

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

621.8.034

**АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ**

П. С. Ланда, Я. Б. Дубошинский

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

До недавнего времени было принято считать, что автоколебательные системы — это системы, преобразующие энергию постоянного, неосциллирующего источника в энергию колебаний [1—7]. Действительно, такие системы удовлетворяют характерным признакам автоколебательных систем, которые на современном языке могут быть сформулированы следующим образом:

1) независимость амплитуды установившихся колебаний от начального состояния системы в широком диапазоне, т. е. существование в фазовом пространстве хотя бы одного аттрактора *);

2) независимость спектра колебаний от спектра источника.

Однако для реализации указанных признаков автоколебательных систем наличие именно постоянного источника энергии не является обязательным. Толчком к пересмотру определения автоколебательных систем явилось открытие возможности хаотических колебаний в пассивных нелинейных осцилляторах, находящихся под действием периодической внешней силы [8, 9]. Такие колебания удовлетворяют перечисленным выше признакам и поэтому могут рассматриваться как автоколебания.

Оглядываясь назад, можно обнаружить, что в физике давно известен ряд систем, преобразующих энергию высокочастотного источника **) в низкочастотные колебания, частота которых практически не связана с частотой источника. Эти системы также удовлетворяют двум указанным признакам, и поэтому их можно отнести к разряду автоколебательных систем. До сих пор на наличие таких систем не обращали должного внимания, вследствие чего они не вошли ни в один из известных учебников, и учебных пособий по теории колебаний [5, 8, 10]. Вместе с тем такие системы не только расширяют наши представления об автоколебаниях, но и широко используются в технике.

В настоящем обзоре рассмотрены три типа автоколебательных систем с высокочастотными источниками энергии, возбуждение колебаний в которых обусловлено тремя различными причинами.

Первый тип систем — это системы с малым по сравнению с периодом возникающих автоколебаний временем взаимодействия с источником энергии. При этом система так регулирует поступление энергии, что

*) Аттрактором называется множество точек в фазовом пространстве системы, к которому стремятся все соседние фазовые траектории. В частности, аттракторами являются устойчивая особая точка и устойчивый предельный цикл.

**) Высокочастотным здесь и ниже называется источник, частота колебаний которого много выше частоты возбуждаемых автоколебаний.

за время взаимодействия она получает толчки нужной величины и в нужной фазе.

Системы второго типа — это нелинейные системы, имеющие две степени свободы, одна из которых откликается на внешние высокочастотные воздействия (эта степень свободы, в частности, может быть вырожденной), а другая — на низкочастотные (внутренние). За счет нелинейного взаимодействия между динамическими переменными возникают комбинационные частоты, так что колебания становятся квазипериодическими. В результате взаимодействия этих колебаний с колебаниями источника происходит перекачка энергии высокочастотного источника в энергию низкочастотных колебаний.

Третий тип систем — термомеханические системы — по существу, совпадает с классическим. Роль высокочастотного источника энергии здесь заключается только в том, чтобы поддерживать нужную температуру нагреваемого элемента системы. В отличие от первых двух типов, уравнения, описывающие автоколебания в системах третьего типа, сводятся к автономным, т. е. не содержащим времени явно. Эти системы включены в настоящий обзор в основном, потому, что они мало известны.

1. Рассмотрим маятник, взаимодействующий с высокочастотным полем катушки с током в некотором небольшом интервале координаты вблизи положения равновесия (рис. 1). Катушка питается от сети переменного тока или от генератора звуковых колебаний. Направление ponderomotorной силы со стороны катушки коллинеарно направлению движения маятника. Такой маятник был предложен авторами работы [11]. Описание экспериментальной установки и результаты наблюдения колебаний этого маятника приведены в [12—18].

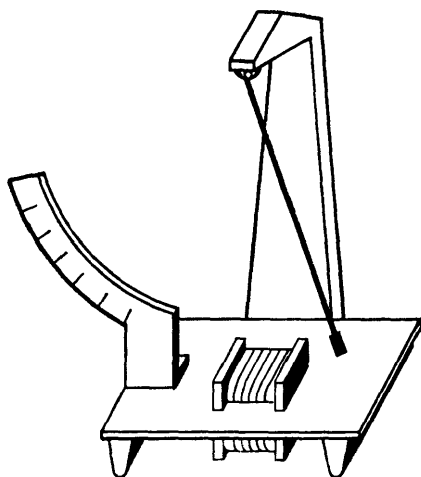


Рис. 1

При малых начальных отклонениях от положения равновесия маятник совершает очень малые вынужденные колебания на частоте внешней силы. При увеличении начального отклонения возможно возникновение стационарных колебаний на частоте, близкой к собственной частоте колебаний маятника. При этом существует несколько устойчи-

вых режимов колебаний с различными значениями амплитуд и фаз. Выбор того или иного режима зависит от начальных условий. Частота колебаний слабо зависит от частоты питающего электромагнит напряжения.

Попыткам теоретического объяснения наблюдаемых эффектов посвящены работы [16—25]. Однако излагаемая в них теория либо неполна, либо содержит ошибки.

Ниже мы будем опираться на теорию, развитую в работах [21, 26]. В отличие от [26] здесь мы учтем нелинейность возвращающей силы маятника.

Уравнение колебаний рассматриваемого маятника при достаточно малых отклонениях от положения равновесия имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(1 - \gamma x^2)x = f(x, t), \quad (1)$$

*) Случай, когда функция, определяющая зависимость периодической силы от координаты, нечетная, рассмотрен в работах [68—71].

где $f(x, t)$ — сила взаимодействия между маятником и электромагнитом. В уравнении (1) сохранены линейный и кубический члены в возвращающей силе. Учет нелинейных членов более высокого порядка не вносит ничего принципиально нового в результаты.

Для простоты предположим, что сила взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} f(x, t) &= A \cos \omega t \quad \text{при } |x| \leq b, \\ &= 0 \quad \text{при } |x| > b, \end{aligned}$$

т. е.

$$f(x, t) = \vartheta(b+x)\vartheta(b-x)A \cos \omega t,$$

где $\vartheta(z)$ — функция Хевисайда.

Будем рассматривать такие режимы колебаний маятника, для которых амплитуда a много больше интервала взаимодействия b . При этом условии на интервале взаимодействия движение маятника можно считать равномерным со скоростью $\pm a\Omega$, где Ω — частота колебаний. Поэтому силу $f(x, t)$ можно считать зависящей только от времени и амплитуды колебаний маятника и положить

$$f(x, t) = F(a, t) = \vartheta\left(t - t_n + \frac{b}{a\Omega}\right)\vartheta\left(t_n + \frac{b}{a\Omega} - t\right)A \cos \omega t, \quad (2)$$

где t_n — моменты прохождения маятником положения равновесия.

Отметим, что уравнение (1) с учетом (2) является нелинейным из-за зависимости F от a , причем такая нелинейность относится к классу инерционных [4, 6].

Решение уравнения (1) с учетом (2) будем искать в виде

$$x = a(t) \cos(\Omega t + \varphi(t)),$$

где $a(t)$, $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза колебаний. Отметим, что роль «медленного» времени, от которого зависят a и φ , может играть дискретное время t_n .

В первом приближении по методу усреднения [27] уравнения для a и φ получаем в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\delta a - \frac{2A}{\pi\omega} (-1)^n \sin \frac{\omega\pi}{2\Omega} \cdot \sin \frac{\omega b}{\Omega a} \cdot \sin \frac{\omega[(n+1)\pi - \varphi]}{\Omega}, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta(a) - \end{aligned} \quad (3)$$

$$- \frac{Ab}{\pi\omega a^2} (-1)^n \sin \frac{\omega\pi}{2\Omega} \left(\frac{\Omega a}{\omega b} \sin \frac{\omega b}{\Omega a} - \cos \frac{\omega b}{\Omega a} \right) \cos \frac{\omega[(n+1)\pi - \varphi]}{\Omega},$$

где $\Delta(a) = \Omega - \omega_0(a) \ll \Omega$, $\omega_0(a) = \omega_0[1 - (3\gamma a^2/8)]$ (при проведении усреднения учтено, что $\omega \gg \Omega$).

Чтобы уравнения (3) имели стационарное решение, нужно, чтобы их правые части не зависели от медленного времени t_n , т. е. от номера n . Для этого достаточно положить $\Omega = \omega/(2m+1)$, где m — целое число.

Зависимости устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (штриховые линии) значений стационарных амплитуд от относительной расстройки $(\omega - M\omega_0)/\delta$, где $M = 2m_0 + 1$ — некоторое нечетное число, при

$$B_{m_0} = \frac{2A}{\pi b \delta \omega_0 M^2} = 1, \quad \frac{3\omega_0 b^2 M^3}{8\delta} \gamma = 20, \quad \frac{\omega_0}{\delta} = 10$$

приведены на рис. 2. Эти зависимости имеют вид близких к периодическим (с «периодом» $2\omega_0/\delta$) последовательностей ряда лепестков, соответ-

ствующих разным значениям возможных амплитуд колебаний*). Для разных значений амплитуд внешней силы, характеризуемых величиной B_m , лепестки оказываются вложенными друг в друга, причем меньшим значениям B_m соответствуют лепестки с меньшей площадью. При уменьшении B_m верхние последовательности лепестков постепенно исчезают. Так, самая верхняя последовательность исчезает при $B_m = 2/\pi$.

Таким образом, как следует из полученных результатов, для каждого фиксированного набора параметров внешней силы A и ω существует ряд устойчивых дискретных значений амплитуд колебаний маятника.

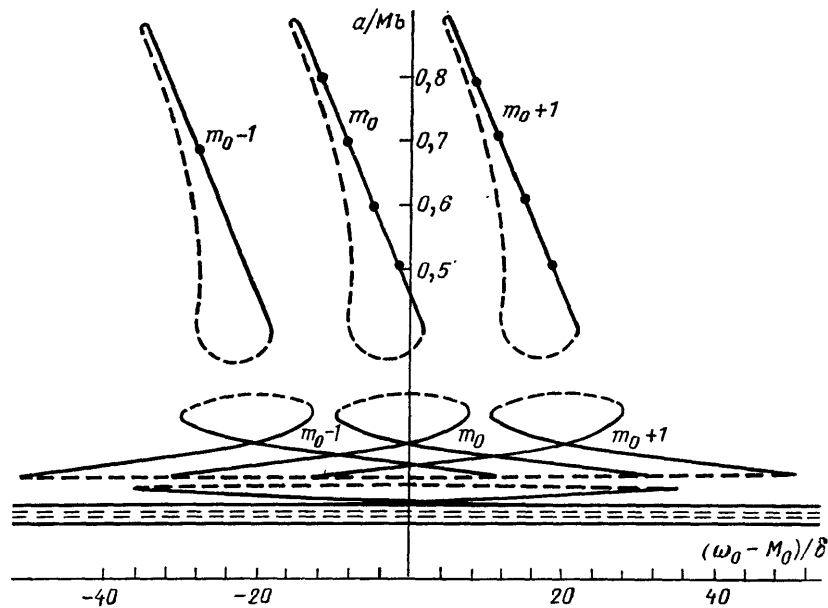


Рис. 2

Выход маятника на тот или иной режим колебаний определяется начальными условиями. Значения возможных амплитуд колебаний, начиная с некоторого номера k , приближенно равны [26, 28]

$$a_{m,k} \approx \frac{2(2m+1)}{\pi(2k+1)} b,$$

где k — целое число. Отсюда и из (3) следует, что времена взаимодействия маятника с внешней силой в процессе стационарных колебаний с этими значениями амплитуд равны

$$\tau_k = \frac{2b}{a_{mk}\Omega} = \frac{2b(2m+1)}{a_{mk}\omega} = \frac{b(2m+1)}{\pi a_{mk}} T \approx \left(k + \frac{1}{2}\right) T,$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период внешнего воздействия.

В связи с этим можно дать следующее физическое объяснение описанному эффекту. Среднее значение силы за время взаимодействия отлично от нуля и зависит от фазы φ , определяемой величиной B_m . Фазу воздействия система выбирает так, чтобы эта сила подталкивала маятник. Через половину периода колебаний маятника, когда маятник, двигаясь в обратную сторону, вновь войдет в зону взаимодействия, направление средней силы изменится на противоположное, так как за период колебаний маятника происходит нечетное число колебаний тока в ка-

*) Последовательности не являются строго периодическими из-за изменения числа m .

тушке. Поэтому при каждом акте взаимодействия маятнику будет сообщаться энергия, компенсирующая потери на затухание.

При плавном изменении частоты воздействия ω амплитуда и частота колебаний маятника могут испытывать скачки. При этом возможен «гистерезис», т. е. значения амплитуды и частоты колебаний маятника при увеличении ω могут не совпадать с теми же значениями при уменьшении ω .

Отметим, что хотя частота колебаний маятника должна быть в нечетное число раз меньше частоты воздействия, она всегда остается близкой к собственной (это достигается соответствующим выбором системой числа m). Поэтому зависимость частоты колебаний Ω от частоты воздействия можно считать слабой и, следовательно, полагать, что необходимый признак автоколебательных систем имеет место.

К рассмотренному здесь типу систем относится и так называемая «гравитационная машина» [29] *), модель которой изображена на рис. 3. Шарик, падая на колеблющуюся пластину бесконечной массы, ускоряется, в результате чего могут установиться стационарные колебания. Практически такая модель была осуществлена Брэггом и другими исследователями. Одна из моделей осуществлена В. К. Асташевым и использована в устройстве для сканирования лазерного луча [30]. Эта модель представляла собой пьезоэлектрическую пластинку с наклеенным на нее стеклом, питаемую от электрического генератора с частотой 200 кГц. На стекло сверху падал упругий шарик, и в результате устанавливались периодические колебания шарика на низкой частоте.

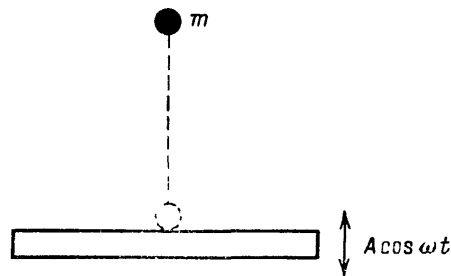


Рис. 3

Близкой к рассматриваемому типу является также система, получившая название «молоточек Андреева» [2, 31].

2. Начало исследованиям систем второго типа положено в работе М. Бетено [32], который наблюдал незатухающие колебания маятника, подвешенного над соленоидом, включенным в цепь переменного тока, частота которого значительно превышала собственную частоту маятника (рис. 4). Маятник представлял собой железный шарик, подвешенный на нити. Попытки теоретического объяснения наблюдаемого явления, сделанные Бетено и впоследствии И. Рокором [33], не увенчались успехом. Н. Минорский [34] не вполне обоснованно свел проблему к параметрическому возбуждению маятника. Попытка объяснения эффекта Бетено на основе явления «гистерезиса», возникающего в нелинейной колебательной системе, проведенная в работе [35] **), в настоящее время дискутируется и, по-видимому, не лишена оснований.

*) Такое название нам представляется не вполне удачным, поскольку энергия здесь черпается не из гравитационного поля, а из высокочастотного источника, вызывающего колебания пластины.

**) М. И. Козаков, Д. Б. Дубошинский и Я. Б. Дубошинский в авторских свидетельствах [72, 73] и в других работах дали следующее объяснение механизма возбуждения колебаний в системах, аналогичных маятнику Бетено: асинхронное преобразование высокочастотной энергии в низкочастотную при взаимодействии двух физически однородных или разнородных колебательных систем происходит из-за того, что движением пассивной низкочастотной системы модулируется по крайней мере один из параметров высокочастотной колебательной системы, так что за период низкочастотных колебаний высокочастотная система четное число раз переходит через значения

В работе Н. Д. Папалекси [36] рассмотрено взаимодействие колебаний тока в контуре, через который происходит питание электромотора, с углом поворота ротора. Показано, что несинхронное вращение ротора*), которое имело место в эксперименте, обусловлено возбуждением и взаимодействием комбинационных частот. Это, по-видимому, первое

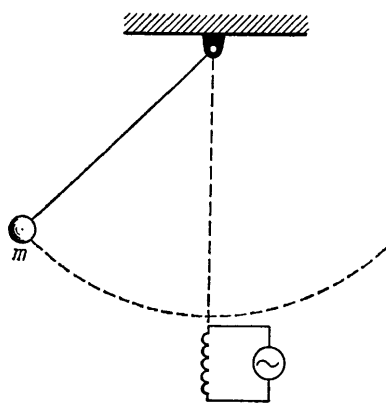


Рис. 4

правильное объяснение наблюдаемых явлений в системах подобного типа. Следует отметить, что Папалекси указал на сходство рассмотренного им явления с возбуждением колебаний маятника Бетено.

С. М. Рытовым [37] исследована система, изображенная на рис. 5. Эта система при условии, что частота подаваемого на виток L напряжения существенно больше собственной частоты колебаний железного шарика, может работать как маятник Бетено.

Система, в некоторой степени аналогичная маятнику Бетено, предложена также в более поздних работах [38, 39]. Она представляет собой электромеханический вибратор, в цепь питания которого включается конденсатор, образующий вместе с соленоидом колебательный контур (рис. 6). В работах [38, 39] дается правильное качественное объяснение возбуждения автоколебаний вибратора на

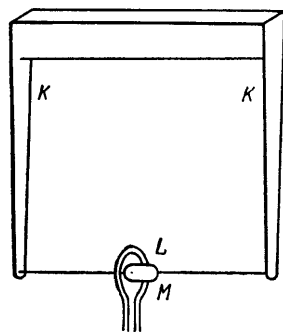


Рис. 5

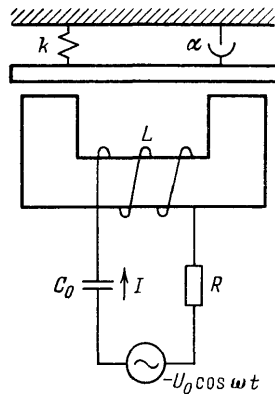


Рис. 6

основе комбинационного взаимодействия частот колебаний тока и механической части вибратора. Однако в них допущены некоторые ошибки и не получены результаты в аналитической форме**).

Прежде чем переходить к другим примерам систем рассматриваемого класса, остановимся на работе системы, изображенной на рис. 6.

прямого и обратного резонансов, в результате чего сила, действующая на низкочастотную колебательную систему, превращается из симметричной (квадратичной) в динамически двузначную.

*) Несинхронным называется вращение, частота которого не кратна частоте источника питания.

**) Заметим, что система, предложенная в работах [38, 39], по-видимому, наиболее точно соответствует описанному в настоящем пункте типу колебаний. В системах же Бетено и Рытова возбуждение колебаний может быть обусловлено как описанным здесь механизмом, так и действием нелинейной по координате периодической квадратичной силы.

Уравнения системы имеют вид

$$\frac{d^2}{dt^2} (L(x) I) + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C_0} = U_0 \omega \sin \omega t, \quad (4)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F(x, I),$$

где $L(x)$ — индуктивность катушки с сердечником, которая зависит от величины зазора между плитой массы m и сердечником, определяемой смещением плиты x , $F(x, I) = (I/2) d\Phi/dx$ — пондеромоторная сила, действующая на плиту [40], $\Phi = b(x)I$ — магнитный поток.

В работе [38] показано, что с достаточной точностью можно положить $d\Phi/dx = I dL/dx$.

При малых x индуктивность $L(x)$ можно представить в виде полинома

$$L(x) = L_0 (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3).$$

Тогда $F(x, I) = L_0 ((a_1/2) + a_2 x + (3/2) a_3 x^2) I^2$.

Очевидно, что из-за зависимости L от x колебания тока в электрическом колебательном контуре могут быть квазипериодическими с основной частотой ω и квазипериодом $2\pi/\nu$, где ν — частота колебаний механической части системы (переменной x). Поэтому целесообразно сделать замену переменных [26], положив

$$I = A \sin(\omega t + \varphi) + y,$$

где A и φ — соответственно амплитуда и фаза вынужденных колебаний тока при $L = L_0$.

Записав уравнения для переменных x , y и решая их методом усреднения, получим следующие укороченные уравнения для амплитуды B и фазы φ_1 переменной x :

$$\dot{B} = (\mu - \delta_2) B - \beta_1 B^3, \quad (5)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\Delta + KA^2 - \beta_2 B^2,$$

где

$$\mu = \frac{a_1^2 \omega^4 [(\omega^2 - \Omega_0^2)(\omega^2 + 3\Omega_0^2) - 4\delta_1^2 \omega^2]}{2mL_0 [(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta_1^2 \omega^2]} U_0^2, \quad (6)$$

$\Omega_0 = (L_0 C_0)^{-1/2}$, $\delta_1 = R/2L_0$, $\delta_2 = \alpha/2m$, $\Delta = \nu - \nu_0$, $\nu_0 = (k/m)^{1/2}$, K , β_1 , β_2 — коэффициенты, зависящие от параметров системы.

В уравнениях (5) отброшены все нелинейные члены, содержащие степени амплитуды B выше третьей.

Из (5) следует условие самовозбуждения колебаний: $\mu \geq \delta_2$. Это условие определяет критическое значение амплитуды источника питания $U_{кр}$ в зависимости от частоты ω и других параметров системы. Зависимость $U_{кр}(\omega)$ носит немонотонный характер и изображена на рис. 7 в двух частных случаях: а) $\Omega_0 \gg \delta_1$; б) $\Omega_0 \ll \delta_1$.

В обоих случаях при некотором значении частоты $\omega = \omega_m$ величина $U_{кр}$ достигает минимума. Если $\Omega_0 \ll \delta_1$, то $\omega_m = \sqrt{8}\delta_1$, в противоположном случае, когда $\Omega_0 \gg \delta_1$, имеем $\omega_m = \Omega_0 + (\delta_1/\sqrt{5})$. Из выражения (6) следует, что самовозбуждение колебаний возможно лишь при $a_1 \neq 0$, т. е. в эксперименте Бетено маятник должен быть подвешен несимметрично.

Знак коэффициента β_1 на пороге возбуждения определяет, является ли возбуждение колебаний мягким ($\beta_1 > 0$) или жестким ($\beta_1 < 0$). Вели-

чина β_1 пропорциональна U_0^2 и довольно сложным образом зависит от частоты ω и коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 .

Анализ выражения для β_1 показывает, что при $a_2 < a_1^2/4$; $a_1 a_3 > 0$ вблизи левой по частоте границы области самовозбуждения коэффициент β_1 положителен, т. е. колебания возбуждаются мягко, а вблизи правой границы $\beta_1 < 0$ возбуждение колебаний происходит жестко. Интерес-

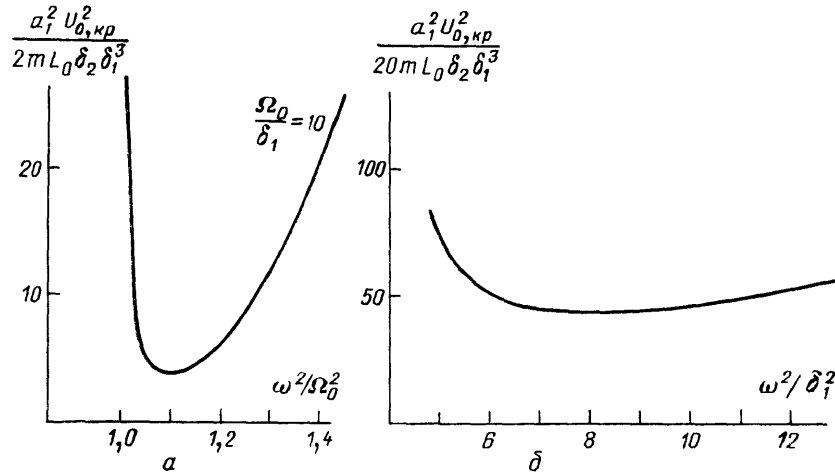


Рис 7

но отметить, что в случае симметричной подвески маятника в эксперименте Бетено $\mu=0$, т. е. самовозбуждения маятника быть не может, но $\beta_1 < 0$ при $\omega > 2\delta_1$, и следовательно, возможно жесткое возбуждение.

Частота колебаний ν близка к собственной частоте ν_0 . Поправка Δ к собственной частоте в стационарном режиме определяется из второго уравнения (5) при $\varphi_1=0$.

В работах [41–43] рассмотрена неустойчивость емкостного датчика малых смещений, используемого в так называемых экспериментах с

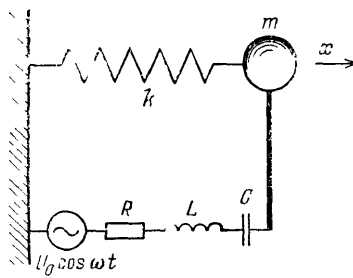


Рис 8

пробными телами. Такой датчик представляет собой конденсатор, одна из пластин которого соединена с телом, смещение которого требуется измерить. Конденсатор включен в цепь электрического колебательного контура, содержащего источник переменного напряжения. Принципиальную схему датчика можно представить в виде, изображенном на рис. 8. Известно, что в некотором диапазоне частот ω при повышении напряжения U_0 выше критического значения возникают механические автоколебания тела массы m .

Для объяснения этого эффекта в работах [41–43] искусственно было введено запаздывание возвращающей силы, действующей на осциллятор (эта сила равна силе притяжения между пластинами конденсатора). Такая процедура вызывает возражения хотя бы потому, что система с запаздыванием имеет бесконечное число степеней свободы, тогда как исходная система (см. приведенные ниже уравнения (7), которые содержатся также в книге [43]) имеет только две степени свободы. В книге [43] утверждается, что полученные результаты совпадают с приближенным решением уравнений (7). Однако это решение не приводится. О физическом же механизме возбуждения автоколебаний за

счет возникновения и взаимодействия комбинационных частот не говорится ничего. Ниже речь пойдет именно об этом механизме.

Уравнения системы имеют вид

$$\ddot{q} + 2\delta_1 \dot{q} + \frac{C_0}{C(x)} \Omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t, \quad (7)$$

$$\ddot{x} + 2\delta_2 \dot{x} + \nu_0^2 x = -\frac{1}{m} F(x, q),$$

где q — заряд на конденсаторе, $C(x) = C_0 [1 + (x/d_0)]^{-1}$ — емкость конденсатора, $\Omega_0 = (LC_0)^{-1/2}$ — собственная частота электрического колебательного контура при $x = 0$, d_0 — расстояние между пластинами конденсатора при недеформированной пружине,

$$F(x, q) = \frac{Sq^2 \epsilon_0 \epsilon}{2C^2(x)(d_0 + x)^2} = \frac{q^2}{2C_0 d_0}$$

— сила притяжения между пластинами конденсатора, m — масса шарика *).

Сравнивая уравнения (7) и (4), видим, что они отличаются только характером нелинейности. Проведя соответствующие выкладки, получим уравнения для амплитуды B и фазы φ_1 вида (5) с

$$\mu = \frac{\Omega_0^4 \delta_1 [(\omega^2 - \Omega_0^2)(3\omega^2 + \Omega_0^2) + 4\delta_1^2 \omega^2]}{2mLd_0^2 [(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta_1^2 \omega^2]^3} U_0^2. \quad (8)$$

Отсюда видно, что возбуждение колебаний возможно в основном при $\omega > \Omega_0$, т. е. на правом склоне резонансной кривой. Это соответствует результатам работ [41–43] и подтверждается экспериментально. Из (8) следует, что условие возбуждения автоколебаний легче всего, т. е. при наименьшем U_0 , выполняется для частоты $\omega \approx \Omega_0 + (\delta_1/\sqrt{5})$. Это наименьшее значение напряжения

$$U_{0 \min} = \frac{24d_0 \delta_1^2}{5} \left(\frac{6mL\delta_2}{\Omega_0 \sqrt{5}} \right)^{1/2}.$$

Такому значению напряжения источника соответствует напряжение на конденсаторе

$$U_c = 12d_0 \delta_1 \left(\frac{m\delta_2 \sqrt{5}}{\Omega_0 C_0} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Формула (9) отличается от приведенной в [41–43] лишь числовым множителем, хотя механизм возбуждения колебаний оказывается иным.

Анализ выражения для коэффициента нелинейности β_1 показывает, что возбуждение колебаний должно быть мягким.

Аналогичный эффект самовозбуждения механических колебаний должен иметь место и в оптических датчиках малых смещений, где автоколебания возникают за счет светового давления [43]. Он наблюдался экспериментально при действии СВЧ поля на крутильный маятник [44].

Описанный механизм самовозбуждения лежит в основе возникновения механических автоколебаний резонаторов, заполненных каким-либо мощным излучением, например электромагнитным. Так, колебания стенок наблюдались в резонаторах, используемых в мощных ускорителях на встречных пучках [45]. В работах [46–48] описано возникновение генерации упругих волн в диэлектрических резонаторах, накачиваемых

*) Все выражения выписаны в приближении плоского конденсатора.

мых высокочастотным электромагнитным полем. Близкие по сути вопросы появления отрицательного трения механических конструкций в электромагнитных полях обсуждаются в работе [49].

В работах [50—53] рассмотрены механические и электрические системы с двумя степенями свободы, питаемые источниками энергии сравнительно высокой частоты. Остановимся на системе, изображенной на рис. 9 [54—57], уравнения которой можно записать в виде

$$m_1 \ddot{x}_1 + \mu \dot{x} + kx + F(x, \dot{x}) = U_0 \cos \omega t, \quad (10)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + \mu_2 \dot{x}_2 - \mu \dot{x} - kx - F(x, \dot{x}) + k_2 x_2 = -U_0 \cos \omega t,$$

где $x = x_1 - x_2$ — относительное перемещение масс m_1 и m_2 , $F(x, \dot{x})$ — нелинейная часть упругих и диссипативных сил между массами.

Нелинейная функция $F(x, \dot{x})$ в работах [54—57] выбиралась двух типов:

$$F(x, \dot{x}) = \alpha x^2,$$

$$F(x, \dot{x}) = 0 \quad \text{при } x \geq 0, \\ = k_1 x + \mu_1 \dot{x} \quad \text{при } x < 0.$$

В обоих случаях, как следует из уравнений (10), колебания переменных x_1 и x_2 должны быть квазипериодическими с основными частотами ω и ν , где ν — низкая частота автоколебаний. В качестве примера рассмотрим случай $F = \alpha x^2$.

Поступая аналогично предыдущему, получим для амплитуды и фазы колебаний переменной x_2 на частоте ν уравнения вида (5).

Анализ условия возбуждения в этом случае более громоздок, чем в предыдущих, но качественное поведение зависимости критического значения напряжения $U_{кр}$ от частоты ω то же, что и раньше. Аналогично определяется и диапазон частот, в котором при заданном U возможно самовозбуждение колебаний.

Отметим, что к эффектам рассматриваемого типа относятся и так называемые явления распадной неустойчивости волновых процессов [58], при которых

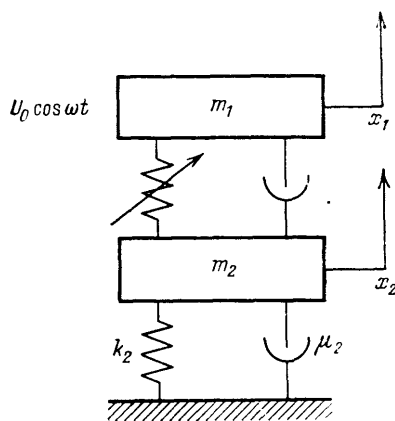


Рис. 9

энергия высокочастотной волны эффективно преобразуется в значительно более низкочастотную волну.

3. К третьему типу автоколебательных систем с высокочастотными источниками энергии можно отнести некоторые из большой группы так называемых термомеханических систем *). Мы остановимся на системах, рассмотренных в работах [59, 60].

Пусть имеется невесомая металлическая струна с грузом в середине, включенная в цепь переменного тока частоты ω (см. рис. 10). Такая струна при определенных условиях может совершать автоколебания как

*) Термомеханические колебания проводов в вертикальной плоскости в 1924 г. демонстрировали Н. И. Добронравовым и А. И. Шальниковым; интенсивные автоколебания нагретого провода вокруг оси $O_1 O_2$ (рис. 10) или так называемые горизонтальные термомеханические колебания, по-видимому, впервые экспериментально обнаружены в 1971 г. Я. Б. Дубошинским.

в плоскости чертежа, так и перпендикулярно ей вокруг оси O_1O_2 . Прежде всего рассмотрим случай, когда движение струны происходит в плоскости чертежа [59].

Уравнение колебаний груза в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - 2F \sin \beta - h\dot{x}, \quad (11)$$

где F — сила натяжения струны, $\sin \beta = x/l = x(x^2 + L^2)^{-1/2}$, $2L$ — расстояние между опорами, h — коэффициент трения.

Сила натяжения F нагретой за счет протекания электрического тока струны равна [61]

$$F = ES \frac{l - l_0(1 + \alpha T)}{l_0},$$

где E — модуль Юнга ($\sim 2 \cdot 10^9$ г/см $\cdot$ с 2), S — площадь сечения струны, T — разность температур струны и окружающей среды, α — коэффициент линейного теплового расширения ($\sim 10^{-5}$ град $^{-1}$), $l_0 = (x_0^2 + L^2)^{1/2}$ — половина длины струны в ненапрянутом состоянии при $T=0$, x_0 — провисание струны при $T=0$, $m=0$.

Считая $l - l_0 \ll l_0$, получаем для $F \sin \beta$ следующее выражение:

$$F \sin \beta = ES \left(\frac{x^2 - x_0^2}{2l_0^2} - \alpha T \right) \frac{x}{l_0}. \quad (12)$$

Уравнение для температуры T запишем в предположении, что охлаждение струны происходит по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи q , зависящим от модуля скорости*). В соответствии с [60, 62] положим $q = q_0 + q_1 |\dot{x}|^{1/2}$, где $q_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-3} S_{\text{бок}}$ Вт/град, $S_{\text{бок}}$ — боковая поверхность струны.

Тогда уравнение для T будет иметь вид

$$mc\dot{T} = \frac{U^2}{2R} - q_0 T - q_1 |\dot{x}|^{1/2} T, \quad (13)$$

где c — теплоемкость материала шарика ($c \approx 0,5$ Дж/г $\cdot$ град), R — сопротивление струны. При нагревании струны и ее удлинении сопротивление R увеличивается**), так что

$$R = R_0 \left(1 + \beta_1 T + \beta_2 \frac{l - l_0}{l_0} \right) \quad (14)$$

где $\beta_1 \approx 6 \cdot 10^{-3}$ град $^{-1}$; $\beta_2 \approx 0,2$ (величина β_2 определяется коэффициентом Пуассона).

Чтобы исследовать устойчивость стационарного решения уравнений (11), (13), запишем линеаризованные уравнения для отклонений от стационарного решения $\xi = (x - x_{\text{ст}})/l_0$, $\vartheta = (T - T_{\text{ст}})/T_{\text{ст}}$. Эти уравнения имеют вид

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = K\vartheta, \quad \dot{\vartheta} + \gamma\vartheta = -a\xi, \quad (15)$$

*) В работе [59] допущена ошибка: предполагается, что $q = q_0 + q_1 x$, чего не может быть.

**) Изменение сопротивления при деформации называется тензорезистивным эффектом [63].

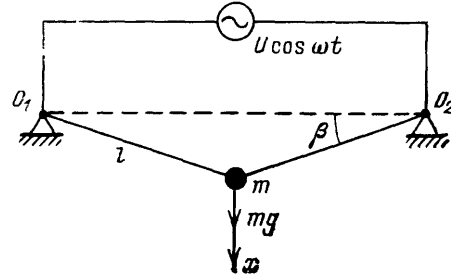


Рис. 10

где

$$2\delta = \frac{h}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{ES}{ml_0} \left(3 \frac{x_{\text{ст}}^2}{l_0^2} - \frac{x_0^2}{l_0^2} - 2\alpha T_{\text{ст}} \right), \quad K = 2ES \frac{\alpha T_{\text{ст}} x_{\text{ст}}}{ml_0^2},$$

$$\gamma = \frac{q_0}{mc} \left(1 + \frac{\beta_1 T_{\text{ст}}}{1 + \beta_1 T_{\text{ст}}} \right), \quad a = \frac{q_0}{mc} \frac{\beta_2}{1 + \beta_1 T_{\text{ст}}} \frac{x_{\text{ст}}}{l_0}.$$

Система (15) описывает в линейном приближении автоколебательные системы с инерционным возбуждением [64—67]. Условие самовозбуждения колебаний в таких системах имеет вид

$$Ka \geq 2\delta(\omega_0^2 + 2\delta\gamma + \gamma^2). \quad (16)$$

Отсюда следует, что причинами возможного самовозбуждения колебаний являются зависимость сопротивления струны от ее деформации ($a \neq 0$) и достаточная инерционность изменения температуры струны ($\gamma < \gamma_{\text{кр}} = [\delta^2 + (Ka/2\delta) - \omega_0^2]^{1/2} - \delta$).

Чтобы проверить, является возбуждение колебаний мягким или жестким, нужно сохранить в исходных уравнениях наиболее существенные нелинейные члены. Решая эти уравнения приближенно асимптотическим методом Крылова — Боголюбова, получим в первом приближении по малому параметру следующее уравнение для амплитуды колебаний A :

$$\dot{A} = (\mu_1 - \delta + \mu_2 \sqrt{A} - \mu_3 A^2) A, \quad (17)$$

где $\mu_1 = Ka/2(\gamma^2 + \omega_0^2)$, μ_2, μ_3 — некоторые положительные коэффициенты, зависящие от параметров системы. Из того факта, что $\mu_2 > 0$, следует, что возбуждение колебаний является жестким. Поэтому даже при $\mu_1 < \delta$ возможен стационарный режим автоколебаний.

Отметим, что условие самовозбуждения колебаний $\mu_1 \geq \delta$, следующее из уравнения (17), совпадает с (16), если $\delta\gamma \ll \omega_0^2 + \gamma^2$. Это неравенство является условием применимости использованного асимптотического метода.

Рассмотрим теперь общий случай, когда струна, кроме вертикальных перемещений, может совершать колебания вокруг оси O_1O_2 . Введя угол поворота φ , запишем уравнения движения груза и изменения температуры T :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \cos \varphi - 2F \sin \beta - h\dot{x} + mx\dot{\varphi}^2, \\ mx\ddot{\varphi} + 2m\dot{x}\dot{\varphi} + H\dot{\varphi} + mg \sin \varphi &= 0, \\ mc\dot{T} &= \frac{U^2}{2R} - q_0 T - q_1 (\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2)^{1/4}, \end{aligned} \quad (18)$$

где F определяется формулой (12), а R — формулой (14). В линейном приближении уравнения для отклонений $\xi = x - x_{\text{ст}}$, $\vartheta = T - T_{\text{ст}}$ не зависят от φ . Поэтому для них справедливо все сказанное раньше.

Если частота автоколебаний переменной x лежит в одной из областей параметрического резонанса для переменной φ [3], то возбуждение вертикальных колебаний шарика обязательно приведет и к колебаниям угла поворота φ . Если же это условие не выполняется, то возбуждение колебаний φ возможно лишь жестким образом за счет того, что колебания температуры будут содержать вторую гармонику колебаний угла φ , которая вызовет модуляцию переменной x на этой частоте. Последняя, в свою очередь, приведет к «параметрической» подкачке энергии в ко-

лебания переменной φ . Уравнения (18) позволяют рассчитать установившуюся амплитуду колебаний при таком процессе.

Рассмотренные в работе примеры убедительно показывают, что некоторые неавтономные системы, а именно системы, содержащие высокочастотные источники энергии, могут вести себя как автоколебательные. При этом механизм возбуждения автоколебаний может быть различным. В работе рассмотрены три таких механизма, но, возможно, существуют и другие. Понимание такого рода явлений помогает правильному подходу к анализу процессов в подобных системах. Отметим, что примеры всех трех типов систем были реализованы экспериментально и продемонстрированы на ряде конференций и семинаров.

Авторы благодарны С. М. Рытову, К. Н. Баранскому, В. Б. Брагинскому, И. А. Яковлеву за обсуждение работы и ряд ценных советов, а также Д. Б. Дубошинскому, Ю. В. Галкину, М. А. Емельянову, М. И. Козакову, Б. И. Крюкову, Л. М. Литвину и В. В. Рудневу за любезно предоставленные материалы их исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стретт Д В (Релен) Теория звука — М Гостехиздат 1955
- 2 Мандельштам Л И Лекции по колебаниям//Собр соч — М Изд во АН СССР, 1955 — Т IV — С 131—147
- 3 Андронов А А, Витт А А, Хайкин С Э Теория колебаний — М Физматгиз 1959
- 4 Теодорчик К Ф Автоколебательные системы — М Гостехиздат 1952
- 5 Стретков С П Введение в теорию колебаний — М Наука, 1964
- 6 Ланда П С Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы — М Наука 1980
- 7 Миннакова И И Неавтономные режимы автоколебательных систем — М Изд во Моск унта 1987
- 8 Рабинович М И Трубецков Д И Введение в теорию колебаний и волн — М Наука 1984
- 9 Неймарк Ю И Ланда П С Стохастические и хаотические колебания — М Наука, 1987
- 10 Мигулин В В, Медведев В И, Мустель Е Р, Парыгин В Н Основы теории колебаний — М Наука, 1988
- [11] Дубошинский Д Б, Галкин Ю В, Дубошинский Я Б, Пеннер Д И //Уч зап ВГПИ Сер «Физика» 1972 Т 40, вып 6 С 50
- 12 Козаков М И //Ibidem С 58—63
- 13 Пеннер Д И, Дубошинский Я Б, Дубошинский Д Б, Козаков М И //ДАН СССР 1972 Т 204 С 1065
- 14 Пеннер Д И, Дубошинский Д Б и др //УФН 1973 Т 109 С 402
- 15 Дубошинский Д Б /Некоторые вопросы возбуждения незатухающих колебаний — Владимир ВГПИ 1974 — С 87
- 16 Ганиев Р Ф, Украинский Л Е Динамика частиц при воздействии вибраций — Киев Наукова думка 1975 — С 141
- 17 Галкин Ю В Колебания ангармонического осциллятора под действием силы, зависящей от координат — Донецк ДФТИ, 1980
- 18 Белов А А, Карасев М Д, Коровин С И, Ляпунов И П, Медведев В И, Хохлов Н Г //Тр НИИЧаспрома Сер «Новые конструкции материалов и процессы в часовой промышленности» 1976 Вып 22 С 29
- 19 Ланда П С, Дубошинский Я Б // [15] — С 134
- 20 Карасев М Д //Вестн Моск унта Сер «Физика Астрономия» 1974 Т 15 № 3 — С 365
- [11] Вайнштейн Л А, Дубошинский Я Б //ЖГФ 1978 Т 48 С 1321
- 22 Вайнштейн Л А, Вакман Д Е Разделение частот в теории колебаний и волн — М Наука 1983 — С 105
- 23 Хабибуллаев П К, Дубошинский Я Б, Рухадзе А А и др //Материалы I Всесоюзной конференции по квантовой акустике и акустоэлектронике — Ташкент ФАН 1978 — С 22
- 24 Балакин Л В, Карасев М Д, Медведев В И //Вестн Моск унта Сер «Физика Астрономия» 1981 Т 22 № 3 С 3
- 25 Дамгов В Н, Дубошинский Д Б, Дубошинский Я Б, Пеннер Д И //Доклады X Международной конференции по нелинейным колебаниям — София Изд во Болгарской академии наук, 1985 — С 295
- 26 Ланда П С //Машиноведение 1988 № 6 С 90

27. Митропольский Ю. А. Методы усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1971.
28. Дубошинский Д. Б., Дубошинский Я. Б. и др.//ЖТФ. 1979. Т. 49 С. 1160.
29. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
30. Асташев В. К., Бабицкий В. И., Тресвятский А. Н. Сканатор для фотоэлектрических устройств наведения на штрих меры в металлорежущих станках.—Авт. свид-во № 580860.//Бюлл. изобретений. 1977. № 43. С. 4.
- [31] Андреев Н. Н.//Ж. прикл. физики. 1925. Т. 2, вып. 1—2. С. 205.
32. Bethe n o d M. J.//C. R. Ac. Sci. Paris. 1938. Т. 207. Р. 847.
33. Rocard Y. Dynamique generale des vibrations.— Paris: Masson et Cie, 1949.— Ch. 10.
34. Minorsky N. Nonlinear Oscillations.—New York; Princeton, N. J.: van Nostrand, 1962—Р. 495—498.
35. Дубошинский Д. Б., Карапетян А. Г. и др.//[15].— С. 55.
36. Папалекси Н. Д. Об одном случае параметрически связанных систем//Собр. трудов —М.: Изд-во АН СССР, 1948.—С. 208.
37. Рытов С. М.//ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 370.
38. Габарев Ф. А. и др.//Вибротехника. 1987. № 2(59). С. 14.
39. Емельянов М. А.//Тр. МВТУ. 1988. Вып. 504 («Вибрация в механизмах и машинах»). С. 60.
40. Калашников С. Г. Электричество.— М.: Наука, 1977.— С. 255.
- [41] Брагинский В. Б., Минакова И. И.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1964. № 1. С. 83.
42. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами.— М.: Наука, 1970.— С. 29—34.
43. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах.— М.: Наука, 1974.— С. 29.
44. Брагинский В. Б. и др.//ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 1549.
45. Карлинер М. М., Шапиро В. Е., Шехтман И. А.//ЖТФ. 1966. Т. 36. С. 2017.
46. Белокопытов Г. В.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1987. Т. 30. С. 1121.
47. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Решетников М. Е., Чистяев В. А.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1987. Т. 51. С. 2208.
48. Белокопытов Г. В. и др.//ЖТФ. 1988. Т. 58. С. 1381.
49. Шапиро В. Е. Упругость конфигураций проводящих тел в электромагнитных полях: Препринт ИФСО-84Ф.— Красноярск, 1978.
50. Tond I A.//Rev. Mec. Appl. Ser. B. 1963. Т. 8. Р. 573.
- [51] Yamamoto T., Hayashi S.//Intern. J. Nonlinear Mech. 1971. V. 6. Р. 237.
52. Szemplinska-Stupnicka W.//Ibidem. 1969. V. 4. Р. 335.
53. Козаков М. И., Дубошинский Д. Б., Пеннер Д. И.//Уч. зап. ВГПИ. Сер. «Физика». 1972. Т. 40, вып. 6. С. 47.
54. Крюков Б. И. и др.//Машиноведение. 1984. № 6. С. 30.
55. Гусев В. П., Ковановская В. А., Литвин Л. М., Руднев В. В.//Исследование и решение задач прикладной механики на ЭВМ.— М.: Наука, 1985.— С. 44.
56. Ланда П. С., Руднев В. В.//Колебания и виброакустическая активность машин и конструкций.— М.: Наука, 1986.— С. 139.
57. Руднев В. В.//Машиноведение. 1986. № 5. С. 100.
58. Виноградова Н. Б. и др.//Теория волн.— М.: Наука. 1979.
59. Вермель А. С.//[15]—С. 159.
60. Пеннер Д. И., Дубошинский Я. Б., Дубошинский Д. Б., Петров В. А.//Ibidem. С. 168.
- [61] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
62. Бакман М. Е., Теодорчик К. Ф.//ЖТФ. 1936. Т. 6. С. 298.
63. Физический энциклопедический словарь.— М.: Сов. энциклопедия, 1983.— С. 744.
64. Бабицкий В. И., Ланда П. С.//ДАН СССР. 1982. Т. 266. С. 1087.
65. Бабицкий В. И., Ланда П. С.//Динамика систем.— Горький: ГТУ, 1983.— С. 147.
66. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания.— М.: Наука, 1987.— С. 288.
67. Babitzky V. I., Landa P. S.//Zs. angew. Math. und Mech. 1984. Bd 64. S. 329.
68. Гайдук В. И.//ДАН СССР. 1960. Т. 133. С. 760.
69. Гайдук В. И.//Приближенные методы решения дифференциальных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1964.— С. 33.
70. Бункин Ф. В. и др.//ЖТФ. 1988. Т. 58. С. 2241.
- [71] Черноусько Ф. Л.//ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. С. 131.
72. Козаков М. И., Дубошинский Я. Б., Дубошинский Д. Б. Электромеханический спусковой регулятор.— Авт. свид-во № 330422//Бюлл. изобретений 1972. № 8. С. 146.
73. Дубошинский Д. Б., Дубошинский Я. Б., Козаков М. И. и др. Реактивный электродвигатель.— Авт. свид-во № 1138893//Ibidem. 1985. № 5.— С. 187.