

536,767

**ПРОБЛЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ:
КРИТЕРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТЕПЕНИ УПОРЯДОЧЕННОСТИ
СОСТОЯНИЙ В ПРОЦЕССАХ САМООРГАНИЗАЦИИ**

Ю. Л. Климонтович

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	59
2. Хаос и порядок в открытых системах. Управляющие параметры	60
2.1. Управляющие параметры. 2.2. Физический хаос. 2.3. Эволюция и само- организация.	
3. Н-теорема Больцмана и теорема Гиббса	62
3.1. Н-теорема Больцмана. 3.2. Теорема Гиббса.	
4. Н-теорема в теории броуновского движения	63
5. Н-теорема. Броуновское движение в генераторе Ван-дер-Поля	64
6. Эволюция в пространстве управляющих параметров. S-теорема	65
7. Сравнение относительной степени упорядоченности состояний открытых систем на основе S-теоремы по экспериментальным данным	67
8. Динамическое и статистическое описание открытых систем	68
К-энтропия. Показатели Ляпунова.	
9. Конструктивная роль динамической неустойчивости движения в статистиче- ской теории неравновесных процессов	69
10. Временные и фазовые средние и ансамбль Гиббса для неравновесных процес- сов. Локальные условия эргодичности	71
10.1. Динамические и статистические распределения. 10.2. Ансамбль Гиббса в теории неравновесных процессов. Временные и фазовые средние.	
11. Процессы самоорганизации в генераторе Ван-дер-Поля	73
12. Более сложные генераторы	74
12.1. Генератор с инерционной нелинейностью. 12.2. Генератор Ван-дер- Поля с мягким и жестким возбуждением. 12.3. Генератор Ван-дер-Поля при внешнем резонансном воздействии.	
13. Бифуркации энергии предельного цикла и периода колебаний в обобщенных генераторах Ван-дер-Поля	76
14. Статистические распределения для обобщенных генераторов	79
15. Среда из связанных генераторов	79
16. К-энтропия и энтропия Шеннона при динамически неустойчивых движениях	82
17. К-энтропия и производство энтропии	83
18. Эволюция энтропии при переходе от ламинарного течения к турбулентному	84
19. Производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях	86
20. Принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации	86
21. Заключение	87
21.1. Энтропия — мера разнообразия в процессах биологической эволюции.	
21.2. О некоторых проблемах статистической теории открытых систем.	
Список литературы	89

Если мы закроем дверь перед заблуждением,
то как же тогда войдет Истина.

Рабиндранат Тагор

1. Введение. Цель работы — краткое изложение ряда принципиальных вопросов статистической теории *открытых систем*. Среди разнообразных процессов в таких системах особое место занимают процессы *самоорганизации* [1—4]. С целью подчеркнуть особую роль коллективных, кооперативных

эффектов в процессах самоорганизации Г. Хакен ввел термин *синергетика* для нового объединяющего направления в науке [3, 4]. Основная задача синергетики — выявление общих идей, методов и закономерностей в процессах самоорганизации в различных областях естествознания и социологии.

Возникновение теории самоорганизации — синергетики было подготовлено трудами многих ученых. Среди них Л. Больцман и А. Пуанкаре — основоположники соответственно статистического и динамического описания сложных движений; А. М. Ляпунов — один из создателей теории устойчивости движения, лежащей в основе теории самоорганизации; А. Н. Колмогоров, определивший, в частности, понятие метрической энтропии, которое играет существенную роль в теории динамических систем; Л. И. Мандельштам, А. А. Андронов, Н. С. Крылов, Л. Д. Ландау, Я. Б. Зельдович и многие, многие другие. Особо следует отметить роль Владимира Ивановича Вернадского.

Хотя теории самоорганизации в настоящее время посвящена уже большая литература, в ней нет однозначного ответа на вопрос: что такое самоорганизация? В этом, однако, и нет необходимости. Необходимо другое — установление критериев относительной степени упорядоченности, организованности различных неравновесных состояний открытых систем. Без использования таких критериев невозможно ответить на самые основные вопросы, в частности, зафиксировать само наличие процесса самоорганизации.

К числу основных относится и задача выявления взаимосвязи динамического и статистического описания сложных движений в открытых системах. Поскольку более полный перечень рассматриваемых в работе вопросов приведен в оглавлении, то перейдем сразу к последовательному изложению материала. Начнем с введения необходимых для дальнейшего понятий.

2. Хаос и порядок в открытых системах. Управляющие параметры.

Понятие «хаос» играло весьма существенную роль уже в мировоззрении философов древности, в частности, представителей школы Платона. В физике понятия «хаос», «хаотическое движение», «порядок» являются фундаментальными, но, тем не менее, недостаточно четко определенными.

Действительно, начиная с классических работ Максвелла, Больцмана, Гиббса хаотическим называют движение атомов в состоянии статистического равновесия. Хаотическим, однако, называют и движения в состояниях, далеких от равновесия, например, в генераторах шума, в турбулентных потоках и т. д. Широкое распространение получил термин «динамический хаос». Он характеризует сложные движения в маломерных («простых») нелинейных диссипативных динамических системах. Классическим примером такой системы служат уравнения Лоренца в теории тепловой конвекции [5]. История открытия Лоренца хорошо описана в книге [6].

Таким образом, одним и тем же термином «хаос» характеризуют самые разные виды сложных движений. Это и указывает на необходимость введения критериев относительной степени хаотичности или упорядоченности. К числу таких критериев относятся: К-энтропия (энтропия Крылова — Колмогорова — Синяя), показатели Ляпунова, различным образом определенные размерности фазового пространства рассматриваемого сложного движения. Теории динамического хаоса посвящена уже значительная литература [7—29].

В настоящей работе значительное внимание уделяется критериям, основанным на сопоставлении перенормированных к заданному значению *средней эффективной энергии* значений энтропии Больцмана — Гиббса — Шеннона, а также на сопоставлении значений производства энтропии устойчивых и неустойчивых состояний открытых систем. Обзор этих результатов дается впервые. Проводится также сравнительный анализ различных критериев, упорядоченности.

2.1. Управляющие параметры. Выбор управляющих параметров в процессах самоорганизации производится, как правило, либо на основе уже имеющейся информации о системе, либо на основе дополнительных исследований, например, бифуркационных диаграмм. При этом возможны, естественно, и ошибки, поэтому критерий сравнительной степени упорядоченности должен давать и возможность контроля правильности выбора. В качестве управляющих могут выступать самые разнообразные характеристики. Приведен несколько примеров.

В классических и квантовых генераторах это обратная связь или накачка, внешние силы. В мультистабильных системах выбор того или иного стационарного состояния может осуществляться путем изменения начальных условий. Управляющим параметром может служить и «медленное» время, например время наблюдения за состоянием здоровья пациента. В гидродинамике в зависимости от вида течения роль управляющих параметров играют числа Рейнольдса, Релея, Тейлора. При наличии нескольких управляющих параметров возможен поиск наиболее эффективного пути самоорганизации.

2.2. Физический хаос. Обозначим через $a = (a_1, \dots, a_n)$ набор параметров, принятых за управляющие. Выделим два состояния при значениях $a = a_0$, $a = a_0 - \Delta a$. По предположению процессу самоорганизации отвечают изменения $\Delta a \geq 0$. При этом условии для процесса самоорганизации

$$a = a_0 + \Delta a, \quad \Delta a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Состояние при $a = a_0$ назовем *состоянием физического хаоса*. Будем принимать его за «начало отсчета» при сравнении степени упорядоченности. Слово «физический» введено с целью подчеркнуть физический характер рассматриваемых критериев. Подчеркнем, что состояние физического хаоса может быть существенно неравновесным.

2.3. Эволюция и самоорганизация. Понятие эволюции является очень общим. В физике рассматривается, например, эволюция к равновесному состоянию, а в открытых системах — эволюция к стационарным состояниям. Эволюцию можно рассматривать как образование последовательности новых структур. В биологии согласно Дарвину образование новых структур происходит путем естественного отбора.

Каково же соотношение понятий «эволюция» и «самоорганизация»? Говоря о процессах самоорганизации, мы будем иметь в виду процессы, при которых (по приведенным выше критериям) возникают более сложные и более совершенные структуры. При таком подходе возникает вопрос: Является ли любой эволюционный процесс процессом самоорганизации? Ответ, естественно, отрицательный, поскольку ни в физических, ни даже в биологических системах не заложено «внутреннее стремление» к самоорганизации. Действительно, эволюция может вести и к деградации. В физике примером служит переход к равновесному состоянию, которое по Больцману и Гиббсу является наиболее хаотическим. Деградация структур возможна, естественно, и в биологии, например, при неблагоприятных мутациях. Таким образом, самоорганизация — лишь один из возможных путей эволюции.

О современном состоянии биологической эволюции можно судить по обзорам и книгам [30—32]. Ниже мы вернемся к вопросу биологической эволюции в связи с обсуждением возможности использования энтропии для характеристики степени разнообразия, необходимого для естественного отбора в процессах эволюции. Прежде рассмотрим критерии эволюции и самоорганизации в физических системах.

3. Н-теорема Больцмана и теорема Гиббса.

3.1. Н-теорема Больцмана. В названии «Н-теорема» буква Н происходит от английского слова Heat — тепло. Этим подчеркивается, что речь идет об эволюции энтропии в процессе установления *теплового равновесия*. Она была сформулирована и доказана Больцманом на примере разреженного (идеального в термодинамическом смысле) газа.

Доказательство Н-теоремы основано на свойстве интеграла столкновений Больцмана $I_B : \int \varphi(p) I_B dp \geq \varphi$ при $\varphi = -k \ln f$ и при условии, что частицы газа не выходят за пределы объема системы. Результат обычно представляется в виде

$$\frac{dS}{dt} \geq 0, \quad (3.1)$$

где энтропия

$$S(t) = -k \int \ln f \cdot f dr dp.$$

Знак равенства относится к равновесному состоянию, когда f_0 — распределение Максвелла.

Для дальнейшего необходима, однако, несколько иная формулировка Н-теоремы. Она следует из (3.1), но с учетом и других свойств интеграла столкновений: $\int \varphi(p) I_B dp = 0$ при $\varphi = 1, p, p^2/2m$, и сводится к утверждению, что существует функционал Ляпунова $\Lambda_s = S_0 - S(t)$ со свойствами

$$\Lambda_s \equiv S_0 - S(t) = k \int \ln \frac{f}{f_0} \cdot f dr dp \geq 0, \quad \frac{d(S_0 - S)}{dt} \leq 0, \quad (3.2)$$

$$\langle H \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \text{const.}$$

Отсюда следует, что равновесное состояние устойчиво и отвечает максимуму энтропии S_0 . В (3.2) специально отмечено, что в процессе эволюции к равновесному состоянию среднее значение энергии разреженного газа остается неизменным. Здесь это не дополнительное условие, а естественное свойство уравнения Больцмана. Однако именно по этой причине функционалом Ляпунова является энтропия, а не какая-либо другая характеристика системы.

3.2. Теорема Гиббса. Рассмотрим теперь произвольную систему с функцией Гамильтона $H(X)$. Равновесное состояние характеризуется каноническим распределением Гиббса

$$f_0(X) = \exp \frac{F_0 - H(X)}{kT}, \quad \int f_0 dX = 1. \quad (3.3)$$

Пусть $f(X, t)$ — произвольное распределение с той же нормировкой, но с одним ограничением: среднее значение функции Гамильтона для распределений f_0, f одинаково, т. е.

$$\int H f_0(X) dX = \int H f(X, t) dX. \quad (3.4)$$

Через S_0, S обозначим энтропии, отвечающие распределениям f_0, f . Тогда согласно теореме Гиббса (см. гл. 11 в [33], гл. 4 в [34])

$$S_0 - S = k \int \ln \frac{f}{f_0} \cdot f dX \geq 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, при условии постоянства средней энергии энтропия в состоянии равновесия максимальна. Здесь нет ограничений на взаимодействие частиц системы. В этом отношении результат Гиббса является более общим,

чем Н-теорема. Здесь, однако, не рассматривается вопрос о временной эволюции функции $S_0 - S(t)$ при релаксации к равновесному состоянию.

4. Н-теорема в теории броуновского движения. Рассмотрим простейший случай, когда броуновские частицы распределены в пространстве однородно. Тогда функция распределения скоростей при линейном трении удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v} (\gamma v f), \quad (4.1)$$

$$D = \gamma \frac{kT}{m}, \quad \int f dv = 1.$$

Равновесное решение — распределение Максвелла — запишем в форме (3.3)

$$f_0 = \exp \frac{F_0 - H}{kT}, \quad H = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.2)$$

Для системы в термостате можно определить свободную энергию и для неравновесного состояния [34, 35]

$$F(t) = U(t) - TS(t), \quad U(t) = \langle H \rangle, \quad S(t) = -k \int \ln f \cdot f dv. \quad (4.3)$$

Разность свободных энергий $F(t) - F_0$ является функционалом Ляпунова. При этом выполняются неравенства (гл. II в [34])

$$\Lambda_F \equiv F(t) - F_0 = kT \int \ln \frac{f}{f_0} \cdot f dv \geq 0, \quad \frac{d(F - F_0)}{dt} \leq 0. \quad (4.4)$$

В теории процессов Маркова [36, 37] функционал Ляпунова Λ_F называют «энтропия Кульбака».

Мы пришли, таким образом, к результату, аналогичному Н-теореме Больцмана, с тем, однако, существенным отличием, что при броуновском движении роль функции Ляпунова играет свободная энергия неравновесного состояния. Но свободная энергия в отличие от энтропии не может быть определена для произвольного неравновесного состояния и не обладает полным набором свойств, необходимых для использования в качестве меры неопределенности при статистическом описании.

Роль функционала Ляпунова при броуновском движении может играть и энтропия. Для этого, однако, необходима перенормировка решения уравнения (3.1) к заданному значению средней энергии $\langle E \rangle = \langle mv^2/2 \rangle$ (ср. с условиями (3.2), (3.4)). Если через $\tilde{S}(t)$ обозначить энтропию, определяемую перенормированным распределением, то функционал Ляпунова $\tilde{\Lambda}_S = S_0 - \tilde{S}(t)$ удовлетворяет неравенствам (3.2). Для уравнения (1) результаты можно представить в явном виде

$$S_0 - \tilde{S}(t) = \frac{3}{2} k \ln \frac{T(t)}{T_0} \geq 0, \quad \frac{d(S_0 - \tilde{S})}{dt} = -3k\gamma \frac{T(t) - T_0}{T(t)} e^{-2\gamma t} \leq 0. \quad (4.5)$$

Соотношение начальной T_0 , текущей $T(t)$ и «конечной» (термостата) T температур следует из дополнительного условия $\langle E \rangle = \langle mv^2/2 \rangle$ и имеет вид

$$\frac{m \langle v \rangle^2}{2} + \frac{3}{2} kT(t) = \frac{3}{2} kT, \quad T_0 \leq T(t) \leq T. \quad (4.6)$$

В теории броуновского движения проведенная перенормировка возможна лишь в ограниченной области начальных скоростей, поэтому рассмотренный пример является, конечно, иллюстративным. Он, однако, полезен, так как показывает принципиальную возможность использования энтропийного функционала Ляпунова $\tilde{\Lambda}_S$ и для системы в термостате. При формулировке критериев относительной степени упорядоченности — критериев самоорга-

низации — мы увидим, что такая возможность является конструктивной. Рассмотрим прежде более сложный пример броуновского движения в открытой системе.

5. Н-теорема. Броуновское движение в генераторе Ван-дер-Поля. Используем уравнение Фоккера — Планка для функции распределения энергии колебаний в генераторе Ван дер Поля (§ 6 гл. 12 в [34]):

$$\frac{\partial f(E, t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial E} \left(E \frac{\partial f}{\partial E} \right) + \frac{\partial}{\partial E} [(-a + bE) Ef]; \quad (5.1)$$

здесь D — заданная интенсивность шума, $a = a_n - \gamma$, где a_n — параметр обратной связи (накачки). γb — коэффициенты линейного и нелинейного трения. Стационарное решение уравнения (5.1) имеет вид

$$f_0 = \exp \frac{F_0 - H(E)}{D}, \quad (5.2)$$

$$H(E) = -aE + \frac{1}{2} bE^2, \quad \int_0^\infty f dE = 1;$$

здесь введено обозначение $H(E)$ для эффективной функции Гамильтона. F_0 — соответствующая свободная энергия. Для неравновесных состояний

$$F(t) = \langle H \rangle - DS, \quad (5.3)$$

$$S(t) = - \int \ln f(E, t) \cdot f(E, t) dE.$$

Функционал Ляпунова и здесь определяется разностью свободных энергий (гл. 12 в [34]; см. также [35]):

$$\Lambda_F = F(t) - F_0 = D \int \ln \frac{f(E, t)}{f_0} \cdot f(E, t) dE \geq 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{d |F(t) - F_0|}{dt} \leq 0.$$

Покажем, что Н-теорему можно сформулировать и для энтропии. Снова произведем перенормировку, но теперь при заданном значении функции $H(E)$:

$$\int H(E) \tilde{f}(E, t) dE = \int H(E) f_0(E) dE. \quad (5.5)$$

Из этого уравнения находим перенормированную интенсивность шума $\tilde{D} \{ \tilde{f} \}$. Она функционально зависит от распределения $\tilde{f}$, которое удовлетворяет нелинейному уравнению Фоккера — Планка с коэффициентом диффузии $\tilde{D} \{ \tilde{f} \}$ [38]. Функционал Ляпунова $\tilde{\Lambda}_S$ определяется разностью энтропии $\tilde{S}(t)$. S_0 и удовлетворяет неравенствам

$$\tilde{\Lambda}_S = S_0 - \tilde{S}(t) = \int_0^\infty \ln \frac{\tilde{f}(E, t)}{f_0} \cdot \tilde{f}(E, t) dE \geq 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{d (S_0 - \tilde{S})}{dt} \leq 0, \quad \langle H(E) \rangle = \text{const.}$$

Таким образом, в процессе эволюции к стационарному состоянию с распределением $f_0(E)$ перенормированная энтропия $\tilde{S}(t)$ возрастает и остается неизменной при достижении стационарного состояния.

Отметим еще раз, что использование в качестве функции Ляпунова энтропии дает определенные преимущества. Во-первых, энтропия может быть выражена через функцию распределения для произвольного неравновесного состояния, для которого может быть определена функция распределения.

Во-вторых, свободная энергия не обладает в отличие от энтропии совокупностью свойств, благодаря которым ее можно было бы принять за меру неопределенности, хаотичности.

Рост энтропии (или уменьшение свободной энергии) в открытых системах при эволюции к стационарному состоянию оказывается возможным из-за того, что заданные параметры a , b , D достаточны для определения лишь стационарного состояния, и, следовательно, остается свобода в выборе начального распределения $f(E, t = 0)$.

6. Эволюция в пространстве управляющих параметров. S-теорема. Приступим теперь к одной из основных проблем статистической теории открытых систем — установлению критериев относительной степени упорядоченности неравновесных состояний в пространстве управляющих параметров. Итак, выбираем параметры, принимаемые за управляющие (см. раздел 2). Напомним, что в число таких параметров может быть включено и «медленное» время, которое характеризует, например, процесс выздоровления. Для генератора Ван-дер-Поля в качестве управляющего параметра естественно выбрать параметр обратной связи (накачки) a_n .

Будем считать изменения управляющих параметров столь медленными, что успевают устанавливаться стационарные состояния в каждом промежуточном состоянии, которое характеризуется, например, для генератора распределением $f_0(E, a)$ (см. (5.2)). При этих условиях и можно говорить об эволюции стационарных состояний в пространстве управляющих параметров.

Как и в разделе 2, выделим два состояния с $a = a_0$, $a = a_0 + \Delta a$. Первое из них принимаем за состояние «физического хаоса». $f_0(X, a_0)$ — соответствующая функция распределения. Представим ее в виде канонического распределения (если это невозможно, то будем действовать по схеме, излагаемой в разделе 7):

$$f_0(X, a_0) = \exp \frac{F_0 - H(X, a_0)}{D}, \quad \int f_0 dX = 1, \quad (6.1)$$

где $H(X, a_0)$ — эффективная функция Гамильтона (ср. с (5.2)). Наряду с f_0 введем и функцию распределения $f(X, a_0 + \Delta a)$ при значении $a = a_0 + \Delta a$

$$f = f(X, a_0 + \Delta a), \quad \int f dX = 1, \quad \Delta a \geq 0. \quad (6.2)$$

Проведем сравнение энтропии S_0 , S для состояний a_0 , $a_0 + \Delta a$ при дополнительном условии постоянства $\langle H(X, a_0) \rangle$:

$$\int H(X, a_0) \tilde{f}_0 dX = \int H(X, a_0) f(X, a_0 + \Delta a) dX. \quad (6.3)$$

Перенормированное распределение представим в виде

$$\tilde{f}(X, a_0, \Delta a) = \exp \frac{\tilde{F}_0 - H(X, a_0)}{\tilde{D}(\Delta a)}, \quad \int \tilde{f}_0 dX = 1. \quad (6.4)$$

Зависимость $\tilde{F}_0(\tilde{D})$ следует из условия нормировки функции $\tilde{f}_0$. Перенормированное значение $\tilde{D}$ находим из уравнения (4):

$$\tilde{D} = \tilde{D}(\Delta a), \quad \tilde{D}(\Delta a)|_{\Delta a=0} = D; \quad (6.5)$$

$\tilde{S}_0$ — энтропия перенормированного состояния. Тогда имеет место неравенство

$$\tilde{S}_0 - S = \int \ln \frac{f}{\tilde{f}_0} \cdot f dX \geq 0 \quad \text{при} \quad \langle H(X, a_0) \rangle = \text{const}. \quad (6.6)$$

Вывод о характере изменения степени упорядоченности при переходе $a_0 \rightarrow a_0 + \Delta a$ зависит от вида решения уравнения (3). Если

$$\tilde{D}(\Delta a) > D, \quad (6.7)$$

т. е. для выполнения равенства (6.3) систему с $a = a_0$ надо «подогреть», то переход $a_0 \rightarrow a_0 + \Delta a$ есть переход от менее упорядоченного состояния в более упорядоченное. При этом разность энтропии (6.6) служит количественной мерой увеличения степени упорядоченности.

Если неравенство (6.7) не имеет места, т.е. $\tilde{D}(\Delta a) < D$, то изменение $\Delta a > 0$ не является управляющим. Тогда можно продолжить поиск новых управляющих параметров.

Для подтверждения сделанного вывода о большей упорядоченности состояния с $a = a_0 + \Delta a$ при выполнении неравенства (6.7) полезна проверка. Именно, можно принять за состояние физического хаоса состояние с $a_0 + \Delta a$ и провести решение соответствующего уравнения (6.3). Если при этом окажется, что $\tilde{D}(\Delta a) < D$, то сделанный вывод о большей упорядоченности состояния с $a = a_0$ подтверждается. Если же и при такой инверсии снова $\tilde{D}(\Delta a) > D$, то увеличение степени упорядоченности идет в сторону большего из двух значений $\tilde{D}(\Delta a) - D$ для прямого и обратного переходов.

Определенная информация о характере эволюции близких неравновесных состояний, когда $\Delta a \ll a_0$, a , может быть получена на основе анализа функции Ляпунова. Для этого наряду с выражением (6) надо найти производную функции Λ_s по Δa . Если имеет место неравенство

$$\frac{d\Lambda_s}{d\Delta a} \geq 0 \quad (6.8)$$

и, следовательно, знаки неравенств (6), (8) совпадают, то изменение Δa является управляющим.

Рассмотрим теперь простейший иллюстративный пример применения S-теоремы. Именно, сравним по этому критерию степень упорядоченности распределений Максвелла (здесь $m = 1$, $k = 1$):

$$f_0 = \frac{1}{(2\pi T_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2T_0}\right), \quad f_1 = \frac{1}{(2\pi T_1)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(v-u)^2}{2T_1}\right]. \quad (6.9)$$

Состояние «0» принимаем за хаотическое. В состоянии «1» средняя скорость отлична от нуля. Произведем перенормировку $f_0 \rightarrow \tilde{f}_0$. Новую температуру $\tilde{T} \equiv \tilde{D}$ находим из уравнения (3). В результате конкретизируется условие «нагрева», выражаемое неравенством (7)

$$\tilde{T} = T_1 + u^2 > T_0. \quad (6.10)$$

Разность энтропии $\tilde{S}_0$, S определяем по формуле (6). Это дает

$$\tilde{S}_0 - S = \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{T}}{T_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{T_1 + u^2}{T_1} \geq 0. \quad (6.11)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $u = 0$ и, следовательно, разность энтропии в (11) равна нулю. Это означает, что по критерию S-теоремы при $u = 0$ степень упорядоченности — структурной сложности распределений f_0 , f_1 , определяемой симметрией, одинакова.

Состояния «0», «1», разумеется, все же различны. Это различие может быть выявлено по другим критериям, например, по значениям энтропии (информации) Шеннона (см. ниже, (11.5)), а также по значениям функции Ляпунова (4.4) — энтропии Кульбака.

Из (10), (11) следует, что при $u \neq 0$ более упорядоченным является состояние «1». Такой вывод при условии $T_1 > T_0$, когда распределение f_1

является более «широким», может показаться парадоксальным. Однако, в соответствии с S-теоремой, да и со здравым смыслом, большая упорядоченность состояния «1» при $u^2 > 0$ обусловлена следующим.

При $u \neq 0$ нарушается симметрия распределений f_0 , f_1 , и распределение f_1 становится структурно более богатым. Такое изменение даже при малых значениях u^2 является качественным, поскольку открывает возможность движения «вперед» для системы как целого. Такая возможность сохраняется при любом соотношении температур T_0 , T_1 .

Ниже будут рассмотрены более содержательные примеры. Здесь же отметим лишь, что первые расчеты относительной степени упорядоченности неравновесных состояний по значениям перенормированной энтропии были проведены в работах [39, 40]. Сформулированное в этих работах утверждение и было названо «S-теорема». Буква S в этом названии от слова Self-organization. Этим подчеркивается, что речь идет о критерии самоорганизации. Обзор первых работ дан в книге [41]. Общее доказательство приведено в [42]. Это направление получило развитие в [53, 57, 74].

7. Сравнение относительной степени упорядоченности состояний открытых систем на основе S-теоремы по экспериментальным данным. Для практического использования рассмотренного критерия необходима информация о структуре эффективной функции Гамильтона. Она может быть получена с помощью математической модели рассматриваемой системы. Во многих случаях, однако, построение математической модели открытых систем сопряжено со значительными трудностями. В связи с этим возникает задача оценки относительной степени упорядоченности непосредственно по экспериментальным данным. Это можно сделать следующим образом [43].

Обозначим через a характерный для рассматриваемой системы внутренний параметр. Получим две реализации интересующего нас процесса $X(t, a_0)$, $X(t, a_0 + \Delta a)$ при двух значениях управляющего параметра $a = a_0$, $a = a_0 + \Delta a$. По достаточно длинным реализациям находим нормированные на единицу распределения

$$f_0 = f_0(X, a_0), \quad f = f(X, a_0 + \Delta a). \quad (7.1)$$

Полагаем, что изменение Δa является управляющим. Принимаем состояние с $a = a_0$ за физический хаос и по распределению f_0 вводим эффективную функцию Гамильтона

$$H_{\text{eff}}(X, a_0) = -\ln f_0(X, a_0). \quad (7.2)$$

Такое название будет оправдано тем, что перенормированное к заданному значению $\langle H_{\text{eff}} \rangle$ распределение $\tilde{f}_0$ будет иметь вид канонического распределения Гиббса с «функцией Гамильтона» H_{eff} .

Из определения (2) следует, что для нахождения функции H_{eff} не нужна дополнительная информация, кроме знания реализации, по которой и устанавливается вид распределения f_0 .

Перенормированную функцию представляем в виде

$$\tilde{f}_0(X, a_0, \Delta a) = \exp \frac{F - H_{\text{eff}}(X, a_0)}{D(\Delta a)}, \quad \int \tilde{f}_0 dX = 1. \quad (7.3)$$

Зависимость «свободной энергии» F от эффективной температуры D определяется условием нормировки функции $\tilde{f}_0$, а зависимость D от Δa — решением уравнения (ср. с уравнением (6.3))

$$\int H_{\text{eff}}(X, a_0) \tilde{f}_0(X, a_0, \Delta a) dX = \int H_{\text{eff}}(X, a_0) f(X, a_0 + \Delta a) dX. \quad (7.4)$$

В результате находим функцию $D(\Delta a)$ такую, что

$$D(\Delta a)|_{\Delta a=0} = 1. \quad (7.5)$$

Как и выше, по распределениям $\tilde{f}_0, f$ находим разность энтропии

$$\tilde{S}_0 - S = \int \ln \frac{f}{\tilde{f}_0} \cdot f dX \geq 0 \quad \text{при} \quad \langle H_{\text{eff}} \rangle = \text{const.} \quad (7.6)$$

Если решение (5) уравнения (4) таково, что

$$D(\Delta a) > 1, \quad (7.7)$$

то состояние с $a = a_0 + \Delta a$ более упорядоченное, чем принятое за физический хаос. Разность энтропии (6) служит количественной мерой увеличения степени упорядоченности. Для подтверждения правильности сделанного вывода полезна проверка по схеме, указанной в конце предыдущего раздела.

Вернемся к примеру, рассмотренному в конце раздела 6. Допустим, что распределения (1), полученные по экспериментальным данным, имеют вид (6.9). Используем процедуру обработки, изложенную в настоящем разделе. Для функции $D(\Delta a)$ получим выражение $D = (T_1 + u^2)/T_0$, и, следовательно, неравенство (7) совпадает с (6.10). Остается прежним и выражение (6.11). Остаются в силе и все сделанные выводы.

Ниже будет проведено сравнение рассмотренного критерия с другими критериями относительной степени упорядоченности. Прежде, однако, необходимо рассмотреть некоторые общие вопросы статистической теории открытых систем.

8. Динамическое и статистическое описание открытых систем. Выделим два класса систем: динамические и статистические (стохастические). Такое разделение не является общепринятым. Действительно, например, известная работа Я. Г. Синая [6] носит название: «Стохастичность динамических систем». В книге [22] широко используется термин «хаотические движения детерминированных динамических систем» и т.д.

Разделение на два указанных класса проведем на основе численного эксперимента. В основу классификации положим свойство *воспроизводимости движения* по заданным начальным данным. Тогда по определению к *динамическим* относятся *воспроизводимые по начальным данным* движения в диссипативных системах, а к *стохастическим (статистическим)* — *невоспроизводимые по начальным данным* движения в диссипативных системах.

Естественно, что в реальных системах, когда шумы неизбежны, все процессы в той или иной мере являются статистическими. При численном же эксперименте с динамическими диссипативными системами возможно точное повторение (в рамках заданной разрядности) начальных условий. При этом воспроизводимость решения зависит от структуры математической модели. Если уравнения не содержат случайных источников, то процесс воспроизводим и движение является динамическим, хотя оно и может быть *непредсказуемым* из-за его сложности.

При исследовании статистических процессов путем численного эксперимента надо иметь в виду следующее.

Источники случайных чисел в компьютерах построены по определенному алгоритму и являются поэтому фактически детерминированными. Они, однако, могут рассматриваться как случайные, если характерные времена повторения много больше характерных времен релаксации рассматриваемых динамических систем.

Сложные движения в динамике были обнаружены сначала в гамильтоновых системах. Для их характеристики и был введен термин «динамический хаос». В настоящее время он широко используется и для характеристики сложных движений в диссипативных динамических системах. Рассмотрим основные характерные черты динамического хаоса.

К - энтропия. Показатели Ляпунова. Основной особенностью динамического хаоса является наличие динамической неустойчиво-

сти движения — экспоненциальной расходимости близких в начальный момент траекторий.

Мерой экспоненциальной расходимости служит К-энтропия (энтропия Крылова — Колмогорова — Синая). К-энтропия связана со средней скоростью разбегания близких в начальный момент траекторий и, следовательно, с показателями Ляпунова. Она выражается через положительные показатели Ляпунова λ_i по формуле Песина (см. в [12, 24])

$$K = \sum_i \lambda_i, \quad \lambda_i > 0. \quad (8.1)$$

При отсутствии положительных показателей λ_i величина $K = 0$.

Показатели Ляпунова для нелинейных диссипативных открытых систем определяются путем численного эксперимента. Так, например, для одномерного логистического уравнения в дискретном времени

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = (a - x)x, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq a \leq 4, \quad (8.2)$$

показатели Ляпунова определяются формулой

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i}. \quad (8.3)$$

Приведенное выражение для λ можно принять за определение. Его вывод в [12] из исходного выражения (2.7) не является вполне последовательным, так как при численном эксперименте минимальное расстояние траекторий конечно и при условии конечности аттрактора величина λ по формуле (2.7) в [12] равна нулю. Это же замечание относится и к формуле (5.15) в [12] для энтропии Колмогорова.

Итак, формулу (3) можно принять за определение К-энтропии и показателя Ляпунова для одномерного движения. Существенно, что в ней учитываются лишь расхождения траекторий на единичном шаге при нулевом начальном расстоянии *для каждого шага*. Тем самым учитывается лишь локальная нелинейность. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 16.

Следствием экспоненциальной расходимости близких в начальный момент траекторий — динамической неустойчивости движения — является свойство *перемешивания* в фазовом пространстве. Роль перемешивания в обосновании статистической теории была выявлена в работах Н. С. Крылова [44].

Существуют и другие характеристики динамического хаоса (непрерывность спектра, конечность времени корреляции). Они, однако, являются следствием динамической неустойчивости. Критерием последней и служит положительность К-энтропии.

Мы подошли теперь к существенному вопросу: насколько оправдано введение термина «динамический хаос»? Ведь сложное движение, представляющее динамический хаос, при численном эксперименте воспроизводимо.

Постановка такого вопроса оправдана и по другой причине. В следующем разделе мы увидим, что экспоненциальная расходимость и перемешивание могут играть в статистической теории неравновесных процессов конструктивную, позитивную роль. Поясним смысл этого парадоксального на первый взгляд утверждения.

9. Конструктивная роль динамической неустойчивости движения в статистической теории неравновесных процессов. Для иллюстрации основной идеи начнем с простого примера, но из области социологии.

Представим себе, что происходит международный конгресс. Положение участников сразу после процедуры закрытия примем за начальное. Рассмотрим два возможных варианта дальнейшего движения участников конгресса: 1. Участники и после закрытия перемещаются вместе, не удаляясь друг от друга. 2. Участники разъезжаются по местам жительства и работы —

«разбегаются экспоненциально». Иными словами, движение участников становится «динамически неустойчивым». Какая из двух возможностей в большей мере служит прогрессу?

Первый вариант движения может быть, разумеется, полезным на ограниченном интервале времени, поскольку позволяет продолжить личные контакты. Несомненно, однако, что именно второй вариант обеспечивает более широкое использование полученной информации, т.е. служит прогрессу. Мы видим, что конструктивная — положительная роль «динамической неустойчивости движения» здесь очевидна.

Можно отметить также, что такого рода «динамическая неустойчивость» — «экспоненциальное разбегание траекторий» участников — планируется оргкомитетом заранее: оргкомитет, как правило, старается обеспечить участников обратными билетами.

Вернемся теперь к статистической теории неравновесных процессов. Выделим четыре уровня приближений механики сплошной среды: 1. Кинетические уравнения. 2. Гидродинамические уравнения. 3. Реакционно-диффузионные уравнения. 4. Уравнения химической кинетики.

Возможность движения «вниз» по приведенной иерархии уравнений для макроскопических характеристик основана на использовании соответствующих малых параметров. Поскольку высшим в иерархии, например для разреженных газов, является кинетическое уравнение Больцмана, то естественно попытаться выявить конструктивную роль движения атомов динамической неустойчивости газа при обосновании уравнения Больцмана с помощью обратимых уравнений движения атомов — на основе уравнений Гамильтона.

После классических работ Н. Н. Боголюбова, Дж. Кирквуда, М. Борна и Грина условия применимости кинетического уравнения Больцмана обсуждались многими авторами. Здесь для нас существенно лишь одно условие, которое определяет саму возможность приближенного представления разреженного газа в виде сплошной среды.

В однокомпонентном разреженном газе имеется лишь один безразмерный малый параметр — *параметр плотности* $\varepsilon = nr_0^3$. Через него выражаются соотношения между тремя характерными параметрами длины: r_0 — размер атома, r_{cp} — среднее расстояние между атомами, $l \sim 1/nr_0^2$ — средняя длина свободного пробега. Определим теперь бесконечно малые элементы длины l_ϕ и времени τ_ϕ . Соответствующий объем обозначим через V_ϕ . Тогда $N_\phi = nV_\phi$ — среднее число частиц в объеме V_ϕ . Приближение сплошной среды возможно лишь при условии $N_\phi \gg 1$, а для возможности кинетического описания необходимо выполнение условий $l_\phi \ll l$, $\tau_\phi \ll \tau$. Величины τ_ϕ , l_ϕ , V_ϕ , N_ϕ могут быть определены следующим образом^{45–48,34}:

$$\tau_\phi = \varepsilon^{1/2} \tau \ll \tau, \quad l_\phi = \varepsilon^{1/2} l \ll l, \quad N_\phi = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \gg 1. \quad (9.1)$$

Например, при атмосферном давлении $\varepsilon \approx 10^{-4}$, поэтому $N_\phi \approx 10^2$.

Кинетическое уравнение Больцмана и, следовательно, вся иерархия уравнений механики сплошной среды для макроскопических функций строится обычно без использования понятия динамической неустойчивости, К-энтропии, перемешивания. Однако использование этих понятий позволяет более полно понять причины возникновения необратимости при построении кинетических уравнений на основе обратимых уравнений движения. Первые существенные шаги в этом направлении были сделаны Н. С. Крыловым [44]. Большое внимание этим вопросам уделяется в книгах Пригожина [2, 58].

Установим соотношения минимального времени развития динамической неустойчивости движения атомов с временным интервалом τ_ϕ [49]. Учтем для этого, что время развития неустойчивости движения отдельного атома $\tau_{неуст} \approx \tau$ [50]. Соответственно этому характерное время развития неустойчивости движения любой (одной) из частиц в объеме V_ϕ в N_ϕ раз меньше.

Это приводит к соотношению [49]

$$(\tau_{\text{неуст}})_{\text{ф}} \sim \tau_{\text{ф}}. \quad (9.2)$$

Таким образом, минимальное характерное время развития неустойчивости движения порядка $\tau_{\text{ф}}$. Это служит дополнительным аргументом в пользу приведенного выше определения величины $\tau_{\text{ф}}$. Существенно также и другое.

Динамическая неустойчивость движения атомов-шариков, приводящая к перемешиванию, способствует самой возможности перехода от обратимых микроскопических уравнений движения атомов к гораздо более простому уравнению Больцмана для функции распределения — сглаженной по объему $V_{\text{ф}}$ микроскопической фазовой плотности. В этом и проявляется конструктивная — положительная роль динамической неустойчивости движения атомов газа при построении статистической теории.

Сказанное, разумеется, не исчерпывает проблему роли динамической неустойчивости движения в статистической теории. Действительно, неустойчивость движения проявляется также и для уравнений макроскопического движения, например, уравнений гидродинамики. Впервые на модельных уравнениях тепловой конвекции это было продемонстрировано в работе Э. Лоренца [5].

В связи с изложенной точкой зрения на роль динамической неустойчивости возникает вопрос: может ли динамическая неустойчивость движения, но теперь уже не атомов, а макроскопических характеристик, играть конструктивную роль в процессах эволюции? Ведет ли она в диссипативных открытых системах к хаосу или оставляет возможность и развития процессов самоорганизации? Для ответа на эти вопросы и нужны критерии относительной степени упорядоченности состояний открытых систем, о которых шла речь в предыдущих разделах.

Основываясь на этих критериях, мы покажем на ряде примеров, что процессы самоорганизации возможны и при наличии динамической неустойчивости движения макроскопических характеристик открытых систем. Прежде, однако, необходимо рассмотреть еще некоторые общие вопросы статистической теории неравновесных процессов.

10. Временные и фазовые средние и ансамбль Гиббса для неравновесных процессов. Локальные условия эргодичности.

10.1. Динамические и статистические распределения. Напомним, что в разделе 7 движения в диссипативных нелинейных открытых системах были условно разделены на динамические и статистические. На любом уровне теории динамическое описание в диссипативных системах отвечает нулевому приближению по флуктуациям. Такое приближение оказывается, однако, в ряде случаев недостаточным. Так, к примеру, в процессах самоорганизации без учета флуктуации невозможно достаточно полно описать переходы через точки бифуркаций. Здесь имеется глубокая аналогия с флуктуационными процессами при фазовых переходах второго рода.

Учет флуктуации при описании неравновесных процессов в диссипативных системах может проводиться на разных уровнях, т. е. имеется целая иерархия флуктуационных уравнений. Так, например, в теории броуновского движения можно выделить три уровня описания: 1. На основе динамических уравнений — нулевое приближение по флуктуациям. 2. Уравнения Ланжевена со случайным источником, определяемым мелкомасштабными флуктуациями ($\tau_{\text{кор}} \ll \tau_{\text{рел}}$). Соответствующее уравнение для функции распределения, например, уравнение Фоккера—Планка—динамическое уравнение для функции распределения. 3. Кинетическое уравнение с источником Ланжевена. Оно может служить исходным для описания кинетических флуктуаций при броуновском движении. В соответствии с приведенной иерархией

можно ввести и три функции распределения

$$f^{(n)}(X, t), \quad f(X, t), \quad \tilde{f}(X, t). \quad (10.1)$$

Первая отвечает динамическому описанию, вторая — статистическому, но с помощью детерминированной функции распределения, третья — статистическому, при котором функция распределения, в свою очередь, является случайной.

Проиллюстрируем сказанное на примере математической модели симметризованного по нелинейности генератора Ван-дер-Поля. Эта модель будет служить в дальнейшем изложении базовой при построении более сложных самоорганизующихся систем. Уравнения для такого генератора имеют вид

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}(-a + bE)x = v; \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}(-a + bE)v + \omega_0^2 x = 0; \quad (10.2)$$

здесь введено обозначение для энергии колебаний

$$E = \frac{1}{2}(v^2 + \omega_0^2 x^2). \quad (10.3)$$

ω_0 — собственная частота. Как и в разделе 4, $a = a_n - \gamma$, где a_n — параметр обратной связи (накачки), γ , b — коэффициенты линейного и нелинейного трения. Из уравнений (2) следует замкнутое уравнение для энергии. Приведем сразу и его решение:

$$\frac{dE}{dt} = (a - bE)E, \quad E(t) = E_0 \frac{a}{b} \left[E_0 - \left(E_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-at} \right]^{-1}. \quad (10.4)$$

Этим решением определяется и решение системы уравнений (2).

Уравнениям (2) отвечает динамическое распределение

$$f^{(n)}(x, v, t) = \delta(x - x(t)) \delta(v - v(t)). \quad (10.5)$$

Если в динамические уравнения (2) ввести δ — коррелированный источник Ланжевена с заданной интенсивностью D , то можно от уравнений Ланжевена перейти к уравнению Фоккера — Планка для распределения $f(x, v, t)$.

Соответствующее уравнение для случайного распределения $\tilde{f}(x, v, t)$ может служить для расчета кинетических флуктуаций.

10.2. Ансамбль Гиббса в теории неравновесных процессов. Временные и фазовые средние. Пусть $A(X)$ — произвольная функция набора динамических переменных X . Запишем динамическое распределение

$$f^{(n)}(X, t) = \delta(X - X(t)). \quad (10.6)$$

Усреднение функции $A(X)$ с помощью этого распределения не приводит, естественно, к сглаживанию. Сглаживание осуществляется лишь при использовании вместо (6) статистического распределения, отвечающего неполному описанию.

В статистической теории неравновесных процессов неполнота описания возникает при сглаживании (осреднении) по физически бесконечно малому объему V_Φ или соответствующему временному интервалу τ_Φ . Это сглаживание и определяет неполноту задания микросостояний в системах ансамбля Гиббса. Ниже мы уточним это определение. Прежде обсудим вопрос о том, какое из двух усреднений (временное или фазовое — по ансамблю Гиббса) является первичным.

Казалось бы, ответ на этот вопрос очевиден. Именно, первичным является усреднение по времени (или по объему), так как именно оно производится в физическом и численном эксперименте.

Широко распространена, однако, противоположная точка зрения, которая очень четко сформулирована в Приложении к книге Р. Балеску [51]: «Таким образом, мы полностью присоединяемся к той группе физиков (к ней принадлежат, в частности, Толмен и Ландау), которые считают, что эргодическая теория является любопытным свойством динамической системы, но не имеет отношения к обоснованию статистической механики. Выход из обсуждавшихся выше трудностей заключается в том, чтобы рассматривать среднее по ансамблю как первичное определение макроскопических функций, не вводя какой-либо более фундаментальной концепции. Эргодическая теорема отходит, таким образом, на второй план. Более того, отпадает теперь упомянутая выше главная трудность. Теперь макроскопическая величина может быть уже функцией времени».

Итак, принимаем в качестве первичного усреднения сглаживание по интервалу измерения $T_{\text{изм}}$ или по соответствующему измерительному объему $V_{\text{изм}}$. Как же определить фазовые средние в статистической теории неравновесных процессов? Для этого надо построить ансамбль Гиббса, для которого степень неполноты описания отвечает условиям эксперимента. Но как это сделать? Ведь параметры измерения $T_{\text{изм}}$, $V_{\text{изм}}$ в уравнения кинетической теории и в другие уравнения приведенной выше иерархии уравнений для макроскопических функций не входят. Однако при выводе кинетических уравнений, как мы видели в разделе 8, используются понятия физически бесконечно малого временного интервала $\tau_{\text{ф}}$ и соответствующего объема $V_{\text{ф}}$. Произвол в поведении частиц в пределах $\tau_{\text{ф}}$, $V_{\text{ф}}$ и определяет минимальную неопределенность задания состояний системы ансамбля Гиббса.

Пусть величины $\tau_{\text{ф}}$, $V_{\text{ф}}$, $N_{\text{ф}}$ уже конкретизированы, например, для газа Больцмана они определяются формулами (9.1). Это позволяет произвести сглаживание динамического распределения (6)

$$\tilde{f} = \overline{f^{(\text{д})}(\tau_{\text{ф}})} \quad \text{или} \quad \tilde{f} = \overline{f^{(\text{д})}(V_{\text{ф}})}. \quad (10.7)$$

Естественно, что для макроскопических систем сглаженные распределения $\tilde{f}$ остаются случайными функциями, поэтому возможно дальнейшее усреднение по ансамблю Гиббса. В результате приходим к статистическому распределению

$$f(X, t) = \tilde{f}(X, t) \equiv \langle \tilde{f}(X, t) \rangle. \quad (10.8)$$

В обычной кинетической теории, как правило, неявно допускается (в силу условия $N_{\text{ф}} \gg 1$), что кинетические флуктуации пренебрежимо малы. При этом условии усреднение сглаженных распределений $\tilde{f}$ по ансамблю Гиббса не приводит к заметным изменениям, и мы приходим к равенствам

$$f(X, t) = \tilde{f} \approx \tilde{f} = \overline{f^{(\text{д})}(\tau_{\text{ф}})} \quad (\text{или} \quad \overline{f^{(\text{д})}(V_{\text{ф}})}), \quad (10.9)$$

которые и выражают условие *локальной эргодичности*.

При согласованном выборе измерительных характеристик $T_{\text{изм}}$, $V_{\text{изм}}$ и величин $\tau_{\text{ф}}$, $V_{\text{ф}}$ имеют место приближенные равенства

$$\tilde{f}^{(T_{\text{изм}})} \approx \tilde{f}^{(\tau_{\text{ф}})}, \quad \tilde{f}^{(V_{\text{изм}})} \approx \tilde{f}^{(V_{\text{ф}})} \quad (10.10)$$

Вернемся теперь к критериям относительной степени упорядоченности неравновесных состояний открытых систем. При этом будут использованы и результаты двух последних разделов.

11. Процессы самоорганизации в генераторе Ван-дер-Поля. Естественно предположить, что по мере увеличения параметра обратной связи $a_{\text{н}}$, т.е. по мере развития генерации, происходит процесс самоорганизации. Попробуем подтвердить это предположение с помощью критерия, основанного на S-теореме.

Итак, в качестве управляющего выбираем параметр a_n . Стационарное распределение при произвольном a определяется выражением (5.2). Для удобства рассмотрения выделим два характерных состояния.

1. Порог генерации ($a = a_n - \gamma = 0$). Примем это состояние за состояние физического хаоса. Соответствующее распределение следует из (5.2) и имеет вид

$$f_0(E) = \left(\frac{2b}{\pi D}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{bE^2}{2D}\right). \quad (11.1)$$

2. Режим развитой генерации (параметр $\varepsilon = Db/a^2 \ll 1$). Из (5.2)

$$f(E) = \left(\frac{b}{2\pi D}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{[E-(a/b)]^2}{2D/b}\right\}. \quad (11.2)$$

По распределениям (1), (2) зададим значения энтропии. Расчет показывает, что $S > S_0$. Это, однако, не означает, что состояние развитой генерации является более хаотическим, чем на пороге генерации, так как эффективные средние энергии выделенных состояний не одинаковы: $\langle E \rangle > \langle E \rangle_0$.

Произведем перенормировку при условии неизменности эффективной функции Гамильтона $H = (1/2) E^2$. Это выражение следует из распределения (1). Значение перенормированной интенсивности шума в (1) находим из уравнения, аналогичного (5.5):

$$\tilde{D} = \frac{a^2}{b} \gg D \quad \text{при} \quad \varepsilon = \frac{Db}{a^2} \ll 1. \quad (11.3)$$

Произведем теперь в (1) замену $D \rightarrow \tilde{D}$ и найдем соответствующую разность энтропии

$$\tilde{S}_0 - S = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{2Db} > 0,$$

так как

$$\frac{Db}{a^2} \ll 1;$$

$$\frac{d(\tilde{S}_0 - S)}{da} > 0. \quad (11.4)$$

Из (3), (4) видно, что условия S-теоремы выполнены (см. (6.7), (6.6)). На этом основании можно утверждать, что при развитии генерации идет процесс самоорганизации. Для рассматриваемого простого примера такой вывод представляется почти очевидным. Ситуация оказывается не столь простой для более сложных генераторов (см. следующие разделы).

Сравним полученный результат с соответствующим результатом по критерию S-информации, введенному в работах Г. Хакена [52, 53]. Буква S введена в название с целью подчеркнуть роль К. Шеннона (Shannon) в развитии теории информации. Для выделенных состояний (порог генерации, развитая генерация) разность значений информации Шеннона определяется выражением (ср. с (4))

$$I - I_0 = \ln 2 > 0. \quad (11.5)$$

Мы видим, что при переходе к режиму развитой генерации происходит увеличение информации на $\ln 2$. Это объясняется тем, что на пороге генерации «работает» лишь одна «половина» распределения (1), так как $E > 0$, а в состоянии развитой генерации «работают» обе «половины». Это увеличение информации не зависит, однако, от управляющего параметра a_n (ср. с (4)) и поэтому не может служить характеристикой процесса самоорганизации.

12. Более сложные генераторы.

12.1. Генератор с инерционной нелинейностью. Среди разнообразных «простых» динамических систем со сложным поведением [9–28, 54] можно выделить модифицированный (по сравнению с генератором

Теодорчика) генератор с инерционной нелинейностью, который детально исследован в работах В. С. Анищенко и его сотрудников [17, 55]. Путем радиофизического и численного эксперимента было установлено, что по мере увеличения параметра обратной связи (в некоторой области значений параметра инерционности) в генераторе возникает последовательность бифуркаций удвоения периода. За критической точкой Фейгенбаума начинается область сложного, «хаотического» поведения.

В работе [56] по критерию S-теоремы был проведен численный расчет относительной степени упорядоченности состояний в области удвоения периода колебаний до критической точки Фейгенбаума. Перенормировка проводилась при заданном значении интенсивности колебаний. Результаты расчета показали, что в процессе удвоения периода колебаний, т.е. по мере приближения к критической точке Фейгенбаума — границе области «хаотического поведения» — степень упорядоченности увеличивается и, следовательно, по рассматриваемому критерию имеет место процесс самоорганизации.

В системах с двумя и большим числом управляющих параметров открывается дополнительная возможность оптимизации поиска наиболее упорядоченных состояний. В работах [57] рассмотрены два примера систем с двумя управляющими параметрами.

12.2. Генератор Ван-дер-Поля с мягким и жестким возбуждением. Чтобы расширить возможности управления, рассмотрим вместо (10.2)–(10.4) генератор с более сложной нелинейностью

$$-a + bE \rightarrow -a - bE + cE^2, \quad a = a_n - \gamma, \quad b = b_n - \beta, \quad \gamma, \beta, c > 0. \quad (12.1)$$

Здесь введены два параметра обратной связи (накачки) a_n, b_n соответственно для мягкого и жесткого возбуждения генерации. Проведенные расчеты показали, что при изменении параметров обратной связи в области

$$0 \leq a_n \leq a_{\max}, \quad 0 \leq b_n \leq b_{\max}$$

перенормированная энтропия $\tilde{S}(a_n, b_n)$ может иметь меньшее значение, чем для генератора с мягким и жестким возбуждением по отдельности. Тем самым, при использовании двух управляющих параметров можно достигнуть более высокой степени упорядоченности.

12.3. Генератор Ван-дер-Поля при внешнем резонансном воздействии. Стационарное (после усреднения по периоду) распределение энергии и фазы может быть представлено в виде (ср. с (2.4), (5.19) гл. 12 в [34])

$$f(E, \varphi) = C \exp \left\{ -\frac{(1/2b)[E - (a/b)]^2 + \sqrt{2}EF \cos \varphi}{D} \right\}, \quad (12.2)$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f dE \frac{d\varphi}{2\pi} = 1.$$

Здесь F — амплитуда внешней силы, φ — фаза колебаний, a/b — энергия предельного цикла при $F = 0$, $D = 0$. При $F = 0$ распределение фазы равномерное, а распределение энергии совпадает с (5.2).

Амплитуда F , наряду с параметром обратной связи a_n , играет роль управляющего параметра. В режиме развитой генерации при увеличении F степень упорядоченности возрастает из-за изменения распределения фазы. Оно становится неравномерным.

13. Бифуркации энергии предельного цикла и периода колебаний в обобщенных генераторах Ван-дер-Поля. Вернемся к уравнению (10.4). Используем безразмерные переменные

$$t' = \omega_0 t, \quad a' = \frac{a}{\omega_0}, \quad E' = \frac{bE}{\omega_0}, \quad D' = \frac{Db}{\omega_0^2}. \quad (13.1)$$

В дискретном времени $t' = \Delta n$ ($0 \leq \Delta \leq 1$), $n = 0, 1, \dots$. При единичном шаге $\Delta = 1$ из (10.4) следует *логистическое уравнение*

$$E_{n+1} = (a+1)E_n - E_n^2 \equiv F(E_n), \quad E_{n+k} = F^{(k)}(E_n), \quad (13.2)$$

$$0 \leq a+1 \leq L, \quad 0 \leq E \leq 4,$$

которое (в различных формах) широко используется как в физике, так, например, и в экологии [18, 19]. В генераторе с инерционной нелинейностью оно моделирует переход к динамическому хаосу.

На основе логистического уравнения могут быть построены также и математические модели обобщенных генераторов Ван-дер-Поля с каскадами бифуркации двух типов: ветвление значений энергии предельного цикла (генераторы с мультистабильными стационарными состояниями); бифуркации периода колебаний, а также комбинации этих двух типов бифуркаций [58–60]. В теории возбудимых сред (см. раздел 15) на основе логистического уравнения можно провести обобщение известного уравнения Колмогорова — Петровского — Пискунова [61].

Основываясь на уравнении (2), получим последовательность (при $k = 1, 2, 3, \dots$) дифференциальных уравнений для энергии колебаний

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{k} (F^{(k)}(E) - E) \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (13.3)$$

здесь использовано правило соответствия

$$\frac{E_{n+k} - E_n}{k} \leftrightarrow \frac{dE}{dt}. \quad (13.4)$$

При $k = 1$ из (3) следует уравнение (10.4). При $k = 2$ получаем уравнение

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (a - E) E [E^2 - (a+2)E + a+2], \quad (13.5)$$

которое имеет четыре стационарных решения с энергиями

$$E_1 = 0 \text{ при } a \leq 0, \quad E_2 = a \text{ при } 0 \leq a \leq 2, \quad (13.6)$$

$$E_{3,4} = \frac{a+2}{2} \pm \left[\left(\frac{a+2}{2} \right)^2 - (a+2) \right]^{1/2} \text{ при } a \geq 2.$$

Таким образом, при $a = 2$ происходит ветвление энергии предельного цикла и возникает бистабильное состояние. При заданном k в области значений a до критической точки Фейгенбаума число стационарных состояний равно 2^k . Возможные значения энергии стационарных состояний совпадают со значениями E в неподвижных точках уравнения (2). Соответствующим образом обобщаются уравнения (10.2).

Вернемся к уравнениям (2). Первое из них является логистическим уравнением, а второе — его следствием после $k - 1$ итераций. Во втором уравнении проведем замену $E_{n+k} \rightarrow E_{n+1}$. В результате получим совокупность уравнений

$$E_{n+1} = F^{(k)}(E_n) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13.7)$$

При $k = 1$ отсюда следует логистическое уравнение (2). Однако при $k > 1$ уравнение (7) не совпадает со вторым уравнением (2), так как в левой части (7) стоит функция E_{n+1} , а не E_{n+k} . Покажем, что обобщенное таким образом логистическое уравнение описывает новые режимы генерации.

На рис. 1, a приведена бифуркационная диаграмма для логистического уравнения (уравнения (7)) при $k=1$. Последовательность бифуркаций удвое-

ния периода начинается в точке $a = 2$. Значению $a = \sqrt[3]{8}$ отвечает наиболее широкое окно упорядоченности в закритической области. При $a = 3$ — состояние наиболее развитого «динамического хаоса». По решению логистического уравнения численным методом можно найти функции распределения энергии. Для состояния $a = 3$ возможно аналитическое решение уравнения (2). В результате приходим к распределению Улама — Неймана

$$f(E) = \frac{1}{\pi [E(4-E)]^{1/2}}, \quad \int_0^4 f(E) dE = 1. \quad (13.8)$$

Для уравнения (7) при $k = 2$ в точке $a = 2$ происходит не удвоение периода, а ветвление значения энергии предельного цикла — возникает бистабильность. В зависимости от начальных условий система попадает либо

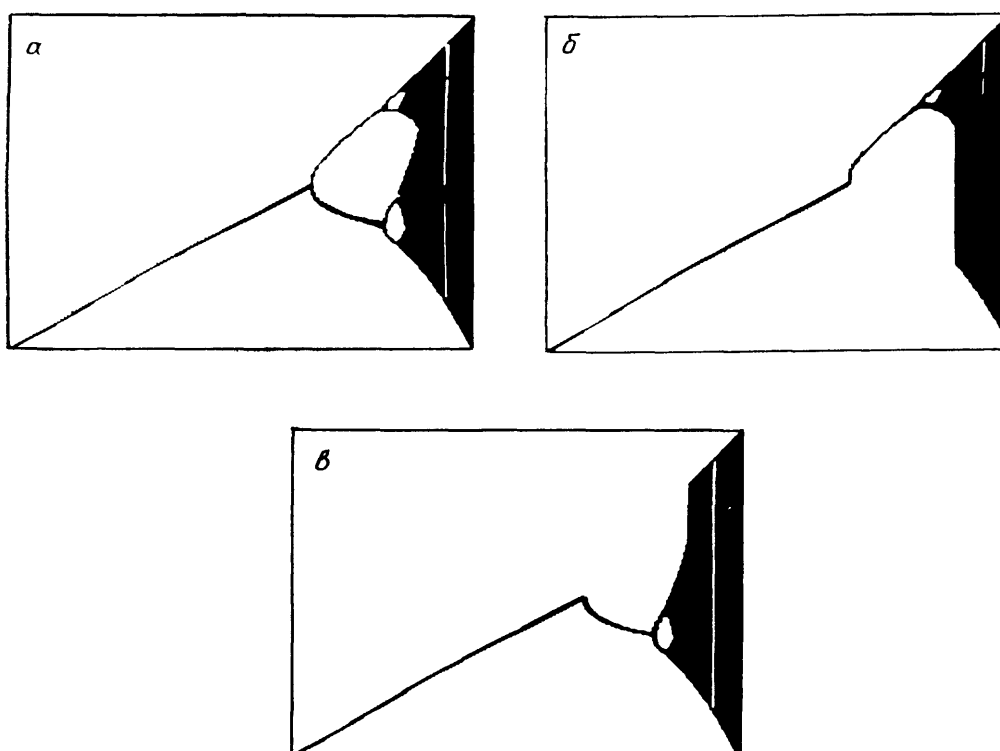


Рис. 1. Сравнение бифуркационных диаграмм для логистического уравнения (13.7) при значениях $k = 1$ (а) и 2 (б, в). $a=0-3,0$, $E=0-4,0$, $D=1$, $N=10000$

на верхнюю, либо на нижнюю ветви (рис. 1, б, в). Процесс удвоения периода теперь начинается лишь в точке $a = \sqrt[3]{6}$, когда для логистического уравнения происходит уже второе удвоение. При $a = 2,6785$ происходит фазовый переход «хаос—хаос», в результате которого возникает «хаотическое» движение, характерное для логистического уравнения (2) ((7) при $k = 1$). В этом можно убедиться путем наложения рис. 1, б, в. Рассмотрим теперь случай $k = 3$.

Для дифференциального уравнения (3) предельный цикл с энергией $E = a$ теперь устойчив до значения $a = \sqrt[3]{8}$. В этой точке возникают три стационарных состояния с разными энергиями.

Сопоставим бифуркационные диаграммы для уравнения (7) при $k = 1$ и $k = 3$ (рис. 2, а, б*). Хорошо видно, в частности, различие состояний в самых широких окнах упорядоченности — в областях, в которых возможны колебания с периодом 3: на рис. 2, а видны все три возможных состояния, а на

*) Рис. 2, а—к получены В. И. Четвериковым.

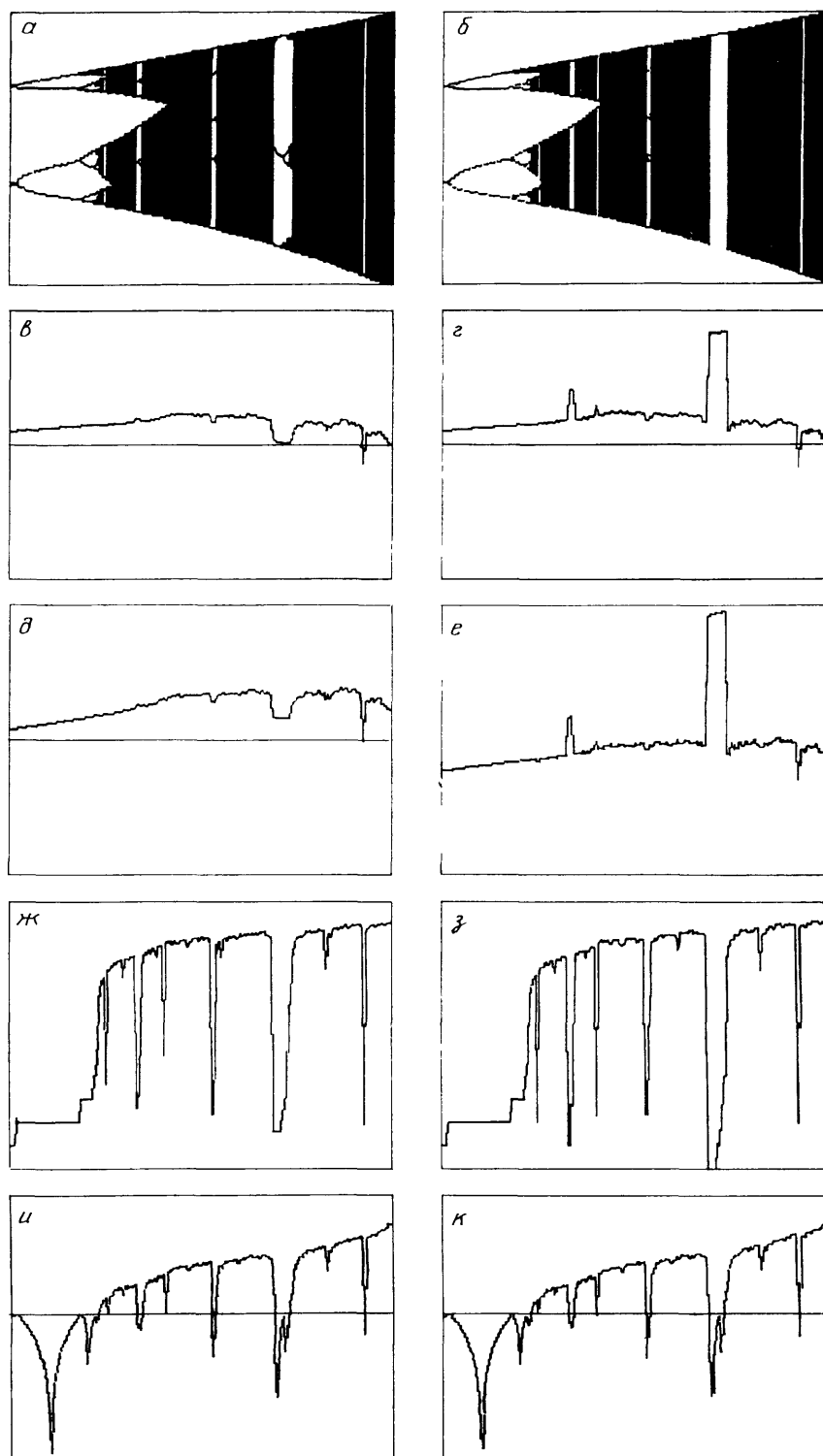


Рис. 2. Сравнения различных характеристик логистических решений уравнений (13.7) при значениях $k = 1$ и 3 . $a, б$ — Бифуркационные диаграммы. $в, г$ — Средние значения энергии $\langle E \rangle$. $д, е$ — Средние значения квадрата энергии $\langle E^2 \rangle$. $ж, з$ — Энтропии S . $и, к$ — Средние значения показателей Ляпунова в зависимости от значений управляющего параметра a

рис. 2, б лишь одно из трех имеет достаточную для наблюдения область притяжения.

Чтобы определить, в какой мере это различие фиксируется разными критериями степени упорядоченности, на рис. 2 (при $k = 1, k = 3$) изображены зависимости от a следующих величин: средней энергии $\langle E \rangle$ (рис. 2, в, з); среднего квадрата энергии $\langle E^2 \rangle$ (рис. 2, д, е); энтропии S (рис. 2, ж, з); показателей Ляпунова, найденных по формуле (8.2), но для уравнения (7) при $k = 1, k = 3$ (рис. 2, и, к).

Мы видим, что функции $\langle E \rangle$, $\langle E^2 \rangle$, S более четко фиксируют различие состояний в океанах упорядоченности при, соответственно, $k = 1, k = 3$. Изменения в поведении показателей Ляпунова практически незаметны. Тем самым, путем численного эксперимента удастся выявить различие эффективности оценки относительной степени упорядоченности неравновесных состояний по приведенным критериям.

14. Статистические распределения для обобщенных генераторов. При наличии источника Ланжевена уравнению (13.3) соответствует уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f(E, t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial E} \left(E \frac{\partial f}{\partial E} \right) - \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{1}{k} (F^{(k)}(E) - E) f \right]. \quad (14.1)$$

При $k = 1$ уравнение (1) совпадает с (5.1).

Отметим некоторые особенности решения уравнения (1) при $k = 2$. В этом случае соответствующее динамическое уравнение (13.5) при $a = 2$ имеет точку ветвления. Проследим, как это влияет на стационарное решение уравнения (1). Для наглядности выделим три области:

1. Область ниже точки ветвления ($a < 2$ и параметр $D b/a^2 \ll 1$). В этом случае функция $f(E)$ — распределение Гаусса с дисперсией, пропорциональной $2/(2 - a)$. Таким образом, при приближении к точке ветвления дисперсия растет по «закону Кюри».

2. Точка ветвления — критическая точка ($a = 2$). Распределение

$$f(E) = \frac{1}{\Gamma(1/4)} \left(\frac{2}{D} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{(E-a)^4}{8D} \right], \quad a = 2. \quad (14.2)$$

Таким образом, при $a = 2$ дисперсия пропорциональна $\varepsilon^{1/2}$.

3. Область выше точки ветвления. Для каждой из ветвей распределение близко к гауссовскому, но с разными значениями средней энергии. Дисперсия пропорциональна $1/(a - 2)$ и, следовательно, также растет по «закону Кюри» при приближении к точке ветвления.

В точке ветвления энтропия (по распределениям Гаусса) 1, 3 испытывает скачок

$$S_1 - S_3 = \ln 2 > 0, \quad \langle E \rangle_1 \approx \langle E \rangle_2 = 2. \quad (14.3)$$

Таким образом, согласно S-теореме при переходе через точку ветвления (в сторону развития генерации — увеличения a) степень упорядоченности растет. Переход через точку ветвления можно рассматривать как пример неравновесного фазового перехода. Роль параметра порядка играет разность средних энергий для верхней (a) и нижней (b) ветвей

$$\eta = \langle E \rangle_a - \langle E \rangle_b = 2(a - 2)^{1/2}, \quad a > a_{кр} = 2. \quad (14.4)$$

В точке ветвления — критической точке — $a = 2$ и параметр порядка обращается в ноль.

15. Среда из связанных генераторов. Базовая модель теории самоорганизации — синергетики: генераторы Ван-дер-Поля, наряду с другими более сложными генераторами, могут служить элементами активных (возбудимых) сред. Первые математические модели активных сред были предложены около

сорока лет тому назад в известных работах Н. Винера, А. Розенблута, И. М. Гельфанда и М. Л. Цетлина. Обзоры последующих работ см. в [1—4, 17, 21, 25, 28, 50, 62—64].

В настоящее время основой математического моделирования в теории самоорганизации — синергетике служат уравнения реакционно-диффузионного типа. Конкретные примеры таких уравнений были предложены и проанализированы в работах А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [61], Я. Б. Зельдовича [65], Д. А. Франк-Каменецкого [66], А. М. Тьюринга [67]. К такого рода уравнениям относится и уравнение Гинзбурга — Ландау, различные модификации которого широко используются в теории неравновесных фазовых переходов (см., например, [68]).

Уравнения реакционно-диффузионного типа описывают класс физических, химических и биологических явлений. Поскольку большинство примеров строилось выше на основе модели симметризованного по нелинейности генератора Ван-дер-Поля, то будем следовать этой «традиции» и при рассмотрении примеров распределенных систем.

Начнем с простейшего примера пространственной диффузии независимых генераторов — «броуновских частиц» — в пространстве. Если ограничиться информацией лишь об энергии генератора (см. уравнение (10.4)), то приходим к примеру уравнения Колмогорова — Петровского — Пискунова (КПП) для распределенной энергии

$$\frac{\partial E(R, t)}{\partial t} = (a - bE)E + \mathcal{D} \frac{\partial^2 E}{\partial R^2}, \quad E(t) = \int E(R, t) \frac{dR}{V}. \quad (15.1)$$

Однако, наряду с пространственной диффузией с коэффициентом $\mathcal{D}$, имеется, как мы знаем, и другая причина нарушения динамических уравнений (10.2)—(10.4). Она обусловлена действием шумов на внутренние степени свободы генератора. При заданной интенсивности шума D динамическому уравнению для энергии генератора (10.4) соответствует уравнение Фоккера — Планка (5.1) для распределения энергии $f(E, t)$. Могут играть существенную роль оба диффузионных процесса. Совместное их влияние может быть учтено, например, с помощью уравнения Фоккера — Планка для более общего распределения $f(E, R, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & D \frac{\partial}{\partial E} \left(E \frac{\partial f}{\partial E} \right) + \frac{\partial}{\partial E} [(-a + bE)Ef] + \mathcal{D} \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \\ \frac{1}{V} \int_0^\infty dE \int dR f = & 1. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Переход к уравнению (1) происходит при частном виде распределения

$$f(E, R, t) = \delta(E - E(R, t)), \quad (15.3)$$

которое возможно при $D = 0$. Напротив, при временах, много больших времени пространственной диффузии, распределение $f(E, R, t)$ становится пространственно однородным и уравнение (2) совпадает с (1).

Наиболее полное описание системы генераторов — совокупности элементарных объектов — может быть проведено на основе уравнения для « N -частичного» распределения

$$f_N(x_1, v_1, R_1, V_1, \dots, x_N, v_N, R_N, V_N, t). \quad (15.4)$$

Переменные x_i, v_i характеризуют внутреннее движение генераторов, а R_i, V_i — движение их как целого. Из уравнения для функции (4) следуют уравнения (1), (2) для более частных распределений.

Рассмотрим простейшую модель для описания когерентных процессов в системе N генераторов. Предположим, что генераторы взаимодействуют через общую энергию (имеют общий источник обратной связи). Тогда из системы динамических уравнений для функций x_i, v_i следует вместо (10.4) урав-

нение для суммарной энергии колебаний в системе генераторов

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (Na_n - \gamma - b\mathcal{E})\mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq N} (v_i^2 + \omega_0^2 x_i^2). \quad (15.5)$$

Если источники шума в отдельных генераторах независимы, то распределение $f(\mathcal{E}, R, t)$ (здесь $\mathcal{E}$ — суммарная энергия) может быть найдено с помощью уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = ND \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left(\mathcal{E} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} [(-Na_n + \gamma + b\mathcal{E})\mathcal{E}f] + \mathcal{D} \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}. \quad (15.6)$$

Сравним стационарные решения уравнений (2), (6) при пространственно однородных распределениях генераторов. Решение уравнения (2) совпадает с (5.2). В частных случаях (на пороге генерации и в режиме развитой генерации) оно принимает вид (11.1), (11.2). Для уравнения (6) стационарное решение можно представить в виде

$$f_0(\mathcal{E}) = \exp \frac{F-H}{ND}, \quad H = (-Na_n + \gamma)\mathcal{E} + \frac{b}{2}\mathcal{E}^2. \quad (15.7)$$

По сравнению с (11.1) порог генерации $a_n = \gamma'/N$ понижается в N раз. При $a_n = 0$, $b = 0$, т. е. для «идеального газа генераторов», из (7) следует, что

$$f_0(\mathcal{E}) = \frac{ND}{\gamma} \exp \left(-\frac{\gamma\mathcal{E}}{ND} \right), \quad \langle \mathcal{E} \rangle = N \frac{D}{\gamma}. \quad (15.8)$$

В режиме развитой генерации, когда параметр $Db/Na_n^2 \ll 1$, стационарное распределение (7) принимает вид

$$f_0 = \left(\frac{b}{2\pi ND} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{[\mathcal{E} - (Na_n/b)]^2}{2ND/b} \right\}, \quad \frac{\langle (\delta\mathcal{E})^2 \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle^2} = \frac{Db}{Na_n^2} \propto \frac{1}{N}. \quad (15.9)$$

Таким образом, влияние коллектива приводит к снижению относительной дисперсии в N раз. Численную оценку увеличения степени упорядоченности можно провести на основе S-теоремы. Для этого по распределениям (11.2), (9) находим значения энтропии в расчете на один генератор

$$S^{(1)} = \ln \left(\frac{2\pi D}{b} \right)^{1/2} + \frac{1}{2}, \quad (15.10)$$

$$S^{(N)} = \ln \left(\frac{2\pi D}{Nb} \right)^{1/2} + \frac{1}{2}.$$

Поскольку соответствующие средние энергии одинаковы, то разность энтропии (10) определяет изменение степени упорядоченности при включении генератора в «среду» N идентичных генераторов

$$S^{(1)} - S^{(N)} = \ln N^{1/2} \geq 0, \quad N \geq 1. \quad (15.11)$$

Мы видим, что величина N (при фиксированном значении параметра a_n) играет роль управляющего параметра. При этом производная

$$\frac{d}{dN} (S^{(1)} - S^{(N)}) > 0, \quad N \gg 1, \quad (15.12)$$

положительна. Результаты (11), (12) показывают, что $(S^{(1)} - S^{(N)})$ есть функционал Ляпунова. Поскольку неравенства (15.11), (15.12) имеют одинаковые знаки, то в «пространстве» управляющего параметра N состояние с $N = 1$ неустойчиво и с ростом N идет процесс самоорганизации.

Функции Ляпунова Λ_F , Λ_s можно построить и на основе уравнений (2), (6). Так, например, если f_0 — стационарное решение уравнения (2), то функция Ляпунова такова, что

$$\Lambda_F = D \int \ln \frac{f}{f_0} \cdot f dE \frac{dR}{V} \geq 0, \quad \frac{d(F(t) - F_0)}{dt} \leq 0. \quad (15.13)$$

Это показывает, что стационарное состояние (при фиксированных параметрах $a, b, \mathcal{D}, D$) является при временной эволюции устойчивым.

Вернемся к вопросу сравнения критериев степени упорядоченности.

16. К-энтропия и энтропия Шеннона при динамически неустойчивых движениях. Вернемся к формуле (8.1), определяющей связь К-энтропии с положительными показателями Ляпунова. Для одномерного дискретного логистического уравнения показатель Ляпунова и, следовательно, К-энтропия определяется выражением (8.3). Показатель Ляпунова (8.3) характеризует роль отклонений при нулевых начальных отклонениях на отдельных шагах итерационного процесса. Это позволяет выделить участки экспоненциального разбегания траекторий. В этом смысле величина является критерием по малым отклонениям. Характерным для такого приближения является обращение показателя λ в нуль в точках бифуркации, что отвечает бесконечным временам корреляции. В этом и проявляется ограниченность линейного приближения. Детали перехода через точки бифуркации выпадают из рассмотрения.

Наряду с (8.3) можно использовать и *нелинейные* характеристики динамической расхожимости движения

$$K_{\text{нл}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{D(k)}{D(0)}, \quad D(k) = |x_1(k) - x_2(k)|. \quad (16.1)$$

Это выражение представляет среднее по времени от логарифма отношения расстояния между траекториями в текущий момент времени k к начальному расстоянию. В отличие от (8.3) в (1) сохраняется зависимость от начального расстояния. При численном эксперименте величину $D(0)$ можно зафиксировать. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{D(k)}{D(0)} > 0$, что отвечает невозможности точного повторения начальных условий в реальном эксперименте.

В качестве другой характеристики расхождения траекторий при временной эволюции может служить функция распределения расстояний и соответствующая энтропия Шеннона

$$f(D, a), \quad S(a) = - \int \ln f(D) \cdot f(D) dD. \quad (16.2)$$

Для областей упорядоченности функция $f(D, a)$ представляется набором отдельных линий. В областях же странного аттрактора функция $f(D, a)$ является непрерывной функцией.

Стационарные (инвариантные) распределения $f(D, a)$ находим путем численного эксперимента по двум реализациям $x_1(k, a), x_2(k, a)$, определяющим реализацию расстояний $D(k, a)$. По соответствующим распределениям $f(D, a_0), f(D, a_0 + \Delta a)$ по схеме раздела 7 определяем роль изменения параметра Δa . Это изменение является управляющим, если ведет к уменьшению перенормированной к заданному значению средней эффективной энергии энтропии.

При применении S-теоремы к системам с несколькими степенями свободы (например, система Лоренца, генератор с инерционной нелинейностью, цепочки генераторов) встает вопрос о выборе функции распределения (одномерной, по разным переменным, многомерной), по которой определяется энтропия. Для систем, в которых существенна динамическая неустойчивость движения и, следовательно, существуют странные аттракторы, функция распределения расстояний $f(D, a)$ (в фазовом пространстве системы) является, по-видимому, наиболее информативной из всех возможных одномерных распределений.

В разделе 2 при перечислении возможных управляющих параметров было указано и «медленное» время. Воспользуемся теперь такой возможностью.

17. К-энтропия и производство энтропии. К-энтропия является динамической характеристикой. В настоящем разделе мы рассмотрим соответствующие статистические характеристики и установим их связь с производством энтропии [69].

Используем усредненное по времени динамическое распределение координат двух траекторий

$$\tilde{f}^{(T)}(x_1, x_2, t) = \int_t^{t+T} \delta(x_1 - x_1(t')) \delta(x_2 - x_2(t')) dt'. \quad (17.1)$$

По условию локальной эргодичности (см. раздел 10) введем соответствующее распределение расстояния между траекториями в момент времени t :

$$\begin{aligned} f(D, t) &= \int \delta(D - |x_1 - x_2|) f(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2; \\ \int f(D, t) dD &= 1. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Соответствующая энтропия определяется выражением

$$S(t) = - \int \ln f(D, t) \cdot f(D, t) dD \quad \text{и} \quad \frac{dS}{dt} = \int (-\ln f(D, t)) I(D, t) dD. \quad (17.3)$$

Здесь записано и уравнение баланса энтропии. Производство энтропии определяется «интегралом столкновений» $I(D, t)$ в кинетическом уравнении для функции $f(D, t)$. Поскольку конкретные выражения для $I(D, t)$ в настоящее время еще не известны, то воспользуемся более огрубленным описанием.

С помощью распределения $f(D, t)$ введем две характеристики: среднее расстояние в момент t и эффективный «объем» — эффективное расстояние

$$\bar{D}(t) = \int D f(D, t) dD, \quad \Delta D(t) = \frac{1}{f(\bar{D}, t)}. \quad (17.4)$$

При малых отклонениях $D - \bar{D}$ от среднего значения энтропия (3) определяется приближенно «формулой Больцмана»

$$S(t) = \ln \Delta D(t). \quad (17.5)$$

С ее помощью находим два эквивалентных равенства

$$\begin{aligned} S(t) - S(t_0) &= \ln \frac{\Delta D(t)}{\Delta D(t_0)}, \\ \Delta D(t) &= \Delta D(t_0) \exp(S(t) - S(t_0)). \end{aligned} \quad (17.6)$$

Мы видим, что с ростом энтропии, характеризующей неопределенность задания расстояний между траекториями, увеличивается и эффективное расстояние $\Delta D(t)$. Определим среднюю скорость изменения энтропии за интервал $t - t_0$ — статистический аналог К-энтропии

$$K_{\text{стат}} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{\Delta D(t)}{\Delta D(t_0)}. \quad (17.7)$$

Отсюда следует, что $K_{\text{стат}}$ определяет усредненное за конечный промежуток производство энтропии. Локальные изменения определяются соответствующим уравнением баланса энтропии, которое следует из (5) и имеет вид

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \Delta D(t) \equiv \sigma(t). \quad (17.8)$$

Мы видим, что производство энтропии не является знакоопределенным: оно возрастает, если возрастает со временем среднее эффективное расстояние между траекториями, и уменьшается в противоположном случае.

18. Эволюция энтропии при переходе от ламинарного течения к турбулентному.

Я вспоминаю, что фон Карман в своем вступительном слове сказал, что, когда он наконец предстанет перед Создателем, первая мольба, с которой он бы обратился, было бы раскрытие тайны турбулентности.

Г. Моффатт

Из многочисленных вопросов, возникающих в теории турбулентности, выделим лишь один: является ли переход от ламинарного течения к стационарному турбулентному течению переходом от более упорядоченного к менее упорядоченному состоянию или, напротив, от менее упорядоченного к более упорядоченному.

Доминирующей и кажущейся на первый взгляд почти очевидной является точка зрения, согласно которой переход от ламинарного течения к турбулентному есть переход к более хаотическому состоянию. Она четко выражена, например, на стр. 9 в [70]: «Турбулентное движение является хаотическим. Термин «хаотическое» в данном случае представляет собой почти синоним термина «турбулентное»».

Имеется, однако, и противоположная точка зрения (гл. 24 в [34]). Она согласуется с высказыванием на стр. 195 в [48]: «Долгое время турбулентность отождествлялась с хаосом или шумом. Сегодня мы знаем, что это не так... переход от ламинарного течения к турбулентному является процессом самоорганизации. Часть энергии системы, которая в ламинарном течении находилась в тепловом движении молекул, переходит в макроскопическое организованное движение». Эту картину можно рассматривать как словесное описание развитой в работе [40] теории (см. также [41, 38]). Приведем основные результаты работы [40].

Принимаем за состояние физического хаоса состояние локального равновесия в ламинарном потоке. Оно характеризуется распределением

$$f_{\perp}(r, v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(v - u_{\perp}(r))^2}{2kT} \right], \quad (18.1)$$

$u_{\perp}(r)$ — скорость ламинарного потока в точке r . Энтропия

$$S_{\perp}(r) = -nk \int \ln f_{\perp}(r, v) \cdot f_{\perp}(r, v) dv, \quad n = \frac{N}{V}. \quad (18.2)$$

В турбулентном потоке гидродинамическая скорость — случайная функция. По этой причине случайным является и распределение

$$\tilde{f}_{\perp}(r, v, t) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{u}_{\perp}(r, t))^2}{2kT} \right]. \quad (18.3)$$

Мерой неопределенности может служить осредненная энтропия

$$S_{\perp} = \langle \tilde{S}_{\perp} \rangle = -nk \int \langle \ln \tilde{f}_{\perp} \cdot \tilde{f}_{\perp} \rangle dv. \quad (18.4)$$

Эффективная функция Гамильтона определяется структурой распределения (1), поэтому дополнительное условие (5.5) имеет теперь вид

$$\int \frac{m}{2} (v - u_{\perp})^2 f_{\perp} dv = \int \frac{m}{2} (v - u_{\perp})^2 \tilde{f} dv. \quad (18.5)$$

$u_{\perp} = \langle \tilde{u} \rangle$ — осредненная скорость турбулентного потока.

Дополнительное условие (5) можно сравнить с условием $(1/2) \langle E^2 \rangle = \text{const}$ для генератора Ван-дер-Поля. Из него следовало выражение (11.3). Добавляемое таким путем на пороге генерации дополнительное хаотическое движение при развитой генерации переходит в более организованное.

Дополнительное условие (5) приводит к аналогичному следствию. Из него следует, что по критерию S-теоремы сравнение с потоком проводится при разных температурах T_{π} , $T_{\tau} \equiv T$ таких, что

$$kT_{\pi} = kT + \frac{1}{3} m \langle (\delta u)^2 \rangle > kT, \quad (18.6)$$

где δu — пульсация гидродинамической скорости. Таким образом, разность температур определяется напряжением Рейнольдса. С учетом (6) находим искомое выражение для разности энтропий

$$T(S_{\pi} - S_{\tau}) = \frac{3}{2} kTn \ln \frac{kT + (m/3) \langle (\delta u)^2 \rangle}{kT} \approx \frac{mn}{2} \langle (\delta u)^2 \rangle. \quad (18.7)$$

Соответствующая производная по управляющему параметру

$$\frac{d}{d \text{Re}} (S_{\pi} - S_{\tau}) > 0. \quad (18.8)$$

Результаты (18.7), (18.8) показывают, что разность энтропии $S_{\pi} - S_{\tau}$ является функцией Ляпунова и ламинарное течение, принятое за состояние физического хаоса, неустойчиво. Это дает основание считать переход ламинарного течения к стационарному турбулентному течению примером процесса самоорганизации.

Большая упорядоченность турбулентного потока проявляется, в частности, в возникновении турбулентной вязкости. При этом перенос импульса от слоя к слою гидродинамического потока происходит не на молекулярном уровне, как при ламинарном течении, а является теперь кооперативным.

Можно это выразить и иными словами: индивидуальное, неорганизованное сопротивление при ламинарном потоке сменяется при переходе коллективным, и следовательно, более организованным, сопротивлением.

Отметим, что оценке относительной степени упорядоченности состояний гидродинамических течений и генераторов по критерию S-теоремы посвящены также работы [73, 74].

Итак, на основе S-теоремы, сформулированной для процессов эволюции в пространстве управляющих параметров, показано, что стационарное турбулентное течение может быть более упорядоченным, более высокоорганизованным, чем ламинарное. Большую упорядоченность турбулентного движения можно, конечно, выявить и путем рассмотрения временной эволюции в замкнутой системе от начального неравновесного движения к конечному равновесному. По H-теореме энтропия при этом возрастает, и, следовательно, в процессе эволюции имеет место не самоорганизация, а деградация более упорядоченного в начальный момент состояния (см. конец раздела 2). Наличие деградации может быть зафиксировано по повышению температуры. Рассмотрим простейший пример.

Пусть в замкнутой системе в начальный момент создана однородная турбулентность с распределением (18.3). В процессе эволюции устанавливается равновесное состояние с распределением f_0 — распределением (18.1) при $u_{\pi} = 0$ и энтропией S_0 . Поскольку система является макроскопической, то энергия системы совпадает, практически, с ее средним значением, поэтому относительную степень упорядоченности начального (турбулентного) и равновесного движений можно характеризовать разностью энтропии $\langle \tilde{S}_{\tau} \rangle$, S_0 . Если скорость $\tilde{u}$ мала по сравнению с тепловой скоростью, то отклонения $\delta \tilde{f} = \tilde{f} - f_0$ малы и разность энтропий определяется выражением

$$S_0 - \langle \tilde{S}_{\tau} \rangle = \frac{kn}{2} \int \frac{\langle \delta \tilde{f} \delta \tilde{f} \rangle}{f_0} dv = \frac{kn}{2} \int \left(\frac{m v \tilde{u}}{kT} \right)^2 f_0 dv \geq 0. \quad (18.9)$$

После интегрирования мы снова приходим к результату (7)!

Повторяя опыт про разных начальных условиях, по температурам равновесных состояний можно судить об относительной степени упорядоченности двух начальных турбулентных движений.

19. Производство энтропии при ламинарном и турбулентном течениях.

Производство энтропии, наряду с самой энтропией, также может служить для сравнительной оценки степени упорядоченности состояний открытых систем. Покажем это на примере перехода от ламинарного течения к стационарному турбулентному течению.

Следуя работе [71], сопоставим значения производства энтропии для двух состояний потока: стационарного осредненного турбулентного течения, которое возникает при числах Рейнольдса $Re > (Re)_{кр}$; мысленного (неустойчивого при этих числах Рейнольдса) ламинарного течения. В работе [71] было показано, что при дополнительном условии одинаковости напряжения на стенках канала для указанных течений, т. е. при одинаковых значениях динамической скорости v_* , производство энтропии при турбулентном течении σ_T меньше, чем при ламинарном (неустойчивом при рассматриваемых условиях) течении, т. е. $\sigma_T < \sigma_L$.

Таким образом, реальный процесс идет по пути с меньшим производством энтропии. Это можно принять за признак большей упорядоченности турбулентного течения и рассматривать переход от ламинарного течения к осредненному турбулентному течению как процесс самоорганизации.

Приведем для иллюстрации результат расчета производства энтропии для течения Куэтта в плоском канале [71]:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_L} = \frac{Re}{2R_*^2} \leq 1. \quad (19.1)$$

В него входят два характерных числа Рейнольдса

$$Re = \frac{2uh}{\nu}, \quad R_* = \frac{v_* h}{\nu}, \quad (19.2)$$

v_* — динамическая скорость, h — расстояние между плоскостями, $2u$ — относительная скорость плоскостей. Знак равенства относится к ламинарному течению, когда закон сопротивления (зависимость чисел Рейнольдса Re, R_*) имеет вид $Re = 2R_*^2$. Для турбулентного течения закон сопротивления таков, что отношение σ_T/σ_L меньше единицы. Так, для области развитой турбулентности

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_L} = \frac{1}{\kappa} \frac{\ln Re}{Re} < 1, \quad Re \gg (Re)_{кр}. \quad (19.3)$$

$\kappa = 0,4$ — константа Кармана.

Расчет производства энтропии σ_T, σ_L проводился в [71] при дополнительном условии постоянства напряжения на стенках. Выбор такого условия диктуется структурой выражения для производства энтропии и видом закона сопротивления.

Основываясь на приведенном частном результате, сформулируем принцип самоорганизации по критерию производства энтропии.

20. Принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации. В работах И. Пригожина (см. [36, 72]) был сформулирован принцип минимума производства энтропии в стационарных состояниях. Сущность его состоит в следующем:

$$\sigma(t) \geq \sigma_{ст}, \quad (20.1)$$

где $\sigma_{ст}$ — производство энтропии в стационарном состоянии, а $\sigma(t)$ — в текущем (нестационарном) состоянии. Справедливость этого результата

была доказана лишь для линейных систем. Общее доказательство для нелинейных систем отсутствует. Напротив, известны примеры, когда этот принцип нарушается [36].

Вернемся к неравенству (19.1). Оно определяет отношение двух величин: производства энтропии устойчивого усредненного турбулентного течения и неустойчивого (при тех же числах Рейнольдса) ламинарного. Основываясь на этом примере, сформулируем утверждение, которое назовем: «Принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации». Сущность принципа состоит в следующем.

Рассмотрим процесс самоорганизации, который формируется последовательностью неравновесных фазовых переходов. Пусть $a_{кр}$ — критическое значение управляющего параметра, при котором происходит очередная бифуркация. Через $\sigma_{уст}$ обозначим значение производства энтропии в новом устойчивом состоянии. Этой величине отвечает производство энтропии σ_t при турбулентном течении. Прежнее — добифуркационное — состояние становится при $a > a_{кр}$ неустойчивым. Обозначим через $\sigma_{неуст}$ соответствующее производство энтропии. Оно соответствует величине σ_d мысленного (в закритической области неустойчивого) ламинарного течения. Расчеты величин $\sigma_{неуст}$, $\sigma_{уст}$ и здесь следует проводить при дополнительном условии, конкретный вид которого зависит от характера рассматриваемого процесса. В приведенных обозначениях сформулированный выше принцип выражается неравенством

$$\sigma_{неуст} > \sigma_{уст}. \quad (20.2)$$

Оно означает, что при неравновесных фазовых переходах, формирующих процесс самоорганизации, система идет по пути уменьшения производства энтропии.

Вопрос об общем доказательстве этого принципа остается открытым. Можно, однако, предположить, что приведенный выше конкретный пример будет стимулировать исследования в этом направлении.

21. Заключение. В заключение работы рассмотрим пример математической модели биологической эволюции, на котором можно выявить еще одну важную роль энтропии.

21.1. Энтропия — мера разнообразия в процессах биологической эволюции. Мы видели, что энтропия Больцмана — Гиббса — Шеннона, наряду с ее традиционной ролью в статистической теории и теории информации, может служить и мерой относительной степени упорядоченности в процессах самоорганизации. Покажем, что в дополнение к этому энтропия может играть и еще одну роль — быть мерой разнообразия, необходимого для естественного отбора в процессах биологической эволюции. Для этого надо расширить класс рассматриваемых математических моделей, которые рассматривались в работах М. Эйгена, М. В. Волькенштейна, В. Эбелинга и других авторов [30–32, 75].

Состояние системы характеризуем, как и выше, распределением $f(X, t)$ набора переменных X . Будем, наряду с энтропией $S = \langle S \rangle = - \int \ln f \cdot f \, dX$ рассматривать и неусредненную — флуктуирующую энтропию — $\ln f(X, t)$. Через Ω обозначим объем, в котором заключены переменные. При равномерном распределении $f = 1/\Omega$.

В качестве характеристики разнообразия принимаем функцию

$$W(X, t) = \ln(f(X, t) \Omega). \quad (21.1)$$

При однородном распределении, когда $f = 1/\Omega$, она обращается в нуль, и, следовательно, разнообразие отсутствует. Среднее разнообразие согласно

(1) определяется равенством

$$\langle W \rangle = S_0 - \langle S \rangle, \quad S_0 = \ln \Omega. \quad (21.2)$$

Оно, таким образом, определяется разностью энтропии S_0 , $\langle S \rangle$.

Следуя работе [75], для функции распределения $f(X, t)$ используем модельное уравнение реакционно-диффузионного типа (ср. с (15.1)). Теперь, однако, «реакционный» член выразим через флуктуацию разнообразия. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha (\ln f - \langle \ln f \rangle) f + D \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}, \quad \int f dX = 1. \quad (21.3)$$

Коэффициент α назовем *параметром эволюции*, так как характер процесса существенно зависит от знака α . В уравнении (3) D — интенсивность шума, вызывающего мутации в отдельных элементах рассматриваемой системы.

С помощью (3) запишем уравнение баланса энтропии

$$\frac{d \langle S \rangle}{dt} = - \frac{d \langle W \rangle}{dt} = - \alpha \langle (\ln f - \langle \ln f \rangle)^2 \rangle + D \int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 dX. \quad (21.4)$$

Рассмотрим три частных случая.

1) $\alpha = 0$. Уравнение (4) сводится к уравнению баланса энтропии для процесса диффузии. В процессе эволюции к однородному распределению среднее разнообразие W уменьшается, а энтропия увеличивается. Это пример Н-теоремы.

2) $\alpha < 0$. Оба члена в правой части уравнения (4) положительны. И здесь процесс идет к равновесному состоянию: $f = 1/\Omega$, $W = \langle W \rangle = 0$.

3) $\alpha > 0$. Флуктуации разнообразия уменьшают среднюю энтропию и, следовательно, увеличивают среднее разнообразие. В стационарном состоянии уравнение баланса энтропии принимает вид

$$\alpha \langle (\ln f - \langle \ln f \rangle)^2 \rangle \equiv \alpha \langle (W - \langle W \rangle)^2 \rangle = D \int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^2 dX. \quad (21.5)$$

Таким образом, достигается стационарное состояние с равным нулю производством энтропии, при котором дисперсия разнообразия конечна и определяется интенсивностью шума, вызывающего мутации. Тем самым открывается возможность для естественного отбора.

В стационарном режиме при $\alpha > 0$ уравнение (3) для функции распределения принимает вид

$$D \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \alpha \ln f \cdot f = \alpha \langle \ln f \rangle f, \quad \int f dX = 1. \quad (21.6)$$

Возникает своеобразная задача на собственные значения, в которой собственным значением является среднее значение логарифма искомой функции распределения, т. е. энтропия или среднее разнообразие (ср. с уравнением (1) из § 10 в [76]).

21.2. О некоторых проблемах статистической теории открытых систем. Приведенные критерии самоорганизации были проиллюстрированы на простых примерах. Они могут быть использованы, естественно, и для анализа процессов самоорганизации в более интересных для практических приложений системах, например, при исследовании процессов в плазме [76], в оптических системах [78–79], в задачах прогнозирования [80]. В этот перечень можно также включить физические, химические и биологические системы, в которых используются уравнения реакционно-диффузионного типа (кроме цитированных выше см. [81, 82]).

В теории динамического хаоса большую роль играют критерии хаотичности на основе фрактальной размерности [17, 22, 26, 27, 83, 84]. Вопрос

о роли фрактальной размерности в статистической теории неравновесных процессов интересен и требует специального рассмотрения.

Особое значение в последние годы приобрела проблема описания «хаотических» движений в квантовых системах. Литература приведена в недавнем обзоре [85]. Отметим лишь, что многие из изложенных выше результатов могут быть перенесены и на квантовые системы.

В рассмотренных выше примерах управляющие параметры менялись квазистатически, а энтропия выражалась через одновременные распределения. Отказ от этих ограничений, в частности, использование двухвременных функций распределения открывает, естественно, широкие новые возможности в теории самоорганизации.

В завершение краткого заключения отметим книгу «Принципы самоорганизации» [86] — сборник докладов, по-видимому, первого симпозиума по проблемам самоорганизации. Он был проведен в 1961 г. Лабораторией применения вычислительных машин в биологии Иллинойского университета США. Сборнику предпослано предисловие редактора перевода. Приведем выдержку из него: «...самоорганизация остается на протяжении многих веков, пожалуй, самым загадочным явлением, самой сокровенной тайной природы... читатель не найдет в нем [в сборнике] ни одной работы, которая претендовала бы на раскрытие принципов самоорганизации».

Эти слова написаны более четверти века тому назад. Продвинулись ли мы за это время в понимании принципов самоорганизации? В определенной мере, конечно, да. И все же здесь гораздо больше нерешенных проблем, чем окончательных результатов. Это лишь способствует расширению интереса к этому новому быстроразвивающемуся междисциплинарному направлению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н и к о л и с Г., П р и г о ж и н И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
2. П р и г о ж и н И. От существующего к возникающему. — М.: Наука, 1985.
3. Х а к е н Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
4. Х а к е н Г. Синергетика. — М.: Мир, 1985.
5. L o g e n z E. // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130.
6. С и н а й Я. Г. // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова-Грекова. — М.: Наука, 1979.
7. А р н о л ь д В. И. // УФН. 1983. Т. 141. С. 569.
8. Странные аттракторы / Пер. под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1984.
9. З а с л а в с к и й Г. М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
10. М о н и н А. С. // УФН. 1986. Т. 150. С. 61.
- [11] H o l d e n A. V Chaos. — Princeton: University Press, 1986.
12. Ш у с т е р Х. Г. Детерминированный хаос. — М.: Наука, 1988.
13. E s k m a n n J., R u e l l D. // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 617.
14. M a y R. // Nature. 1976. V. 261. P. 459.
15. G l e i s k J. Chaos. — London: Heinemann, 1988.
16. Ф е й г е н б а у м М. // УФН. 1983. Т. 141. С. 343.
17. А н и щ е н к о В. С. Стохастические автоколебания в радиофизических системах. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, ч. 1, 1985; ч. 2, 1986.
18. Ш а п и р о А. П., Л у п о в С. П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. — М.: Наука, 1983.
19. Б а з ы к и н А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.: Наука, 1985.
20. Ш а р к о в с к и й А. Н. // Укр. мат. журн. 1964. Т. 16. С. 71.
- [21] Ш а р к о в с к и й А. Н., М а й с т р е н к о Ю. Л., Р о м а н е н к о Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1986.
22. Н е й м а р к Ю. И., Л а н д а П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.
23. G r o s s m a n n S., T h o m a s S. // Zs. Naturforsch. 1977. Bd 32. S. 1353.
24. Л и х т е н б е р г А., Л и б е р м а н М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
25. П о л а к Л. С., М и х а й л о в А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. — М.: Наука, 1975.
26. С м и р н о в Б. М. // УФН. 1986. Т. 149. С. 177.
27. С о к о л о в И. М. // УФН. 1986. Т. 150. С. 221.

28. Нелинейные волны: Структуры и бифуркации/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. — М.: Наука, 1987.
29. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.//УФН. 1987. Т. 152. С. 3.
30. Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. — М.: Мир, 1973.
- [31] Волькенштейн М. В.//УФН. 1984. Т. 143. С. 429.
32. Ebeling W., Feistel R. Physik der Selbst-organization und Evolution. — Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
33. Гиббс Д. В. Термодинамика. Статистическая физика/Под ред. Д. Н. Зубарева. — М.: Наука, 1982.
34. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. — М.: Наука, 1982; англ. перевод: New York: Hardwood Academic Publ., 1986.
35. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. — М.: Наука, 1983.
36. Стратонович Р. Л. Неравновесная нелинейная термодинамика. — М.: Наука, 1985.
37. Гардинер К. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
38. Klimontovich Yu. L.//Physica. Ser. A. 1987. V. 142. P. 390.
39. Климонтович Ю. Л.//Письма ЖТФ. 1983. Т. 9. С. 1412.
40. Климонтович Ю. Л.//Ibidem. 1984. Т. 10. С. 80.
- [41] Ebeling W., Klimontovich Yu. L. Self-organization and Turbulence in Liquids. — Leipzig: Teubner, 1984.
42. Klimontovich Yu. L.//Zs. Phys. Kl. B. 1987. Bd 66. S. 125.
43. Климонтович Ю. Л.//Письма ЖТФ. 1988. Т. 14. С. 631.
44. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. — М.: Наука, 1950.
45. Климонтович Ю. Л.//ТМФ. 1971. Т. 9. С. 109.
46. Климонтович Ю. Л.//УФН. 1973. Т. 110. С. 537.
47. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. — М.: Наука, 1975.
48. Гречаный О. А. Статистическая теория необратимых процессов в системах, далеких от термодинамического равновесия. — Киев: Наукова думка, 1988.
49. Klimontovich Yu. L.//Physica Ser. A. 1987. V. 142. P. 374.
50. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.
- [51] Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2. — М.: Мир, 1978.
52. Naken H.//Zs. Phys. Kl. B. 1985. Bd 61. S. 329; Bd 62. S. 255.
53. Naken H. Information and Self-organization. — Berlin; Heidelberg; New York, London; Paris; Tokyo: Springer-Verlag, 1988.
54. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1984.
55. Анищенко В. С., Астахов В. В.//Радиотехн. и электрон. 1983. Т. 28. С. 1109.
56. Анищенко В. С., Климонтович Ю. Л.//Письма ЖТФ. 1984. Т. 10. С. 816.
57. Климонтович Ю. Л., Бониц М.//Ibidem. 1986. Т. 12. С. 1353; Zs. Phys. Ser. B. 1986. Bd 70. S. 241.
58. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. — М.: Прогресс, 1986.
59. Климонтович Ю. Л.//Письма ЖТФ. 1985. Т. 11. С. 1232; 1987. Т. 13. С. 175.
60. Климонтович Ю. Л., Четвериков В. И.//Ibidem. 1987. Т. 14. С. 977.
- [61] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.//Бюл. МГУ. Секц. А. I. 1937, № 6. С. 1.
62. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987.
63. Кринский В. И., Михайлов А. С. Автоволны. — М.: Знание, 1984.
64. Кернер Б. С., Осипов В. В.//Микроэлектроника. 1981. Т. 10. С. 407.
65. Зельдович Я. Б. Химическая физика и гидродинамика. — М.: Наука, 1984.
66. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.
67. Turing A. M.//Proc. Roy. Soc. Ser. B. 1952. V. 237. P. 37.
68. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1987. Т. 30. С. 131.
69. Klimontovich Yu. L.//Self-organization by Non-linear Processes/Ed. by W. Ebeling, H. Ulbricht. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1986.
70. Фрост У., Моулден Т. Турбулентность. — М.: Мир, 1980.
- [71] Климонтович Ю. Л., Энгель-Херберт Х.//ЖТФ. 1984. Т. 54. С. 440.
72. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. — М.: ИЛ, 1960.

- 73. Ebeling W., Engel-Helbert, Herzel H.//Ann. d. Phys. 1986. Bd 43. S. 187.
- 74. Ebeling W., Engel-Herbert H.//Physica. Ser. A. 1988. V. 149. P. 182. 195.
- 75. Ebeling W., Engel A., Esser B.//J. Stat. Phys. 1984. V. 37. P. 369.
- 76. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
- 77. Кадомцев Б. Б.//Труды международной конференции по физике плазмы. — Киев: Наукова думка, 1988.
- 78. Ораевский А. Н.//Тр. ФИАН СССР. — М.: Наука, 1986.—Т. 171. С. 3.
- 79. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Пруидзе Д. В., Шмальгаузен В. И.//Препринт МГУ № 53. — Москва, 1986.
- 80. Илькова Л. Ш., Кравцов Ю. А., Мергелян О. С., Эткин В.С.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1985. Т. 28. С. 929.
- [81] Автоволновые процессы в системах с диффузией/Под ред. М. Т. Гапоновой-Греховой. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
- 82. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1985. Т. 49. С. 1054.
- 83. Farmer J., Ott E., Yorke J.//Physica. Ser. D. 1983. V. 7. P. 153.
- 84. Grossberger P.//J. Stat. Phys. 1981. V. 26. P. 173.
- 85. Елютин П. В.//УФН. 1988. Т. 155. С. 397.
- 86. Принципы самоорганизации/Пер. под ред. А. Я. Лернера. —М.: Мир, 1966.