Май 1989 г. Том 158, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537 611.2

# О МОМЕНТАХ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СРЕДЕ

*И. М. Франк*

(Объединенный институт ядерных исследований, Дубна)

Вопрос о релятивистском преобразовании момента магнитного диполя, движущегося в среде, возник очень давно. Поводом для этого послужило рассмотрение излучения Вавилова — Черенкова (ИВЧ) электрических и магнитных диполей [1]. Для электрического диполя получился результат, вполне аналогичный тому, что имеет место для излучения электрического заряда: энергия излучения — функция квадрата синуса характерного угла излучения $\theta$ ($\sin^2\theta = 1 - (\beta^2 n^2)^{-1}$). В отличие от этого, для магнитного диполя, ориентированного перпендикулярно направлению скорости, энергия довольно сложным образом зависит от показателя преломления $n$ и $\theta$. При получении этих результатов использовались формулы релятивистской трансформации моментов электрических и магнитных диполей, причем допускалось, что они применимы и при движении в среде с показателем преломления $n$. Таким образом, принималось, что электрический диполь $\mathbf{p}'$, движущийся со скоростью $\beta = v/c$, в неподвижной системе координат имеет момент

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' - (1 - \alpha)(\mathbf{p}'\mathbf{z}_1)\,\mathbf{z}_1, \tag{1}$$

где $\alpha = (1 - \beta^2)^{1/2}$, а $\mathbf{z}_1$ — единичный вектор скорости, направленной вдоль оси $z$. Следовательно, компонента $\mathbf{p}'$, перпендикулярная скорости (будем считать, что она ориентирована по оси $x$), остается неизменной, а компонента, направленная по скорости $p'_z$, сокращается, как должно быть, в $(1 - \beta^2)^{1/2}$ раз, т. е.

$$p_x = p'_x \qquad p_z = (1-\beta^2)^{1/2}\, p'_z. \tag{2}$$

Кроме того, допускалось, что, так же как в вакууме, движущийся электрический диполь индуцирует магнитный момент, величина которого

$$\mathbf{m} = -\beta\,[\mathbf{z}_1\mathbf{p}'], \quad \text{т. е. } m_y = -\beta p'_x. \tag{3}$$

Аналогичная ситуация должна иметь место и для преобразования магнитного диполя, имеющего компоненты $m'_y$ и $m'_z$:

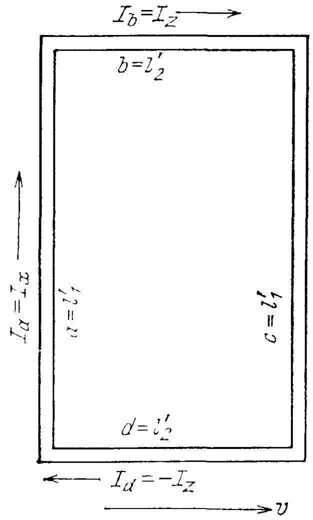
$$m_y = m'_y \quad m_z = (1-\beta^2)^{1/2}\, m'_z, \tag{4}$$

$$\mathbf{p}_1 = \beta\,[\mathbf{z}_1\mathbf{m}'] \quad p_x = -\beta m'_y. \tag{5}$$

Такая величина индуцированного электрического момента, использованная в работе [1], в случае излучения Вавилова — Черенкова магнитным диполем приводила, как уже отмечалось, к парадоксальным результатам. Они устранялись (как выяснилось позже, не полностью), если допустить, что вместо (5) должно быть [2]

$$p_x = -\beta n^2 m'_y. \tag{6}$$

Были соображения [3], подкреплявшие правильность (6). Все же главным соображением в пользу (6) было необоснованное предположение, что элементарный диполь, создаваемый круговым током, в излучении должен быть эквивалентен диполю, составленному из двух разноименных гипотетических магнитных зарядов. Действительно, в случае электрического диполя получаются одинаковые результаты при определении ИВЧ независимо от того, рассматривается ли движущийся диполь с использованием (3), или же определяется результат интерференции двух движущихся тесно связанных близко расположенных разноименных электрических зарядов [2]. Тем самым была обоснована применимость (3) и для среды. Естественно было рассмотреть излучение магнитных зарядов и составленных из них диполей, пользуясь аналогией, требующей замены во всех формулах $\varepsilon$ на $\mu$, $\mu$ на $\varepsilon$, $E$ на $H$ и $H$ на $-E$ (см. [2]). Результат получился иной, чем для обычного магнитного диполя [1]. Понимание того, что, возможно, здесь нет противоречия, пришло позже [4, 5]. Для этого была сделана попытка подправить результат для обычного диполя заменой (5) на (6). Хотя сейчас сомнений в правильности (5), по-видимому, не возникает, быть может, полезно рассмотреть, как возникает электрический дипольный момент при движении замкнутого контура с электрическим током. Это сведет задачу об излучении




магнитного диполя к рассмотрению системы из движущихся электрических зарядов, в которой, видимо, не следует ожидать чего-либо неожиданного. Допустим, что имеется замкнутый контур прямоугольной формы размером $l'_1 \times l'_2$, составленный из четырех прямолинейных проводников $a$, $b$, $c$, $d$ (см. рисунок). Сечение проводников обозначим через $\sigma'$. Ток, текущий по контуру, равен $J' = \sigma' I'$, где $I'$ — плотность тока и его магнитный момент

$$m' = \frac{1}{c} J' l'_1 l'_2 = \frac{1}{c} \sigma' I' l'_1 l'_2. \tag{7}$$

Все эти величины указаны для системы координат $K'$, связанной с контуром. Предположим, что она движется вместе с ним со скоростью $v$ в направлении оси $z$. Нас будут интересовать результаты, которые должны наблюдаться в лабораторной системе координат $K$. Они получаются совершенно элементарно, если воспользоваться формулами Лоренца и хорошо известными релятивистскими преобразованиями для плотности тока и плотности заряда. К тем же результатам, разумеется, можно прийти также, используя закон сохранения заряда и формулу сложения скоростей [6].

Рассмотрим сначала случай, когда контур с током ориентирован перпендикулярно оси $z$, т. е. лежит в плоскости $x$, $y$. Нетрудно убедиться, что ток в контуре, измеренный в неподвижной системе $K$, равен

$$J_\text{к} = (1 - \beta^2)^{1/2} J' = \sigma' I'. \tag{8}$$

В самом деле, согласно релятивистскому преобразованию плотности тока

$$I_x = I_y = I'. \tag{9}$$

Что касается самого проводника, то размеры его поперечного сечения в направлении оси $z$ сокращаются в $(1 - \beta^2)^{1/2}$ раз, и следовательно,

$$\sigma = (1 - \beta^2)^{1/2} \sigma'. \tag{10}$$

Учитывая (9) и (10), сразу получаем формулу (8). Магнитный момент контура в данном случае направлен по оси $z$ или антипараллелен ей, а поскольку длины проводников $l_1'$ и $l_2'$ остаются неизменными, то он равен

$$m = \frac{1}{c} J_{\text{к}} l_1' l_2' = (1 - \beta^2)^{1/2} m'. \tag{11}$$

Как и следовало ожидать, это совпадает с (4). Обратимся теперь к рассмотрению более сложного случая, а именно, когда контур с током лежит в плоскости $x$, $z$ (см. рисунок). Будем считать, что участок контура $a$ направлен по оси $x$, а $b$ — по оси $z$, т. е. параллелен скорости. Направление тока на каждом из участков контура на рисунке указано стрелками. Магнитный момент, равный (7) в системе $K'$, в этом случае перпендикулярен плоскости рисунка. Он направлен по оси $y$ в отрицательную сторону:

$$m_y' = -m' = -\frac{1}{c} \sigma' I' l_1' l_2'. \tag{12}$$

Определим теперь величину тока на каждом из участков контура. Участок $a$ перпендикулярен скорости. Поэтому ток в нем равен (8), т. е.

$$J_a = J_{\text{к}} = (1 - \beta^2)^{1/2} J'; \tag{13}$$

при этом, очевидно, что $J_c = -J_a$.

Для определения $I_b$, в котором направление тока совпадает с направлением скорости, воспользуемся формулами релятивистских преобразований плотности тока и плотности заряда. Если в системе $K'$ плотность заряда в проводнике равнялась нулю, то в системе $K$

$$I_z = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} I'. \tag{14}$$

При этом в проводнике возникает и плотность заряда

$$\rho = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{v}{c^2} I'. \tag{15}$$

Поперечное сечение участка $b$ перпендикулярно скорости, и следовательно, $\sigma_b = \sigma'$. В результате получаем

$$J_b = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \sigma' I'. \tag{16}$$

Для $d$ ток и плотность заряда имеют обратный знак по сравнению с (15) и (16). Не должно вызывать удивления, что ток $J_b \neq J_a$. В самом деле, проводник $b$ теперь несет электрический заряд, причем плотность заряда $\rho$ вместе с ним движется со скоростью $v$, что равносильно плотности тока

$$I_\rho = \rho v = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{v^2}{c^2} I' \tag{17}$$

и, следовательно, току (поскольку $\sigma_b = \sigma'$)

$$J_\rho = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{v^2}{c^2} \sigma' I'. \tag{18}$$

Сопоставляя (13), (18) и (16), получаем, как должно быть,

$$J_b = J_a + J_\rho. \tag{19}$$

Из формулы (15), если перейти к предельному случаю, легко определить дипольный электрический момент контура. В самом деле, электрический заряд $q^+$, содержащийся на отрезке проводника $b$, равен $\rho$, умноженному на объем проводника $\sigma_b l_2$. Так как в результате лоренцева сокращения $l_2 = (1 - \beta^2)^{1/2} l_2'$, то

$$q^+ = \frac{v}{c^2} \sigma' l_2' I'. \tag{20}$$

На отрезке $d$ содержится, очевидно, равный заряд, но отрицательного знака. Их разделяет расстояние $l_1'$. Если $l_2' \ll l_1'$, то эти заряды можно рассматривать как электрический диполь, направленный по оси $x$ и равный $ql_1'$. Следовательно (см. (7)),

$$p_x = \beta \frac{1}{c} \sigma' l_1' l_2' I' = \beta m'. \tag{21}$$

Если принять во внимание, что $m'$ имеет единственную компоненту: $-m_y' = m'$ (см. (12)), то получим, что выполняется (5). Это, конечно, очевидный результат, так как и (5), и (21) в равной мере — следствие релятивистских преобразований. Однако в случае (21) результат очень нагляден. Заряды $q^+$ и $q^-$ в проводниках тока $b$ и $d$ в самом деле возникают при их движении в направлении оси $z$, причем нет оснований думать, что если движение происходит в среде, то может быть иначе. Как уже говорилось в начале статьи, в проблеме излучения Вавилова — Черенкова мы вправе рассматривать два таких заряда, разделенных расстоянием $l_1'$, как движущийся диполь (при условии, конечно, малости $l_1' \ll \lambda$, где $\lambda$ — длина излучаемого света). Это весьма веский довод в пользу применимости (5) и в случае движения в среде. Если это так, то такой диполь должен индуцировать магнитный момент. Для контроля определим его величину. Из формул (3) и (21) получаем

$$m_y(p) = -\beta^2 m'. \tag{22}$$

Это, однако, только та часть момента, которая создается зарядами, движущимися вместе с проводником. Кроме того, имеется ток $J_к = (1 - \beta^2)^{1/2} \sigma' I'$, бегущий по контуру (см. (13)). Площадь контура в системе $K$ равна $(1 - \beta^2)^{1/2} l_1' l_2'$. Сравнивая с (17), имеем

$$m_y(K) = -(1 - \beta^2)\, m'. \tag{23}$$

Отсюда полный магнитный момент, индуцируемый контуром с током, расположенным в плоскости, совпадающей с направлением движения, равен

$$m = m(p) + m(K) = m'. \tag{24}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, магнитный момент диполя, перпендикулярный направлению скорости, одинаков и в системе координат $K'$, и в лабораторной системе $K$. Видно также, что электрический дипольный момент (21) и магнитный момент (24) жестко связаны между собой. Если для электрического момента вместо (5) принять преобразование (6), то это с необходимостью приведет к изменению величины $m$ в (24), которая окажется сложным образом зависящей от показателя преломления. В принципе, это нельзя исключать, но оснований для этого нет. В самом деле, единственным основанием в пользу преобразования (6) было то, что в этом случае формула для энергии излучения Вавилова — Черенкова становится аналогичной формуле для излучения заряда. Если принять во внимание усложнение формулы для $m$, которое вызвало бы преобразование (6), то этот довод отпадает. Из сказанного следует, что в случае движения в среде следует использовать те же преобразования дипольных моментов, что и в вакууме.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Франк И. М.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. С. 3.
2. Франк И. М.//Памяти Сергея Ивановича Вавилова. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — С 172
3. Гинзбург В. Л.//Ibidem. — С. 193.
4. Франк И. М.//УФН. 1984. Т. 144. С. 251.
5. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984.
6. Франк И. М. Препринт ОИЯИ Р4-88-634. — Дубна, 1988.