

530.16

СЛУЧАЙНОСТЬ, ДЕТЕРМИРОВАННОСТЬ, ПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ

Ю. А. Кравцов

(Институт общей физики АН СССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	93
2. Явление, наблюдение, прогноз	95
2.1. Наблюдаемый процесс. Роль измерительных приборов. 2.2. Прогноз как модельный процесс. 2.3. Исследуемый процесс. 2.4. Соотношение между исследуемым, наблюдаемым и модельным процессами.	
3. Случайность как соглашение	97
3.1. Теоретико-множественный подход. 3.2. Алгоритмический (сложностной) подход. 3.3. Критерии случайности, используемые в физике.	
4. Случайность как непредсказуемость	99
4.1. Статистическая пара «наблюдение—прогноз». 4.2. Меры качества предсказуемости.	
5. Частично детерминированные процессы	101
5.1. Концепция частичной детерминированности. 5.2. Время детерминированного поведения. Горизонт предсказуемости. 5.3. Частичная детерминированность и частичная когерентность. Степень детерминированности как мера внутренних связей в процессе. 5.4. Динамический хаос как частично детерминированный процесс. 5.5. Комбинированное среднее. Квазислучайные процессы. 5.6. Переход случайность — детерминированность. Существуют ли «истинно случайные» процессы? 5.7. Смежные вопросы.	
6. Примеры	109
6.1. Предсказуемость в случае растягивающего кусочно-линейного отображения. 6.2. Реальный генератор с туннельным диодом. 6.3. Прогноз малоразмерного хаоса на основе похожих событий в прошлом. 6.4. Степень предсказуемости в примере М. Борна. 6.5. Предсказуемость квазисинусоидального сигнала с флуктуирующей фазой.	
7. Частично детерминированные поля	115
7.1. Степень детерминированности скалярных и векторных полей. 7.2. Пространственная предсказуемость спекл-неоднородных полей. 7.3. Частичная предсказуемость турбулентных потоков. Область совместимости динамического и кинетического описаний. 7.4. Выявление неоднородностей в волноводе по интерференционной картине. 7.5. Предсказание погоды. Цена прогноза.	
8. Природа случайности	119
8.1. Иерархия моделей, уровней описания и степеней детерминированности. 8.2. Фундаментальные и практические пределы предсказуемости.	
9. Ars conjectandi	120
Список литературы	121

1. Введение. Со времен Лапласа и до сравнительно недавнего времени среди большинства физиков господствовало убеждение, что, располагая динамическими уравнениями и начальными данными, в рамках классической физики можно добиться удовлетворительного предсказания поведения любых систем.

Уверенность в потенциально неограниченных способностях классической физики предсказывать поведение сложных систем поразительным образом уживалась с существованием огромного количества явлений, свидетельствовавших об обратном: достаточно указать на развитую турбулентность, на различные виды неустойчивости в плазме и т. д. Это убеждение породило на долгие времена парадигму, которая рассматривала случаи

плохой предсказуемости как своего рода недоразумения, обусловленные такими «несущественными» факторами, как чрезвычайно большое число участников движения или же неопределенность начальных данных. Если и признавалось существование принципиально неустранимых причин непредсказуемости, то ни в коем случае не в характере уравнений классической физики.

Между тем понимание ограниченных предсказательных возможностей классической физики постепенно набирало силу, чему в немалой степени способствовали, например, замечательные работы А. Пуанкаре, в частности его исследования сложных движений типа гомоклинических структур, опередившие на несколько десятилетий свое время *), и простые, но важные в идейном отношении замечания М. Борна о долговременной непредсказуемости классических движений из-за погрешностей в начальных данных. В конце концов в результате объединенных усилий математиков, физиков и механиков в начале 70-х годов сформировалось качественно новое представление о характере динамических процессов, а именно, представление о локальной неустойчивости поведения большинства сколько-нибудь сложных физических систем и о важнейшей роли хаотических и стохастических движений, которые не допускают предсказаний на длительные промежутки времени **).

Вошедшие в физику и математику важные понятия перемешивания, локальной неустойчивости, топологической энтропии, странных аттракторов, фрактальной размерности и т. п. уже неоднократно обсуждались на страницах «Успехов физических наук» (см. обзоры [3–6]). В настоящее время список работ по динамическому хаосу увеличивается на несколько сот публикаций в год, при этом вышло уже не менее десятка монографий, посвященных специально проблеме динамического хаоса (кроме [1, 2] отметим еще книги [7–10]).

Главная черта хаотических систем состоит в том, что малое возмущение начальных условий для динамической переменной или же малое изменение параметров самой динамической системы приводит к непредсказуемости результирующего движения за конечное время, которое Дж. Лайтхилл [11] удачно назвал горизонтом предсказуемости.

Несмотря на огромный интерес к проблеме хаоса, один из основных ее аспектов — ограниченная во времени предсказуемость поведения динамических систем — еще не получил исчерпывающего описания. Данный обзор посвящен общему подходу к проблеме предсказуемости, основанному на представлении о частично детерминированных процессах, т. е. процессах, допускающих динамический прогноз на ограниченных интервалах времени. Этот подход формализует неожиданно сложные даже в рамках классической физики «взаимоотношения» между наблюдением $y(t)$ и прогнозом $z(t)$ через совместную плотность вероятности $w_2(y, z, t)$ и ее моменты.

Центральная задача обзора состоит в том, чтобы разобраться, что же в конечном счете ограничивает предсказуемость: шумы, помехи, неточные начальные данные или же дефекты прогностической модели? Такая постановка задачи волнует не только физиков, но также и метеорологов, биологов, экономистов, социологов. В западных странах уже есть опыт совместных междисциплинарных обсуждений проблемы прогнозирования (см., например, специальный выпуск трудов Королевского Общества Великобритании, в котором опубликована статья Лайтхилла [11]). Не пришло ли время и нам, физикам, объединить свои усилия с экономистами? Не сумеем ли вместе понять, как избежать хаоса там, где его можно и нужно избежать?

*) Историю вопроса и изложение основных понятий хаотической динамики можно найти в недавно опубликованных превосходных книгах [1, 2].

**) Пересмотр прежних представлений о «предсказуемой динамике» произошел в значительной мере благодаря работам В. И. Арнольда, Г. М. Заславского, А. Н. Колмогорова, Э. Н. Лоренца, Д. Рюэля, Я. Г. Синая, С. Смейла, Ф. Такенса, Б. В. Чирикова.

2. Явление, наблюдение, прогноз.

2.1. Наблюдаемый процесс. Роль измерительных приборов. Пусть при изучении реального физического процесса, который мы обозначим $x(t)$, регистрируется наблюдаемый процесс $y(t)$, имеющий, вообще говоря, несколько компонент: $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_p(t)\}$, где p — число независимых датчиков (приборов). От исследуемого процесса $x(t)$ наблюдаемый процесс $y(t)$ отличается в нескольких отношениях.

Во-первых, измерительные приборы тем или иным образом преобразуют исследуемый процесс $x(t)$: производят фильтрацию (видоизменяют спектр), вносят нелинейные искажения и даже воздействуют на размерность — размерность p наблюдаемого процесса $y(t)$ всегда меньше размерности q исследуемого процесса $x(t)$: $p < q$.

Во-вторых, приборы всегда добавляют к результату измерений дополнительный шумовой сигнал $v(t)$, который мы будем называть измерительным шумом.

В-третьих, прибор вносит искажения и в сам исследуемый процесс $x(t)$. До недавнего времени считалось, что влияние прибора на изучаемое явление проявляется только при измерениях микроскопических величин, когда уже нельзя не учитывать квантовую природу явлений. Между тем ясно, что присутствие макроскопического прибора может кардинально повлиять на результат измерений и в классической физике *), когда речь идет о локально неустойчивых процессах, существенно и за конечное время реагирующих даже на малые внешние воздействия.

Чтобы не усложнять последующее изложение, мы примем, что ни одна из p регистрируемых компонент сигнала не подвержена нелинейным и спектральным искажениям, но испытывает воздействие аддитивного измерительного шума $v(t)$, так что

$$y_j(t) = x_j(t) + v_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, p, \quad p < q). \quad (2.1)$$

2.2. Прогноз как модельный процесс. Пытаясь прогнозировать ход реального процесса $x(t)$, фактически мы вынуждены составлять прогнозы только для наблюдения $y(t)$, поскольку о состоянии исследуемого процесса $x(t)$, мы не можем судить иначе, как по показаниям приборов. Пусть процесс $y(t)$ наблюдается на достаточно длинном интервале времени от момента t^0 — T в прошлом до текущего момента t^0 . Очевидно, любой прогноз поведения $y(t)$ должен опираться на те или иные гипотезы или модели. Поэтому наряду с реальным, $x(t)$, и наблюдаемым, $y(t)$, процессами необходимо ввести в рассмотрение модельный (иначе — прогностический, идеализированный, гипотетический) процесс $z(t)$, по отношению к которому и следует оценивать качество предсказуемости.

Прогноз должен быть основан на том или ином уравнении, правиле, алгоритме. Имея в виду в первую очередь динамические системы, естественно попытаться подчинить прогноз $z(t)$ модельному (гипотетическому) дифференциальному уравнению, которое мы запишем в символической форме

$$M\left(\frac{d}{dt}, z; \alpha, 0\right) = 0. \quad (2.2)$$

Символом α в этом уравнении обозначены параметры модели, подлежащие уточнению, тогда как символ 0 в качестве четвертого аргумента олицетворяет все, что было не учтено в выбранной модели: малозначащие воздействия, малосущественные степени свободы, помехи, шумы и т. д.

*) Насколько мне известно, интересный вопрос о возмущающем действии измерительных приборов на ход хаотических процессов в классической физике еще не подвергался серьезному исследованию.

Естественным начальным условием $z^0 = z(t^0)$ для прогноза $z(t)$ может служить значение наблюдаемого процесса $y^0 = y(t^0)$ в исходный момент времени $t = t^0$:

$$z^0 = y^0, t = t^0. \quad (2.3)$$

Возможны и более сложные постановки вопроса. Например, чтобы снизить влияние сильных аддитивных помех $v(t)$, наблюдаемый процесс $y(t)$ можно подвергнуть фильтрации, и если $\tilde{y}(t)$ — отфильтрованный сигнал, то в качестве z^0 целесообразно взять величину $\tilde{y}^0 = \tilde{y}(t^0)$.

2.3. Исследуемый процесс. Описание исходного процесса $x(t)$ в сильнейшей степени зависит от нашего понимания проблемы, выражающегося в выборе модели. Приняв в качестве модельного описания уравнение (2.2), «настоящее» уравнение для $x(t)$ целесообразно представить в виде

$$M\left(\frac{d}{dt}, x; a, f_k(t)\right) = 0, \quad (2.4)$$

где a — это истинные (но не известные нам) параметры системы, а факторы $f_k(t)$ символизируют действие «всей остальной Вселенной». Эти факторы тоже подчиняются определенным уравнениям. При уточнении (усложнении) модели прогноза и при появлении дополнительной информации некоторые компоненты $f_k(t)$ могут быть отнесены к $x(t)$ с соответствующим расширением размерности.

2.4. Соотношение между исследуемым, наблюдаемым и модельным процессами. Взаимоотношение между указанными процессами иллюстрирует рис. 1, на котором процессы

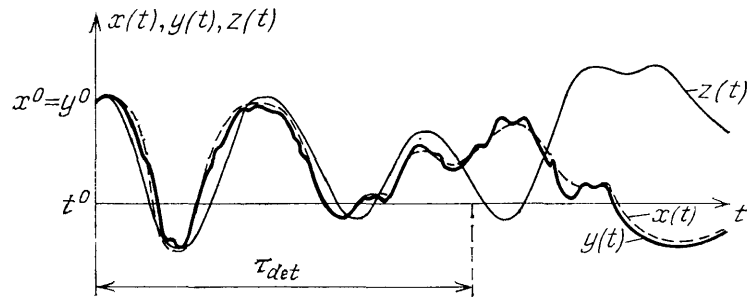


Рис. 1. Процессы, рассматриваемые в задаче о предсказуемости: $x(t)$ — реальный процесс (штриховая линия); $y(t)$ — наблюдаемый процесс (жирная линия); $z(t)$ — модельный, гипотетический процесс (тонкая линия)

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ изображены так, как если бы они были однокомпонентными. При сравнительно небольших помехах наблюдаемый процесс $y(t)$, изображенный жирной линией, слабо отличается от реального процесса $x(t)$ (изображен штриховой линией) при любых значениях t , при которых регистрирующие приборы исправны. В то же время прогноз $z(t)$ (сплошная тонкая линия) близок к $y(t)$ только на ограниченном интервале, который естественно назвать временем предсказуемого поведения или, если отождествить предсказуемость с детерминированностью, временем детерминированного поведения τ_{det} .

В данной статье мы попытаемся проанализировать причины, ограничивающие это время, т. е. причины, суживающие горизонт предсказуемости, и приведем аргументы в пользу того, что в конечном счете непредсказуемость обусловлена наличием шумов, присутствующих в любой физической системе.

3. Случайность как соглашение.

3.1. Теоретико-множественный подход. Попытки логического осмысления понятия случайности предпринимались на протяжении всей истории развития науки вообще и теории вероятности в особенности. Основной тезис неизменно состоял в том, чтобы рассматривать случайность как «отсутствие закономерностей» (А. Н. Колмогоров [12]). Выяснилось, однако, что представление об «отсутствии закономерностей» не является однозначным и допускает широкий простор для различных толкований.

К настоящему времени сформировалось несколько точек зрения на случайность, каждая из которых выступает как своего рода соглашение. В большинстве случаев различные представления о случайности качественно согласуются друг с другом, но иногда оказывается, что данный процесс (или явление) выглядит случайным с одной точки зрения и неслучайным с другой. Такое оказывается возможным потому, что различные соглашения рассматривают явление как бы в разных плоскостях. В качестве характерного примера отмечу, что термин «детерминированный хаос» родился на пересечении двух плоскостей: прилагательное «детерминированный» отражает класс дифференциальных уравнений, которыми описывается хаос (в этих уравнениях нет случайных функций в том смысле, который принят в теории вероятностей), тогда как существительное «хаос» отвечает характеру процесса (локальная неустойчивость, глобальная ограниченность, фрактальная размерность, ограниченная предсказуемость). В связи с этим представляется полезным произвести своего рода «расслоение», размежевание имеющихся соглашений. Такая препарация поможет яснее понять смысл многих утверждений, касающихся прогноза.

Начнем с теоретико-множественного подхода, лежащего в основе современной теории вероятностей. В этом подходе понятие случайности связывается с возможностью наделить данную величину вероятностной мерой, а именно — величина называется случайной, если она задана своими вероятностными распределениями. В сущности, к этому сводится определение случайной величины, сформулированное на языке σ -алгебр и измеримых функций (см., например, [13], с. 132). «Отсутствие закономерностей» отражается здесь степенью разброса данной величины, при этом детерминированным величинам отвечают распределения, описываемые δ -функциями. Этого толкования придерживается и теоретическая физика.

В связи с этим напомним, что кроме случайных и детерминированных в указанном выше смысле величин существуют еще и неопределенные величины, для которых вероятностные меры неизвестны или не определены с достаточной экспериментальной надежностью (В. Н. Тутубалин [14]).

3.2. Алгоритмический (сложностный) подход. Даже основатели современной теории вероятности не были полностью удовлетворены теоретико-множественным толкованием случайности и пытались развивать альтернативные подходы.

Наиболее разработанным к настоящему времени оказался подход А. Н. Колмогорова и его последователей (Мартин-Лёф, Чаитин и др.), в основе которого лежит интерпретация «отсутствия закономерностей» как алгоритмической сложности (состояние вопроса см. в работе А. Н. Колмогорова [15] и обзоре [16]).

В качестве меры сложности данной последовательности нулей и единиц $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ (при помощи таких последовательностей можно отобразить любой процесс) А. Н. Колмогоров предложил взять длину программы l (в битах), которая переводит данную последовательность y_j в x_i . Если алгоритм перевода простой, то l значительно меньше длины последовательности $\{x_i\}$, так что последовательность $\{x_i\}$ целесообразно рассмат-

ривать как неслучайную. В противоположном случае, когда $l \sim N$, алгоритм перевода $\{y_j\} \rightarrow \{x_i\}$ сводится, в сущности, к посимвольной записи самой последовательности $\{x_i\}$. Сложность соответствующего алгоритма и может служить основанием для отнесения данной последовательности к разряду случайных. Со сложностной точки зрения почти все последовательности $\{x_i\}$ оказываются случайными, поскольку простые алгоритмы составляют множество меры нуль. Положение здесь такое же, как с иррациональными числами: почти все числа являются иррациональными, так как множество рациональных чисел имеет нулевую меру.

Стоит отметить еще, что сложностной подход допускает несколько вариантов определения случайной последовательности в зависимости от выбора допустимых правил выбора элементов: различают последовательности, случайные по Мизесу — Чёрчу, по Мизесу — Колмогорову — Ловеланду, по Мартин—Лёфу (см. [16]).

Отдавая должное оригинальности сложностного толкования случайности, следует все же отметить, что соглашение об отождествлении случайности с алгоритмической сложностью не вполне отвечает тому взгляду на природу явлений, который развивает физика. Дело в том, что алгоритмическая сложность сама по себе не является принципиальным препятствием для предсказания процесса на ограниченных интервалах времени: скорее всего, это препятствие технического или даже психологического характера. Дополнительные трудности связаны с неизбежным наличием физических шумов и помех, в присутствии которых даже алгоритмически простые процессы становятся алгоритмически сложными.

3.3. К р и т е р и и с л у ч а й н о с т и , и с п о л ь з у е м ы е в ф и з и к е . В экспериментальной физике применяются специфические критерии случайности, не сводящиеся к теоретико-множественному и алгоритмическому соглашениям.

Наиболее примитивный критерий случайности — нерегулярная (непериодическая) форма процесса. Ясно, что такой критерий на качественном уровне противопоставляет случайность периодичности.

Критерий *спадающих корреляций* сводится к требованию, чтобы корреляционная функция наблюдаемого процесса $\psi_y(\tau) = \langle y(t) y(t - \tau) \rangle$ и коэффициент корреляции

$$K_y(\tau) = \frac{\langle y(t) y(t - \tau) \rangle}{(\langle y^2(t) \rangle \langle y^2(t - \tau) \rangle)^{1/2}} \quad (3.1)$$

стремились к нулю с ростом τ . Этот критерий также направлен на то, чтобы селективировать периодические и непериодические (хаотические) процессы, но осуществляет такую селекцию количественно. Естественное ограничение критерия спадающих корреляций состоит в том, что он не в состоянии выявить периодичности с периодом, превышающим время наблюдения T .

Критерий *сплошного спектра* противопоставляет случайность, трактуемую как хаотический процесс со сплошным спектром, периодическим процессам, которым отвечает дискретный спектр. Очевидно, этот критерий эквивалентен критерию спадающих корреляций, так как спектральная плотность и корреляционная функция связаны между собой преобразованием Фурье. При анализе спектра время наблюдения T определяет спектральное разрешение $\Delta\omega_{\min} = 2\pi/T$. Если время T недостаточно велико, то спектральный прибор не может отличить сплошной спектр от дискретного, если интервал между дискретными линиями меньше $\Delta\omega_{\min} = 2\pi/T$.

Критерии сплошного спектра и спадающих корреляций, хотя и сводят представление о случайности к примитивной антитезе периодичности, все же имеют практический смысл, так как служат индикаторами перехода от периодического режима к хаосу. Заметим, однако, что если использовать эти критерии последовательно, то с ростом времени наблюдения T рано

или поздно мы установим конечность ширины дискретных липни (на языке корреляционных функций — спадания корреляций) для любого физического периодического процесса, и если действовать прямолинейно, то мы будем вынуждены назвать хаосом все физические процессы без исключения.

Случайность объектов, демонстрирующих сложное, хаотическое поведение, характеризуют при помощи нескольких показателей [1,2]: *фрактальной размерности* (метрической, ляпуновской, корреляционной), *энтропии* (скорости расходимости траекторий в фазовом пространстве), *степени порядка* в фазовом пространстве [17].

Кроме рассмотренных количественных критериев, часто используются и другие, больше качественные, чем количественные характеристики исследуемых процессов, например, *невоспроизводимость* (невозможность получить одну и ту же реализацию процесса при сохранении всех внешних условий), *неповторяемость* (которую можно трактовать и как невозпроизводимость, и как отсутствие периодичности в данном процессе), *неуправляемость* и *неконтролируемость* (невозможность создать условия, при которых процесс протекал бы предписанным образом).

Несколько особняком стоит соглашение, отождествляющее случайность с *непредсказуемостью*. Это соглашение неявно подразумевается в большинстве жизненных ситуаций, присутствует во вводных разделах книг по теории вероятности, но таинственным образом исчезает из последующих глав. Однако, как это не покажется странным, именно этот аспект случайности, имеющий жизненно важное значение, до сих пор не формализован должным образом, несмотря на то, что он прямо касается проблемы интерпретации экспериментальных данных. Ниже делается попытка такой формализации в рамках теории частичной детерминированности, которая трактует уверенную предсказуемость как детерминированность, а плохую предсказуемость — как случайность. Предварительные наброски этой теории содержатся в работах [18–21], а более полные версии — в работах [22, 23].

4. Случайность как непредсказуемость.

4.1. Статистическая пара «наблюдение — прогноз». Если в начальный момент времени t^0 величины y и z принимают значения y^0 и z^0 , то статистическое описание пары величин (y, z) в момент времени t осуществляется при помощи условной двумерной плотности вероятности

$$w_2 = w_2(y, z, t | y^0, z^0, t^0). \quad (4.1)$$

Принимая для модельного процесса $z(t)$ естественное начальное условие $z^0 = y^0$ (см. (2.3)), при $t \rightarrow t^0$ получим, что двумерная плотность вероятности вырождается в δ -функцию:

$$w_2 \rightarrow \delta(y^0 - z^0) w_1(y^0), \quad (4.2)$$

где $w_1(y)$ — одномерная безусловная плотность вероятности наблюдаемого процесса $y(t)$. Общий характер поведения плотности вероятности w_2 показан на рис. 2: начальная δ -функция с течением времени размывается, что указывает на ухудшение качества прогноза, осуществляемого модельной функцией $z(t)$.

Вводя новый для теоретической физики объект исследования, целесообразно подчеркнуть его отличие от других вероятностных характеристик физических процессов: плотность вероятности w_2 характеризует не только свойства наблюдаемого физического процесса $y(t)$, но и свойства модельного, гипотетического процесса $z(t)$, ход которого определяется не законами природы, а исключительно представлениями интерпретатора о протекании физических процессов. Таким образом, гипотеза $z(t)$ включается в статисти-

стику наряду с исследуемым процессом $y(t)$. Разумеется, нельзя назвать этот прием абсолютно новым (достаточно напомнить хотя бы о статистической теории различения гипотез, которая первоначально была разработана для нужд радиолокации, а ныне широко применяется во многих разделах физики, где необходимо выделить слабый сигнал на фоне шумов и помех), но признание известного паритета между гипотезой и наблюдением еще не стало

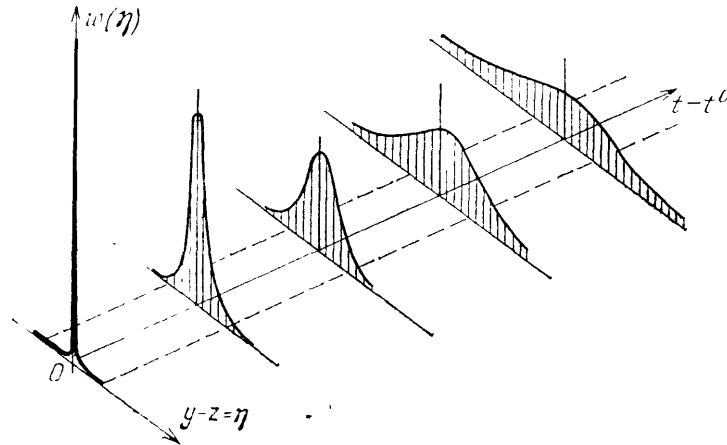


Рис. 2. Эволюция двумерной условной плотности вероятности

общепризнанным. Исключением, пожалуй, является только метеорология, где корреляция между прогнозом и наблюдением давно уже используется как критерий качества прогноза.

4.2. Меры качества предсказуемости. Наиболее распространенной мерой качества прогноза служит средний квадрат ошибки $\eta = |y - z|$:

$$\sigma_{\eta}^2 \equiv \langle \eta^2 \rangle = \langle |y(t) - z(t)|^2 \rangle. \quad (4.3)$$

В силу естественного начального условия (2.3) дисперсия σ_{η}^2 в начальный момент времени $t = t^0$ равна нулю: $\sigma_{\eta}^2(t^0) = 0$. На достаточно больших интервалах времени, когда положительные и отрицательные значения произведения yz встречаются одинаково часто, процессы $y(t)$ и $z(t)$ становятся статистически независимыми: $\langle yz \rangle = 0$, при этом дисперсия σ_{η}^2 выражается через сумму средних квадратов: $\sigma_{\eta}^2 = \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$ (здесь и ниже мы предполагаем, что процессы y и z ограничены, в частности, они могут принадлежать аттрактору). Величину

$$E = \frac{\sigma_{\eta}^2}{\langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle} = \frac{\langle |y - z|^2 \rangle}{\langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle} \quad (4.4)$$

естественно назвать относительной ошибкой. При $t \rightarrow \infty$ она стремится к 1. Для простоты мы считаем, что $\langle y \rangle = \langle z \rangle = 0$.

Корреляционная мера качества прогноза вводится как нормированная корреляционная функция:

$$D(\tau) = \frac{\langle y(t) z(t) \rangle}{\langle y^2(t) \rangle \langle z^2(t) \rangle^{1/2}}, \quad t = t^0 + \tau. \quad (4.5)$$

По модулю величина $D(\tau)$ всегда меньше единицы.

$$|D(\tau)| \leq 1, \quad (4.6)$$

что следует из неравенства Буняковского. При использовании тождества

$$\langle yz \rangle = \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle - \langle |y - z|^2 \rangle$$

коэффициент корреляции D можно выразить через $\sigma_{\eta}^2 = \langle |y - z|^2 \rangle$ и через E :

$$D(\tau) = \frac{\langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle - \sigma_{\eta}^2}{2(\langle y^2 \rangle \langle z^2 \rangle)^{1/2}} = \frac{\langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle}{2(\langle y^2 \rangle \langle z^2 \rangle)^{1/2}} (1 - E), \quad (4.7)$$

так что все три величины σ_{η}^2 , E и D в равной степени могут быть использованы для описания качества прогноза. Однако, как мы убедимся ниже, величина D имеет определенные преимущества, когда случайность трактуется как непредсказуемость.

Величины σ_{η}^2 , E и D можно «теоретически» выразить через двумерную плотность вероятности (4.1), но можно, минуя w_2 , определить эти величины непосредственно из эксперимента, набрав необходимое количество данных и производя обычное эмпирическое усреднение.

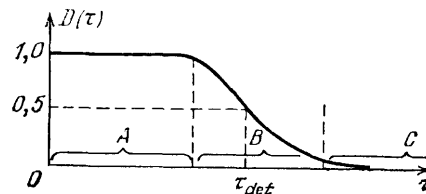
Качество предсказуемости можно характеризовать также функцией концентрации (вероятность попадания y в заданный интервал ϵ возле прогноза z , *концентрационная мера качества*) или же информацией, заключенной в процессе $y(t)$ относительно процесса z (*информационная мера качества*). Обе эти меры измерять сложнее, чем величины σ_{η}^2 , E и D , и поэтому они менее употребительны.

5. Частично детерминированные процессы.

5.1. Концепция частичной детерминированности. Концепция частичной детерминированности основана на соглашении, что в качестве признака случайности (детерминированности) выбирается непредсказуемость (предсказуемость) наблюдаемого процесса на основе определенной прогностической модели $z(t)$ или класса моделей $z_{\alpha}(t)$. При таком подходе случайность и детерминированность не противопоставляются друг другу, а рассматриваются как полюса единого свойства — *частичной детерминированности*.

Хотя статистические свойства пары «наблюдение — прогноз» всесторонне описываются совместной плотностью вероятности w_2 , удобнее, однако, ввести более простые характеристики предсказуемости, подобно тому,

Рис. 3. Зависимость степени детерминированности от времени. A — область полностью детерминированного поведения, B — область частично детерминированного поведения, C — область случайного (непредсказуемого) поведения, τ_{det} — время детерминированного поведения



как в теории когерентности наряду с совместной плотностью вероятности значений поля в разных точках и в разные моменты времени вводят ее моменты — функции когерентности различного порядка. Простой и наглядной характеристикой такого рода служит коэффициент корреляции (4.5) между наблюдением и прогнозом, который в дальнейшем мы будем называть *степенью детерминированности (предсказуемости)*.

На малых временах τ , когда модельный процесс $z(t)$ еще не сильно отличается от z^0 , величина D близка к единице (рис. 3). В этом случае можно говорить о полностью детерминированном поведении процесса $y(t)$ относительно $z(t)$. В противоположность этому при достаточно больших τ величина D стремится к нулю, что свидетельствует о слабой детерминированности (в смысле слабой предсказуемости) наблюдаемого процесса $y(t)$ по отношению к модели $z(t)$.

С точки зрения экспериментатора, который не располагает чересчур большим набором моделей, слабую предсказуемость естественно интер-

претировать как случайность. Это вполне отвечает той общей тенденции рассматривать случайность как отсутствие закономерности, которая привела А. Н. Колмогорова к отождествлению случайности с алгоритмической сложностью. На наш взгляд, однако, экспериментатор руководствуется скорее не «сложностной» концепцией случайности, а другой концепцией, которая опирается на прогностические соображения и которую мы назовем концепцией частичной детерминированности. В рамках этой концепции случайным (непредсказуемым) объявляется все, что не согласуется с данной моделью $z(t)$ или с данным классом моделей $z_\alpha(t)$.

В рамках предлагаемого подхода наблюдаемый процесс $y(t)$ выступает как *детерминированный (предсказуемый)* процесс при $|1 - D| \ll 1$, как *случайный (непредсказуемый)* процесс при $|D| \ll 1$ и как *частично детерминированный (частично предсказуемый)* процесс при $0 < |D| < 1$. Области детерминированного, частично детерминированного и случайного поведения указаны на рис. 3. Время, в течение которого величина D превышает некоторое значение, скажем $1/2$, выступает как *время детерминированного поведения* τ_{det} (см. рис. 3). Это время может быть найдено из уравнения

$$D(\tau_{\text{det}}) = \frac{1}{2}. \quad (5.1)$$

5.2. Время детерминированного поведения. Горизонт предсказуемости. Имеется несколько причин, которые ограничивают время детерминированного поведения (времени предсказуемости) наблюдаемого процесса $y(t)$. Прежде всего, наблюдаемый процесс $y(t)$ всегда отличается от реального процесса $x(t)$, поскольку показания измерительных приборов всегда вносят нелинейные, частотные и шумовые искажения.

Во-вторых, реальные процессы $x(t)$ всегда подвержены различным воздействиям, которые в символическом уравнении движения (2.4) отражены внешними силами $f_h(t)$. Внешние силы имеют как флуктуационные компоненты, которые мы не в состоянии описать иначе как статистическим образом, так и всевозможные неучтенные и неизвестные воздействия, за которыми мы оставляем возможность (хотя бы умозрительную) детерминистического описания, обеспеченного надлежащими измерениями и уравнениями движения. Фактически это означает, что такие компоненты внешних воздействий могут быть переведены в компоненты модели $z(t)$.

Наконец, третья причина погрешности прогноза связана с неточностью самого модельного оператора M . Эта неточность может выразиться как в априорной неопределенности параметров α (параметрическая неопределенность), так и в структуре самого модельного уравнения (структурная неопределенность). Указанные погрешности неизбежно сопутствуют любой схеме идеализированного описания реальных процессов. В литературе погрешности такого рода иногда называют «шумами незнания».

Итак, время детерминированного поведения зависит от многих факторов, главными из которых являются измерительные шумы, флуктуационные воздействия на систему и дефекты модели. Символически это можно представить в виде зависимости

$$\tau_{\text{det}} = F(\gamma, f, \Delta M), \quad (5.2)$$

где ΔM трактуется как неточность модели.

Желая увеличить время предсказуемости, можно попытаться воздействовать на уровень измерительных шумов, для чего нужно использовать малошумящие датчики и приемники сигналов, и на качество модели, уменьшая по возможности «невязку» ΔM . Однако в любой физической системе даже при использовании всех доступных средств по изоляции от внешнего мира сохраняются неустраняемые помехи: тепловые шумы, электромагнитные

наводки, процессы старения и т. д. Именно эти неустранимые флуктуационные воздействия и определяют потенциальные пределы предсказуемости.

Полагая в (5.2) $\gamma \rightarrow 0$ и $\Delta M \rightarrow 0$, получаем предельное значение

$$\tau_{\text{lim}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0, \Delta M \rightarrow 0} \tau_{\text{det}} = F(0, f, 0), \quad (5.3)$$

которое и следует рассматривать как *горизонт предсказуемости*. Это предельное время выполняет несколько функций, которые близки по физическому смыслу, но все же различаются по интерпретации.

Прежде всего, горизонт предсказуемости τ_{lim} характеризует *время динамической памяти системы*. За времена, превышающие τ_{lim} , двумерная плотность вероятности w_2 перестает зависеть от начальных значений y^0, z^0 и одномерно распадается на произведение одномерных плотностей:

$$w_2(y, z, t | y^0, z^0, t^0) \rightarrow w_1(y) w_1(z) \quad (\tau \gg \tau_{\text{lim}}). \quad (5.4)$$

В результате при $\tau \gg \tau_{\text{lim}}$ имеем $\langle yz \rangle \rightarrow \langle y \rangle \langle z \rangle = 0$, так что степень детерминированности D обращается в нуль. Заметим, что применительно к системам управления понятие времени памяти системы вводил еще Н. Винер, который, однако, не оттенил должным образом роль неустранимых шумов.

Время динамической памяти можно было бы с равным успехом назвать *временем забывания начальных условий*. Однако этот термин, к сожалению, уже «занят» другим смысловым значением: в кинетической теории под временем забывания начальных условий чаще всего понимают время расщепления корреляции τ_c : после достижения этого времени корреляционная связь между значениями процесса $y(t)$ в соседние моменты времени ослабляется, и многомерные функции распределения распадаются на произведения одномерных. Время динамической памяти тоже связано с расщеплением корреляций, но не между значениями наблюдаемого процесса $y(t)$, а между значениями наблюдения и прогноза.

Далее, величина τ_{lim} характеризует *время обратимого поведения*, т. е. время, в течение которого система еще может вернуться к прежнему состоянию при обращении (разумеется, воображаемом) скоростей всех частиц на обратные. Если промежуток времени Δt после момента t^* обращения скоростей мал по сравнению с τ_{lim} , то динамическая система, подчиняющаяся классическим уравнениям, может воспроизвести состояние, существовавшее за время Δt до момента обращения. Если же $\Delta t > \tau_{\text{lim}}$, то даже при идеально точном изменении скоростей всех частиц на обратные система не вернется в прежнее состояние из-за неустранимых помех и шумов, которые не обращаются во времени в момент t^* .

Наконец, время τ_{lim} сравнимо со *временем информационной памяти* τ_{inf} , которое в исследованиях [24, 25] вводилось для обозначения времени, в течение которого наблюдаемый процесс $y(t)$ теряет информацию о шумах, ранее воздействовавших на систему (в [24, 25] рассматривались системы типа странного аттрактора). Сопоставимость τ_{lim} и τ_{inf} , по порядку величины следует из того, что обе эти величины выражаются через одну и ту же плотность вероятности w_2 .

5.3. Частичная детерминированность и частичная когерентность. Степень детерминированности как мера внутренних связей в процессе. Чрезвычайно существенно, что время детерминированного поведения τ_{det} может заметно превышать время когерентности (корреляции) τ_c , которое служит характерным масштабом спадания степени когерентности (коэффициента автокорреляции) (3.1).

В самом деле, время τ_c оценивается как типичный интервал между двумя соседними максимумами на графике наблюдаемого процесса или, что

эквивалентно, как обратная ширина спектра, $\tau_c \sim 1/\Delta\omega$. Между тем, время предсказуемости τ_{det} определяется совершенно иными факторами: уровнем шумов, точностью принятой модели и т. д. Иными словами, время τ_{det} существеннейшим образом зависит от априорных сведений, касающихся динамики системы, и поэтому не удивительно, что во многих случаях $\tau_{\text{det}} \gg \tau_c$ (рис. 4).

Важно, что степень когерентности (3.1) выступает как *наихудшая степень детерминированности*. Мы имеем в виду следующее: если мы не располагаем динамическим уравнением для модели $z(t)$, то прогноз приходится строить, опираясь только на наблюдаемый процесс $y(t)$. В простейшем случае прогнозом $z(t)$ на время t может служить значение $y(t - \tau)$ в предыдущий момент времени (по принципу «завтра будет то же, что сегодня»),

$$z(t) = y(t - \tau). \quad (5.5)$$

а в этом случае степень детерминированности (4.5) переходит в степень когерентности (3.1). Соответственно этому время корреляции выступает как нижний предел времени детерминированного поведения. Несколько примеров, иллюстрирующих этот вывод, мы приведем в следующем разделе.

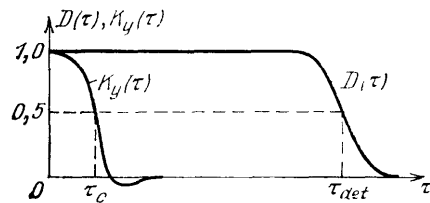


Рис. 4. Типичное соотношение между степенью детерминированности $D(\tau)$ и степенью когерентности $K_y(\tau)$

Как известно, коэффициент корреляции характеризует степень линейной связи между случайными величинами. В частности, коэффициент корреляции $K_y(\tau)$ отражает линейную статистическую связь между значениями наблюдаемого процесса y в моменты времени t и $t - \tau$. Что же тогда характеризует степень детерминированности $D(\tau)$? По определению, $D(\tau)$ описывает связь между наблюдением $y(t)$ и прогнозом $z(t)$, т. е. связь между тем, что имеется, и тем, что должно быть по нашим представлениям.

Такую связь, которая выявляется при посредстве динамических уравнений типа (2.3), целесообразно назвать *внутренней* (или *динамической*), а величину D — коэффициентом внутренней (динамической) корреляции [18–21].

5.4. Динамический хаос как частично детерминированный процесс. Вопрос о природе динамического хаоса, о соотношении в нем случайности и детерминированности вызвал оживленные дискуссии, отражением которых служат парадокс «случайность — детерминированность странных аттракторов», а также поражающий слух термин «детерминированный хаос», уже прочно вошедший в физическую литературу. Эти дискуссии вряд ли можно считать законченными, поскольку многие вопросы, касающиеся случайности и детерминированности в хаосе, еще не получили адекватного разрешения. Нам представляется, что излагаемые здесь соображения о многозначности понятия случайности и представление о частично детерминированных процессах позволяют по-новому осветить некоторые аспекты хаоса.

Парадокс «случайность — детерминированность странных аттракторов» приобрел известную остроту потому, что не все участники дискуссии разделяли точку зрения о случайности как о соглашении. Как все же выглядит хаос с точки зрения тех соглашений, которые были упомянуты в разделе 3?

Подавляющее большинство соглашений подчеркивает в хаосе черты случайности. В самом деле, странный аттрактор характеризуется стацио-

нарным распределением вероятностей (или, что то же самое — инвариантной мерой) и, следовательно, является случайным в теоретико-множественном смысле. Далее, хаос является случайным с точки зрения теории алгоритмической сложности и с точки зрения многих физических критериев: он имеет сплошной спектр и спадающие корреляции; ему можно приписать фрактальную размерность; для хаоса характерна экспоненциальная расходимость траекторий и т. д.

В то же время «математический» хаос, т. е. хаос, не подверженный действию шумов, описывается детерминированным уравнением, в котором нет ни случайных сил, ни случайных коэффициентов. Именно это обстоятельство и породило термин «детерминированный хаос».

Несмотря на то, что понятия «хаос» и «детерминированные уравнения» лежат в разных плоскостях, было высказано немало суждений с попытками примирить случайность и детерминированность. Наиболее известной является точка зрения Дж. Форда, который видел разрешение парадокса в теории алгоритмической сложности: если отобразить процесс последовательностью символов, как это делается в символической динамике, то такая последовательность будет алгоритмически сложной, и в этом смысле случайной, тем более что почти все начальные условия тоже алгоритмически сложны [27]. Неудовлетворительность подхода Дж. Форда заключается в том, что в нем абсолютно игнорируются шумы, присутствующие в любой реальной динамической системе.

Наконец, еще одну точку зрения представляет теория частичной детерминированности, базирующаяся на соглашении о случайности как о непредсказуемости. В рамках этого соглашения случайность и детерминированность с самого начала рассматриваются как полюса единого свойства — частичной детерминированности. Очевидно, этот подход распространяется и на динамический хаос, который, таким образом, выступает как частично-детерминированный процесс, т. е. как процесс, полностью детерминированный при $\tau \ll \tau_{\text{det}}$ и полностью случайный при $\tau \gg \tau_{\text{det}}$. Поскольку детерминированный хаос допускает предсказание только на ограниченных интервалах времени, $\tau \ll \tau_{\text{det}}$, справедливее было бы именовать его *частично детерминированным*.

Не представляет большого труда получить оценку времени τ_{det} для локально неустойчивых процессов, демонстрирующих хаотическое поведение [18–21].

Если $\lambda_1 > 0$ — наибольший из ляпуновских показателей, то для среднего квадрата ошибки σ_η^2 имеем оценку

$$\sigma_\eta^2 \sim (\sigma_v^2 + \sigma_f^2 + \sigma_{\Delta M}^2) e^{2\lambda_1 t}, \quad (5.6)$$

где величины σ_v^2 , σ_f^2 и $\sigma_{\Delta M}^2$ характеризуют вклад трех основных факторов, определяющих погрешность прогноза: измерительных шумов $v(t)$, флуктуационных процессов $f(t)$ и неточности ΔM модельного оператора M .

Учитывая, что степень детерминированности $D(\tau)$ выражается через σ_η^2 по формуле (4.7), из условия $D(\tau_{\text{det}}) = 1/2$ получаем оценку

$$\tau_{\text{det}} = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{\langle y^2 \rangle}{\sigma_v^2 + \sigma_f^2 + \sigma_{\Delta M}^2}. \quad (5.7)$$

Из этого выражения следует, что горизонт предсказуемости, достигаемый при точных измерениях ($\sigma_v^2 \ll \sigma_f^2$) и на базе удовлетворительной модели ($\sigma_{\Delta M}^2 \ll \sigma_f^2$), определяется лишь флуктуационными воздействиями:

$$\tau_{\text{lim}} \approx \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{\langle y^2 \rangle}{\sigma_f^2}. \quad (5.8)$$

Отсюда следует важный вывод, что случайность хаоса, трактуемая как непредсказуемость, в конечном счете обусловлена действием флуктуационных сил.

Заметим, что оценка (5.7) согласуется с информационным анализом, выполненным Р. Шоу [24] и Р. Шоу с соавторами [25]. Правда, в работах [24, 25] учтены только измерительные шумы, и то лишь в опосредствованной форме — как неопределенность измерений σ_v^2 . Вычисленное в [24, 25] время обновления информации в наших обозначениях записывается как

$$\tau_{\text{inf}} \sim \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{\langle y^2 \rangle}{\sigma_v^2}. \quad (5.9)$$

Весьма замедленный логарифмический рост горизонта предсказуемости (5.7) при уменьшении уровня шумов σ_v^2 указывает на то, что даже микроскопические флуктуации, обусловленные тепловыми шумами и квантовыми неопределенностями, могут нарасти до макроскопических величин за конечное время. Например, если $\langle y^2 \rangle^{1/2}$ — это измеряемое напряжение порядка одного вольта, а σ_v — среднеквадратичное значение флуктуации порядка 10^{-6} В, то

$$\tau_{\text{lim}} \approx \frac{1}{2\lambda_1} \ln 10^{12} \approx \frac{6 \ln 10}{\lambda_1} \approx \frac{14}{\lambda_1}. \quad (5.10)$$

Снижение уровня шумов на шесть порядков (что, разумеется, практически неосуществимо) увеличит горизонт предсказуемости всего лишь в два раза:

$$\tau_{\text{lim}} \approx \frac{28}{\lambda_1}.$$

Несмотря на то, что время предсказуемости хаоса относительно невелико, оно все же превышает время корреляции τ_c , которое грубо оценивается как $1/\lambda_1$. Так, для численных данных, использованных в (5.10), имеем $\tau_{\text{lim}} \sim 14 \tau_c$.

5.5. Комбинированное среднее. Квазислучайные процессы. Степень детерминированности (4.5) является локальной характеристикой сходства процессов $y(t)$ и $z(t)$, относящейся только к моменту времени t . Можно предложить другой вариант сравнения, при котором анализу подвергается поведение процессов на всем интервале наблюдения $(t^0, t = t^0 + \tau)$. С этой целью введем комбинированное среднее, которое сочетает статистическое усреднение, обозначаемое здесь угловыми скобками, с временным усреднением, т. е. интегрированием по времени на интервале наблюдения (t^0, t) . Последнее будем обозначать круглыми скобками, например,

$$(y(t)z(t)) = \frac{1}{\tau} \int_{t^0}^t y(t')z(t') dt'. \quad \tau = t - t^0. \quad (5.11)$$

Если комбинированное среднее обозначить фигурными скобками, то для среднего от произведения $y(t)z(t)$ получим

$$\{yz\} = \langle (yz) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{t^0}^t \langle y(t')z(t') \rangle dt'. \quad (5.12)$$

Степень детерминированности, отвечающая такому усреднению, вводится как

$$D_1(\tau) = \frac{\{y(t)z(t)\}}{\{y^2(t)\}\{z^2(t)\}^{1/2}} \quad (5.13)$$

и служит интегральной оценкой сходства, относящейся ко всему интервалу наблюдения (t^0, t) . В этом заключаются определенные преимущества $D_1(\tau)$ перед $D(\tau)$, поскольку временное усреднение способствует снижению вкла-

да измерительных шумов ν примерно в $(\Delta\omega_\nu\tau)^{1/2}$ раз, где $\Delta\omega_\nu$ — ширина шумового спектра в измерительной системе.

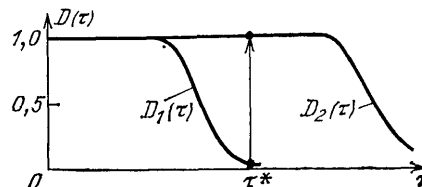
Из теории обработки сигналов известно, что если шумы распределены по гауссовому закону, то операция временного усреднения наблюдаемого сигнала $y(t)$ с весовой функцией $z(t)$ эквивалентна оптимальной фильтрации сигнала $z(t)$. Таким образом, величина $D_1(\tau)$ служит оптимальной (в указанном выше смысле) мерой детерминированности. По этим причинам можно ожидать, что соответствующее время детерминированного поведения $\tau_{1\text{det}}$ будет несколько больше, чем τ_{det} , хотя оценку указанного превышения дать пока трудно. Можно ожидать также, что мера детерминированности $D_1(\tau)$ будет более чувствительна к выбору модели, чем $D(\tau)$.

Располагая мерой детерминированности (5.13), можно дать лаконичное определение квазислучайных сигналов и процессов: это сигналы (процессы), которые удовлетворяют всем критериям случайности (имеют сплошной спектр и спадающую автокорреляционную функцию, допускают статистическое описание, алгоритмически сложны и т. д.), кроме одного единственного: степень детерминированности относительно модельного сигнала (процесса) $z(t)$, построенного по тому же алгоритму или же просто скопированного с $y(t)$, равна единице.

Квазислучайный сигнал может выдержать всевозможные испытания на случайность типа тех, которым подвергают генераторы случайных чисел в ЭВМ, но не выдерживает испытания на сходство со своей копией. Однако если копия или алгоритм нам неизвестны, то квазислучайный сигнал неотличим от случайного.

5.6. Переход случайность — детерминированность. Существуют ли «истинно случайные» процессы? В рамках теории частичной детерминированности «незнание», т. е. неточность модельного оператора M , при вычислении D выступает на тех же правах, что и различные флуктуационные факторы. Степень детерминированности D может возрасти как за счет включения одного из факторов

Рис 5. Переход «случайность — детерминированность» при уточнении модели



$f_h(t)$ в расширенную динамическую модель $z_1(t)$, так и за счет улучшения модели $z(t)$ при неизменных флуктуационных факторах. В этом отношении концепция частичной детерминированности лишь на больших временах ($\tau \gg \tau_{1\text{im}}$) согласуется с утверждением, что в рамках классической физики стохастичность целиком порождается динамикой, тогда как на временах, меньших $\tau_{1\text{im}}$, граница предсказуемость — непредсказуемость подвижна и зависит от способности (или возможностей) исследователя предлагать удачные гипотезы. В качестве следствия этого укажем, что случайность процесса $y(t)$ по отношению к одной модели $z_1(t)$ не противоречит тому, что тот же самый процесс $y(t)$ на том же удалении t от начала отсчета t^0 окажется детерминированным по отношению к другой, более удачной модели $z_2(t)$. Соответствующий «переход» процесса из случайного в детерминированный показан на рис. 5, где изображены степени детерминированности $D_1(\tau)$ и $D_2(\tau)$, отвечающие моделям $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Разумеется, такой переход возможен только при условии $\tau \lesssim \tau_{1\text{im}}$.

Поскольку любая система гипотез не может быть полной (это некоторая модификация утверждения Геделя), всегда существует возможность хотя бы

слегка отодвинуть границу «незнания» *). В связи с подвижностью границы «незнания» отметим, что исследователь, располагающий мощной ЭВМ, имеет определенные преимущества по переводу процессов из разряда случайных в детерминированные по сравнению с исследователем, лишенным ЭВМ, поскольку компьютер облегчает перебор различных моделей, отличающихся, скажем, значениями нескольких параметров.

В отличие от сложностного подхода, который в состоянии вынести суждения о случайности только после проведения всех мыслимых тестов на отсутствие закономерностей, концепция частичной детерминированности допускает проверку только некоторых гипотез, а именно тех, которыми располагает (или которые в состоянии проверить) экспериментатор. Это согласуется с практикой естественнонаучного эксперимента, который производит деление процессов на случайные (непредсказуемые) и детерминированные (предсказуемые) именно по схеме проверки наличных гипотез.

Теория частичной детерминированности не ограничена сложностью модели, как в алгоритмическом подходе: в тех случаях, когда прогноз жизненно необходим, можно пойти на использование даже очень сложных алгоритмов, доступных современным ЭВМ. В результате то, что представляется случайным, «незакономерным» для одного исследователя, не располагающего вычислительной техникой, может приобрести детерминированность для исследователя с мощным компьютером. На мой взгляд, роль ЭВМ в обсуждаемом здесь аспекте полностью еще не осознана.

Разумеется, на временах, превышающих предельное время детерминированности τ_{lim} , помощь даже самой мощной ЭВМ будет бесполезной: в этом случае любые детерминированные прогнозы равноправны в том смысле, что ни один из них не в состоянии дать сколько-нибудь уверенные предсказания, т. е. для всех прогнозов $D \sim 0$.

В связи с возможностью перехода «случайность \rightarrow детерминированность» обсудим еще вопрос об «истинно случайных» процессах. Очевидно, условности, касающиеся деления процессов на случайные и детерминированные, распространяются и на суждения относительно «истинной случайности»: вопрос об «истинной случайности» может обсуждаться только в рамках тех или иных соглашений, при этом желательно иметь количественные критерии истинности.

Это относится и к теоретико-множественному подходу, и к алгоритмической теории вероятности, и к обсуждаемой здесь теории частичной детерминированности. В рамках этой теории случайность наблюдаемого процесса выступает как относительное свойство, проявляющееся при сравнении с модельным процессом, при этом не указав класс предсказательных моделей, невозможно отличить детерминированное (предсказуемое) от случайного (непредсказуемого). Об «истинной», «настоящей» случайности здесь можно говорить лишь условно, имея в виду ход процесса за пределами горизонта предсказуемости τ_{lim} : при $\tau > \tau_{lim}$ наступает полная непредсказуемость поведения ($D \rightarrow 0$) на множестве всех мыслимых моделей.

Взгляд с позиций предсказуемости может оказаться весьма конструктивным при попытках определить понятие шума. Определение шума легче сформулировать, рассуждая «от противного»: если процесс допускает предсказание на основе какого-либо алгоритма, то его можно эффективно вычистить (скомпенсировать), и тогда он перестанет быть шумом, помехой. Следовательно, шум — это процесс, для которого мы не имеем предсказательной модели. В частности, динамический хаос становится шумом при $\tau > \tau_{det}$, тогда как при $\tau < \tau_{det}$ он хотя бы частично предсказуем и в этом смысле перестает быть шумом (разумеется, тоже частично).

*) Во время написания этой статьи важная мысль о связи между случайностью и неполнотой любой системы гипотез казалась мне новой. С некоторым сожалением (и в то же время — с удовлетворением) я узнал недавно, что такая мысль послужила уже основанием для весьма серьезного исследования [42].

5.7. Смежные вопросы. Представление о частичной детерминированности имеет отношение к очень широкому кругу общезначимых вопросов. Упомянем некоторые из них.

Во-первых, укажем, что приводимым в учебниках наивным соображением об априорной разделимости ошибок на случайные и систематические можно было бы придать большую убедительность, если связать систематические ошибки с несовершенствами модели, гипотезы, теории.

Во-вторых, отметим, что совершенствуя предсказательную модель $z(t)$, мы тем самым решаем обратную задачу динамики, при этом условие максимума степени детерминированности D (или же максимума в среднем предсказуемости τ_{det}) может служить одним из вариантов критерия согласия наблюдения $y(t)$ с гипотезой $z(t)$.

В-третьих, если под угловыми скобками $\langle yz \rangle$ понимать не среднее значение произведения yz , а число совпадений между значением y и z в пределах некоторого интервала квантования данных $\epsilon/2$, то величина D примет смысл эмпирической вероятности того, что разность $|y - z|$ не превысит $\epsilon/2$. Тем самым оказывается, что степени детерминированности можно придать вероятностную интерпретацию.

В-четвертых, упомянем связь степени детерминированности (точнее, скалярного произведения (y, z)) с характеристическим функционалом процесса y (этот функционал выражается как $\Phi_y(z, t, t^0) = \langle \exp [i(y, z)] \rangle$). Здесь важны два момента: модельные процессы $z(t)$ выступают в качестве пробных функций (это новая интерпретация пробных функций), и функционал Φ_y имеет особенное поведение на классе функций, хорошо аппроксимирующих наблюдаемый процесс $y(t)$.

6. Примеры.

6.1. Предсказуемость в случае растягивающего кусочно-линейного отображения. Для иллюстрации общих положений приведем результаты расчетов, которые демонстрируют исключительно важную роль шумов и не менее важную роль модели в вопросе о предсказуемости систем со сложным поведением. Ниже, на рис. 7—10, представлены результаты вычисления степени детерминированности D

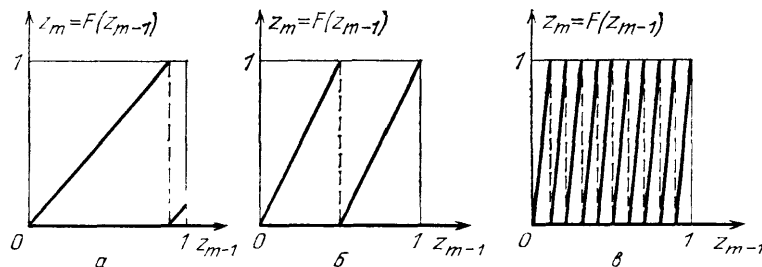


Рис. 6. Кусочно-линейное отображение (6.1) при $A = 2$ (а), $1,1$ (б) и $9,9$ (в)

и коэффициента корреляции K , полученные в работе [21] для системы, которая описывается одномерным кусочно-линейным отображением отрезка $(0,1)$ самого в себя (рис. 6):

$$\begin{aligned} x_n &= F(x_{n-1}) + f_{n-1}, \quad F(x) = \{Ax\} \\ y_n &= x_n \end{aligned} \quad (6.1)$$

где n — дискретное время, $\{Ax\}$ — дробная часть числа Ax , f_n — флуктуационное воздействие с равномерной плотностью вероятности в интервале $10^{-p} \leq f \leq 10^{-p}$, p — показатель, характеризующий силу флуктуации (в нашем примере $2 < p < 6$). В данном случае мы пренебрегли измеритель-

ным шумом v , положив $y_n = x_n$, а для модели z взяли уравнение

$$z_n = F(z_{n-1}). \quad (6.2)$$

Из рис. 7, а, отвечающего значению $A = 2$ (см. рис. 6, б), следует, что при значениях показателя p , лежащих в интервале между $p = 2$ и $p = 6$, т. е. при уровне шумов от 10^{-6} до 10^{-2} , степень детерминированности $D(\mu)$

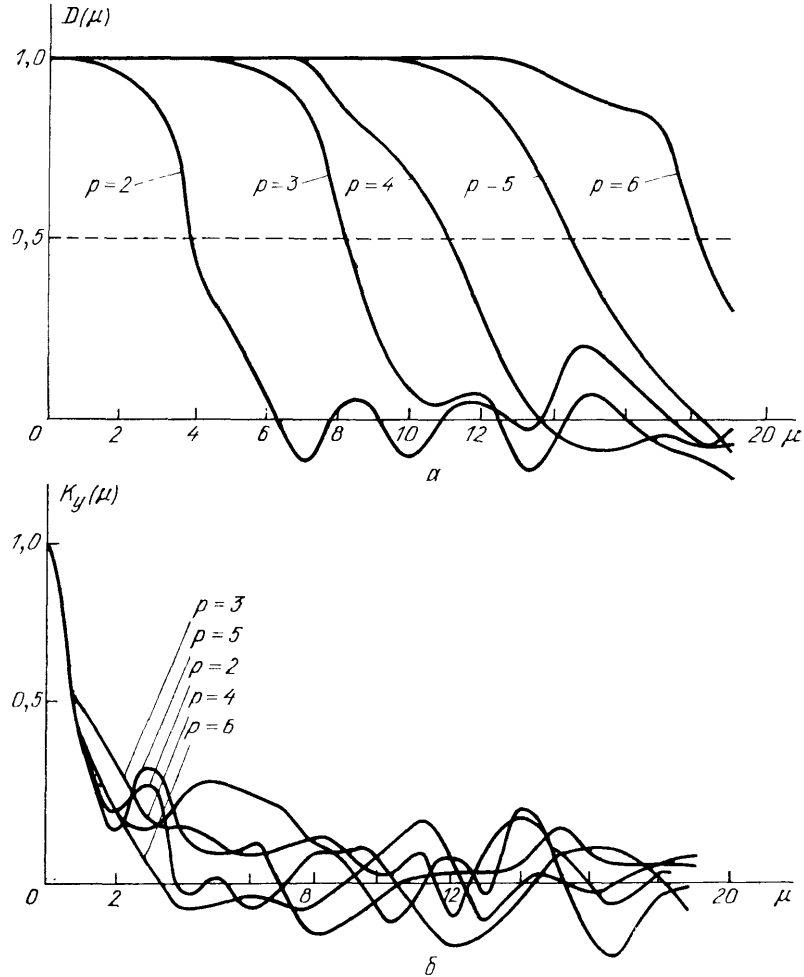


Рис. 7. Характер зависимости степени детерминированности (а) и степени когерентности (б) от дискретного времени μ для разных значений уровня шума ($p = 2-6$)

близка к единице на интервалах времени $\mu = n - n^0$ порядка 5—15 тактов, а затем довольно быстро спадает до нуля. Время детерминированного поведения μ_{det} оказывается сильно зависящим от уровня шумов и подчиняется логарифмическим соотношениям типа (5.11) с $\lambda_1 = 1/A$. Учитывая, что $\sigma_f = 10^{-p}/\sqrt{3}$, при $A = 2$ имеем

$$\mu_{\text{det}} \sim \ln \frac{1}{\sigma_f^2} \propto p,$$

что прекрасно согласуется с фактическими значениями μ_{det} , извлеченными из рис. 7, а [21]. В частности, при $p = 6$ получаем

$$\mu_{\text{det}} \approx 16.$$

Между тем, коэффициент корреляции K_y спадает до уровня $\sim 1/2$ практически уже на первом такте, при этом K_y обнаруживает очень слабую

чувствительность к уровню шумов (рис. 7, б). Этот результат свидетельствует о глубоком различии между временем корреляции и временем предсказания.

Если в модельном уравнении (6.2) коэффициент A подвергнуть малым вариациям ΔA , то время μ_{det} почувствует неточность модели при $\Delta A > \sigma_f$, поскольку в этом случае

$$\mu_{\text{det}} \sim \ln(\sigma_f^2 + \Delta A^2)^{-1}. \quad (6.3)$$

Изучая зависимость μ_{det} от гипотетического значения $\tilde{A} = A + \Delta A$ (рис. 8) или же, что практически более удобно, зависимость степени детерминированности D от A при фиксированном μ , можно решить две практически важные

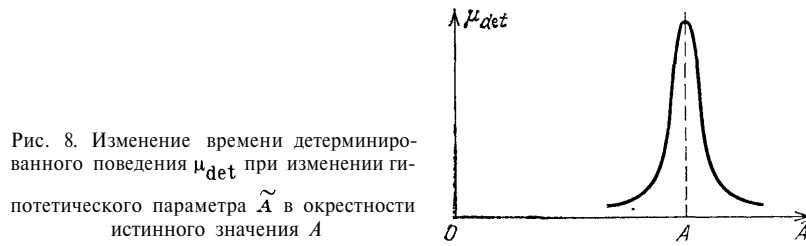


Рис. 8. Изменение времени детерминированного поведения μ_{det} при изменении гипотетического параметра \tilde{A} в окрестности истинного значения A

задачи: оценить параметр A в физической системе, скажем, по значению, обеспечивающему максимальное время предсказания μ_{det} , а во-вторых, определить уровень шумов в системе σ_f по ширине кривой на рис. 8. Обе задачи

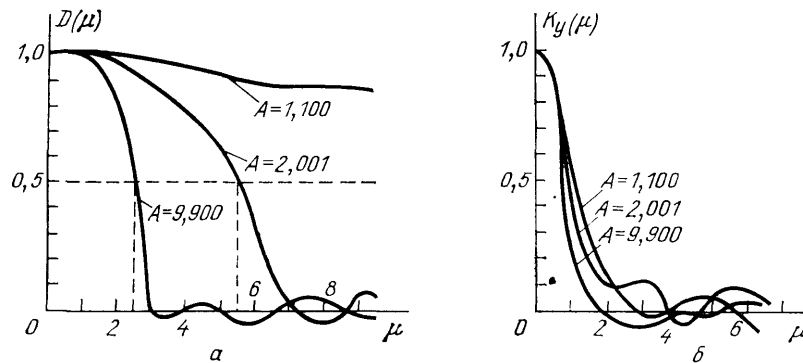


Рис. 9. Поведение степени детерминированности (а) и степени когерентности (б) при разных значениях параметра A и при умеренном уровне шума ($p = 2$)

такого рода постоянно находятся в центре внимания в радио и гидролокации, но в физических исследованиях систем со сложным поведением указанные приемы применяются реже.

Изменение параметра A в отображении (6.1) существенно влияет на качество предсказания. На рис. 9, а и 10, а показаны зависимости $D(\mu)$ для отображений с малой ($A = 1,1$), средней ($A = 2$) и большой ($A = 9,9$) крутизной при значениях $p = 2$ (рис. 9, а) и $p = 1$ (рис. 10, а). При $p = 1$ помехи составляют $\sim 10\%$ типичного значения $y \sim 1$, а при $p = 2$ — около 1% .

Эти рисунки показывают, как увеличивается время предсказуемости при уменьшении крутизны A отображения (6.1). Так, при $A = 9,9$ и $p \sim 1$ время μ_{det} составляет 1,4, а при $A = 1,1$ оно возрастает до 4,7 (рис. 10, а). Подобным же образом возрастает время μ_{det} и при $p = 2$ (рис. 9, а). Между тем, из рис. 9, б и 10, б следует, что при переходе от малого значения $A = 1,1$ к большему значению $A = 9,9$ и от меньшего уровня шума $\sigma_f \sim 10^{-2}$ к большему ($\sigma_f \sim 10^{-1}$) время корреляции практически не меняется и составляет примерно один такт.

Подобные же результаты получаются и для отображения, осуществляемого логистической кривой $F(x) = rx(1 - x)$. Здесь интересны явления, связанные с «преждевременным» наступлением хаоса из-за шума [28, 29].

6.2. Реальный генератор с туннельным диодом. В работе [30] был предложен генератор хаотических колебаний с туннельным диодом в колебательном контуре. Такой генератор производит цуги колебаний с нарастающей амплитудой, сменяющиеся каждый раз процессом затухания в отпирающемся диоде (рис. 11). Если описывать поведение генератора

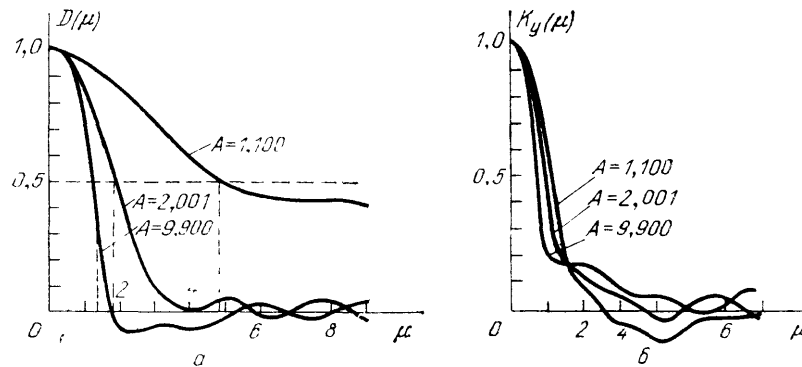


Рис. 10. То же, что на рис. 9, но для значительного уровня шума $p = 1$

отображением $y_n \rightarrow y_{n+1}$, где y_n — один из последовательных максимумов сигнала, то на плоскости (y_n, y_{n+1}) экспериментальные точки $y_{n+1} = F(y_n)$ образуют характерные конфигурации, близкие к теоретическим. В работе [31] была построена гладкая полиномиальная аппроксимация $\bar{F}(y)$, которая

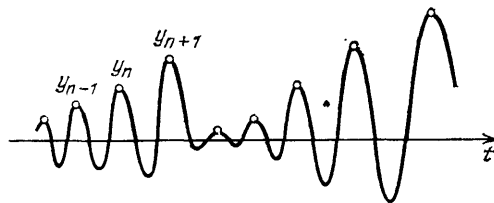


Рис. 11. Характер процесса $y(t)$ для генератора с туннельным диодом в колебательном контуре [30]

послужила затем теоретической моделью прогноза $z_{n+1} = \bar{F}(z_n)$. Коэффициенты полиномов определялись из экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

Вид экспериментальных отображений представлен на рис. 12: на рис. 12, а без внешнего шума, а на рис. 12, б — с дополнительным внешним шумом. По динамической модели и по экспериментальным данным была вычислена степень детерминированности $D(\mu)$, поведение которой представлено на рис. 13 кривой 1 (без внешнего шума) и кривой 2 (с дополнительным шумом). Как и ожидалось, введение дополнительного шума снизило время предсказуемости μ_{det} (примерно с 10 до 5 дискретных единиц).

Главная же ценность проделанного в [31] анализа состоит в том, что там была практически опробована методика решения обратной задачи теории нелинейных колебаний с использованием представления частичной детерминированности. Одним из первых обратные задачи такого типа в свое время рассматривал Л. И. Гудзенко [32, 33], исследуя закономерности появления солнечных пятен. Он тоже опирался на модельные представления, но анализировал не совместную статистику пары наблюдение — прогноз, а лишь статистику самих экспериментальных данных.

6.3. Прогноз малоразмерного хаоса на основе похожих событий в прошлом. Выше мы постоянно подчеркивали, что время предсказуемости τ_{det} может заметно превышать время корреляции τ_c . Это утверждение можно усилить, сказав, что τ_{det} может превышать и время предсказания на основе авторегрессионных моделей. Этот

тезис с успехом продемонстрировали Дж. Фармер и Дж. Сидорович [26], которые для ряда систем (логистическое отображение, уравнение Маки — Гласса с запаздывающим аргументом, течение Тейлора — Куэтта, конвекция Релея — Бьенара) сравнили авторегрессионный прогноз $z_{\text{ar}}(t)$ с прогнозом на основе похожих событий в прошлом.

Прогноз на основе похожих событий в прошлом основан на выявлении таких предшествующих моментов времени t^* , что значение $y(t)$ при $t = t^*$ совпадает со значением $y(t^0)$ в интересующий нас исходный момент времени, а поведение $y(t)$ при $t < t^*$ похоже на поведение наблюдаемую

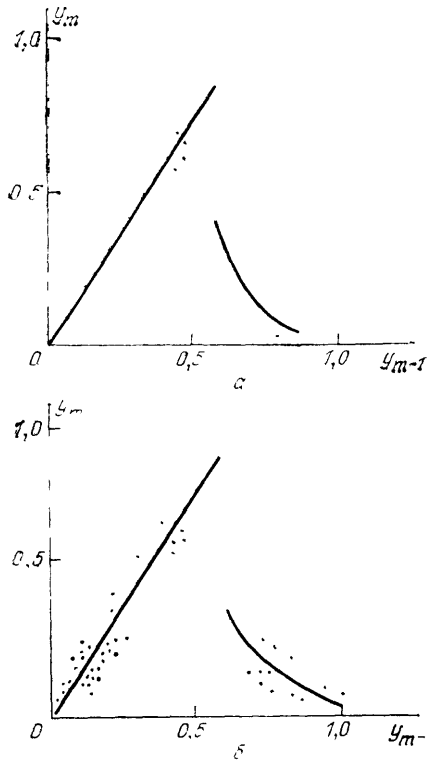


Рис 12. Экспериментальное (точки) и теоретическое (линии) отображение для генератора с туннельным диодом [31]. Дисперсия шума на рис. б примерно вдвое больше, чем на рис. а

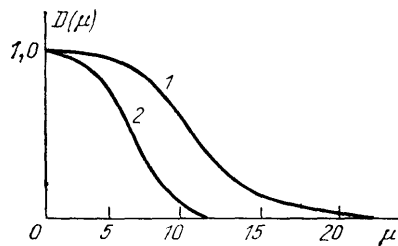


Рис 13. Поведение степени детерминированности для генератора с туннельным диодом без дополнительного шума (1) и с дополнительным шумом (2)

процесса при $t < t^0$. В качестве прогноза на время $t > t^0$ берется тогда значение наблюдаемого процесса $y(t)$ при $t > t^*$ в прошлом:

$$z(t^0 + \tau) = y(t^* + \tau). \quad (6.4)$$

При таком прогнозе сам ход процесса $y(t)$ в прошлом используется как своего рода аналоговая вычислительная машина. Такой же подход иногда используется для долгосрочного прогноза погоды. Наибольшие погрешности прогноза по прошлому поведению связаны с тем, что поведение процесса $y(t^0 - \tau)$ перед моментом наблюдения t^0 и процесса $y(t^* - \tau)$ перед опорным моментом t^* далеко не всегда идентичны в должной мере. Другим существенным источником погрешности служит неявно делаемое допущение о том, что в момент времени t^* система была «такой же», как в текущий момент t^0 . Как правило, это допущение с трудом поддается проверке и служит еще одним примером использования на веру прогностического принципа «как было, так и будет» [34].

Как было показано в [26], максимальное время предсказуемости может во много раз превышать характеристическое время t_{char} , оцениваемое как величина, обратная частоте ω_p , на которой находится максимум энергетического спектра. Для широкого спектра с полосой $\Delta\omega$, сравнимой с «пиковой»

частотой ω_p , характеристическое время t_{char} сравнимо со временем корреляции τ_c . В [26] было обнаружено, что типичное отношение $\gamma = \tau_{\text{det}}/t_{\text{char}}$ составляет 5–10, обнаруживая тенденцию увеличиваться (иногда до 100 и более) с уменьшением размерности аттрактора до $d = 2$, и напротив, тенденцию к падению (до значений $\gamma \sim 3$ и менее) при увеличении размерности до $d \sim 3$ –10. Еще один ценный результат работы [26] состоит в экспериментальном подтверждении экспоненциального роста ошибки E со временем τ .

6.4. Степень предсказуемости в примере М. Борна. В свое время М. Борн отметил [35], что долговременная непредсказуемость органически присуща не только квантовой, но и классической механике, хотя и имеет иную, не квантовую природу, связанную с неизбежными погрешностями измерений. Эта важная и, в общем, не новая мысль проиллюстрирована в [35] примером, который предельно ясно освещает проблему непредсказуемости даже в простых системах, в которых нет локальной неустойчивости. Речь идет о частице, которая движется со скоростью v между двумя параллельными стенками $y = 0$ и $y = a$, последовательно отражаясь от них. Если Δv — погрешность определения скорости, то через время $\tau_a \sim a/\Delta v$ неопределенность координаты $\Delta y \sim \Delta v \cdot t$ сравнится с расстоянием между стенками a , так что при $t \gg \tau_a \sim a/\Delta v$ плотность вероятности координаты частицы станет равномерной: $w(y) = \text{const} = 1/a$.

С точки зрения модельных представлений время $\tau_a \sim a/\Delta v$ следует рассматривать как горизонт предсказуемости для координаты y частицы. Для расчета степени детерминированности в этом случае следовало бы рассмотреть движение исследуемой частицы $y(t)$ наряду с движением модельной частицы, скорость которой v_m выступает как параметр модели и может отличаться от v не более, чем на Δv . Не приводя соответствующие выкладки и опуская очевидный график функции $D(\tau)$, отметим, что при всей своей простоте пример М. Борна служит наглядной моделью многих задач радиофизики и оптики. Вот примеры задач такого рода: на каких интервалах времени неопределенность фазы $\varphi = \omega t$ становится сравнимой (после вычитания целого числа 2π) с 2π ; на каких расстояниях теряется возможность указать разность фаз между двумя модами в многомодовом волноводе и т. п.

6.5. Предсказуемость квазисинусоидального сигнала с флуктуирующей фазой. К неожиданным результатам приводит задача о предсказании квазисинусоидального сигнала с флуктуирующей фазой. Пренебрегая измерительными шумами и амплитудными флуктуациями, запишем сигнал, генерируемый автоколебательной системой томсоновского типа в виде $y(t) = \cos[\omega_0(t - t^0) + \varphi(t)]$, где $\varphi(t)$ — случайная фаза с дисперсией, характеризуемой коэффициентом диффузии D_φ : $\langle(\varphi(t) - \varphi(t^0))^2\rangle = D_\varphi \tau$. Если в качестве прогноза для $y(t)$ берется строго синусоидальный сигнал $z(t) = \cos[(\omega_0 + \Omega)(t - t^0) + \varphi(t^0)]$ со слегка отличающейся частотой, но с той же начальной фазой $\varphi(t^0)$, а критерием сравнения служит комбинированное среднее (5.12), то для степени детерминированности получим

$$D(\tau) = \frac{D_\varphi (1 - e^{-D_\varphi \tau} \cos \Omega \tau) + \Omega e^{-D_\varphi \tau} \sin \Omega \tau}{(D_\varphi^2 + \Omega^2) \tau}. \quad (6.5)$$

Это выражение служит хорошей иллюстрацией соотношения между флуктуационными факторами (в данном случае это коэффициент диффузии фазы D_φ) и модельным параметром Ω . Время предсказуемости оценивается из (6.5) как

$$\tau_{\text{det}} \sim \min \left(\frac{1}{\Omega}, \frac{1}{D_\varphi} \right) \sim \frac{1}{(D_\varphi^2 + \Omega^2)^{1/2}}. \quad (6.6)$$

Желая увеличить это время, можно уменьшить Ω , т. е. уточнить реперную частоту. Очевидно, при $\Omega \ll D_\phi$ дальнейшее увеличение τ_{det} становится невозможным, так что величина $\tau_{\text{det}} \sim 1/D_\phi$ играет здесь роль горизонта предсказуемости. Это время совпадает со временем корреляции $\tau_c \sim 1/D_\phi$ комплексной огибающей Y , так как в данном случае $K_Y(\tau) = \exp(-D_\phi \tau)$. Особенность данной задачи состоит в том, что в общем случае ($\Omega \gtrsim D_\phi$) время предсказуемости не превышает время корреляции ($\tau_{\text{det}} \leq \tau_c$). Происходит это потому, что в томсоновском генераторе корреляции спадают исключительно из-за шумов, а не из-за сложной формы колебаний, как в динамическом хаосе. Улучшением модели здесь не удастся отодвинуть горизонт предсказуемости, поскольку случайные флуктуации фазы, обусловленные тепловыми и дробовыми шумами, не допускают детерминистического моделирования. Это один из фактов, наводящих на размышления: даже «самый хаотичный» хаос оставляет надежду получить предсказание на временах, превышающих время корреляции, а обычный томсоновский генератор едва позволяет добраться до τ_c . В этом (и только в этом!) смысле предсказуемость синусоидальных колебаний хуже, чем хаотических (разумеется, по абсолютной величине достижимое время предсказуемости хаоса существенно меньше, чем у генераторов синусоидальных колебаний).

7. Частично детерминированные поля.

7.1. Степень детерминированности скалярных и векторных полей. Представление о частично детерминированных процессах естественным образом обобщается на поля, в том числе на волновые поля [22, 23]. В этом случае наблюдаемое поле $Y(\mathbf{r}, t)$, зависящее от трех пространственных координат и от времени t , следует сопоставить с модельным полем $Z(\mathbf{r}, t)$ в некоторой пространственно-временной области.

В дополнение к факторам неопределенности, уже указанным выше для частично детерминированных процессов (флуктуационные воздействия на реальный процесс x ; измерительные шумы, отличающие наблюдение y от x ; неточность идеализированного модельного уравнения для z), в случае полей необходимо учитывать еще и погрешности, связанные с тем, что наблюдательные данные Y поступают из конечного числа точек $\mathbf{r}_k, k = 1, 2, \dots, K$. В результате этого начальные данные для промежуточных точек приходится вычислять при помощи той или иной интерполяционной процедуры, которая, естественно, дополнительно снижает качество предсказуемости. Для скалярного поля $Y(\mathbf{r}, t)$ степень детерминированности относительно модельного поля $Z(\mathbf{r}, t)$ целесообразно ввести при помощи соотношения

$$D_Q(\tau) = \frac{\{Y(\mathbf{r}, t) Z(\mathbf{r}, t)\}}{(\{Y^2(\mathbf{r}, t)\} \{Z^2(\mathbf{r}, t)\})^{1/2}}, \quad (7.1)$$

где фигурные скобки означают одновременное пространственно-временное и статистическое усреднение [22]. Если $Y(\mathbf{r}, t)$ и $Z(\mathbf{r}, t)$ — векторные поля, то в (7.1) произведение $Y(\mathbf{r}, t) Z(\mathbf{r}, t)$ следует понимать как скалярное произведение. Если же мы имеем дело с комплексными полями, то модельное поле Z следует подвергнуть комплексному сопряжению, как в выражениях для комплексной функции когерентности.

Очевидно, соображения об ограниченности времени детерминированного поведения распространяются теперь на пространственные области: объемные, поверхностные или линейные. Представления о частично детерминированных полях могут быть полезными для многих задач гидродинамики, акустики, оптики, физики плазмы и т. д. Рассмотрим некоторые примеры.

7.2. Пространственная предсказуемость спекл-неоднородных полей. Спекл-неоднородные поля образуются в результате наложения многих волн и характеризуются высокой степенью

неоднородности интерференционной картины. Масштаб изменения (радиус корреляции) такой картины l_c связан с шириной углового спектра $\Delta\theta$ соотношением $l_c \sim \lambda'/\Delta\theta$. Сам термин «спекл-поля» («зернистые» поля) имеет оптическое происхождение, хотя со сложными интерференционными полями такого же типа приходится встречаться в радиофизике и в акустике, например, в многомодовых океанических волноводах.

Оказывается, что случайный (в смысле спадающих корреляций) характер спекл-полей не препятствует их предсказуемости на расстояния, превышающие радиус корреляции l_c . Такое предсказание может быть осуществлено в два этапа [23]: сначала по спекл-картине, измеренной на конечной

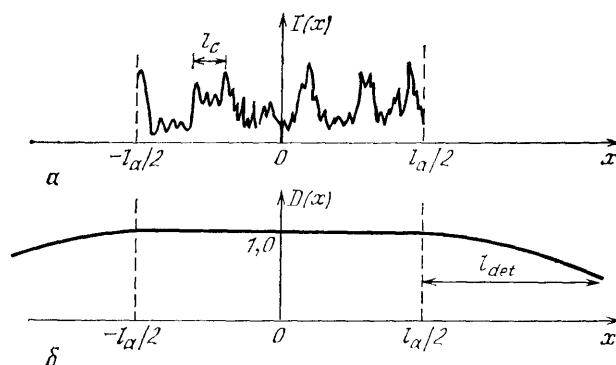


Рис. 14. Характер флуктуации амплитуды спекл-неоднородного поля на апертуре $(-l_a/2 < x < l_a/2)$ (а) и зависимость степени детерминированности $D(x)$ (б)

апертуре $-l_a/2 < x < l_a/2$ (для простоты рассуждений — одномерной), определяются источники поля, а затем по найденным источникам восстанавливается поле $Z(\mathbf{r})$, которое и служит прогнозом вне апертуры. Сама возможность восстановления (экстраполяции) поля вне апертуры $|x| > l_a/2$ основана на том, что мы располагаем динамическими уравнениями (волновое уравнение или уравнения Максвелла) и измеренными значениями поля на апертуре.

Разумеется, размеры апертуры l_a ограничивают возможности разрешения источников, и поэтому длина предсказуемости (детерминированности) l_{det} обычно не превышает длину апертуры l_a , но в то же время заведомо больше радиуса корреляции l_c . Обе эти особенности отражены на рис. 14, где показаны интенсивность исходного спекл-неоднородного поля $I(x)$ и степень детерминированности $D(x)$, характеризующая качество восстановления поля вне апертуры.

Эти построения порождают соблазн использовать восстановленное поле для увеличения разрешающей способности апертуры. Однако такая возможность в действительности нереализуема, поскольку восстановленное поле не содержит в себе никакой дополнительной информации кроме той, которая имеется на исходной апертуре.

7.3. Частичная предсказуемость турбулентных потоков. Область совместимости динамического и кинетического описаний. После сказанного выше мысль о принципиальной возможности предсказывать поведение турбулентного потока уже не покажется странной. Разумеется, для предсказания необходимо получить необходимые начальные и граничные данные о потоке при помощи системы датчиков, а само предсказание распространяется только на ограниченные пространственные и временные интервалы, превышающие, однако, пространственные и временные радиусы корреляции турбулентного поля.

Для тех, кто привык к стохастическим моделям турбулентных потоков, такое предсказание может показаться неприемлемым по причинам чисто психологического происхождения: разве можно предсказывать то, для чего придуманы кинетические уравнения, уравнения слабой или сильной турбулентности и т. д.? Между тем, детерминированное (или точнее, частично детерминированное) описание турбулентных полей на основе уравнений гидродинамического типа с соответствующими начальными и граничными данными вовсе не противоречит кинетическому описанию, поскольку у них имеется пространственно-временная область совместимости [36].

Во временном разрезе областью совместимости служит интервал от времени корреляции τ_c до времени предсказуемости τ_{det} :

$$\tau_c \leq \tau \leq \tau_{det}. \quad (7.2)$$

В этом интервале корреляции между значениями наблюдаемого поля уже деградировали (расцепились) настолько, что стало применимо кинетическое описание, но детерминированное описание еще не потеряло силу, поскольку корреляции между прогнозом и наблюдением еще не распались. Совместимость двух описаний не должна вызывать удивление потому, что мы имеем здесь дело с двумя разными способами описания одного и того же явления: если детерминированное описание имеет своей целью предсказывать мгновенные и локальные значения полей, что удастся в пределах области детерминированности, то кинетический подход с самого начала ориентирован на получение средних характеристик.

7.4. Выявление неоднородностей в волноводе по интерференционной картине. Как известно, в многомодовых волноводах поле имеет сложную случайно-подобную интерференционную структуру. Можно ли по такой интерференционной структуре судить о наличии в волноводе случайных неоднородностей?

Многочисленные расчеты, выполненные преимущественно для звуковых волн в океанических волноводах, показывают, что пространственные корреляционные функции поля практически нечувствительны к неоднородностям среды. В противоположность этому степень детерминированности, зависящая от детального совпадения наблюдаемого и модельного (рассчитанного) полей, чрезвычайно чувствительна к наличию неоднородностей [37]. Следует отметить некоторую несимметрию выводов при $D \neq 1$ и $D < 1$. Если равенство $D = 1$ безусловно свидетельствует об отсутствии неоднородностей, то при $D < 1$ несовпадение интерференционных картин $Y(\zeta)$ и $Z(\zeta)$ (ζ — координата, поперечная к оси волновода) может свидетельствовать и о наличии неоднородностей, и о наличии каких-то иных неучтенных в модели факторов (скажем, неровностей стенок).

7.5. Предсказание погоды. Цена прогноза. С прогнозами погоды мы сталкиваемся, пожалуй, чаще, чем с любыми другими динамическими предсказаниями. Для вопросов, обсуждаемых в данной статье, прогноз погоды важен тем, что он отражает все наиболее характерные черты физического прогноза.

7.5.1. Существование горизонта предсказуемости. Метеорология раньше других естественных наук обнаружила, что долгосрочные предсказания имеют предел, обусловленный локальной неустойчивостью динамических процессов в атмосфере. Именно в метеорологии были открыты странные аттракторы (Э. Н. Лоренц, 1963) [38], углубленный анализ которых подвел нас к пониманию существования принципиальных пределов предсказуемости.

7.5.2. Преимущества динамического прогноза по сравнению со статистическим. На примере предсказания погоды отчетливо выявились принципиальные преимущества динамического прогноза перед статистическими методами, основанными на прямолинейном корреляционном принципе типа

$y(t^0 + \tau) \approx y(t^0)$ («завтра будет как сегодня») или на более изощренных оценках авторегрессионного типа, упомянутых в разд. 6.4. Очевидно, линейные связи типа $\langle y(t) y(t - \tau) \rangle$ слабо отражают глубинные гидродинамические процессы, адекватное описание которых вряд ли возможно на какой-либо другой основе, чем динамическое описание с надлежащим обеспечением «входной» информацией. В недавних публикациях лидеров современной метеорологии Е. Н. Лоренца [39], Дж. Мэзона и Р. С. Триса [40] возможности динамического предсказания для Европы и Северной Америки характеризуются 7–10 сутками уверенного прогноза *), тогда как прогноз по принципу «завтра как сегодня» едва ли простирается на 2–3 суток. Двух-трехдневный интервал связан с тем, что для масштабов порядка нескольких сот километров время удвоения возмущений в типичных условиях земной атмосферы как раз составляет 2–3 суток.

7.5.3. Чем фактически ограничена точность прогноза? Каждый из трех мешающих факторов — флуктуационные воздействия, измерительные шумы и дефекты модели — могут дать ощутимый вклад в ограничение точности прогноза. Однако относительная роль отдельных факторов с течением времени меняется, что характерно и для других исследуемых физических явлений.

Представляется, что в настоящее время самые значительные погрешности связаны с неточностью входных данных: сеть метеостанций недостаточно густа, а системы сбора информации и ввода ее в ЭВМ еще недостаточно эффективны. Можно думать, что по мере увеличения числа наземных станций, особенно в районах, расположенных вне Европы и Северной Америки, расширения сети морских станций на судах в океане и совершенствования съемок из космоса качество прогнозов будет улучшаться, и на первый план выйдут погрешности, связанные с дефектами динамической модели. Некоторые существенные промахи в прогнозах («сбои») уже сейчас можно связать с тем, что не учтены или неправильно учтены отдельные факторы в динамических уравнениях, чаще всего — это влагообмен. Расширяя измерительную сеть и одновременно совершенствуя модель, метеорологи продвигаются в сторону учета все более малых масштабов вихревых движений в атмосфере, постепенно переводя их из разряда флуктуации (с точки зрения нынешнего уровня описания) в разряд учитываемых степеней свободы.

По мере освоения все более мелких масштабов точность прогнозов будет возрастать. Будет ли, однако, достигнут «физический» горизонт предсказуемости, при котором возмущения, вносимые датчиками, станут заметно влиять на прогноз? Очевидно, не будет, поскольку гораздо раньше скажутся ограничения экономического и технического характера.

7.5.4. Соотношение между точностью и стоимостью прогноза. Ясно, что расширение сети наблюдательных станций, получение данных с высотных мачт, аэростатов, создание телеметрических сетей, в том числе с использованием спутников — все это повышает точность предсказания и в то же время удорожает прогноз. Допуская степенную модель роста стоимости прогноза, можно записать символическое уравнение неопределенности типа:

$$VE^\alpha \sim \text{const}, \quad \alpha > 1, \quad (7.3)$$

где V — стоимость прогноза, а E — относительный средний квадрат погрешности. По мнению специалистов, учитывающих эти ограничения, срок прогноза, достижимый в нашем столетии с качеством, достаточным для обеспечения полетов гражданских самолетов, вряд ли достигнет 15 дней. Во всяком случае, предсказуемость на 30 дней считается неосуществимой. Правда, в отдельных случаях срок 15–20 дней достижим и сегодня, но такие случаи

*) Предсказуемой величиной обычно считается давление на высоте 500 м над уровнем суши, при этом прогноз считается оправдавшимся, если отклонение давления от предсказываемого значения не превышает 50 мбар. Другие условия указаны в [40] и цитированной там литературе.

следует рассматривать как исключения: они относятся к периодам особенно устойчивой погоды летом и зимой. Увеличение долгосрочности достигается и тогда, когда предсказываются не точные значения давления и температуры, а только *характер* погоды, т. е. указывается более или менее широкий «коридор» параметров.

Заканчивая этот раздел, отметим, что соотношения неопределенности «стоимость — точность» типа (7.3) проявляются практически в любом физическом эксперименте: желая уменьшить погрешность измерения, мы неизбежно сталкиваемся с необходимостью увеличить затраты.

8. Природа случайности.

8.1. Иерархия моделей, уровней описания и степеней детерминированности. В словосочетании «природа случайности» вряд ли можно истолковать случайность иначе как непредсказуемость, так что вопрос о природе случайности сводится, в сущности, к вопросу о том, насколько глубоко (далеко) характеризуют наши предсказательные модели поведение процессов в природе.

Прежде всего, следует договориться об уровне рассмотрения проблемы. Это важно, поскольку одно и то же явление может демонстрировать вполне детерминированное поведение в рамках, скажем, гидродинамического описания и быть полностью недетерминированным — на молекулярном уровне. Очевидно, детерминированное описание макросистем на молекулярном уровне недостижимо из-за нашей фактической неспособности задать начальное состояние и регистрировать изменение состояния системы молекул во времени и пространстве. Еще меньше возможностей осуществлять детерминистическое описание на квантово-механическом уровне. Заманчиво было бы ввести по аналогии с (7.1) степень детерминированности для волновой функции $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ системы N частиц. Однако это понятие трудно было бы наделить физическим содержанием, так как практически невозможно ни приготовить начальное (квантовое) состояние ψ^0 , ни проконтролировать дальнейшее поведение ψ -функции (возможности, связанные со скрытыми параметрами, обсуждать преждевременно). Поэтому о детерминистической предсказуемости можно говорить лишь начиная с определенного уровня, а именно — с уровня эффектов, регистрируемых макроскопическими приборами. Такие эффекты допускают либо классическое описание, либо квантово-механическое вероятностное описание. Далее, мы можем придерживаться разных уровней описания, даже находясь в рамках классической физики: это зависит от числа учитываемых степеней свободы, от числа известных участников взаимодействия, от диапазона принимаемых во внимание пространственных и временных масштабов. Таким образом, возникает своего рода *иерархия моделей*, отличающихся степенью подробности изучаемых явлений. Соответственно этому возникает и иерархия степеней детерминированности: $D_1 > D_2 > D_3 \dots$, причем предсказуемость тем лучше ($D_j > D_{j+1}$), чем более крупными деталями оперирует модель. Так, в рассмотренной выше задаче о прогнозе погоды предсказуемость для самых малых учитываемых масштабов (десятки километров) всегда хуже, чем для масштабов порядка 1000 км.

С точки зрения указанной иерархичности предсказательных моделей природу случайности следует искать в тех факторах, которые вносят наибольшие погрешности в прогноз, претендующий на *предельно достижимую детальность описания*. В конкретных случаях эти факторы могут принадлежать любому из трех основных классов погрешностей прогноза: флуктуационным силам, измерительным шумам, неточностям модели. Это значит, что при рассмотрении вопроса о природе случайностей гипотеза о неточности, неполноте модели может рассматриваться на равных правах с предположениями о воздействии флуктуационных сил и измерительных помех. Иными

словами, незнание выступает как вполне объективная составляющая природы случайности.

8.2. Фундаментальные и практические пределы предсказуемости. Представляется очевидным (мы исходили из этого, вводя количественно горизонт предсказуемости в разделе 5.2), что по мере уточнения модели и снижения измерительных погрешностей самой главной и притом неустранимой причиной долговременной непредсказуемости становятся флуктуационные силы. В конечном счете — это неустранимые полностью ни при каких обстоятельствах тепловые и квантово-механические флуктуации, а также различные внешние поля (электромагнитные, гравитационные, нейтринные и пр.), от воздействия которых нельзя полностью защитить исследуемую систему. Если встать на позиции классического описания, то эти флуктуации следует рассматривать как постоянный источник возмущений для классических траекторий: они как бы «встряхивают» фазовое пространство. Если классическая система локально неустойчива (а это справедливо для большинства более или менее сложных систем), то она становится гигантским усилителем тепловых, квантовых и прочих флуктуаций, т. е. по существу — генератором случайности. Сочетание указанных двух факторов — наличие неустранимых микрофлуктуаций с одной стороны, и локальной неустойчивости макросистем с другой, видимо, следует считать фундаментальной причиной случайности в нашем мире. Разумеется, если решение вопроса о природе случайности вернуть в практическую плоскость, то для большинства систем пределы предсказуемости практически будут достигнуты еще на макроскопическом уровне. Кроме реальных помех и реальных «шумов незнания», существенную роль здесь могут сыграть еще и возмущения, вносимые в исследуемый объект измерительными приборами. Для локально неустойчивых систем принципиальная роль этого ограничения еще ждет своих исследователей. Так ли уж бесследно проходит подключение датчика к электрической цепи или внесение анемометра в поток жидкости? Ведь измерительные приборы могут гораздо сильнее воздействовать на ход исследуемых локально неустойчивых процессов, чем взмах крыльев бабочки за тридевять земель от нас (важные соображения см. в [43]).

9. Ars conjectandi. Изложенные здесь соображения представляют собой попытку формализовать весьма непростые «отношения» между наблюдением и прогностической моделью в рамках концепции частичной детерминированности, которая отождествляет непредсказуемость со случайностью. Эта концепция наглядна, интуитивно приемлема и *de facto* широко распространена в естествознании при интерпретации эксперимента. Количественные критерии, которые выдвигает теория частичной детерминированности, легко реализуемы практически, скажем, при помощи корреляторов и в той или иной форме уже давно используются в физике и смежных областях науки.

Существенная зависимость точности прогноза от качества гипотетической модели явления хорошо отвечает той версии теории вероятности, которую Я. Бернулли назвал «Ars conjectandi» — «Искусство предположений» [41].

По своим возможностям динамический прогноз превосходит стохастический прогноз *), поскольку последний с самого начала ориентируется на описание осредненных и огрубленных характеристик (функции распределения вероятности, статистические моменты). Однако динамический прогноз в колоссальной степени зависит от удачной модели. Именно здесь и вступает в игру Искусство предположений.

*) По иронии судьбы нынешний смысл слова «стохастический» существенно противостоит первоначальному, по-гречески *στοχασμός* — угадываемый.

Можно не сомневаться, что представление о частичной детерминированности будет полезным и при решении многих других важных проблем, не упомянутых выше, таких как проблемы зрения, ассоциативной памяти, распознавания образов, направленности эволюции, самоорганизации сложных систем, искусственного интеллекта.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. Л. Гинзбургу и участникам руководимого им семинара за внимание к проблеме предсказуемости, В. И. Татарскому и В. С. Эткину за многочисленные полезные обсуждения затронутых здесь вопросов, Л. Ш. Ильковой за помощь в проведении расчетов и А. С. Чиркину за ценные критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ланда П. С., Неймарк Ю. И. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.
2. Шустер Х. Г. Детерминированный хаос. — М.: Наука, 1988.
3. Заславский Г. М., Чириков Б. В. //УФН. 1971. Т. 105. С. 3.
См. также: Chirikov B. V. //Phys. Rep. 1979. V. 56. P. 263.
Zaslavskiy G. M. //Phys. Rev. 1981. V. 80. P. 157.
4. Рабинович М. И. //УФН. 1978. Т. 125. С. 123.
5. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. //УФН. 1979. Т. 128. С. 579.
6. Монин А. С. //УФН. 1978. Т. 125. С. 97; 1986. Т. 150. С. 61.
7. Лихтенберг А., Либерман Н. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
8. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
9. а) Thomson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear Dynamics and Chaos. — Chichester, N.Y.: J. Wiley and Sons, 1986.
б) Holden A. B. Chaos. — Princeton: Univ. Press, 1986.
10. Moon F. C. Chaotic Vibrations. — Chichester, N.Y.: J. Wiley and Sons, 1987.
- [11] Lighthill J. //Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1986. V. 407. P. 35.
12. Колмогоров А. Н. //Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1. С. 1; то же: //Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1983. — С. 267.
13. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
14. Тутубалин В. Н. Теория вероятности. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.
15. Колмогоров А. Н. //Пробл. передачи информации. 1969. Т. 5. С. 3; то же: //Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987. — С. 232.
16. Шень А. Х. //Семiotика и информатика. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1982. — Вып. 18. С. 14.
17. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. //Физика XX века: Результаты и перспективы. — М.: Наука, 1984. — С. 320.
18. Кравцов Ю. А., Эткин В. С. //Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1981. Т. 24. С. 992.
19. Kravtsov Yu. A., Etkin V. S. //Nonlinear and Turbulent Processes in Physics/Ed. by R. Z. Sagdeev. — New York: Harwood Acad. Publ., 1984. — V. 3. P. 1411.
20. Кравцов Ю. А., Эткин В. С. //Радиотехн. и электрон. 1984. Т. 29. С. 2358.
- [21] Илькова Л. Ш., Кравцов Ю. А., Мергелян О. С., Эткин В. С. //Изв. вузов СССР. «Радиофизика». 1985. Т. 28. С. 1035.
22. Кравцов Ю. А., Петников В. Г. //ДАН СССР. 1985. Т. 285. С. 871.
23. Kravtsov Yu. A., Petnikov V. G. //J. Opt. Soc. Am. Ser. A. 1987. V. 4. P. 11.
24. Shaw R. //Zs. Naturforschung. 1981. Bd 36a. S. 80.
25. Crutchfield J. P., Packard N. H. //Intern. J. Theor. Phys. 1982. V. 21. P. 433.
26. Farmer J. D., Sidorovich J. //Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 845.
27. Ford J. //Phys. Today. 1983. V. 36, No. 4. P. 40.
28. Shraiman B., Wayne C. E., Martin P. C. //Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46. P. 935.
29. Crutchfield J. P., Farmer J. D., Huberman B. A. //Phys. Rep. 1982. V. 92. P. 45.
30. Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович А. С. //Радиотехн. и электрон. 1980. Т. 25. С. 336.
- [31] Илькова Л. Ш., Кравцов Ю. А., Пиковский А. С. //Кр. сообщ. физ., ФИАН СССР. 1986. № И. С. 7.
32. Гудзенко Л. И. //Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1962. Т. 5. С. 572.
33. Гудзенко Л. И., Чертопруд В. Е. //Ibidem. 1967. Т. 10. С. 353, 363.
34. Алимов Ю. И. Альтернатива методу математической статистики. — М.: Знание, 1980.

- 35. Б о р н М. Непрерывность, детерминизм, реальность. — М.: Наука, 1977.
- 36. К р а в ц о в Yu. A.//1987 Intern. Conference on Plasma Physics. Kiev, April 6—12, 1987: Proc. of Contributed Papers. — Kiev, 1987. — V. 2. P. 161.
- 37. К р а в ц о в Ю. А., Н и я з о в Б. А., П е т н и к о в В. Г.//Акуст. ж., 1986. Т. 32. С. 823.
- 38. L o r e n z E. N.//J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130.
- 39. L o r e n z E. N.//Global Atm. Research Program Spec. Rep. 1985. V. III, No. 43, P. 1.
- 40. M a s o n J., T r e a s R. S.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1986. V. 407. P. 51.
- [41] Б е р н у л л и Я. О законе больших чисел. — М.: Наука, 1986. — Ч. 4.
- 42. D e L o n g H. Randomness and Gödel's Incompleteness Theorem. — Reading, MA: Addison-Wesley, 1987.
- 43. Ч и р и к о в Б. В. Природа статистических законов классической механики: Препринт ИЯФ СО АН СССР 78-66.—Новосибирск, 1978; Dynamical Mechanisms of Nois: Inst. of Nucl. Phys., Siberian Branch of Acad. Sci. of the USSR Preprint 87-123.— Novosibirsk, 1987.