можно использовать приближение Буссинеска, соответствующее пределу $d\rho/dy \rightarrow 0$, $g \rightarrow \infty$, $N = [(-g/\rho) d\rho/dy]^{1/2} = \text{const}$. При этом изменение плотности на масштабе длины волн становится несущественным, но остается возвращающая архимедова сила. В таком приближении производная $d\rho/dy$ входит только в частоту Брента — Вайсяля N , а в коэффициентах уравнений можно положить $\rho = \text{const}$. Тогда из (4.4) получаем дисперсионное уравнение для ВГВ и их групповую скорость $v_{\text{гр}}$:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{N^2 k^2}{k^2 + q^2} = N^2 \sin^2 \theta, \\ v_{\text{гр}} &= \frac{Nq}{(k^2 + q^2)^{3/2}} (q, -k) = \frac{N \cos \theta}{k_0} (\cos \theta, -\sin \theta), \\ kv_{\text{гр}} &= 0, \quad k = k_0 (\sin \theta, \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отметим, что распространяться могут только ВГВ с $\omega \leq N$.

Рассмотрим отражение ВГВ от ТР, разделяющего среды с различной стратификацией: $N(y < 0) = N_1$, $N(y > 0) = N_2$. Сшивая решения $p_1 = \exp(iq_1 y) + R \exp(-iq_1 y)$ в неподвижной среде при $y < 0$ и $p_2 = T \exp(iq_2 y)$ в движущейся со скоростью U среде при $y > 0$, с помощью граничных условий на ТР получим

$$\begin{aligned} R &= \frac{q_1 (N_1^2 - \omega^2)^{-1} - q_2 [N_2^2 - (\omega - kU)^2]^{-1}}{q_1 (N_1^2 - \omega^2)^{-1} + q_2 [N_2^2 - (\omega - kU)^2]^{-1}}, \\ T &= \frac{2q_1 (N_1^2 - \omega^2)^{-1}}{q_1 (N_1^2 - \omega^2)^{-1} + q_2 [N_2^2 - (\omega - kU)^2]^{-1}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$q_1 = -\frac{k}{\omega} (N_1^2 - \omega^2)^{1/2}, \quad q_2 = -\frac{k}{\omega - kU} [N_2^2 - (\omega - kU)^2]^{1/2}$$

(учитывается, что для ВГВ $q \cdot v_{\text{гп}} < 0$). Вытекающий из (4.6) закон сохранения энергии

$$q_1 (N_1^2 - \omega^2)^{-1} (1 - |R|^2) = q_2 [N_2^2 - (\omega - kU)^2]^{-1} |T|^2$$

нетрудно также получить из выражения (4.5) для $v_{\text{гп}}$ и формулы для плотности энергии ВГВ в неподвижной среде [26]

$$\mathcal{E} = \frac{\rho \langle u^2 + v^2 \rangle}{2} + \frac{N^2 \langle \eta^2 \rangle}{2} = \frac{N^2 k^2}{\omega^2 (N^2 - \omega^2)} |p|^2 \quad (4.7)$$

при учете формулы (2.2) и соотношения $S_y = v_{\text{гп}} \mathcal{E}$.

Условие излучения в движущейся среде

$$v_{\text{гп}y} = -\frac{N^2 k^2}{(k^2 + q^2)^2} \frac{q_2}{\omega - kU} > 0$$

при $\omega - kU < 0$ заставляет выбирать ветвь $q_2 < 0$. Учитывая, что $q_1 < 0$, получаем в этом случае $|R| > 1$, т. е. имеет место сверхотражение. Преломленная волна, как следует из (2.2), уносит при этом отрицательную энергию.

Классификацию различных режимов отражения удобно провести в зависимости от двух безразмерных параметров:

$$D = \frac{N_2}{N_1}, \quad c = \frac{\omega}{|k|U} = \frac{N_1}{k_0 U},$$

определяющих характер преломленного поля ВГВ [77]. На рис. 14 представлено разбиение плоскости параметров $(D, 1/c)$ на области, для каждой из которых на рис. 15 схематически изображены режимы отражения ВГВ в зависимости от угла падения θ . Критические углы $\tilde{\theta}_{1,2}$, ограничивающие диапазон полного внутреннего отражения, в котором отсутствует прошедшая волна, определяются выражением

$$\sin \tilde{\theta}_1 = \frac{Dc}{c-1}, \quad \sin \tilde{\theta}_2 = -\frac{Dc}{1+c}.$$

Особый интерес представляют резонансы ТР ($|R| = \infty$), которые достаточно просто найти в случае однородной стратификации: $N_1 = N_2 = \text{const}$. Они возможны только при $c < 1$. Один из них определяется условием $c = 1/2$ ($\omega = kU/2$) и соответствует черенковскому излучению ВГВ вихревой пеленой. Угол излучения выражается при этом из соотношения

$$\sin \theta = \frac{\omega}{N_1} = \frac{kU}{2N_1}.$$

Другие два резонанса определяются условием

$$\text{ctg } \theta = \frac{1-c}{c},$$

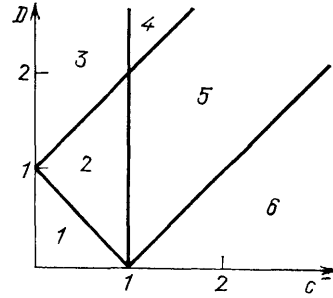


Рис. 14. Разбиение плоскости параметров, характеризующих ТР в стратифицированной среде, на области с различными режимами отражения ВГВ на разрыве

что соответствует дисперсионному уравнению $\omega^2 + (\omega - kU)^2 = N_1^2$ для собственных волн на ТР. Эти моды устойчивы при $|k| < \sqrt{2}N_1/U$ и переходят в моды Кельвина — Гельмгольца при $N_1 \rightarrow 0$.

Излучательная неустойчивость. При наличии скачка плотности в стратифицированной среде для поверхностных волн на разрыве возможен механизм диссипации, связанный с излучением ВГВ в окружающую среду. В движущейся среде энергия излучаемых волн утечки (leaky waves

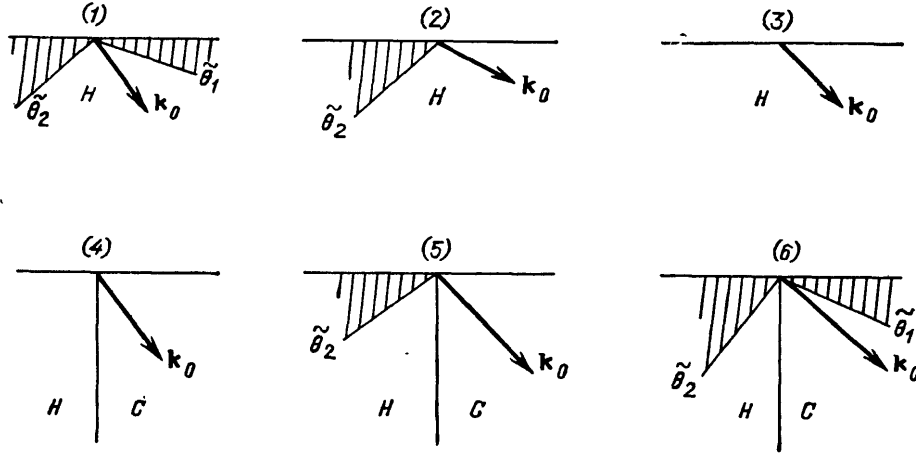


Рис. 15. Режимы отражения ВГВ. Номер диаграммы соответствует номеру области на плоскости параметров D, c^{-1} . Отмечены различные диапазоны углов падения, определяемых волновым вектором падающей волны: полное внутреннее отражение (заштрихованный диапазон), нормальное отражение (H) и сверхотражение (C)

[78]) может стать отрицательной, что приведет к отрицательной диссипации поверхностных волн, в результате чего они нарастают [79]. Неустойчивость, связанная с потерями на излучение, известна также и в других физических системах: для пучков заряженных частиц в плазме [80], в инвертированных средах [81] и др.

Покажем возможность генерации ветровых волн за счет механизма излучательной неустойчивости при излучении ВГВ в стратифицированную атмосферу. Ограничиваясь рассмотренной в 4.1 простейшей моделью ТР, совпадающего со скачком плотности (при $a \ll 1$), будем учитывать устойчивую стратификацию воздуха: $N = N_2$ при $y > 0$ и $N = 0$ при $y < 0$. Дисперсионное уравнение волн в такой системе имеет вид

$$a(\omega - kU)^2 \kappa_2 + \omega^2 = (1 - a)gk + \frac{\sigma}{\rho_1} k^3, \quad (4.8)$$

где

$$\kappa_2 = \frac{iq_2}{k} = [1 - N_2^2 (\omega - kU)^2]^{1/2},$$

причем ветвь выражения для κ_2 выбирается на основе граничного условия при $y \rightarrow \infty$. Инкремент неустойчивости нетрудно получить из (4.8) в первом приближении по малому параметру $a \ll 1$:

$$\gamma = \frac{a}{2} \frac{\omega - kU}{\omega} [N_2^2 - (\omega - kU)^2]^{1/2}. \quad (4.9)$$

Излучательная неустойчивость в этой модели существует при $U > U'_c$ и проявляется в узком диапазоне частот

$$kU - N_2 < \omega < kU$$

(см. рис. 13). Отметим, что стратификация в нижнем слое (воде) также может приводить к излучательной неустойчивости, которая появляется, однако, на нижней ветви дисперсионной кривой при гораздо больших скоростях ветра $U > U_c$ [73].

4.3. Волны Россби на тангенциальном разрыве. Наличие гидродинамического потока с достаточно большой скоростью, способного «обгонять» падающие на него волны, еще не гарантирует возможность сверхотражения, для которого необходимо излучение в движущуюся среду преломленной волны с отрицательной энергией. В качестве иллюстрации рассмотрим падение на ТР волн Россби на β -плоскости [82].

Возмущение функции тока ψ в несжимаемой вращающейся среде на β -плоскости подчиняется уравнению [27]

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (4.10)$$

Это уравнение пригодно для возмущений, характерные частоты которых малы по сравнению с частотой вращения среды $\Omega(y) = \Omega_0 + \beta y$ (квазигеострофическое приближение *).

Из (4.10) следует дисперсионное уравнение и групповая скорость для волн Россби

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + q^2}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{\beta}{(k^2 + q^2)^2} (k^2 - q^2, 2kq). \quad (4.11)$$

При $\beta > 0$ возможны волны лишь с отрицательной фазовой скоростью вдоль оси x : $k < 0$. При этом y -компоненты фазовой и групповой скоростей имеют противоположный знак:

$$qv_{\text{гр } y} = \frac{2\beta q^2}{(k^2 + q^2)^2} k < 0.$$

Эти соотношения определяют направление волновых векторов в падающей, отраженной и преломленной волнах:

$$\psi(y < 0) = \exp(iq_1 y) + R \exp(-iq_1 y), \quad (4.12)$$

$$\psi(y > 0) = T \exp(iq_2 y),$$

где

$$q_1 = -[-\beta k \omega^{-1} - k^2]^{1/2} < 0, \quad q_2 = -[-\beta k (\omega - kU)^{-1} - k^2]^{1/2} < 0.$$

Граничные условия на ТР позволяют сшить решения (4.12) на границе $y=0$. В результате имеем [82]

$$R = \frac{q_1^2 \omega^2 - q_2 (\omega - kU)^2}{q_1 \omega^2 + q_2 (\omega - kU)^2}, \quad T = \frac{2q_1 \omega (\omega - kU)}{q_1 \omega^2 + q_2 (\omega - kU)^2}. \quad (4.13)$$

Из условий $q_{1,2} < 0$ следует, что всегда $|R| < 1$, т. е. явление сверхотражения здесь отсутствует. Это объясняется тем, что плотность энергии преломленной волны, распространяющейся в движущейся среде, положительна; действительно,

$$\mathcal{E} = \frac{\omega}{\omega - kU} \mathcal{E}_0 = \frac{\omega}{\omega - kU} (k^2 + q_2^2) |\psi|^2 = \frac{\omega (k^2 + q_2^2)}{-\beta k} |\psi|^2 > 0. \quad (4.14)$$

*) Отметим здесь аналогию с дрейфовыми волнами в неоднородной плазме, которые при определенных условиях описываются уравнениями геострофического приближения [83]. Полученные ниже результаты имеют место, следовательно, и для дрейфовых волн на ТР.

На рис. 16 изображены различные режимы отражения при $\beta > 0$, в зависимости от параметра $c = \omega/kU$. Диапазоны нормального и полного отражения разделяются углом

$$\tilde{\theta} = \arcsin \left(\frac{c}{c-1} \right)^{1/2}.$$

Условие $|R| = \infty$ дает дисперсионное уравнение для собственных волн на ТР во вращающейся среде:

$$(\omega - kU)^2 \left(k^2 + \frac{\beta k}{\omega - kU} \right)^{1/2} + \omega^2 \left(k^2 + \frac{\beta k}{\omega} \right)^{1/2} = 0. \quad (4.15)$$

Для безразмерного параметра $C_0 = 2\omega/kU - 1$ нетрудно получить из (4.15) кубическое уравнение $C_0^3 + 3SC_0^2 + C_0 + S = 0$ (где $S = \beta/2k^2U$), дискриминант которого $\Delta = -108S^4 + 36S^2 - 4 < 0$, и, следовательно, оно имеет

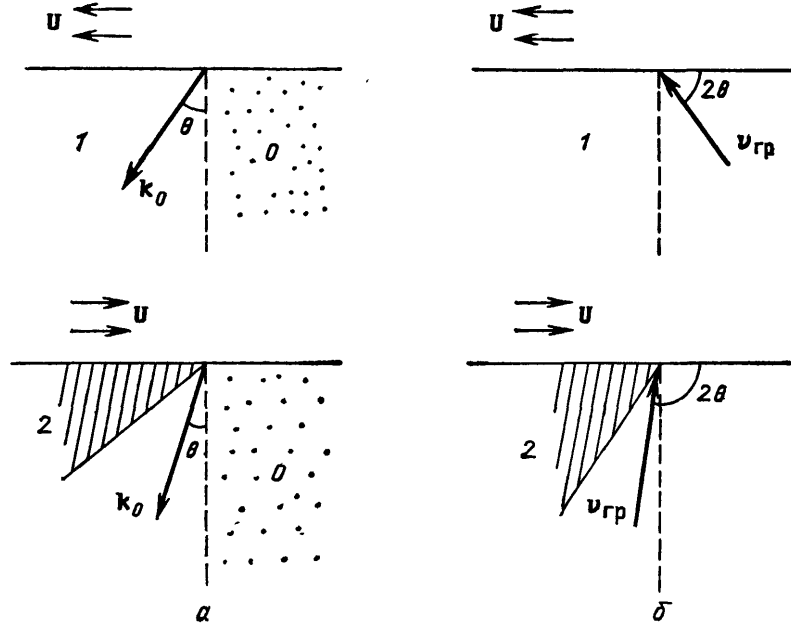


Рис. 16. Режимы отражения волн Россби от ТР. Диапазоны углов падения для волнового вектора (а) и групповой скорости (б). 0 — распространение невозможно, 1 — нормальное отражение, 2 — полное отражение

два комплексно-сопряженных корня. Таким образом, неустойчивость ТР сохраняется и при наличии вращения, а при $S \rightarrow 0$ переходит в неустойчивость Кельвина — Гельмгольца.

Более полно вопросы устойчивости сдвиговых зональных течений на β -плоскости рассматриваются в [27].

5. Резонансное взаимодействие волн с течением. «Размытие» ТР, т. е. замена его слоем сдвига конечной ширины, не только значительно усложняет математический аппарат, необходимый для исследования малых колебаний, но и приводит к качественно новым эффектам, отсутствующим в кусочно-однородных течениях типа ТР. Амплитуда колебаний функции тока ψ в двумерном течении идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого $V_0 = (U(y), 0)$, удовлетворяет уравнению Рэлея:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - k^2\psi - \frac{d^2U/dy^2}{U - (\omega/k)}\psi = 0. \quad (5.1)$$

Это уравнение содержит особенность (критический слой) в окрестности резонансной особой точки y_c , где скорость потока совпадает с фазовой скоростью волновых возмущений: $U(y_c) = \omega/k$. В критическом слое описание динамики малых возмущений в рамках уравнения (5.1) становится некорректным — здесь требуется переход к более сложным моделям. Впервые это было сделано в работах [5, 6], с помощью учета малой вязкости, снимающей особенности в уравнениях линейной теории. При этом уравнение Рэлея переходит в уравнение Орра — Зоммерфельда:

$$\frac{iv}{k} \left(\frac{d^4\psi}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + k^4\psi \right) + \left(U - \frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{d^2\psi}{dy^2} - k^2\psi \right) - \frac{d^2U}{dy^2} \psi = 0. \quad (5.2)$$

Исследование асимптотического поведения решений уравнения (5.2) при $v \rightarrow 0$, позволяющее «сшить» решения уравнения Рэлея (5.1) в окрестности особой точки y_c , представляет собой задачу сингулярной теории возмущений [7].

Другой, более физический подход к исследованию динамики малых возмущений в потоках удается выработать на основе сопоставления и обобщения аналогичных задач в системах различной физической природы. В частности, для задач гидродинамической неустойчивости весьма эвристичной оказалась развитая к настоящему времени плазменно-гидродинамическая аналогия [20]. Здесь мы рассмотрим различные аспекты и возможности такого подхода.

5.1. Плазменно-гидродинамическая аналогия. Особенности, возникающие в уравнениях для малых возмущений при резонансе фазовой скорости возмущений со скоростью движения частиц среды, являются типичными для различных волн в среде. Возникновение особенностей наиболее известно для продольных волн в плазме. Колебания в системе свободных электронов с функцией распределения $f_0(v)$ под действием монохроматического электростатического поля $E_0 \exp(-i\omega t + ikx)$ описываются линеаризованным кинетическим уравнением:

$$-i(\omega - kv)f + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0. \quad (5.3)$$

Вычисляя величину тока

$$j = e \int f v dv,$$

из (5.3) получаем выражение для проводимости плазмы

$$\sigma = \frac{e^2}{m} \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{i(\omega - kv)} dv, \quad (5.4)$$

содержащее особенность $v = \omega/k$ под интегралом.

Правило обхода этой особенности (правило Ландау) получается из решения начальной задачи методом Лапласа [84]. При этом рассматривается растущее ($\text{Im } \omega > 0$) поле, а в процессе аналитического продолжения на действительные ω контур интегрирования в (5.4) должен деформироваться, отступать при приближении особенностей подынтегрального выражения, оставаясь все время снизу последних. Это дает правило обхода Ландау при действительных ω и k : контур интегрирования в (5.4) охватывает особенность $\omega = kv$ снизу. В результате величина $\text{Re } \sigma$, характеризующая затухание поля, определяется полувычетом подынтегрального выражения:

$$\text{Re } \sigma = -\frac{\pi e^2}{m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \right)_{v=\omega/k}. \quad (5.5)$$

Таким образом, знак $\text{Re } \sigma$ определяется производной от функции распределения по скоростям при синхронизме скорости частиц и фазовой скорости волны. Это связано фактически с тем, что величина работы, совершаемой слабой волной над частицами, определяется тем, каких частиц при $v = \omega/k$ больше: обгоняющих волну или отстающих от нее. Если обгоняющих частиц больше ($\partial f_0 / \partial v > 0$), то $\text{Re } \sigma < 0$ и волна нарастает.

Аналогия между гидродинамическими и электродинамическими явлениями в потоках частиц в рассматриваемом здесь аспекте началась с работы Кейса [9], обсуждалась затем Тимофеевым [10] и детально проанализирована в работе [20]. В результате этого анализа стало ясно, что связь электродинамических и гидродинамических явлений глубже, чем это отмечалось ранее. Ниже мы увидим, однако, что имеются особенности, специфичные именно для гидродинамики и не имеющие электродинамических аналогов.

В гидродинамическом потоке частицы разной скорости находятся на разных уровнях y , и поэтому резонансные особые точки возникают в дифференциальных уравнениях типа (5.1). С точки зрения аналитической теории дифференциальных уравнений [85] эти особенности являются логарифмическими точками ветвления, если y_c не совпадает с точкой перегиба профиля скорости, т. е. $d^2 U(y_c) / dy^2 \neq 0$. Вопрос о связи аналитических решений по обе стороны от y_c решен в работах Линя [6] и Вазова [7]. Метод их исследования основан на учете малой вязкости и асимптотическом разложении решений уравнения Орра — Земмерфельда (5.2) по ν . Результат можно резюмировать следующим образом.

Решения уравнения Рэлея является предельным случаем вязкого решения, полученного из уравнения Орра — Земмерфельда при $\nu \rightarrow 0$, если выбирать ветви многозначного невязкого решения вблизи точек ветвления y_c , пользуясь правилом обхода Линя: точки y_c обходятся снизу в комплексной плоскости y , если $dU(y_c)/dy > 0$, и сверху, если $dU(y_c)/dy < 0$.

Следует отметить, что и для ленгмюровских волн в плазме учет малой диссипации (столкновений частиц) снимает резонансную особенность в выражении для проводимости σ и позволяет получить правило обхода Ландау. Однако вязкой диссипации в гидродинамике соответствует старшая производная в уравнении Орра — Земмерфельда. Асимптотическое решение соответствующей задачи с сингулярными возмущениями — дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной — является относительно сложным.

В то же время правило обхода Линя можно получить и традиционно «плазменным» способом: решать начальную задачу, пользуясь преобразованием Лапласа по времени [9, 86]. При этом рассматриваются комплексные ω в полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$, что соответствует растущим решениям. Правило обхода Линя возникает естественным образом при аналитическом продолжении решения на действительные значения ω .

Таким образом, при использовании метода Лапласа выявляется глубокая аналогия с плазменной задачей, решенной Ландау. Эта аналогия проявляется не только в конечном результате — правиле обхода особых точек, но и в различных эффектах, связанных, в частности, с поведением решений из непрерывного спектра (см. [9, 87]).

Наличие резонансных точек с соответствующим правилом обхода определяет механизм обмена энергией малого возмущения со средним потоком. Отметим, что резонансный механизм затухания (либо усиления) волн не связан непосредственно с вязкой диссипацией, поэтому резонансное взаимодействие появляется в идеальной жидкости. Ниже мы рассмотрим это взаимодействие на простых примерах, где будет видно сходство и различие гидродинамических задач с соответствующими задачами физики плазмы.

5.2. Резонансное усиление звука. Исследование отражения звука от течения с непрерывным профилем скорости [88–90] является существенно более трудной задачей, чем задача Майлса об отражении от ТР. Воспользуемся выражениями (3.1), которые представляют собой асимптотику решений при $y \rightarrow \pm \infty$, где скорость потока $U(y) \rightarrow \text{const}$. Поведение этих решений в области сдвига ($|y| \lesssim l$) определяется уравнением для амплитуды давления [1]:

$$\frac{d^2 P}{dy^2} - \frac{2}{U - (\omega/k)} \frac{dP}{dy} + \left[\frac{(U - \omega k^{-1})^2}{c^2} - k^2 \right] P = 0. \quad (5.6)$$

Для сверхзвуковых течений это уравнение, как и уравнение Рэлея (5.1) в несжимаемой жидкости, содержит особую точку y_c , где $U(y_c) = \omega/k$, а решение $P(y)$ имеет в общем случае точку ветвления. Выбор ветви многозначного решения определяется правилом обхода Линя.

Резонансное взаимодействие звуковой волны, происходящее в критическом слое при $y \rightarrow y_c$, может приводить к изменению энергии звука. Критерий, показывающий направление обмена энергией волны с потоком, может быть получен из (5.6) в общем виде. Умножая (5.6) на $P^* \times \times (U - c)^{-2}$ (где P^* — комплексно-сопряженная функция) и интегрируя по частям с учетом граничных условий (3.1) и правила обхода Линя, получим закон сохранения энергии в виде

$$\frac{q_1}{c^2} (1 - |R|^2) - \frac{q_2}{(U - c)^2} |T|^2 = \pi k^2 \left[|P|^2 \frac{d^2 U}{|dU/dy|^3} \right]_{y=y_c}. \quad (5.7)$$

Левая часть этого равенства характеризует величину относительного поглощения звука и представляет собой разность между потоком энергии падающей волны (с единичной амплитудой) и суммой потоков энергии для отраженной и преломленной волн. Знак правой части (5.7), характеризующий величину поглощения энергии в критическом слое, определяется кривизной профиля скорости в точке резонанса. Вогнутые участки профиля ($d^2 U/dy^2 < 0$) усиливают звуковую волну, а выпуклые ($d^2 U/dy^2 > 0$) — поглощают.

Связь инкремента с кривизной профиля U допускает простую физическую интерпретацию [90]. Именно, знак второй производной профиля скорости на резонансном уровне определяет соотношение числа резонансных частиц, обгоняющих волну, и частиц отстающих. Если в окрестности резонансного уровня обгоняющих частиц больше, то волна усиливается, отбирая энергию от потока в этой окрестности. Действительно, рассмотрим функцию распределения частиц потока по скоростям — число частиц на единицу площади в единичном интервале скоростей:

$$f(U) = \frac{dy}{dU} = \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-1}. \quad (5.8)$$

Соотношение между числом обгоняющих и отстающих частиц определяется производной $df/dU = -d^2 U/dy^2 [dU/dy]^{-3}$ — в полном соответствии с критерием (5.7). Эта связь усиления (затухания) волны с производной функции распределения частиц по скоростям вполне аналогична рассмотренному выше условию усиления плазменных волн. Такая аналогия естественна, поскольку оба механизма определяются резонансными частицами, движущимися со скоростью, равной базовой скорости волны.

С точки зрения плазменно-гидродинамической аналогии можно интерпретировать известную теорему Рэлея [4], связывающую неустойчивость сдвиговых течений с наличием точки перегиба в профиле скорости. Для этого воспользуемся необходимым условием кинетической неустойчивости ленгмюровских волн; этим условием является наличие минимума функции распределения частиц по скоростям [14]. Для сдвигового

течения экстремумы функции $f(U)$, в которых $df/dU=0$, находятся именно в точках перегиба, где $d^2U/dy^2=0$. Таким образом, теорема Рэлея является гидродинамическим вариантом «плазменного» критерия [14].

Расчет величины коэффициентов отражения и преломления звука для произвольного непрерывного профиля можно провести приближенно, если в краевой задаче (5.6), (3.1) присутствует малый параметр. Для «узкого» слоя сдвига ($\mu \equiv kl \ll 1$) методом сращиваемых асимптотических разложений можно получить поправки $\sim \mu$ к выражениям (3.2) для ТР. При этом в диапазоне полного отражения, когда отсутствует преломленная волна, величина относительного усиления отраженной волны мала*) [90]: $(1 - |R|^2) \sim \mu$, и определяется исключительно резонансным взаимодействием с синхронными частицами — здесь не работает механизм сверхотражения, связанный с наличием преломленной волны с отрицательной энергией.

Другой предельный случай плавно-неоднородных течений ($\mu \gg 1$) также допускает приближенное решение [89]. Величина резонансного взаимодействия здесь экспоненциально мала, так как критический уровень y_c находится в области непрозрачности, при углублении в которую поле волны экспоненциально спадает.

Положение критического слоя при заданном профиле скорости определяется для звуковых волн углом падения:

$$\sin \theta = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{U(y_c)}.$$

Это положение однозначно задает и знак резонансного взаимодействия

$$(1 - |R|^2) \sim \left. \frac{d^2U}{dy^2} \right|_{y=y_c}.$$

Величина этого эффекта достигает максимума при $\mu \sim 1$ [88] и зависит от формы профиля скорости.

5.3. Резонансный механизм генерации ветровых волн. Интересным и важным примером, иллюстрирующим резонансный механизм усиления волновых возмущений в сдвиговом потоке, является известный механизм Майлса генерации ветровых волн [91]. Этот механизм генерации наиболее хорошо изучен в настоящее время в рамках модели квазиламинарного воздушного потока над поверхностью глубокой воды. В такой модели движение воздуха считается плоскопараллельным, а при исследовании его малых колебаний пренебрегается вязкостью и нелинейными эффектами, т. е. используется уравнение Рэлея (5.1) для амплитуды колебаний скорости. В то же время профиль скорости $U(y)$ невозмущенного течения выбирается такой, который реализуется для средней скорости турбулентного погранслоя над гладкой твердой поверхностью — так называемый логарифмический погранслой [25]. Таким образом, наличие турбулентных пульсаций в ветре (не связанных с поверхностными волнами) учитывается лишь при выборе профиля скорости сдвигового потока и игнорируется при исследовании малых колебаний этого потока.

Использование таких приближений приводит к простой модели сдвигового потока идеальной жидкости над границей раздела двух сред с различной плотностью, «несущей» поверхностные гравитационные волны. Чтобы найти величину инкремента усиления поверхностных волн, проинтегрируем, следуя Майлсу [91], уравнение Рэлея (5.1), умножив его предварительно на ψ^* и учитывая граничные условия на поверхности

*) Малая величина усиления здесь связана с тем очевидным обстоятельством, что в «узком» слое сдвига резонансных частиц мало.

воды. В результате получим выражение для инкремента нарастания поверхностных волн [91, 20]:

$$\gamma = - \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\pi \omega^3}{2k} \left(\frac{d^2 U / dy^2}{|dU/dy|^3} \right)_{y=y_c} \left| \frac{P(y_c)}{P(0)} \right|^2. \quad (5.9)$$

Зависимость усиления ветровых волн от кривизны профиля скорости здесь такая же, как и зависимость (5.7) усиления звуковых волн в сдвиговом потоке. По своей природе майлсовский механизм генерации ветровых волн аналогичен механизму кинетической неустойчивости волн в плазме; при этом знак инкремента (5.9) определяется, как и для звука, производной функции распределения частиц сдвигового потока по скоростям

$$\left. \frac{df}{dU} \right|_{y=y_c} \sim \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=y_c}.$$

В пограничном слое над поверхностью воды, где $d^2 U / dy^2 < 0$, резонансное взаимодействие с ветровым потоком усиливает поверхностные волны. Вычисление величины майлсовского инкремента для логарифмического профиля дает в ряде случаев значения, близкие к экспериментально измеренным [25].

Резонансное усиление поверхностных волн в критическом слое сдвигового потока имеет место не только для ветрового волнения. На основе теории Майлса рассмотрена генерация акустических волн на замедляющей структуре [20], магнитогидродинамических волн в облаках радиогалактик [92] и т. д.

5.4. Внутренние гравитационные волны в критическом слое. Резонансное взаимодействие волновых возмущений со стратифицированным потоком имеет ряд характерных отличительных черт. Уравнение Тейлора — Гольдштейна [26]

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} - k^2 \psi - \frac{d^2 U / dy^2}{U - (\omega/k)} \psi + \frac{N^2}{[U - (\omega/k)]^2} \psi = 0, \quad (5.10)$$

обобщающее уравнение Рэлея (5.1) для стратифицированных сред ($N \neq 0$) содержит в критической точке y_c особенность более высокого порядка, чем (5.1) *). Здесь фундаментальную роль играет значение числа

Ричардсона $Ri = N^2 (dU/dy)^{-2}$, взятое в критической точке. При $Ri_c \equiv Ri(y_c) > 1/4$ энергия ВГВ поглощается в критическом слое [26]. Интерпретация этого результата основана на использовании метода ВКБ при $Ri \gg 1/4$ в окрестности критического слоя, где волновой пакет с уменьшающейся длиной волны бесконечно долго приближается к критической точке.

В то же время при $Ri_c < 1/4$ резонансное взаимодействие ВГВ с потоком в критическом слое может приводить к усилению волны. Небольшое число работ [95—98], где рассматривалась эта возможность, основано на использовании модельных (кусочно-линейных и т. п.) профилей скорости, применении численных методов, а также на подборе профилей $U(y)$ и $N(y)$, допускающих точное решение уравнения (5.10) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi(-\infty) &= \exp(iq_1 z) + R \exp(-iq_1 z), \\ \psi(+\infty) &= T \exp(iq_2 z), \end{aligned} \quad (5.11)$$

*) Отметим попутно, что учет вязкости в стратифицированной среде не устраняет особенности в соответствующем обобщенном уравнении Орра — Зоммерфельда, которое впервые было выведено Дразиным [93], а лишь снижает порядок ее. Устранение особенности в этом случае достигается учетом эффектов диффузии, размывающей стратификацию, но при этом порядок уравнения повышается до шестого [94].

где

$$q_1 = -k[N^2(-\infty) - \omega^2]^{1/2}/\omega,$$

$$q_2 = -[N^2(+\infty) - (\omega - kU(+\infty))^2]^{1/2}[\omega - kU(+\infty)]^{-1}.$$

В работе [77] найден критерий резонансного усиления для «узких» сдвиговых течений $U = U_0 \Phi(y/l)$ ($\mu = k_0 l \ll 1$), для которых характерное число Ричардсона $Ri \sim N^2 l^2 / U_0^2 \ll 1$. Метод сращиваемых асимптотических разложений по параметру μ позволяет найти коэффициенты R и T для произвольного «узкого» слоя сдвига, совмещенного с произвольным «узким» перепадом плотности, определяющим локальный максимум частоты Брента — Вайсяля в области сдвига: $N^2(y) = N_0^2 + N_1^2(y/l)$, $N_1^2/N_0^2 \sim \mu$. Найденная этим методом величина относительного усиления $\Pi = |R|^2 + (\text{Re } q_2/q_1) |T|^2 - 1$, характеризующая превышение суммы потоков энергии отраженной и преломленной волн над единичным потоком энергии падающей волны, имеет вид

$$\Pi = \frac{4\pi |q_1 q_2^2| (\omega/k)^2 [U_0 - \omega/k]^4}{\{q_1 (\omega/k)^2 + q_2 [U_0 - \omega/k]^2\}^2 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} N_1^2 dy \right)^2} \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-1} \frac{d}{dy} \left[\frac{|P(y)/P(\infty)|^2}{dU/dy} \right] \right\}_{y=y_c}. \quad (5.12)$$

Сюда входит асимптотическое разложение амплитуды давления в первом приближении по μ

$$P(y) = P(\infty) \left[1 - i q_2^{-1} \left(U_0 - \frac{\omega}{k} \right)^{-2} \int_y^\infty N_1^2 dy \right] = P(\infty) + \rho_0 \eta \int_y^\infty N_1^2 dy, \quad (5.13)$$

где η — амплитуда смещения изопикнической поверхности.

Из (5.12) видно, что ВГВ усиливаются ($\Pi > 0$) при отражении от сдвигового потока, если

$$\left[\left(\frac{dU}{dy} \right)^{-1} \frac{d}{dy} \frac{|P|^2}{dU/dy} \right]_{y=y_c} > 0. \quad (5.14)$$

Этот критерий получает простой физический смысл, если учесть, что величина

$$f = \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-1}$$

является функцией распределения частиц потока по скоростям. В нестратифицированном потоке

$$\frac{d|P|^2}{dy} \Big|_{y=y_c} = 0;$$

в этом случае величина усиления пропорциональна производной

$$\frac{df}{dy} = - \frac{d^2 U}{dy^2} \left(\frac{dU}{dy} \right)^{-3},$$

взятой в критической точке y_c .

При наличии существенной стратификации ($N_1 \neq 0$, $Ri_c \gg \mu$) интенсивность волнового поля (в первом приближении по μ) становится

неоднородной:

$$\left. \frac{d|P|^2}{dy} \right|_{y=y_c} \neq 0.$$

Согласно (5.13) эта неоднородность определяется градиентом амплитуды колебаний гидростатического давления, возникающих при периодическом смещении слоя жидкости с переменной плотностью. Вследствие неоднородности поля волны в критическом слое, ее взаимодействие с обгоняющими и отстающими частицами происходит с разной эффективностью: направление энергообмена определяется теперь, согласно критерию (5.14), производной величины $|P|^2 f(U)$.

Интерпретация резонансного взаимодействия как результат конкуренции поглощения и усиления при воздействии на возмущение со стороны отстающих и обгоняющих частиц позволяет также объяснить эффект поглощения ВГВ в критическом слое с большим числом Ричардсона. В этом случае волна поглощается отстающими частицами потока, в то время как до обгоняющих частиц, способных усиливать волну, доходит лишь незначительная часть волнового поля.

Зависимость усиления (поглощения) волны от характера волнового поля в критическом слое приводит к тому, что критерий усиления не сводится к локальному условию типа критерия Майлса $d^2 U(y_c)/dy^2 < 0$. Усиление ВГВ в стратифицированном потоке определяется глобальным условием, включающим в себя характеристики потока во всей рассматриваемой области, а не только в критическом слое. Можно получить более общее, чем (5.14), условие усиления, которое справедливо при произвольных числах Ричардсона. Для этого используем уравнение для амплитуды давления:

$$\frac{d}{dy} \frac{dP/dy}{[U - (\omega/k)]^2 - (N^2/k^2)} - \frac{k^2}{[U - (\omega/k)]^2} P = 0. \quad (5.15)$$

Умножив (5.15) на P^* , проинтегрируем по частям. Мнимая часть полученного равенства дает критерий усиления в виде [77]:

$$\Pi = - \frac{1}{|\rho_0| q_1 |P(-\infty)|^2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P|^2 dy}{[U - (\omega/k)]^2} > 0. \quad (5.16)$$

Критерий (5.14) следует из (5.16), если в подынтегральном выражении использовать для давления асимптотическое выражение в первом приближении по μ , не содержащее особенности в точке y_c , и перейти в верхнюю полуплоскость комплексной частоты $\omega = \omega_r + i\delta$, имея в виду решение начальной задачи методом Лапласа. Подчеркнем, что точное выражение для амплитуды давления имеет особенность при $y=y_c$. Это не позволяет сместить путь интегрирования в (5.16) в комплексную плоскость y , т. е. свести интегрирование в (5.16) при $\delta \rightarrow 0$ просто к правилу обхода Линя.

Результаты численного расчета резонансного усиления ВГВ для слоя сдвига с профилем $U = (U_0/2) [1 + \tanh(y/l)]$, $N = \text{const}$ представлены на рис. 17. Здесь изображены изолинии величины максимального усиления $\Pi_{\max} = \max \Pi(\theta)$ на плоскости параметров ω/kU_0 , $Ri = 4N^2 l^2 / U_0^2$. Заметим, что резонансное усиление ($\Pi_{\max} > 0$) возможно не только при $\omega/kU_0 > 0,5$, когда критическая точка находится на выпуклом участке профиля скорости, как это было для волн в нестратифицированной жидкости, но и при $\omega/kU_0 < 0,5$, когда волны находятся в резонансе с вогнутыми участками профиля.

Важной особенностью резонансного усиления ВГВ является возможность их спонтанного излучения: при некоторых значениях параметров

Ri , ω/k , θ величина $\Pi \rightarrow \infty$ (изолиния $\Pi_{\max} = \infty$ на рис. 17). Это соответствует резонансу волны падающей с нейтральной собственной модой системы, в которой поле экспоненциально спадает выше слоя сдвига ($y \rightarrow \infty$), а ниже этого слоя ($y \rightarrow -\infty$) представляет собой бегущую волну. Такие нейтральные возмущения, соответствующие спонтанному излучению ВГВ

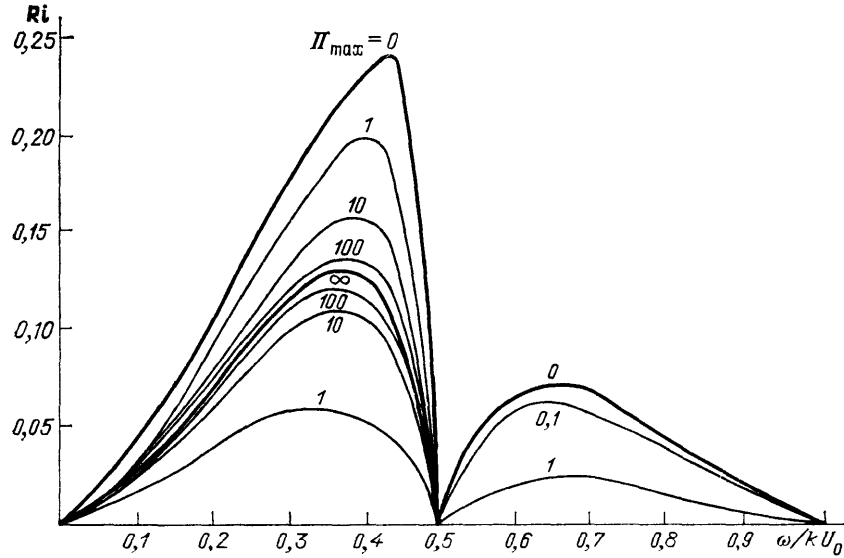


Рис. 17. Резонансное усиление ВГВ на слое сдвига: изолинии $\Pi_{\max} = \text{const}$ на плоскости параметров Ri , $\omega/k U_0$

слоем сдвига, были найдены в работах [99, 100]. Подчеркнем, что, в отличие от спонтанного излучения ТР, здесь энергия ВГВ не сохраняется: имеется критический слой, где волна черпает энергию из стратифицированного потока.

6. Рассеяние волн на вихрях.

6.1. Алгебраический метод для цилиндрических вихрей. Рассмотренные выше свойства волн в сдвиговых потоках можно проследить и в течениях с замкнутыми линиями тока — цилиндрических вихрях. Для исследования малых возмущений в аксиально-симметричных течениях обычно используется алгебраический метод, основанный, как и в плоскопараллельных течениях, на аппроксимации распределения скорости профилем с кусочно-постоянной завихренностью и сшивке аналитических решений на границах областей.

В полярных координатах амплитуда возмущений вида $\exp(-i\omega t + in\varphi)$ для функции тока удовлетворяет уравнению, аналогичному (5.2):

$$\hat{L}\psi + \frac{n}{r} \frac{dQ/dr}{(\omega - n\Omega)} \psi = \frac{in}{\omega - n\Omega} \hat{L}^2 \psi, \quad (6.1)$$

где $\hat{L} = d^2/dr^2 + r^{-1}d/dr - (n^2/r^2)$. При $v=0$ (6.1) аналогично уравнению Рэлея; оно содержит особые точки $\omega - n\Omega = 0$ с коэффициентом, пропорциональным производной завихренности $dQ/dr = r d^2\Omega/dr^2 + 3d\Omega/dr$. В уравнении Рэлея вычет коэффициента в особой точке имел тот же смысл и был пропорционален второй производной профиля скорости. Можно также доказать утверждение, аналогичное теореме Рэлея [101]: нарастающие во времени возмущения могут существовать лишь при наличии точек экстремума завихренности в профиле угловой скорости, где $dQ/dr=0$

(в плоскопараллельном течении — это точки перегиба профиля скорости).

Для вихрей с постоянной завихренностью, в которых $\Omega = \Omega_0 + (\kappa/r)$, (6.1) имеет точные решения вида $\psi = \psi_a = Ar^n + Br^{-n}$. Это позволяет применить алгебраический метод, использующий профили угловой скорости, составленные из нескольких частей с однородной завихренностью и разграниченных тангенциальными разрывами или изломами скорости. Для такого «кусочного» профиля нетрудно найти решение, сшивая выражения типа ψ_a в каждой из частей с помощью граничных условий на разрывах [23]. В частности, для цилиндрического ТР (рис. 18, а) можно найти

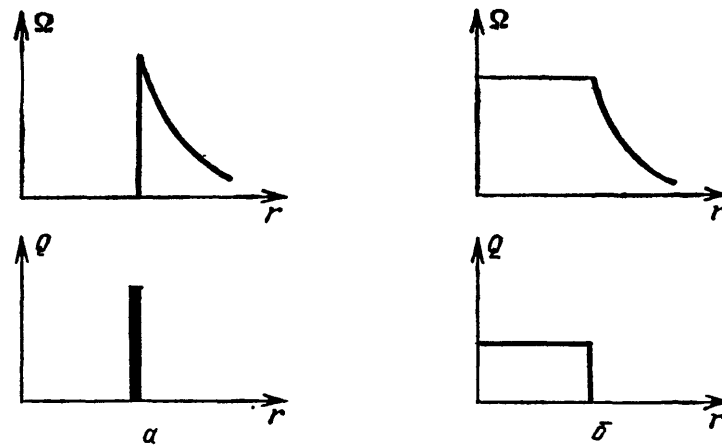


Рис. 18. Профили угловой скорости и завихренности для различных цилиндрических вихрей. а — Цилиндрический ТР. б — Вихрь Ранкина

дисперсионное уравнение $\omega^2 + (\omega - n\Omega_0)^2 = |n|\Omega_0^2$, которое переходит в уравнение Кельвина — Гельмгольца при $n \rightarrow \infty$ (при этом $n\Omega_0 \rightarrow kU$). Его решение

$$\omega = \frac{1}{2} \Omega_0 [n \pm (2|n| - n^2)^{1/2}]$$

соответствует неустойчивым модам для всех $n \geq 2$. Мода $n=1$, соответствующая сдвигу вихря как целого, очевидно, нейтрально устойчива.

Для другой модели — вихря Ранкина (рис. 18, б) дисперсионное уравнение, описывающее нейтрально устойчивые колебания, имеет вид: $(\omega - n\Omega_0)[\omega - (n-1)\Omega_0] = 0$.

Оставаясь в рамках алгебраического метода, можно также оценить модельным образом влияние вязкости на колебания вихрей. Для этого достаточно рассмотреть разрыв между вязкой и идеальной жидкостью, т. е. учесть вязкость, например, только в ядре вихря. Учет вязкости при $dQ/dr=0$ не изменяет решения ψ_a , так как они тождественно удовлетворяют уравнению (6.1). Повышение же порядка уравнения при $v \neq 0$ приводит к появлению дополнительных линейно независимых решений, которые при больших числах Рейнольдса Re сильно осциллируют и затухают по координате r при удалении от источника. Граничные условия на разрыве при $r=a$ — непрерывность нормальных к подвижной границе компонент потока импульса — позволяют сшить невязкие решения во внешней области вихря и линейную комбинацию невязких и затухающих вязких решений в ядре вихря. Таким методом можно получить для колебания вихря Ранкина в первом приближении по параметру $Re = v/\Omega_0 a^2$

дисперсионное уравнение

$$\omega = (n-1)\Omega_0 - \frac{2iv}{a^2} n(n-1), \quad (6.2)$$

которое соответствует затухающим колебаниям. Интерпретация этого результата должна учитывать, что в среде, вращающейся быстрее, чем угловая фазовая скорость азимутальных волн ($\omega - n\Omega_0 < 0$), диссипация отрицательна. Однако отрицательной является и энергия колебаний вихря [102]

$$E = -\pi a^4 \Omega^2 \frac{n-1}{n} \rho \left| \frac{\xi_0}{a} \right|^2 < 0, \quad (6.3)$$

где ξ_0 — амплитуда смещения границы вихревого ядра.

Отрицательная энергия собственных колебаний вихря делает возможной его излучательную неустойчивость в сжимаемой среде [103]. При $\mu \equiv \Omega_0/c < 1$ колебания близки к несжимаемым при $r \leq a$, но связанное с ними нестационарное течение излучает звук в волновой зоне $r \gg \lambda$. В результате отбора энергии уходящими звуковыми волнами амплитуда колебаний нарастает.

6.2. Усиление звука вихрями. Наличие волн отрицательной энергии во вращающейся среде делает, в принципе, возможным усиление падающей на вихрь звуковой волны. Однако для реализации этой возможности необходим сток отрицательной энергии, роль которого в плоскопараллельном ТР играл уход преломленных волн на бесконечность. Для вихрей, у которых область ядра конечна, такой возможности не существует. Однако здесь возможно усиление рассеянного звука за счет изменения знака вязкой диссипации в ядре вихря.

Рассмотрим рассеяние звука на вихре размера $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ [23, 24]. Поле в дальней зоне

$$P = \exp\left(i \frac{\omega r \cos \theta}{c}\right) + f(\theta) r^{-1/2} \exp\left(i \frac{\omega r}{c}\right) = \left(\frac{2\pi\omega r}{c}\right)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\varphi} \times \\ \times \left\{ \exp\left[-i \left(\frac{\omega r}{c} - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] + R_n \exp\left[i \left(\frac{\omega r}{c} - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \right\} \quad (6.4)$$

определяется коэффициентами отражения цилиндрических гармоник

$$R_n = 1 + \left(\frac{2\pi i \omega}{c}\right)^{1/2} f_n,$$

где

$$f(\theta) = \sum_n f_n \exp(in\theta)$$

— амплитуда рассеяния. Обмен энергии волны с вихрем характеризуется величинами $|R_n|$, которые можно найти в первом приближении по параметру $\mu \equiv a/\lambda \ll 1$. Для этого достаточно решить уравнение при $r \ll \lambda$, получаемое алгебраическим методом, и решение при $r \gg a$ в виде суммы падающих и отраженных цилиндрических волн. Для вихря Ранкина с вязким ядром нетрудно получить таким способом [23]

$$1 - |R_n|^2 = \frac{8\pi\nu/a^2}{(|n|-1)!(|n|-2)!} \left(\frac{\omega a}{2c}\right)^{2|n|} \frac{\omega - n\Omega_0}{[\omega - (n-1)\Omega_0]^2}. \quad (6.5)$$

При $\omega - n\Omega_0 < 0$ звук усиливается: $|R_n| > 1$. Усиление звука вращающимся вязким вихрем представляет собой акустический аналог эффекта, рассмотренного в работе [104], где показана возможность усиления электромагнитных волн при рассеянии на вращающемся проводящем цилинд-

ре, а также гравитационных волн на коллапсирующем вращающемся теле.

Следует отметить, однако, что механизм вязкой диссипации звука в вихревом течении не сводится к простому поглощению, а определяется линейной трансформацией в быстрозатухающие вихревые волны.

В вихревых течениях с гладким профилем при $dQ/dr \neq 0$ возможен также резонансный механизм поглощения (усиления) малых возмущений, аналогичный механизму циклотронного поглощения волн в магнитоактивной плазме [23]. Этот механизм существует при $v=0$, когда уравнение (6.1) содержит особенности, где $\omega - n\Omega = 0$. Обход этих особенностей производится, как и для прямолинейных сдвиговых потоков по правилу Линя [6].

Следуя работам [23, 24], рассмотрим резонансный механизм усиления звука при рассеянии на цилиндрическом вихре с произвольным непрерывным профилем угловой скорости $\Omega(r)$. Для этого вычислим величину $L(r) = \text{Re}(r^2 u^* v)$, где $\mathbf{V} = (u, v)$ — амплитуда колебаний скорости. При $r \gg a$ (a — размер вихревого ядра) течение потенциально; для потенциала Φ нетрудно получить уравнение [24]:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \Phi + \frac{(\omega - n\Omega)^2}{c^2} \Phi = 0. \quad (6.6)$$

Умножая (6.6) на $inr\Phi^*$ и интегрируя по частям от $r=r_1$ ($a \ll r_1 \ll \lambda$) до $r=r_0 \gg \lambda$, находим, что $L(r_1) = L(r_0)$. При $\mu = \omega a/r \ll 1$; $\Omega \ll \omega$ приближенное решение уравнения (6.6)

$$\Phi = A \left[H_n^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) + R_n H_n^{(2)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) \right], \quad (6.7)$$

где $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$ — функции Ханкеля первого и второго рода, позволяет найти

$$L(r_0) = \frac{2|n|}{\pi} |A|^2 (|R_n|^2 - 1). \quad (6.8)$$

В то же время при $r \ll \lambda$ среду можно считать несжимаемой и воспользоваться уравнением (6.1) (при $v=0$). Снова умножая его на $inr\psi^*$ и интегрируя по частям, с учетом правила обхода особых точек получаем

$$L(r_1) = -\pi n \left(|\psi|^2 \left| \frac{d\Omega}{dr} \right|^{-1} \frac{dQ}{dr} \right)_{r=r_n},$$

где $\Omega(r_n) = \omega/n$. Сравнивая это выражение с (6.8), заметим, что

$$1 - |R_n| \sim \left. \frac{dQ}{dr} \right|_{r=r_n}.$$

Таким образом, если завихренность убывает с ростом r , то звуковая волна усиливается при отражении от вихря ($|R_n| > 1$). Обычно завихренность монотонно убывает при удалении от оси вихря и, следовательно, звуковая волна усиливается вихрем.

При $r \gg a$ решение уравнения (6.1) имеет вид

$$\psi = B \left[\left(\frac{r}{a} \right)^n + q_n \left(\frac{r}{a} \right)^{-n} \right]. \quad (6.9)$$

Отсюда следует $L(r_1) = -2n^2 |B|^2 \text{Im } q_n$. Тогда, с учетом формулы (6.8), получим

$$1 - |R_n|^2 = \frac{4\pi}{|n|! (|n| - 1)!} \left(\frac{\omega a}{2c} \right)^{2|n|} \text{Im } q_n. \quad (6.10)$$

Безразмерные величины q_n определяются профилем относительной угловой скорости Ω/ω . Для $n = \pm 1$ решение уравнения (6.1) имеет вид

$$\psi = Ar(\Omega \pm \omega),$$

и, следовательно, величины $q_{\pm 1}$ действительны. Таким образом, в идеальной жидкости отражение первых цилиндрических гармоник является упругим. Резонансный механизм диссипации, связанный с наличием особых точек r_n , существует лишь при $n \geq 2$. В частности, для профиля

$$\Omega(r) = \Omega_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]$$

на рис. 19 приведен результат численного расчета величины $\text{Im } q_2$ [23].

Сечение поглощения плоской волны вихрем определяется гармоникой с $n = 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{c}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - |R_n|^2) \approx \frac{c}{\omega} (1 - |R_2|^2) = \\ &= \frac{\pi a}{8} \left(\frac{\omega a}{c}\right)^3 \text{Im } q_2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Рис. 19. Резонансное усиление звука вихрем в идеальной жидкости: величина $\text{Im } q_2$ в зависимости от частоты

Для вихрей с убывающей завихренностью ($dQ/dr < 0$) сечение поглощения отрицательно; в этом случае рассеяние волны на вихре сопровождается ее усилением. Заметим также, что при $\Omega \sim \omega$ сечение поглощения имеет тот же порядок $\mu^3 a$, что и сечение рассеяния [23, 24].

7. Заключение. Представленный обзор охватывает относительно небольшой круг явлений и задач, связанных с распространением волн в сдвиговых гидродинамических течениях. Из-за ограниченного объема публикации сюда не вошли многие важные и интересные вопросы, как непосредственно связанные с темой обзора, так и относящиеся к близким смежным разделам. Перечислим некоторые из таких вопросов, по нашему мнению, заслуживающие хотя бы краткого упоминания.

Взаимодействие со сдвиговыми течениями неоднократно рассматривалось в качестве механизма генерации и усиления различных типов волн в плазме [14]. Были исследованы задачи о собственных колебаниях и устойчивости ТР в магнитной гидродинамике [105], сверхотражении магнитогидродинамических волн [106–108] и электромагнитных волн от ТР [109]. Для резонансного взаимодействия электромагнитных волн со сдвиговыми течениями в магнитном поле отмечена зависимость обмена энергией волны с потоком в критическом слое от производной функции распределения частиц гидродинамического течения по скоростям [110]. Интересная возможность перехода между плазменным и гидродинамическим критериями резонансного усиления установлена в работе [111], посвященной исследованию волн в критическом слое плазменного потока, рассматриваемых в кинетическом приближении. В этом случае фазовая скорость волны находится в синхронизме не только с частицами на критическом уровне, движущимися со средней скоростью потока, но и с частицами других слоев, скорость которых отклоняется от средней.

Другой круг вопросов, оставшийся за пределами нашего обзора, — нелинейные эффекты при взаимодействии волн с потоком. Здесь также широко применяется плазменно-гидродинамическая аналогия [20]. Известны работы по нелинейной динамике критического слоя, аналогичной динамике резонансных с ленгмюровской волной частиц плазмы в простран-

стве скоростей [112—115]. Развита квазилинейная теория [21] и теория вынужденного комбинационного рассеяния на частицах потока [22] для ветровых волн в океане. Исследован также гидродинамический аналог плазменного эха в сдвиговом течении [116].

Аналогия с задачами физики плазмы и электроники позволяет по-новому подойти к теории аэродинамических генераторов звука [28, 117] и, в частности, предложить новые типы акустических генераторов, подобные известным электронным приборам [20].

В данном обзоре теория колебаний вихрей и их взаимодействия с внешними волновыми полями рассмотрена весьма сжато. Этой теме в принципе можно было бы посвятить отдельный обзор. Здесь, однако, по нашему мнению имеется большой круг нерешенных или недостаточно исследованных проблем. К ним, в частности, относятся некоторые задачи геофизической гидродинамики: излучение атмосферных волн циклонами и смерчами [118, 119], взаимодействие различных типов волн с океаническими вихрями [120] и т. п.

Естественно было бы попытаться обобщить приведенные здесь результаты на различные типы волн в атмосфере и океане (волны Кельвина и Пуанкаре, инерционно-гироскопические, захваченные шельфовые волны [27]), в магнитосфере Земли [121], солнечном ветре [122] и атмосфере Солнца [123]. Представляет также интерес исследование с этой точки зрения волн в релятивистских течениях (отметим работы [124—126], посвященные неустойчивости релятивистского ТР), необходимое при решении ряда астрофизических задач (см., например, [127]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 4.— М.: Наука, 1967.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
4. Рэлей (Дж. В. Стретт). Теория звука. Т. 2.— М.: Гостехиздат, 1955.
5. Heisenberg W. // Ann. d. Phys. 1924. Bd 74. S. 577.
6. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической неустойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
8. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая неустойчивость и турбулентность.— Новосибирск: Наука, 1977.
9. Case K. M. // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 366.
10. Тимофеев А. В. // УФН. 1970. Т. 102. С. 185.
- [11] Кадомцев Б. Б., Конторович В. В. // Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1974. Т. 17. С. 511.
12. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. // УФН. 1973. Т. 109. С. 225.
13. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. // Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1976. Т. 19. С. 721.
14. Михайловский А. В. Теория плазменных неустойчивостей.— М.: Атомиздат, 1971.
15. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
16. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1974.
17. Briggs R. J., Daugherty J. D., Levi R. H. // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 421.
18. Рюто в Д. Д. // Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 446.
19. Meyer E. // 4er Intern. Congress on Acoustics. Copenhagen, 1962: Congr. Rept.— Copenhagen, 1963.— V. 2. P. 139.
20. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. // Нелинейные волны/Под ред. А. В. Гапонова.— М.: Наука, 1979.
- [21] Фабрикант А. Л. // Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1976. Т. 12. С. 858.
22. Пимринг Л. Ш. // Ibidem. 1983. Т. 19. С. 68.
23. Големшток Г. М., Фабрикант А. Л. // Акуст. журн. 1980. Т. 26. С. 383.
24. Фабрикант А. Л. // Ibidem. 1982. Т. 28. С. 694.
25. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.
26. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере.— М.: Мир, 1978.
27. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т. 1, 2.— М.: Мир, 1984.

28. Голдстейн М. Е. Аэроакустика.— М.: Машиностроение, 1981.
29. Лупанов Г. А.//ЖЭТФ. 1973. Т. 43. С. 925.
30. Пикунин В. Д., Степанов Н. С.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1976. Т. 19. С. 1564.
- [31] Островский Л. А., Рыбак С. А., Цимринг Л. Ш.//УФН. 1986. Т. 150. С. 417.
32. Гинзбург В. Л., Угаров В. А.//УФН. 1976. Т. 118. С. 175.
33. Мак-Интайр М.//Современная гидродинамика: Успехи и проблемы.— М.: Мир, 1984.— С. 154.
34. Фабрикант А. Л. Импульс волнового пакета в среде и индуцированные течения.— Горький, 1987.— (Препр. ИПФ АН СССР).
35. Езерский А. Б., Островский Л. А., Степанянц Ю. А.//Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1981. Т. 17. С. 1201.
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
37. Джексон Дж. Классическая электродинамика.— М.: Мир, 1965.
38. Езерский А. Б., Папко В. В.//Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1986. Т. 22. С. 979.
39. Pierls S. R.//Proc. Roy. Soc. 1975. V. 347. P. 475.
40. Bretherton F. P.//J. Fluid. Mech. 1969. V. 36. P. 795.
- [41] Zhu X., Holton J. R.//J. Atmos. Sci. 1987. V. 44. P. 620.
42. Реутов В. П. Препринт ИПФ АН СССР № 218.— Горький, 1988.
43. Miles J. W.//J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29. P. 226.
44. Ribner H. S.//Ibidem. P. 435.
45. McKenzie J. E.//J. Geophys. Res. 1972. V. 77. P. 2015.
46. Лупанов Г. А.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1975. Т. 18. С. 1711.
47. Miles J. W.//J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 528.
48. Сыроватский С. И.//ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 121.
49. Кикина Н. Г., Санников Д. Г.//ПММ. 1969. № 3. С. 580.
50. Незлин М. В.//УФН. 1986. Т. 150. С. 1.
- [51] Колыхалов П. И.//Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа». 1984. № 3. С. 145.
52. Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F.//J. Fluid Mech. 1975. V. 71. P. 305.
53. Graham E. B., Graham B. B.//J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 46. P. 169.
54. Курин В. В., Немцов Б. Е., Эйрман В. Я.//УФН. 1985. Т. 147. С. 157.
55. Jones D. S., Morgan J. B.//Proc. Cambr. Phil. Soc. 1972. V. 72. N 3. P. 465.
56. Миронов М. А.//Акуст. журн. 1975. Т. 21. С. 79.
57. Немцов Б. Е. Препринт НИРФИ № 211.— Горький, 1986.
58. Немцов Б. Е., Цимринг Л. Ш. Препринт ИПФ АН СССР. № 156.— Горький, 1986.
59. Ультразвук: Маленькая энциклопедия/Под ред. И. П. Голямина.— М.: Сов. энциклопедия, 1979.
60. Андронов А. А., Фабрикант А. Л.//Акуст. журн. 1980. Т. 26. С. 655.
- [61] Гапонов В. И. Электроника.— М.: Физматлит, 1960.
62. Петелин М. И.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1985. Т. 28. С. 354.
63. Miles J. W.//J. Acoust. Soc. Am. 1954. V. 26. P. 1015.
64. Кикина Н. Г.//Акуст. журн. 1967. Т. 13. С. 213.
65. Gerwin R. A.//Rev. Mod. Phys. 1968. V. 40. P. 652.
66. Evans D. V.//J. Fluid. Mech. 1975. V. 68. P. 389.
67. Басович А. Я.//Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1978. Т. 14. С. 901.
68. Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш.//Нелинейные волны: Самоорганизация/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича.— М.: Наука, 1983.
69. Cairns R. O.//J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 1.
70. Незлин М. В.//УФН. 1974. Т. 120. С. 481.
- [71] Островский Л. А., Степанянц Ю. А.//Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа». 1982. № 4. С. 63.
72. Vagnett T. P., Kenyon//Rept. Prog. Phys. 1975. V. 38. P. 667.
73. Benjamin T. B.//J. Fluid Mech. 1963. V. 16. P. 436.
74. Камацу Т., Имасака М., Цубаки Г.//Кидай ногаку сюко (япон.). 1979. Т. 52. С. 25.
75. Степанянц Ю. А. Автореферат диссертации... канд. физ.-мат. наук.— Горький, 1983.
76. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.— М.: Мир, 1977.
77. Троицкая Ю. И., Фабрикант А. Л.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1989. Т. 32. С. 1521.
78. Goldstone L. O., Oliner A. A.//IRE Trans. 1959. V. AP-7. P. 307.
79. Островский Л. А., Цимринг Л. Ш.//Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1981. Т. 17. С. 766.
80. Ерохин Н. С., Моисеев С. С.//ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 1431.

- [81] Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1565.
- 82. Фабрикант А. Л.//Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1987. Т. 23. С. 106.
- 83. Nasegawa A., Mima K.//Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 87.
- 84. Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. 2.— М.: Наука, 1969.
- 85. Айнс Е. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков: ГОНТИ, 1933.
- 86. Дикий Л. А.//ДАН СССР. 1960. Т. 135. С. 1068.
- 87. Кейз К.//Гидродинамическая неустойчивость.— М.: Мир, 1960.
- 88. Фабрикант А. Л.//Акуст. журн. 1976. Т. 22. С. 107.
- 89. Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А., Басович А. Я.//Тезисы докладов симпозиума по физике акустико-гидродинамических явлений.— Сухуми, 1975.— С. 250.
- 90. Андронов А. А., Фабрикант А. Л.//Акуст. журн. 1980. Т. 26. С. 655.
- [91] Miles J. W.//J. Fluid Mech. 1957. V. 3. P. 185.
- 92. Вробель А. О., Конторович В. М.//Письма Астрон. ж. 1982. Т. 8. С. 330.
- 93. Drazin G.//Proc. Camb. Phil. Soc. 1962. V. 58. P. 646.
- 94. Hazel P. J.//J. Fluid Mech. 1967. V. 39. P. 775.
- 95. Jones W. L.//J. Fluid Mech. 1968. V. 34. P. 609.
- 96. Eltayeb I. A., McKenzie J. F.//Ibidem. 1975. V. 72. P. 661.
- 97. Van Duin C. A., Kelder H.//Ibidem. 1982. V. 120. P. 505.
- 98. Lindzen R. S., Barker J. W.//Ibidem. 1985. V. 151. P. 189.
- 99. Lalas D. P., Einaudi F.//J. Atmos. Sci. 1976. V. 33. P. 1248.
- 100. Fritts D. C.//Ibidem. 1980. V. 37. P. 1642.
- [101] Michalke A., Timme A.//J. Fluid Mech. 1961. V. 39. P. 647.
- 102. Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.//Акуст. журн. 1987. Т. 29. С. 192.
- 103. Broadbent E. G., Moore D. W.//Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1979. V. 390. P. 353.
- 104. Зельдович Я. Б.//ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 2076.
- 105. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
- 106. Fezer J. A.//Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 508.
- 107. Duhan S., Gratton F., Gratton G.//Ibidem. 1971. V. 14. P. 2067.
- 108. Acheson D. J.//J. Fluid Mech. 1976. V. 77. P. 433.
- 109. Лупанов Г. А.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1975. Т. 18. С. 1711.
- 110. Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А.//Ibidem. 1977. Т. 20. С. 982.
- [111] Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А.//Физика плазмы. 1980. Т. 6. С. 1046.
- 112. Benney D. J., Bergeron R. F.//Stud. Appl. Math. 1969. V. 48. P. 181.
- 113. Holerman R.//Ibidem. 1972. V. 51. P. 139.
- 114. Реутов В. П.//ПМТФ. 1982. № 4. С. 43.
- 115. Churilov S. M., Shukhman I. G.//J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 1.
- 116. Алелеков И. В., Шагалов С. В.//III съезд советских океанологов: Тезисы докладов. Секция «Физика и химия океана: Ветровые, внутренние, приливные волны; волны цунами». — Л.: Гидрометеиздат, 1987.— С. 15.
- 117. Coltman J. W.//J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. P. 983.
- 118. Willoughby H. E.//J. Atmos. Sci. 1977. V. 34. P. 1028.
- 119. Шепетнов Р. В., Троицкая В. А., Довбня Б. В.//ДАН СССР. 1986. Т. 290. С. 582.
- 120. Структура, кинематика и динамика синоптических вихрей: Сб. статей.— Севастополь, 1980.
- [121] Гульельми А. В. МГД волны в околоземной плазме.— М.: Наука, 1979.
- 122. Веселовский И. С.//Итоги науки и техники. Сер. «Исследования космического пространства». Т. 22.— М.: ВИНТИ АН СССР, 1984.
- 123. Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Цытович В. Н. Физика плазмы солнечной атмосферы.— М.: Наука, 1977.
- 124. Ингель Л. Х.//Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа». 1983. № 2. С. 144.
- 125. Turland B. D., Schener P. A. G.//Mon. Not. RAS. 1976. V. 176. P. 421.
- 126. Blandford R. D., Pringle J. E.//Ibidem. P. 652.
- 127. Begelman M. C., Blandford R. D., Rees M. J.//Rev. Mod. Phys. 1984. V. 56. P. 255.
- 128. Курганский М. В.//Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа». 1986. № 5. С. 184.