Май 1989 г. *Том 158, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

.530.16 + 536.757

О КРИТЕРИЯХ СТЕПЕНИ ХАОТИЧНОСТИ

В. И. Татарский

(Институт физики атмосферы АН СССР)

Вопрос, содержащийся в названии этой заметки, обсуждается в статьях Ю. А. Кравцова [1] и Ю. Л. Климонтовича [2]. Хотелось бы сопоставить точки зрения, высказанные в них.

Прежде всего следовало бы подчеркнуть, что статистическое описание какого-либо явления (если не говорить о квантовой физике) — всего лишь один из возможных способов описания. Иногда это практически единственный способ (как в статистической физике), но в ряде задач возможно параллельно как детерминированное, так и статистическое описание. Поясним это простым примером. Представим себе, что мы имеем дело с некоторым «черным ящиком» — генератором шума, на выходе которого имеется флуктуирующее напряжение $U(t)$. Мы можем описывать это напряжение при помощи законов распределения вероятностей различных порядков (одновременных, двухвременных и т. д.). Зная эти законы распределения и измерив мгновенные напряжения $U(t_1), \ldots, U(t_n)$, можно дать основанную на статистических законах наиболее вероятную оценку величины $U(t)$, если $t_k < t < t_{k+1}$ или $t > t_n$. Точность такой оценки будет зависеть от статистических свойств сигнала. Теперь представим себе, что генератор шума в действительности представляет собой вычислительную машину, реализующую тот или иной датчик псевдослучайных чисел, которые затем преобразуются в непрерывный сигнал (например, вырабатываются импульсы, амплитуда которых пропорциональна очередному случайному числу, а затем эти импульсы пропускаются через частотный фильтр). В этом случае, зная алгоритм генерации псевдослучайных чисел и характеристики системы, обрабатывающей этот сигнал, мы сможем с большой точностью предсказать значение напряжения в любой момент времени.

В данном примере ясно, что вопрос о том, является ли сигнал $U(t)$ случайным или нет, не имеет особого смысла. Возможны такие задачи, для решения которых вполне достаточно знать простые статистические характеристики сигнала, и нет необходимости прибегать к детальному описанию, но возможна и противоположная ситуация.

Таким образом, ответ на вопрос о том, является ли некоторая величина случайной или детерминированной, зависит от объема информации, которой мы располагаем об этой величине. Статистическое описание является наименее детальным, но наиболее универсальным: оно часто применимо в таких ситуациях, когда другие способы описания оказываются неэффективными или невозможными.

Из изложенных соображений ясно, что и вопрос о степени хаотичности также в некоторой мере условен: его следует ставить в рамках той или иной принятой для описания модели явления. Эта точка зрения развивается в статье Ю. А. Кравцова. Степень хаотичности случайного процесса в этой статье предлагается оценивать по степени его предсказуемости. Сравнивая два слу-

чайных процесса, мы назовем менее хаотичным из них тот, поведение которого может быть с заданной точностью предсказано на больший промежуток времени. Можно, разумеется, проводить предсказание не только по времени, но давать оценки поведения случайной величины в зависимости от других параметров (например, от пространственных координат). Можно обобщить это определение следующим образом: одна случайная величина U_1 менее хаотична, чем другая U_2, по отношению к параметру α, если статистическая оценка $U_1(\alpha)$ по известным значениям $U_1(\alpha_1), \ldots, U_1(\alpha_n)$ возможна с большей относительной точностью, чем соответствующая оценка $U_2(\alpha)$ по значениям $U_2(\alpha_1), \ldots, U_2(\alpha_n)$.

Ясно, что при изменении (уточнении) модели (как в приведенном выше примере с генератором шума) соотношение степеней хаотичности между U_1 и U_2 может измениться на обратное.

Разумеется, приведенное в статье Ю. А. Кравцова определение или сформулированное выше его обобщение не является единственно возможным, но оно вполне оправдывает себя во многих практически интересных приложениях и представляется вполне разумным.

Одним из центральных мест статьи Ю. Л. Климонтовича также является определение понятия степени хаотичности. В этой статье степень хаотичности определяется по отношению к процессам типа самоорганизации (см. раздел 2, с. 61): более хаотическим называется состояние, более далекое (по значению управляющего параметра) от состояния «самоорганизации». Тем самым понятие «самоорганизация» предлагается в качестве основного, первичного. В статье (в разделе 7) формулируется и универсальный количественный критерий для сравнения двух состояний по степени их хаотичности. Если плотность распределения вероятностей для некоторого состояния, предполагаемого более хаотичным, равна $f_0(x)$, то оно записывается в виде

$$f_0(x) = \exp(-H_{\text{eff}}(x)),$$

т. е. вводится «эффективный гамильтониан» $H_{\text{eff}}(x) = -\ln f_0(x)$. Затем вводится «перенормированное» распределение того же вида, но с другой (относительной) температурой D:

$$\tilde{f}_0(x) = A \exp\left(-\frac{H_{\text{eff}}(x)}{D}\right) = A\,(f_0(x))^{1/D}.$$

Это соотношение вводит две неизвестные величины A и D. Для их определения используются два уравнения. Первое — условие нормировки:

$$\int f_0(x)\,\mathrm{d}x = A \int \exp\left(-\frac{H_{\text{eff}}(x)}{D}\right)\mathrm{d}x = 1.$$

Второе — равенство средних «энергий» по распределениям $\tilde{f}_0$ и по тому распределению $f(x)$, которое сравнивается с f_0 по степени хаотичности:

$$\int H_{\text{eff}}(x)\,\tilde{f}_0(x)\,\mathrm{d}x = \int H_{\text{eff}}(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Окончательный рецепт для сравнения степеней хаотичности сводится к следующему: если найденное из этих уравнений значение $D > 1$, то состояние с распределением $f(x)$ менее хаотично, чем состояние f_0, взятое для сравнения. Иными словами, если исходную систему, принятую для сравнения, надо «нагреть», т. е. увеличить ее температуру в D раз, чтобы ее средняя энергия сравнялась с энергией системы, описываемой распределением $f(x)$, то состояние $f(x)$ менее хаотично (более упорядочено или «самоорганизовано»).

Применение этого критерия в ряде случаев приводит к результатам,, которые трудно понять с точки зрения здравого смысла. Пусть, например,

мы сравниваем два гауссовских распределения с различными параметрами:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right),$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Тогда согласно описанной процедуре легко получить величину D:

$$D = (\sigma^2 + a^2)\,\sigma_0^{-2}.$$

Если $\sigma^2 = \sigma_0^2$, то при любом $a \neq 0$ будет $D > 1$, т. е. мы имеем «самоорганизацию». Этот вывод можно считать разумным, так как появляется отличное от нуля среднее значение. Однако если $a = 0$, но $\sigma^2 > \sigma_0^2$, то опять-таки $D > 1$. Последний случай по предлагаемому критерию также следует рассматривать как «самоорганизацию», т. е. считать состояние с большим разбросом величины x за менее хаотичное. Результат этот трудно осмыслить.

К трудно интерпретируемым результатам применения предлагаемого в работе Ю. Л. Климонтовича критерия можно отнести и вывод о том, что ламинарное течение жидкости является более хаотичным, чем турбулентное. Здесь можно сопоставить критерии, предлагаемые в обеих статьях. Зададимся вопросом: если турбулентное течение менее хаотично, чем ламинарное, то какую величину для этого течения можно предсказать точнее, чем для ламинарного? Ответ здесь таков: так как ламинарное течение рассматривается при большей температуре, чем турбулентное, то тепловые флуктуации в нем будут большими. Следовательно, в турбулентном потоке, находящемся при более низкой температуре, возможно предсказание величин, усредненных по тепловым флуктуациям, с большей точностью, чем для более горячего ламинарного потока (при этом предполагается, что масштабы усреднения в обоих случаях одинаковы и малы по сравнению с характерными макромасштабами задачи).

Пусть, например, объем V, по которому производится усреднение скоростей молекул газа, настолько мал, что с точки зрения гидродинамики среднюю скорость по этому объему можно считать мгновенной скоростью потока в точке. (Как показано в работе А. Б. Глуховского «К статистическому описанию движения броуновской частицы в турбулентном потоке» [3], размер объема V должен для этого быть малым по сравнению с внутренним масштабом турбулентности.) Тогда средняя скорость молекул в этом объеме может быть найдена для более холодного турбулентного потока более точно, чем для более горячего ламинарного. Однако если повторять такое измерение (т. е. усреднение по объему V) многократно с достаточно большим шагом по времени, то в случае ламинарного потока дополнительное усреднение по совокупности всех измерений будет приводить к дальнейшему уменьшению ошибки определения средней скорости, тогда как для турбулентного потока ошибка измерения не будет убывать за счет турбулентных флуктуаций.

Поэтому парадоксальный вывод о том. что турбулентное течение менее хаотично, чем ламинарное, относится именно к тепловым, а не к гидродинамическим флуктуациям. Если такая постановка вопроса представляет интерес для какой-либо задачи, то возражений она не вызовет. Однако следует иметь в виду, что никакого отношения к гидродинамическим флуктуациям вывод о большей упорядоченности турбулентного потока не имеет.

Парадокс с большей «упорядоченностью» турбулентного потока можно пояснить и следующим мысленным экспериментом. Пусть мы имеем кольцевой замкнутый канал, в котором в качестве начального состояния создано турбулентное течение. За счет вязкости турбулентность будет затухать, и через некоторое время поток превратится в ламинарный. При этом турбулентная энергия перейдет в тепло, т. е. мы получим как раз такой ламинар-

ный поток, энергия которого равна энергии исходного турбулентного потока. Так как процесс происходит естественным путем во времени, то конечное ламинарное состояние будет иметь бóльшую энтропию, чем исходное турбулентное, — в соответствии с постановкой задачи в работе Ю. Л. Климонтовича. Однако развитие во времени идет от турбулентного потока к ламинарному, а не наоборот, т. е. говорить о «самоорганизации» здесь не имеет смысла.

Несомненно, что вопрос о критериях, позволяющих оценить степень хаотичности для «самоорганизующихся» систем, весьма интересен, и несомненной заслугой Ю. Л. Климонтовича является его постановка. Однако приведенные выше примеры показывают неоднозначность предложенного им критерия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцов Ю. А.//УФН. 1989. Т. 158. С. 93 (в этом номере).
2. Климонтович Ю. Л.//Ibidem. С. 59 (в этом номере).
3. Глуховский А. Б.//Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1971. Т. 7. С. 1039.