

539.12.01

**АНОМАЛИИ И НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ
КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ****М. А. Шифман**

(Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	561
1. Киральная аномалия в модели Швингера	562
1.1. Модель Швингера на колечке. 1.2. Дираковский подвал. Волновая функция вакуума. 1.3. Ультрафиолетовая регуляризация. 1.4. Тэта-вакуум. 1.5. Два лица аномалии.	
2. Аномалии в квантовой хромодинамике	575
2.1. Классические симметрии. 2.2. Аксиальная и масштабная (дилатационная) аномалии. 2.3. Многопетлевые поправки. 2.4. Аномалии и внешние токи.	
3. Низкоэнергетические теоремы КХД. Приложения к адронной физике . . .	583
3.1. Масштабные тождества Уорда. 3.2. Корреляционные функции топологической плотности. 3.3. Конверсия глюонов в пионы и фотоны. 3.4. Коррелятор смешанных токов. 3.5. Эффективная связь хиггсовского бозона с нуклонами и пионами. 3.6. Спектр пионов в распадах $\psi' \rightarrow J/\psi \pi\pi$, $\Upsilon' \rightarrow \Upsilon \pi\pi$.	
Заключение	597
Список литературы	597

Введение. В этом обзоре мы обсудим квантовые аномалии и следствия для теории адронов, которые из них вытекают.

Термин «квантовые аномалии» в теории поля имеет вполне конкретный узкий смысл. Рассмотрим действие, обладающее некоторой инвариантностью на классическом уровне. Если эту инвариантность невозможно сохранить на квантовом уровне, т. е. с учетом квантовых поправок, то подобное явление называется квантовой аномалией.

С квантовой аномалией теоретики столкнулись еще в дохромодинамическую эру (знаменитая «загадка» $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$; см., например, обзор¹⁾). После триумфа калибровочных теорий (модель Глэшоу — Вайнберга — Салама в 1972 г. и КХД в 1973 г.) проблема получила второе рождение. Вопрос об аномалиях вышел из тени и выдвинулся на первый план, стал одной из наиболее обсуждаемых теоретических конструкций.

Аномалии бывают двух типов — назовем их внутренними и внешними. В первом случае речь идет о калибровочной симметрии — калибровочная инвариантность классического действия нарушается на квантовом уровне. Иными словами, при учете квантовых поправок — «петель» — перестает сохраняться ток, с которым взаимодействуют калибровочные бозоны.

Внешние аномалии также приводят к несохранению тока. Однако в этом случае аномальный ток не связан с калибровочными бозонами и отвечает внешним глобальным симметриям классического действия.

Обычно считается, что наличие внутренних аномалий — это катастрофа для теории. Такие теории невозможно последовательно квантовать, они неперенормируемы и внутренне несамосогласованы. (В последнее время, впрочем, появились работы²⁾, авторы которых пытаются как-то бороться с этими проблемами. Мы не будем их касаться, так как развитие здесь далеко от

завершения.) Стандартная стратегия состоит в том, чтобы изгнать внутренние аномалии путем специального подбора полей в исходном лагранжиане. Например, в модели Глэшоу — Вайнберга — Салама внутренняя киральная аномалия сокращается только при вполне определенном значении гиперзарядов кварков и лептонов, а именно при стандартном значении, — причем в сокращении участвует весь набор кварков и лептонов, входящих в данное поколение. Требование сокращения внутренних аномалий накладывает ограничение на структуру калибровочных моделей. Эти ограничения, довольно жесткие, иногда являются путеводной нитью при построении моделей. Достаточно напомнить, что в суперструнном подходе, претендующем на роль «теории всего на свете», сокращение внутренних аномалий оставляет всего два возможных варианта калибровочной группы, SO_{32} либо $E_8 \times E_8$ ³.

Мы оставим в стороне эти вопросы. Обе темы — квантование теорий с внутренними аномалиями и сокращение внутренних аномалий при построении калибровочных моделей — требуют специального обсуждения.

Тема настоящего обзора — внешние аномалии. Наша цель — пояснить, как можно проще и нагляднее, физический смысл явления и продемонстрировать, сколь обширные следствия для теории адронов вытекают из факта существования двух аномалий в квантовой хромодинамике. Внимание, которое будет уделено педагогическим моментам, а также специальное ударение на практических приложениях — оба этих аспекта выделяют данный обзор из большого количества прекрасных материалов, посвященных аномалиям и появившихся в литературе за последнее время. В частности, отмечу обзор⁴, где можно найти весьма полное обсуждение технических и математических деталей и подробную библиографию.

Я начну с простейшего из известных мне примеров — двумерной квантовой электродинамики, которая очень хорошо иллюстрирует ответы на вопросы: «Какие свойства теории приводят к возникновению квантовых аномалий?» и «В чем физическая природа явления?». Будет видна принципиальная важность двух моментов: а) наличие бесконечного числа степеней свободы в теории поля; б) столкновение двух классических симметрии, из которых только одна выйдет «победителем» на квантовом уровне — ее удастся сохранить за счет второй симметрии, которую придется принести в жертву. Именно эта последняя и есть квантовая аномалия.

Затем я вкратце напомним, какие внешние аномалии бывают в калибровочных теориях, и подробно остановлюсь на киральной и конформной аномалиях КХД. Наиболее объемистый третий раздел посвящен следствиям из этих аномалий для теории адронов.

1. Киральная аномалия в модели Швингера.

1.1. Модель Швингера на колечке. По-видимому, простейшая калибровочная модель — это двумерная квантовая электродинамика с безмассовым фермионом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4e_0^2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} i \hat{D} \psi, \quad (1.1)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности фотонного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.2)$$

e_0 — калибровочная константа связи, которая в двумерии имеет размерность $[m]$, D_μ — ковариантная производная:

$$iD_\mu = i\partial_\mu + A_\mu, \quad (1.3)$$

и, наконец, ψ — двухкомпонентное спинорное поле.

Гамма-матрицы можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \sigma_2, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^5 = \sigma_3 \quad (\text{в пространстве Минковского}), \\ \gamma^1 &= \sigma_1, \quad \gamma^2 = \sigma_2, \quad \gamma^5 = \sigma_3 \quad (\text{в евклидовом пространстве}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В соответствии с этим выбором спинор вида

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

будем называть левым ($\gamma_5 \psi_L = \psi_L$), а спинор вида

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

— правым ($\gamma_5 \psi_R = -\psi_R$).

Несмотря на значительное упрощение по сравнению с четырехмерным случаем динамика модели (1.1) все еще слишком сложна для наших целей. Действительно, набор асимптотических состояний в этой модели радикально отличается от полей, присутствующих в лагранжиане. В двумерной теории фотон, как известно, не имеет поперечных степеней свободы, и от него остается по существу лишь кулоновское взаимодействие, которое зато растет линейно с расстоянием. Линейный рост кулоновского потенциала приводит к тому, что заряженные фермионы в модели Швингера «не вылетают», каким бы малым ни было значение константы связи e_0 . Модель (1.1) даже использовалась как прототип для описания конфайнмента в КХД (см., например, ⁵).

Для того чтобы сделать ситуацию более простой, поступим так. Рассмотрим систему, описываемую лагранжианом (1.1), в конечной пространственной области длиной L . Если $e_0 L$ мало, так что $e_0 L \ll 1$, кулоновское взаимодействие никогда не становится сильным, и его можно трактовать как малое возмущение, пертурбативно. В частности, в нулевом порядке этим эффектом вообще можно пренебречь.

Примем периодические граничные условия для поля A_μ и антипериодические для ψ . Таким образом, задача, которую нам предстоит рассмотреть, — теория (1.1) на колечке. Отметим, что антипериодические граничные условия на фермионное поле наложены из соображений удобства. Как будет видно ниже, с принципиальной точки зрения любые другие граничные условия — например, периодические — подошли бы ничуть не хуже.

Итак,

$$\begin{aligned} A\left(x = -\frac{L}{2}, t\right) &= A\left(x = \frac{L}{2}, t\right), \\ \psi\left(x = \frac{L}{2}, t\right) &= -\psi\left(x = -\frac{L}{2}, t\right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Следовательно, поля A и ψ можно разложить в ряд Фурье по модам ($\exp(ikx \cdot 2\pi/L)$ для бозонов с $\exp\{i[k + (1/2)]x \cdot 2\pi/L\}$ для фермионов). Вспомним теперь о том обстоятельстве, что лагранжиан (1.1) инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований:

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha(x, t)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x, t). \quad (1.6)$$

Совершенно очевидно, что все моды для поля A , за исключением нулевой моды (т. е. $k = 0$), откалибровываются. Действительно, член типа $a(t) \times \exp(ikx)$ в A_1 убивается с помощью калибровочной функции $\alpha(x, t) = -(ik)^{-1} a(t) \exp(ikx)$, которая, как и следует, периодична на колечке и не нарушает условий (1.5).

Таким образом, в общем случае можем считать, что A_1 — не зависящая от x константа.

Однако это еще не конец истории, поскольку мы не исчерпали всех возможностей калибровочной инвариантности. Существует еще класс допу-

стимых калибровочных преобразований с калибровочной функцией, *не периодичной по x* ,

$$\alpha = \frac{2\pi}{L} nx, \quad (1.7)$$

где n — целое число ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Несмотря на неперiodичность, такой выбор калибровочной функции также согласован с условиями (1.5). Действительно, поскольку $\partial\alpha/\partial x = \text{const}$, $\partial\alpha/\partial t = 0$, периодичность для A_μ не нарушается. Аналогичное утверждение имеет место и для фазового фактора $\exp(i\alpha)$, так как разность фазы α на концах интервала $x \in [-L/2, L/2]$ кратна 2π .

В итоге приходим к выводу, что переменную A_1 (напомним, что A_1 — константа в смысле x -зависимости) не следует рассматривать на всем интервале изменения $(-\infty, \infty)$. Точки A_1 , $A_1 \pm 2\pi/L$, $A_1 \pm 4\pi/L$ и т. д. являются калибровочно эквивалентными и должны быть отождествлены. Независимой переменной A_1 является лишь на интервале $[0, 2\pi/L]$, а при дальнейшем изменении A_1 мы попадаем в калибровочный образ этого исходного интервала. Следуя общепринятой терминологии, можно сказать, что переменная A_1 живет на колечке длиной $2\pi/L$.

С калибровочной инвариантностью теории связан закон сохранения электрического заряда. Действительно, лагранжиан (1.1) (при конечном L) инвариантен относительно умножения фермионного поля на постоянную фазу:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \psi^+ \rightarrow \psi^+ e^{-i\alpha}.$$

Используя обычные рассуждения, из этой фазовой инвариантности легко получить сохранение электрического тока

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad \dot{Q}(t) = 0,$$

где

$$Q = \int j_0(x, t) dx.$$

Зануление $\partial_\mu j_\mu = 0$ можно проверить непосредственно из уравнений движения. Отметим, что классический лагранжиан (1.1) допускает еще одно преобразование симметрии — глобальное киральное вращение

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \psi, \quad \psi^+ \rightarrow \psi^+ e^{-i\alpha\gamma^5},$$

при котором правые и левые фермионы приобретают фазы противоположного знака ($\gamma^5 = \sigma_3$). Если киральный заряд левого фермиона $Q_5 = +1$, для правого фермиона $Q_5 = -1$. На классическом уровне аксиальный ток

$$j_{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$$

сохраняется точно так же, как и электромагнитный. Сохранение Q и Q_5 можно интерпретировать как сохранение числа левых и правых фермионов по отдельности. Этот факт совершенно очевиден для любых борновских графиков. Действительно, в таких графиках фермионные линии не обрываются — сколько входит, столько и выходит, и, кроме того, рассеяние на фотоне не меняет киральности фермионной линии. При квантовании теории из этих двух симметрий удастся сохранить лишь одну.

Как будет видно ниже, характерные частоты возбуждений для A_1 порядка e , в то время как характерные частоты, связанные с фермионными степенями свободы, порядка L^{-1} . Поскольку $eL \ll 1$, переменная A_1 является адиабатической по отношению к фермионным степеням свободы. Займемся более детально фермионным сектором, считая A_1 фиксированной (не зависящей от времени) величиной.

1.2. Д и р а к о в с к и й п о д в а л . В о л н о в а я ф у н к ц и я в а - к у у м а . Итак, следуя стандартным предписаниям адиабатического приближения, «заморозим» фотонное поле A_μ , рассматривая его как внешнее. В принятой калибровке компонента A_1 сводится к постоянной. Что касается компоненты A_0 , то при $eL \ll 1$ можно считать $A_0 \approx 0$ (тот факт, что в действительности $A_0 \neq 0$, приводит к пренебрежимо малым поправкам).

Разница между этими компонентами заключается в том, что квантовые флуктуации A_0 малы, а по A_1 волновая функция не будет локализованной при $A_1 \approx 0$. Именно с этим явлением — возможностью ухода на большие значения A_1 — и будут связаны наблюдаемые проявления аномалии. Нулевая компонента фотонного поля ответственна за кулоновское взаимодействие между зарядами; соответствующий эффект $\sim eL \ll 1$ и не проявляется в старшем приближении, которым мы и ограничимся в настоящем разделе.

Уравнение Дирака двумерной электродинамики, которое определяет фермионные уровни энергии, имеет вид

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_3 \left(i \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \right) \right] \psi = 0. \quad (1.8)$$

Для k -го стационарного состояния $\psi \sim \exp(-iE_k t) \psi_k(x)$ и энергия k -го состояния

$$E_k \psi_k = -\sigma_3 \left(i \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \right) \psi_k(x). \quad (1.9)$$

Далее, собственные функции пропорциональны

$$\psi_k \sim \exp \left[i \left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L} x \right] \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.10)$$

причем дополнительное слагаемое $\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right) x$ в показателе экспоненты обеспечивает антипериодические граничные условия (см. (1.5)). В итоге получаем, что энергия k -го уровня для левых фермионов $(\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix})$ равна

$$E_{k(L)} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{L} + A_1; \quad (1.11a)$$

для правых фермионов $(\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix})$

$$E_{k(R)} = - \left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L} - A_1. \quad (1.11b)$$

Структура уровней энергии в зависимости от A_1 показана на рис. 1; штриховой линией указано поведение уровней $E_{k(L)}$, сплошной — $E_{k(R)}$. При $A_1 = 0$ уровни энергии для левых и правых фермионов вырождены.

С увеличением A_1 вырождение снимается, уровни разъезжаются. В точке $A_1 = 2\pi/L$ структура уровней точно такая же, что и при $A_1 = 0$, — вырождение снова имеет место. Одинаковость точек $A_1 = 0$ и $A_1 = 2\pi/L$ — воспоминание о калибровочной инвариантности исходной теории (см. обсуждение выше).

Отметим, что эта одинаковость достигается нетривиальным образом: при переходе от $A_1 = 0$ к $A_1 = 2\pi/L$ происходит перестройка фермионных уровней. Все левые уровни сдвигаются на один интервал вверх, все пра-

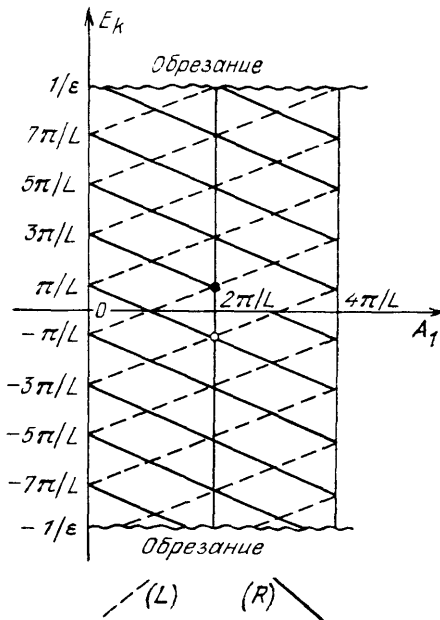


Рис. 1

вые — на один интервал вниз. Именно это явление, перестройка фермионных уровней, и ответственно за киральную аномалию в данной модели, о чем более подробно речь пойдет ниже.

Перейдем теперь от одночастичного уравнения Дирака к теоретико-полевой модели и, прежде всего, займемся построением основного состояния (вакуума). Согласно известной теории Дирака структура фермионной части вакуумной волновой функции такова: все уровни, лежащие в «дираковском подвале», полностью заполнены, а все уровни с положительной энергией свободны. Ниже мы будем использовать следующие обозначения — соответственно для заполненных и незаполненных уровней с данным k :

$$|1_{L,R}, k\rangle, |0_{L,R}, k\rangle.$$

Индекс L (R) показывает, что речь идет о левых (правых) фермионах.

Напомним, что A_1 является медленно меняющейся адиабатической переменной, квантовая механика которой будет обсуждаться позднее. Зафиксируем сначала значение A_1 вблизи нуля, $A_1 \approx 0$; тогда фермионная волновая функция вакуума, как видно из рис. 1, сведется к

$$\Psi_{\text{ferm vac}} = \left(\prod_{k=-1, -2, \dots} |1_L, k\rangle \right) \left(\prod_{k=0, 1, 2, \dots} |0_L, k\rangle \right) \times \\ \times \left(\prod_{k=0, 1, 2, \dots} |1_R, k\rangle \right) \left(\prod_{k=-1, -2, \dots} |0_R, k\rangle \right). \quad (1.12)$$

Дираковский подвал, т. е. все уровни с отрицательной энергией, при этом полностью заполнены.

Пусть теперь A_1 адиабатически возрастает от 0 до $2\pi/L$. Тот же рисунок показывает, что при $A_1 = 2\pi/L$ волновая функция (1.12) описывает состояние, которое с точки зрения нормально заполненного дираковского подвала содержит одну левую частицу и одну правую дырку (кружки на рис. 1).

Изменяются ли квантовые числа фермионного сектора в процессе перехода от $A_1 = 0$ к $A_1 = 2\pi/L$? Отвечая на этот вопрос самым наивным образом, мы бы сказали, что при рождении частицы и дырки полный электрический заряд не меняется, так как электрические заряды частицы и дырки, очевидно, противоположны. Иными словами, электрический ток сохраняется.

С другой стороны, киральные заряды левой частицы и правой дырки одинаковы (равны $+1$) и, следовательно, в обсуждаемом переходе

$$\Delta Q_5 = 2. \quad (1.13)$$

Соотношение (1.13) можно переписать в виде

$$\Delta Q_5 = \frac{L}{\pi} \Delta A_1$$

или, разделив на время перехода Δt , в виде

$$\dot{Q}_5 = \frac{L}{\pi} \dot{A}_1. \quad (1.14)$$

Таким образом, приходим к выводу, что сохраняющейся величиной является

$$\int \left(j_{05} - \frac{1}{\pi} A_1 \right) dx. \quad (1.15)$$

Ток, отвечающий заряду (1.15), очевидно, равен

$$\tilde{j}_{\mu 5} = j_{\mu 5} - \frac{1}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu, \quad \partial_\mu \tilde{j}_{\mu 5} = 0, \\ \partial_\mu j_{\mu 5} = \frac{1}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu, \quad (1.16)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$. Второе равенство в формуле (1.16) и представляет собой знаменитую аксиальную аномалию

в модели Швингера. Нам удалось вывести ее «на пальцах» из картинки движения фермионных уровней во внешнем поле $A_1(t)$. Оказывается, на этом языке киральная аномалия представляет собой чрезвычайно простое и широко известное явление: пересечение тем или иным уровнем (или несколькими уровнями) нулевой отметки на шкале энергий! Наличие бесконечного числа уровней и дираковская «многочастичная» интерпретация, согласно которой выход заполненного уровня «из подвала» означает рождение частицы, а погружение уровня «в подвал» — рождение дырки (античастицы), — весьма существенный элемент всей конструкции. В случае конечного числа уровней, когда подобная интерпретация отсутствует, для квантовой аномалии нет места. Отметим здесь же и несколько иной, хотя и неразрывно связанный с предыдущим, аспект картины. Движение уровней происходит параллельно во всей толще дираковского подвала независимо от энергии уровня. Поэтому выход уровней под нулевую отметку происходит одновременно с уходом уровней под ультрафиолетовое обрезание, которое всегда неявно присутствует в теории поля (ниже мы введем его явно). Именно поэтому эвристический вывод аномалии, данный в этом разделе, и более стандартное рассуждение, основанное на ультрафиолетовой регуляризации, фактически одно и то же. Часто бывает более удобно следить именно за тем, как уровни дираковского подвала пересекают ультрафиолетовое обрезание, а в настоящих (неигрушечных) теориях типа квантовой хромодинамики речь фактически идет не об удобстве, а об абсолютной необходимости в силу известного явления «инфракрасного рабства».

Связь между ультрафиолетовой и инфракрасной интерпретациями аномалий более подробно обсуждается в следующем разделе и разделе 1.5. Заинтересованному читателю рекомендуем обратиться к оригинальной работе ⁴⁵, содержащей анализ всех тонких моментов.

1.3. У л ь т р а ф и о л е т о в а я р е г у л я р и з а ц и я . Несмотря на всю наглядность эвристического вывода, который дан в разделе 1.2, почти по каждому из «очевидных» пунктов, сформулированных выше, внимательный читатель может задать вопрос. Действительно, почему именно волновая функция (1.12) выбрана в качестве правильного вакуума? В каком смысле энергия этого состояния минимальна, ведь согласно (1.11), (1.12)

$$E \sim - \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L},$$

и сумма этого ряда не определена (ряд расходится)?

Далее, обычно считается, что квантовые аномалии связаны с необходимостью ультрафиолетовой регуляризации теории. Если так, то при чем здесь дираковский подвал и пересечение уровнями нулевой отметки?

Как это ни удивительно, все эти вопросы связаны друг с другом. Пожалуй, удобнее начать с последнего. Поясним, что хотя об ультрафиолетовой регуляризации до сих пор не говорилось ни слова, она является ключевым элементом; более того, вывод, намеченный выше, неявно подразумевает определенную регуляризацию.

Фермионные уровни простираются на энергетической шкале до неограниченно больших энергий (точнее, $|E|$). Волновая функция (1.12), описывающая фермионный сектор при $A_1 \approx 0$, содержит, в частности, прямое произведение бесконечно большого числа заполненных состояний $|1_R, k\rangle$, $|1_L, k\rangle$ с отрицательной энергией. Ясно, что подобный объект — бесконечное произведение — плохо определен, и при вычислении физических величин необходима регуляризация: вклад, отвечающий большим энергиям (импульсам), должен быть обрезан тем или иным способом.

На первый взгляд, достаточно из всех сумм по k просто выбросить члены с $|k| > |k|_{\max}$, где $|k|_{\max}$ — некоторое фиксированное число, не завися-

шее от A . Заранее очевидно, однако, что такой рецепт приведет к нарушению калибровочной инвариантности и несохранению электрического заряда. Действительно, в калибровочной теории импульс p фигурирует только в комбинации $(p + A)$, и любое калибровочно-инвариантное обрезание должно быть обрезанием по величине $p + A$, а не p (или, что то же самое, k).

Чтобы поставить эвристическое рассмотрение, данное выше, на более прочный математический фундамент, можно (и удобно) воспользоваться следующей регуляризацией. Вместо исходных токов

$$j_\mu = \bar{\psi}(t, x) \gamma_\mu \psi(t, x), \quad j_{\mu 5} = \bar{\psi}(t, x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(t, x) \quad (1.17)$$

введем регуляризованные объекты

$$j_\mu^{\text{Reg}} = \bar{\psi}(t, x + \varepsilon) \gamma_\mu \psi(t, x) \exp \left(-i \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dx \right), \quad (1.18)$$

$$j_{\mu 5}^{\text{Reg}} = \bar{\psi}(t, x + \varepsilon) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(t, x) \exp \left(-i \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dx \right).$$

(Этот метод в литературе называется швингеровской, или ε -раздвижкой). Имеется в виду, что в конечном ответе для физических величин $\varepsilon \rightarrow 0$. На промежуточных этапах, однако, вычисления проводятся с фиксированным ε . Экспоненциальный фактор в (1.18) обеспечивает калибровочную инвариантность «раздвинутых» токов. Без этого фактора умножение $\psi(t, x)$ на x -зависящую фазу,

$$\psi(t, x) \rightarrow \exp(i\alpha(x)) \psi(t, x),$$

дает

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^+(t, x + \varepsilon) \psi_\beta(t, x) &\rightarrow \\ &\rightarrow \exp(-i\alpha(x + \varepsilon) + i\alpha(x)) \psi_\alpha^+(t, x + \varepsilon) \psi_\beta(t, x). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Добавка к A_1 ($A_1 \rightarrow A_1 - \partial\alpha/\partial x$) компенсирует фазовый множитель в (1.19).

Теперь не составляет труда «научно» вычислить электрический и аксиальные заряды состояния (1.12). Если

$$Q = \int j_0^{\text{Reg}}(t, x) dx, \quad Q_5 = \int j_{05}^{\text{Reg}}(t, x) dx, \quad (1.20)$$

то для вакуумной волновой функции (1.12), очевидно, получаем

$$Q = Q_L + Q_R, \quad Q_5 = Q_L - Q_R, \quad (1.21)$$

$$Q_L = \sum_k \exp \left\{ -i\varepsilon \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L} + A_1 \right] \right\}, \quad (1.22)$$

$$Q_R = \sum_{k'} \exp \left\{ -i\varepsilon \left[\left(k' + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L} + A_1 \right] \right\}. \quad (1.23)$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ правый и левый заряды Q_L и Q_R превращаются в сумму единичек — по одной единичке для каждого из бесконечного числа заполненных уровней. Формулы (1.22) и (1.23) еще раз демонстрируют, что принятая регуляризация калибровочно инвариантна. Действительно, эффективно обрезается вклад состояний с $|p_1 + A_1| \gtrsim \varepsilon^{-1}$. Если бы не фазовый множитель в (1.18), обрезающая функция не содержала бы нужной комбинации, $(p + A)$. Здесь следует спешно добавить, что хотя по внешнему виду выражения (1.22), (1.23) не отличаются друг от друга, на самом деле они не совпадают, поскольку суммирование идет по разным значениям k, k' . По каким именно, нетрудно установить из рис. 1 (см. также (1.11)).

Пусть $|A_1| < \pi/L$. Тогда для левого подвала заполнены уровни с $k = -1, -2, \dots$. Для правого подвала заполнены уровни с $k = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, при $|A_1| < \pi/L$

$$\begin{aligned} Q_L &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \exp \left\{ -i\varepsilon \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L} + A_1 \right] \right\}, \\ Q_R &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left\{ -i\varepsilon \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L} + A_1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Вычисляя суммы, входящие в (1.24), и разлагая по ε , получаем

$$\begin{aligned} (Q_L)_{\text{vac}} &= \frac{1}{-i\varepsilon(2\pi/L)} + \frac{L}{2\pi} A_1 + O(\varepsilon), \\ (Q_R)_{\text{vac}} &= \frac{1}{i\varepsilon(2\pi/L)} - \frac{L}{2\pi} A_1 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Подведем некоторые итоги. Из соотношений (1.25) видно, что при выбранных числах заполнения $\Psi_{\text{ferm.vac}}$ электрический заряд вакуума $Q = Q_L + Q_R$ равен нулю и не зависит от времени (сохраняется). Аксиальный заряд $Q_5 = Q_L - Q_R$ состоит из двух слагаемых: первое представляет бесконечно большую *постоянную*, второе дает зависимость от A_1 . В переходе $(A_1 \approx 0) \rightarrow (A_1 \approx 2\pi/L)$ аксиальный заряд изменяется на две единицы.

Эти выводы для нас не новы. Выше мы получили то же самое из нестрогой, но наглядной картинки, в которой электрический и аксиальный заряды подвала определялись интуитивно. Теперь мы научились находить сумму бесконечного числа «единичек», зарядов левого и правого подвалов, с помощью хорошо определенной процедуры, обрезающей уровни с $|p_1 + A_1| \gtrsim \gtrsim \varepsilon^{-1}$. Можно сказать, что в рамках этой процедуры несохранение аксиального заряда в переходе $(A_1 \approx 0) \rightarrow (A_1 \approx 2\pi/L)$ связано не с пересечением нулевой отметки, а с уходом правого уровня под обрезание и приходом левого из-под обрезания (см. рис. 1). Впрочем, оба явления — пересечение нулевой отметки и выход (уход) из-под обрезания — происходят одновременно и являются проявлением двойкой природы аномалии, допускающей как ультрафиолетовую, так и инфракрасную интерпретации. (Связь между «ультрафиолетом» и «инфракрасией» в квантовых аномалиях лежит в основе так называемого условия самосогласования 'т Хоофта, которое еще будет обсуждаться дальше.)

Последнее замечание, касающееся аксиального заряда. Вместо (1.18) можно было бы регуляризовать аксиальный ток по-другому, так что $\partial_\mu j_{\mu 5} = 0$ и $\Delta Q_5 = 0$. (Хорошее упражнение для читателя!) При этом, однако, выражение для аксиального тока не было бы калибровочно инвариантным. Более конкретно, сохраняющийся аксиальный ток кроме (1.18) включает дополнительное слагаемое $(-1/\pi) \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu$ (ср. с (1.16)). Подобная регуляризация привела бы к несохранению векторного тока. Как уже отмечалось, не существует регуляризации, обеспечивающей одновременно и калибровочную инвариантность, и сохранение $j_{\mu 5}$.

1.4. Т э т а - в а к у у м. От обсуждения зарядов перейдем к вычислению энергии фермионного подвала — задаче, которую не удалось бы решить на наивном уровне без регуляризации. К счастью, все необходимые элементы у нас уже имеются.

Фермионная часть гамильтониана (см. (1.8))

$$H = -\psi^\dagger(t, x) \sigma_3 \left(i \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \right) \psi(t, x)$$

после ε -раздвижки сводится к

$$H^{\text{Reg}} = -\psi^\dagger(t, x + \varepsilon) \sigma_3 \left(i \frac{\partial}{\partial x} - A_1 \right) \psi(t, x) \exp \left(-i \int_x^{x+\varepsilon} A_1 dx \right). \quad (1.26)$$

Отсюда легко получаем регуляризованные выражения для энергии левого и правого подвалов:

$$\begin{aligned} E_L &= \sum_{k=-1}^{-\infty} E_{k(L)} \exp(-i\varepsilon E_{k(L)}), \\ E_R &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{k(R)} \exp(i\varepsilon E_{k(R)}), \end{aligned} \quad (1.27)$$

где энергии индивидуальных уровней $E_{k(L)}$ и $E_{k(R)}$ приведены в (1.11), а суммирование ведется по всем уровням с отрицательной энергией. Конкретные значения индексов суммирования в (1.27) соответствуют $|A_1| < \pi/L$. Выражения (1.27) имеют наглядную интерпретацию. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ они сводятся просто к сумме энергий всех заполненных уровней из дираковского подвала. Дополнительные экспоненты обеспечивают сходимость суммы.

Заметим далее, что E_L и E_R можно получить дифференцированием по ε выражений для Q_L и Q_R (см. (1.24)), для которых — геометрическая прогрессия — суммирование тривиально. Разлагая по ε , находим:

$$\begin{aligned} E_{\text{подв}} = E_L + E_R &= \frac{L}{2\pi} \left(A_1^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) + O(\varepsilon) + \\ &+ (\text{не зависящая от } A_1 \text{ постоянная}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Здесь уместно сделать два замечания. Прежде всего, поучительно проверить, что приближение Борна — Оппенгеймера, принятое с самого начала, действительно оправдано. Иными словами, убедимся, что динамика переменной A_1 — медленная в масштабе, характерном для фермионного сектора.

Эффективный лагранжиан, определяющий квантовую механику для A_1 , имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{L}{2e_0^2} \dot{A}_1^2 - \frac{L}{2\pi} A_1^2. \quad (1.29)$$

Это обычный гармонический осциллятор с волновой функцией основного состояния

$$\Psi_0(A_1) = \left(\frac{L}{e_0 \pi^{3/2}} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{L A_1^2}{2\pi^{1/2} e_0} \right) \quad (1.30)$$

и расщеплением уровней

$$\omega_A = \frac{e_0}{\pi^{1/2}}. \quad (1.31)$$

Характерные частоты в фермионном секторе $\omega_{\text{ferm}} \sim L^{-1}$. Следовательно, $\omega_A/\omega_{\text{ferm}} \sim L e_0 \ll 1$, что и требовалось доказать.

Второе замечание касается структуры полной волновой функции вакуума. Мы убедились, что

$$\Psi_{\text{vac}} = \Psi_{\text{ferm} \cdot \text{vac}} \Psi_0(A_1) \quad (1.32)$$

является собственным состоянием гамильтониана рассматриваемой модели в приближении Борна — Оппенгеймера ($\Psi_{\text{ferm} \cdot \text{vac}}$ дано в (1.12)). Волновая функция (1.32) вполне удовлетворительна с точки зрения «малых» калибровочных преобразований, т. е. тех, которые непрерывным образом стягиваются к единичному (точнее, (1.32) относится к определенной калибровке, в которой калибровочные степени свободы, связанные с A_1 , исключены, и A_1 не зависит от x). Она, однако, не инвариантна относительно «больших» калибровочных преобразований $A_1 \rightarrow A_1 + (2\pi/L)k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

Сущность ситуации становится понятной, если вернуться к рис. 1. Когда A_1 совершает малые и медленные колебания вблизи нуля, дираковский подвал заполнен так, как указано в (1.12). A_1 , однако, может также колебаться вблизи калибровочно-эквивалентной точки $A_1 = 2\pi/L$. Если при

$A_1 \approx 2\pi/L$ не перестроить фермионный сектор, оставив его, как в (1.12), то такая конфигурация, очевидно, не является вакуумной (соответствует частице плюс дырка). На это указывает, в частности, график зависимости энергии подвала от A_1 (рис. 2). Чтобы получить конфигурацию с меньшей энергией, следует заполнить фермионные уровни по-другому:

$$\prod_{k=-2, -3, \dots} |1_L, k\rangle \prod_{k=-1, 0, 1, \dots} |1_R, k\rangle$$

(незаполненные уровни не указаны явно, ср. с (1.12)).

Таким образом, гильбертово пространство разбивается на секторы, отвечающие разным способам заполнения фермионного подвала. Волновая функция наинизшего состояния в n -м секторе имеет вид

$$\Psi_n = \left(\prod_{k=-1-n}^{-\infty} |1_L, k\rangle \right) \left(\prod_{k=-n}^{\infty} |1_R, k\rangle \right) \Psi_0 \left(A_1 - \frac{2\pi}{L} n \right) \quad (1.33)$$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Способ заполнения фермионного подвала скоррелирован с положением, вблизи которого осциллирует A_1 . Очевидно, что Ψ_n и $\Psi_{n'}$ ($n \neq n'$) ортогональны друг другу из-за фермионных множителей.

Можно ли из Ψ_n сконструировать волновую функцию вакуума, инвариантную относительно «больших» калибровочных преобразований $A_1 \rightarrow A_1 + (2\pi/L)k$ (с одновременной перенумерацией фермионных уровней)? Можно, причем такая волновая функция строится неоднозначно и зависит от нового скрытого параметра θ , который часто называется вакуумным углом. Рассмотрим линейную суперпозицию

$$\Psi_{\theta \text{ vac}} = \sum_n e^{in\theta} \Psi_n, \quad (1.34)$$

которая, так же как и Ψ_n , является собственным состоянием гамильтониана с наинизшей энергией. Калибровочное преобразование $A_1 \rightarrow A_1 + (2\pi/L)$ умножает волновую функцию θ -вакуума (1.34) на фазу $e^{i\theta}$. Общая фаза волновой функции ненаблюдаема; все физические величины, получаемые усреднением операторов по θ -вакууму, инвариантны относительно калибровочных преобразований.

Итак, мы познакомились еще с одним понятием — вакуумным углом θ , θ -вакуумом, которое совершенно прозрачно в модели Швингера на колечке и имеет прямой аналог в квантовой хромодинамике. Отметим, что наличие вакуумного угла θ в волновой функции можно имитировать на лагранжевом языке добавлением к лагранжиану (1.1) так называемой топологической плотности, которая в модели Швингера имеет вид

$$\Delta \mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{\theta}{\pi} F_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu. \quad (1.35)$$

Соответствующая добавка к действию — интеграл от полной производной, она не сказывается на уравнениях движения и дает нулевой вклад для любой топологически тривиальной конфигурации $A(x, t)$. Топологическая плотность $\Delta \mathcal{L}_\theta$ срабатывает лишь в том случае, если

$$\int (A_1(x, t = +\infty) - A_1(x, t = -\infty)) dx = 2\pi k \quad (|k| = 1, 2, \dots).$$

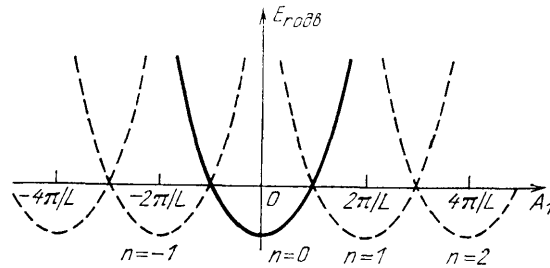


Рис. 2

Я упомянул о топологии не случайно. Очень поучительно обсудить топологический аспект рассматриваемой теоретической конструкции, тем более, что и здесь также имеется прямая параллель с квантовой хромодинамикой.

Обсуждаемая модель обладает $U(1)$ -калибровочной инвариантностью. Элемент группы $U(1)$, как известно, записывается в виде $\exp(i\alpha)$. Если воспользоваться калибровочной свободой, то поля $A_1(x, t)$ и $\psi(x, t)$ в данный (фиксированный) момент времени можно привести к стандартному виду, подобрав подходящую функцию $\exp(i\alpha(x))$.

Далее, при наших граничных условиях переменная x представляет собой колечко (длиной L), и следовательно, мы имеем дело с (непрерывным) отображением кольца в группу $U(1)$. Множество таких отображений разбивается на классы, что математически записывается так:

$$\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}. \quad (1.36)$$

Смысл формулы (1.36) весьма прост. Внутри каждого класса все отображения по определению сводятся друг к другу непрерывными деформациями. Отображения из разных классов друг в друга непрерывно не переводятся.

В случае, когда рассматриваются отображения кольца в $U(1)$, различие между классами абсолютно наглядно. По существу, мы имеем дело с отображением кольца на кольцо ($\exp(i\alpha)$ — это то же кольцо; рис. 3). Обегав кольцо a один раз и вернувшись в исходную точку, мы при этом совершаем замкнутый обход и по кольцу b , причем обегает его $0, \pm 1, \pm 2$ и т. д. числа раз. (Минус отвечает намотке в противоположном направлении.) Количество намоток вокруг кольца b и определяет класс отображения. Ясно, что все отображения с данным числом намоток непрерывно деформируемы друг в друга и, наоборот, при разном числе намоток непрерывная деформация невозможна. Буква \mathbb{Z} в (1.36) обозначает множество целых чисел и показывает, что разных классов отображений столько же, сколько целых чисел; каждый класс характеризуется целым числом, которое имеет смысл числа намоток. Отображения, отвечающие нулевому числу намоток, называются топологически тривиальными, остальные — топологически нетривиальными.

Этой информации достаточно, чтобы установить существование n вакуумных секторов ($n = 0, \pm 1, \dots$), для которых $(A_\mu)_{\text{vac}} \propto \partial_\mu \alpha_{(n)}$ ($\alpha_{(n)}$ принадлежит n -му классу), даже не имея явной конструкции типа (1.33). Отсюда же вытекает необходимость введения вакуумного угла θ .

Наконец, последнее, что мы разберем в связи с моделью Швингера. Иногда задают вопрос, почему волновую функцию вакуума нельзя выбрать в виде (1.33) с фиксированным n . Ведь при этом нарушается только калибровочная инвариантность относительно топологически нетривиальных «больших» калибровочных преобразований, а инвариантность относительно «малых» (топологически тривиальных) преобразований остается, а вместе с ней остается и сохранение электрического тока. Почему же необходим переход к

$$\Psi_{\theta \text{ vac}} = \sum_n e^{in\theta} \Psi_n?$$

Дело в том, что Ψ_n в качестве волновой функции вакуума нарушает кластеризацию — одно из основных свойств теории поля, которое восходит к причинности и унитарности теории. Под кластеризацией понимается следующее: вакуумное среднее от T -произведения нескольких локальных операторов должно выражаться через сумму по промежуточным состояниям, которая включает вакуумное состояние плюс возбуждения над данным вакуумом. В нарушении кластеризации можно убедиться непосредственно. Рас-

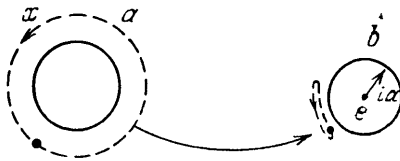


Рис. 3

смотрим двухточечную функцию

$$\mathcal{A}(t) = \langle \Psi_n | T \{ \Theta^+(t) \Theta(0) \} | \Psi_n \rangle, \quad (1.37)$$

где

$$\Theta(t) = \int \bar{\psi}(x, t) (1 + \gamma_5) \psi(x, t) dx.$$

Оператор Θ меняет фермионные числа заполнения на двойку, Θ^+ возвращает их обратно, и в итоге $\mathcal{A}(t) \neq 0$. Более того, при $t \rightarrow \infty$ в евклидовой области $\mathcal{A}(t) \rightarrow \text{const.}$ (Конкретное вычисление с помощью метода бозонизации см., например, в ⁶, где обсуждается предел $L \rightarrow \infty$. Все формулы, однако, обобщаются на случай конечного L .) Выход $\mathcal{A}(t)$ на ненулевую константу при $t \rightarrow \infty$ в силу кластеризации означает ненулевое вакуумное среднее операторов $\bar{\psi}(1 \pm \gamma_5)\psi$.

С другой стороны, если $|\text{vac}\rangle = |\Psi_n\rangle$, то $\langle \bar{\psi}(1 \pm \gamma_5)\psi \rangle = 0$ по тривиальной причине. Действительно, оператор $\bar{\psi}(1 \pm \gamma_5)\psi$, действуя на Ψ_n , рождает электрон и дырку, и соответствующее состояние, очевидно, ортогонально Ψ_n^* .

Свойство кластеризации восстанавливается, если от Ψ_n перейти к θ -вакууму (1.34). При этом отлично от нуля недиагональное среднее

$$\langle \Psi_{n\pm 1}^* | \bar{\psi}(1 \pm \gamma_5)\psi | \Psi_n \rangle \propto L^{-1} e^{-\pi^3/2/L e_0} e^{i\theta}. \quad (1.38)$$

Если рассуждения о необходимости кластеризации покажутся читателю чересчур академическими, можно привести другой аргумент, который, впрочем, отчасти связан с формулой (1.37) и последующим обсуждением. Зададим вопрос: что произойдет, если вместо безмассовой модели Швингера мы рассмотрим модель с малой массой, т. е. введем в лагранжиан (1.1) дополнительный массовый член $\Delta\mathcal{L}_m = -m\bar{\psi}\psi$? Естественно, что физические величины, найденные ранее в безмассовой модели Швингера, «поедут». Столь же естественно, однако, потребовать, чтобы при малых m эти изменения были малы, обращаясь в нуль в пределе $m \rightarrow 0$. В противном случае мы столкнемся с неустойчивой ситуацией, а нам хотелось бы, чтобы массовый член выступал как малое возмущение.

Но при наличии вырожденных состояний (а состояния Ψ_n при разных n как раз и являются таковыми) любое возмущение потенциально опасно и может приводить к большим эффектам. Именно такая катастрофа происходит, в частности, если $\Delta\mathcal{L}_m$, действуя на вакуум, дает «другой вакуум». Иными словами, если оператор $\Delta\mathcal{L}_m$ недиагонален.

Если в качестве вакуума выбраны состояния типа Ψ_n , то $\Delta\mathcal{L}_m$ не является диагональным оператором, как это следует из обсуждения после формулы (1.37) (см. также (1.38)). С другой стороны, массовый член, несомненно, диагонализует в базисе волновых функций (1.34),

$$\langle \Psi_{\theta' \text{vac}} | \Delta\mathcal{L}_m | \Psi_{\theta \text{vac}} \rangle = 0,$$

если $\theta \neq \theta'$.

1.5. Два лица аномалии. В заключение обсудим связь между наглядной картиной, представленной выше, и более стандартным выводом аномалии в модели Швингера. Мы уже обращали внимание на двойкую природу аномалии, являющейся одновременно и инфракрасным, и ультрафиолетовым эффектом. Принятая линия рассуждений больше подчеркивала инфракрасный аспект проблемы — конечный «ящик» служил естественным инфракрасным обрезанием. Тот же самый результат для дивергенции аксиального тока, что и в формуле (1.16), можно получить исходя из ультрафиолетовой регуляризации, как это обычно и делается. При этом, если рассматривается сразу дивергенция, а не ток, как в разделе 1.3, нет нужды дополнительно

вводить инфракрасное обрезание; в частности, можно рассматривать теорию в бесконечном пространстве, так как конечность объема не сказывается при вычислениях на малых расстояниях.

Часто используемый способ ультрафиолетовой регуляризации — метод Паули — Вилларса. В применении к данной модели он сводится к следующему. В дополнение к исходным безмассовым фермионам в модель вводятся очень тяжелые (регуляторные) фермионы с массой M_0 и противоположной метрикой. Последнее означает, что каждая петля из регуляторных фермионов снабжается знаком минус по сравнению с нормальной фермионной петлей. Взаимодействие регуляторных фермионов с фотонами точно такое же, как для исходных фермионов, а единственная разница — масса. Тогда в процессах при низких энергиях ($\ll M_0$) роль фермионов Паули — Вилларса сводится к ультрафиолетовому обрезанию формально расходящихся интегралов

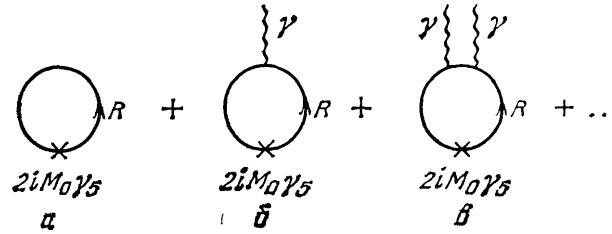


Рис. 4

в фермионных петлях. Ясно, что такой способ регуляризации автоматически гарантирует калибровочную инвариантность и сохранение электромагнитного тока.

В модели, регуляризованной по Паули — Вилларсу, аксиальный ток имеет вид

$$j_{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi + \bar{R} \gamma_{\mu} \gamma_5 R, \quad (1.39)$$

где R — фермионный регулятор, а при вычислении дивергенции можно теперь пользоваться наивными уравнениями движения. Тогда

$$\partial_{\mu} j_{\mu 5} = 2iM_0 \bar{R} \gamma_5 R.$$

Дивергенция отлична от нуля (аксиальный ток не сохраняется!), однако, как и следовало ожидать, содержит лишь регуляторный аномальный член. Последний шаг — замыкание регулятора в петлю и превращение правой части в нормальные легкие поля в пределе $M_0 \rightarrow \infty$. Иными словами, нужно рассмотреть диаграммы рис. 4. Диаграмма рис. 4, *a* не зависит от внешнего поля. Соответствующий вклад в $\partial_{\mu} j_{\mu 5}$ представляет собой число, которое можно положить равным нулю. Диаграмма рис. 4, *в* с двумя фотонными концами, а также все последующие вымирают в пределе $M_0 \rightarrow \infty$. Выживает лишь диаграмма рис. 4, *б*, которая легко вычисляется, например, методом внешнего поля, и дает

$$2iM_0 \bar{R} \gamma_5 R \rightarrow \frac{1}{\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\mu} A_{\nu}.$$

В итоге мы воспроизводим ответ для аномалии

$$\partial_{\mu} j_{\mu 5} = \frac{1}{\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\mu} A_{\nu},$$

полученный ранее другим способом.

2. Аномалии в квантовой хромодинамике.

2.1. К л а с с и ч е с к и е с и м м е т р и и . Прежде чем перейти к квантовым аномалиям в КХД, перечислим симметрии классического действия. Мы будем исходить из теории с n_f безмассовыми кварками и временно забудем о тяжелых кварках, которые несущественны в данном круге вопросов. В реальной ситуации $n_f = 2$ ($q = u, d$) или $n_f = 3$ ($q = u, d, s$). Поправки, связанные с малыми массами u -, d - и s -кварков, могут быть рассмотрены отдельно.

В пределе $m_q = 0$ — в литературе он часто называется киральным — классическое действие КХД

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^4x, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + \sum_q (\bar{q}_L i \hat{D} q_L + \bar{q}_R i \hat{D} q_R), \quad (2.1)$$

$$q_{L,R} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) q$$

(q — кварковое поле, $G_{\mu\nu}^a$ — тензор напряженности глюонного поля) инвариантно относительно следующих глобальных преобразований.

а) Повороты кварков различных ароматов,

$$q \rightarrow Uq, \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix},$$

где q — кварковый столбец, а U — 3×3 -матрица, произвольный элемент $SU(3)$ -группы. Поскольку левые и правые кварки входят в (2.1) в виде независимых слагаемых, допустимы независимые преобразования

$$q_L \rightarrow Uq_L, \quad q_R \rightarrow U'q_R,$$

так что фактически лагранжиан КХД обладает $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрией, которая называется киральной инвариантностью. Генераторы киральных преобразований можно переписать в ином виде, образовав линейные комбинации вращений правых и левых полей. Поэтому можно также сказать, что группа симметрии классического действия (2.1) — $SU(3)_V \times SU(3)_A$.

б) Фазовые $U(1)$ -преобразования двух типов: векторные

$$q_L \rightarrow q_L e^{i\alpha}, \quad q_R \rightarrow q_R e^{i\alpha} \quad (2.2)$$

и аксиальные

$$q_L \rightarrow q_L e^{i\beta}, \quad q_R \rightarrow q_R e^{-i\beta}. \quad (2.3)$$

Физический смысл (2.2) и (2.3) очевиден — любая борновская диаграмма сохраняет число левых и правых фермионных линий по отдельности.

в) Масштабные преобразования (дилатация), т. е. растяжения координат с одновременным перемасштабированием кварковых и глюонных полей в соответствии с их нормальной размерностью:

$$A_\mu(x) \rightarrow \lambda A_\mu(\lambda x), \quad q(x) \rightarrow \lambda^{3/2} q(\lambda x). \quad (2.4)$$

Масштабная инвариантность, очевидно, вытекает из того факта, что классическое действие не содержит ни одной размерной константы; она является частью более обширной конформной группы, обсуждение которой выходит за рамки настоящего обзора.

На квантовом уровне судьба этих симметрии складывается по-разному. Токи, генерирующие $SU(3)_V \times SU(3)_A$ -преобразования, очевидно, сохраняются в КХД и после введения ультрафиолетовой регуляризации. Иными

словами, они являются безаномальными *). При этом векторная SU (3)-симметрия, соответствующая току

$$j_{\mu\nu}^a = j_{\mu L}^a + j_{\mu R}^a \quad (a = 1, \dots, 8),$$

реализуется линейным образом, а что касается аксиальной SU (3)-подгруппы

$$j_{\mu A}^a = j_{\mu L}^a - j_{\mu R}^a,$$

то здесь имеет место спонтанное нарушение симметрии, и данная SU (3)-подгруппа реализуется нелинейно, с участием восьмерки безмассовых голдстоуновских бозонов, π , η , K . (Более подробное обсуждение см. в разделе 2.4.)

Далее, векторная U (1)-инвариантность $q \rightarrow qe^{i\alpha}$ также остается строгой безаномальной симметрией квантовой теории. Именно с этой симметрией связано то обстоятельство, что число кварков в любом процессе сохраняется в рамках КХД.

Наконец, ток, генерирующий аксиальные U (1)-преобразования, и дилатационный ток не сохраняются на квантовом уровне из-за аномалий. На обсуждении аксиальной и дилатационной аномалий мы и сконцентрируем наше внимание.

2.2. Аксиальная и масштабная (дилатационная) аномалии. Как пояснялось выше, конкретный вид аномальных соотношений можно установить, не выходя за рамки теории возмущений, если задать подходящую ультрафиолетовую регуляризацию. Начнем, однако, с отступления и разьясим один тонкий момент, в котором имеется довольно большая путаница. В литературе используются два разных языка для описания одних и тех же аномальных соотношений, причем многие авторы вообще не осознают разницы между этими языками.

Один подход состоит в том, что устанавливается *операторное* соотношение, скажем, между дивергенцией аксиального тока и $G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}$ (см. (2.9)). И аксиальный ток $j_{\mu A}$, и произведение

$$G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a$$

трактуются при этом как гейзенберговские операторы квантовой теории: $j_{\mu A}$ — кварковый оператор, $G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}$ — глюонный оператор. Для того чтобы превратить операторные соотношения в наблюдаемые амплитуды, необходимо проделать еще некоторый путь, вычислив — согласно общим правилам — матричные элементы от операторов, фигурирующих в правой и левой частях равенства. (Слова «наблюдаемые амплитуды» имеют здесь «пиквикский» смысл. В квантовой хромодинамике из-за невылетания наблюдаемы лишь адронные амплитуды, в то время как всюду в разделе 2 речь будет идти только об амплитудах рассеяния кварков и глюонов. То же самое замечание относится и к словосочетанию «матричные элементы».)

Другой способ действий сводится к вычислению непосредственно наблюдаемых амплитуд. Точнее говоря, обычно задается внешнее глюонное поле, а затем в этом поле тем или иным способом находят $\partial_\mu j_{\mu A}(x)$. В отсутствие внешнего поля $\partial_\mu j_{\mu A}(x) = 0$. Факт существования аномалии означает, что $\partial_\mu j_{\mu A}(x) \neq 0$ и $\partial_\mu j_{\mu A}(x)$ локально выражается через внешнее поле в той же самой точке, $G_{\mu\nu}(x)$. Именно в таком духе был проведен анализ аномалии в модели Швингера в разделе 1.

*) Подчеркнем, что утверждение об отсутствии аномалий в ароматно-октетных токах $j_{\mu\nu}^a$ и $j_{\mu A}^a$ относится к собственно квантовой хромодинамике. Включение фотонов, взаимодействующих с кварками по стандартным правилам, приводит к фотонной аномалии в аксиальном токе. Подробнее о такого сорта аномалиях см. раздел 2.4.

Хотя используются одни и те же буквы — что, по-видимому, и порождает путаницу, — совершенно очевидно, что гейзенберговский оператор в точке x и выражение для внешнего поля в той же самой точке далеко не одно и то же. Конечно, в старшем приближении

$$\langle G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} \rangle = (G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu})_{\text{ext}}, \quad \langle G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} \rangle = (G_{\mu\nu} G_{\mu\nu})_{\text{ext}}, \quad (2.5)$$

где $\langle \dots \rangle$ в данном случае означает усреднение по внешнему глюонному полю, а нижний индекс «ext» помечает внешнее поле. Однако уже в следующем приближении в правой части (2.5) возникают поправки по α_s . Поэтому при обсуждении аномальных соотношений необходимо четко отдавать себе отчет в том, о каких именно соотношениях идет речь — операторных или для матричных элементов.

Впрочем, следует сразу же оговориться, что в *однопетлевом приближении* оба варианта неотличимы по виду.

Для вывода низкоэнергетических теорем — а именно таким способом получают приложения к адронной физике (см. раздел 3) — нужны квантовые аномалии в операторной форме. Всюду в дальнейшем под термином «аномалия» будем понимать операторные аномальные соотношения.

Перейдем теперь к вычислениям и начнем со случая аксиальной аномалии, поскольку он проще в техническом отношении и поскольку близкий пример всесторонне разобран в модели Швингера.

Ток, генерирующий аксиальное $U(1)$ -преобразование, имеет вид

$$j_{\mu A} = \sum_{q=u, d, s} \bar{q} \gamma_{\mu} \gamma_5 q. \quad (2.6)$$

Наивное вычисление дивергенции дает

$$\partial_{\mu} j_{\mu A} = \sum_q (\bar{q} \hat{D} \gamma_5 q - \bar{q} \gamma_5 \hat{D} q) = 0,$$

где учтено уравнение движения $Dq = 0$. Однако мы, разумеется, помним об уроке, полученном в модели Швингера, и понимаем, что после введения регуляризации аксиальный ток перестанет сохраняться. В модели Швингера на колечке ($eL \ll 1$) осуществлялся режим слабой связи, и поэтому можно было выбрать любое из альтернативных рассуждений: регуляризацию либо в ультрафиолетовой, либо в инфракрасной области. Оба способа приводили к одному и тому же результату. В квантовой хромодинамике говорить об инфракрасном поведении кварков довольно бессмысленно, и вычисление аномалии желательно сформулировать так, чтобы помимо уравнений движения в задачу входили лишь функции Грина на малых расстояниях. При этом нам придется отказаться от рассмотрения $j_{\mu A}$ и вычислять сразу $\partial^{\mu} j_{\mu A}$.

Применим уже испытанный подход: ультрафиолетовую регуляризацию с помощью ϵ -раздвижки:

$$j_{\mu A}^R = \sum_q \bar{q}(x+\epsilon) \gamma_{\mu} \gamma_5 \left(\exp \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} ig A_{\rho}(y) dy \right) q(x-\epsilon) \quad (2.7)$$

Тогда задача сводится к вычислению кварковой петли в фоновом глюонном поле. Используя уравнения движения и разлагая экспоненту вплоть до членов первого порядка по ϵ , получаем

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} j_{\mu A}^R = \sum_q \{ & \bar{q}(x+\epsilon) [-ig \hat{A}(x+\epsilon) \gamma_5 - \\ & - \gamma_5 ig \hat{A}(x-\epsilon) + ig \gamma_{\mu} \gamma_5 \epsilon_{\mu} G_{\mu\nu}(0)] q(x-\epsilon) \}. \end{aligned}$$

Третий член содержит тензор напряженности глюонного поля и возникает от дифференцирования экспоненты. Для удобства на фоновое глюонное поле наложено калибровочное условие Фока — Швингера $y_{\mu} A_{\mu}^a(y) = 0$, (см.

обзор ⁷⁾, хотя это и не обязательно. В этой калибровке $A_\mu = (y_\rho/2) G_{\rho\mu}(0)$. Как обычно, $A_\mu = (1/2)t^a A_\mu^a$, где t^a — цветовые матрицы Телл-Манна.

Замыкая кварковые концы в петлю, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_{\mu A}^R &= -ig n_f TR_{\text{color}+\text{Lorentz}} (-2i\varepsilon_\rho G_{\rho\mu}(0) \gamma_\mu \gamma_5 S(x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = \\ &= -n_f \frac{g^2}{2} G_{\rho\mu}^a(0) \tilde{G}_{\alpha\beta}^a(0) \frac{\varepsilon_\rho \varepsilon_\alpha}{\varepsilon^2} \frac{1}{8\pi^2} TR_{\text{Lorentz}} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\rho \gamma_5 = \frac{n_f \alpha_s}{4\pi} (G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}_{\alpha\beta}^a)_{\text{ext}}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

здесь $S(y, x)$ — кварковый пропагатор в фоновом поле, для которого использовано известное выражение в калибровке Фока — Швингера в виде разложения по фоновому полю (см. ⁷⁾).

Формула (2.8) дает ответ для аксиальной аномалии в однопетлевом приближении

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_{\mu A} &= \frac{n_f \alpha_s}{4\pi} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{a\alpha\beta}, \\ \tilde{G}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} G_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Этот результат легко воспроизводится и с помощью регуляризации Паули — Вилларса (упражнение для читателей). Эффекты более высокого порядка по α_s будут обсуждаться в разделе 2.3.

Перейдем теперь к дилатационной аномалии. Поучительно проверить, что масштабное преобразование генерируется током

$$j_{\nu D} = x^\mu \theta_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

где $\theta_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса КХД, симметричный и сохраняющийся:

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu} &= -G_{\mu\alpha}^a G_{\nu\alpha}^a + \\ &+ \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}^a G_{\alpha\beta}^a + \frac{i}{4} \sum_q [\bar{q} (\gamma_\mu D_\nu + \gamma_\nu D_\mu) q - \bar{q} (\gamma_\mu \tilde{D}_\nu + \gamma_\nu \tilde{D}_\mu) q]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соответствующий заряд можно представить в виде

$$D \equiv \int j_{0D} d^3x = tH + \tilde{D}, \quad \tilde{D} = \int x^i \theta_{i0} d^3x, \quad (2.12)$$

где H — гамильтониан, и

$$[\tilde{D}, p_i] = ip_i, \quad [\tilde{D}, \exp ip_i x^i] = -(x^i p_i) \exp ip_i x^i \quad (i=1, 2, 3).$$

Пусть $\mathcal{O}(x)$ — произвольный бесцветный оператор. Тогда

$$[D, \mathcal{O}(x)] = t[H, \mathcal{O}(x)] + [\tilde{D}, \mathcal{O}(x)] = -it \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O}(x) + [\tilde{D}, \mathcal{O}(x)]. \quad (2.13)$$

Далее, коммутатор $[\tilde{D}, \mathcal{O}(x)]$ содержит два слагаемых, первое из которых отвечает перемасштабированию x_i , а второе — перемасштабированию оператора \mathcal{O} . Действительно,

$$\begin{aligned} [\tilde{D}, \mathcal{O}(t, x^i)] &= [\tilde{D}, e^{ip_i x^i} \mathcal{O}(t, 0) e^{-ip_i x^i}] = \\ &= [\tilde{D}, e^{ip_i x^i}] \mathcal{O}(t, 0) e^{-ip_i x^i} + e^{ip_i x^i} \mathcal{O}(t, 0) [\tilde{D}, e^{-ip_i x^i}] + \\ &+ e^{ip_i x^i} [\tilde{D}, \mathcal{O}(t, 0)] e^{-ip_i x^i} = -ix^i \partial_i \mathcal{O}(t, x^i) + \\ &+ e^{ip_i x^i} [\tilde{D}, \mathcal{O}(t, 0)] e^{-ip_i x^i}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Легко сообразить, что коммутатор $[\tilde{D}, \mathcal{O}(t, 0)]$ должен быть пропорционален $\mathcal{O}(t, 0)$, и следовательно,

$$[D, \mathcal{O}(x)] = -i \left(x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathcal{O}(x) + d\mathcal{O}(x) \right), \quad (2.15)$$

где d — безразмерное число, которое определяется видом оператора \mathcal{O} . Выше мы использовали лишь общие свойства квантовой теории поля. Числовое значение коэффициента d зависит от конкретной теории. В квантовой хромодинамике d равняется нормальной размерности оператора \mathcal{O} . (Например, если $\mathcal{O}(x) = \mathcal{L}(x)$, где \mathcal{L} — лагранжиан, то $d = 4$.)

Физически в соотношении (2.15) записано изменение масштаба измерения длин и масс. Отсюда и название — масштабные преобразования.

Заметим, что бесцветность оператора \mathcal{O} оговорена не случайно. Для цветных операторов, скажем q или A_μ^a , коммутатор с D , как показывает прямой расчет, не сводится к виду (2.15). Это обстоятельство не должно ставить читателя в тупик. Усложнение связано с фиксацией калибровки, и дополнительные члены можно устранить калибровочным преобразованием.

Если воспользоваться классическими уравнениями движения, то (ср. с (2.11))

$$\partial^\nu j_{\nu D} = \theta_\mu^\mu = 0. \quad (2.16)$$

Отличие от нуля следа тензора энергии-импульса в КХД и есть дилатационная аномалия (при $m_q = 0$ в θ_μ^μ нет неаномальной части). То обстоятельство, что масштабная инвариантность (2.4) теряется на квантовом уровне, очевидно. Действительно, инвариантность (2.4) имеет место потому, что в классическом действии (2.1) нет размерных параметров. Однако уже в однопетлевом приближении размерный параметр с неизбежностью появляется в эффективном действии — ультрафиолетовый параметр обрезания, M_0 .

Именно эту, известную заранее зависимость от M_0 удобнее всего использовать для явного вычисления θ_μ^μ . Однопетлевое эффективное действие можно несколько условно записать в виде

$$S_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{g_0^2} - \frac{b}{16\pi^2} \ln M_0^2 x_{\text{ар}}^2 \right) (G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a)_{\text{ext}} d^4x + \dots, \quad (2.17)$$

где $b = (11/3) N_c - (2/3) N_f$ — первый коэффициент функции Гелл-Манна — Лоу, точки стоят вместо фермионных членов, и мы временно переопределили глюонное поле, $gA \rightarrow A$, так что константа связи фигурирует только как общий множитель перед G^2 .

Приращение эффективного действия при преобразовании (2.4) равно

$$\delta S_{\text{eff}} = -\left(\frac{1}{32\pi^2} b G_{\mu\nu}^2 \right) \ln \lambda, \quad (2.18)$$

что согласно общим правилам означает

$$\partial^\mu j_{\mu D} = -\frac{1}{32\pi^2} b G^2. \quad (2.19)$$

Возвращаясь к стандартной нормировке глюонного поля, окончательно получаем

$$\theta_\mu^\mu = -\frac{b\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + O(\alpha_s^2). \quad (2.20)$$

2.3. Многопетлевые поправки. Хотя в приложениях вполне достаточно ограничиться однопетлевыми выражениями для аномалий (2.9), (2.20), вопрос о поправках, хотя и академический, заслуживает краткого обсуждения.

До недавнего времени считалось, что вопрос этот полностью решен. Именно, по теореме Адлера — Бардина⁸ киральная аномалия — чисто однопетлевая (т. е. поправки к (2.9) отсутствуют), а дилатационная аномалия содержится в правой части полную β -функцию КХД,

$$\beta(\alpha_s(\mu)) = \frac{d\alpha_s(\mu)}{d \ln \mu}.$$

Иными словами, $-b\alpha_s/8\pi$ в формуле (2.20) заменяется на $\beta(\alpha_s)/4\alpha_s$ в старших петлях⁹.

Позднее, однако, выяснилось, что ситуация далеко не столь проста и требует дополнительного изучения¹⁰. Как это ни странно, ошибка в стандартных рассуждениях была впервые выловлена не в рамках КХД, а при рассмотрении ее суперсимметричного обобщения, квантовой суперсимметричной глюодинамики. В суперсимметричных теориях такого типа $j_{\mu A}$ и $\theta_{\mu\nu}$ входят в один супермультиплет¹¹ и, следовательно, коэффициенты в киральной и дилатационной аномалиях не могут быть разными — однопетлевыми для $\partial^\mu j_{\mu A}$ и многопетлевыми для $\theta_{\mu\nu}^\mu$.

Не имея возможности для детального обсуждения петлевых поправок отмечу лишь, что общепринятая трактовка основана на той самой путанице, о которой говорилось в начале раздела 2.2. Стандартный вывод теоремы Адлера — Бардина, по-видимому, справедлив в том случае, если под аксиальной аномалией понимается операторное равенство. В то же время соотношение

$$\theta_{\mu}^\mu = \frac{\beta(\alpha_s)}{4\alpha_s} (G_{\mu}^a G_{\mu\nu}^a)_{\text{ext}} \quad (2.21)$$

имеет место лишь для матричных элементов (ср. с выводом, приведенным в конце раздела 2.2).

Естественно попытаться привести обе аномалии к одной форме — операторной. Как уже отмечалось, при этом $\partial^\mu j_{\mu A}$ исчерпывается однопетлевым приближением (2.9), по крайней мере, при определенном способе ультрафиолетовой регуляризации¹². Что касается $\theta_{\mu\nu}^\mu$, то здесь, строго говоря, мы сейчас не знаем даже двухпетлевого коэффициента перед оператором $G_{\mu\nu}^2$, не говоря уже о более высоких поправках. Вычисления, существующие в литературе, должны быть проанализированы заново с целью отделения истинно ультрафиолетовых вкладов от вкладов, содержащих инфракрасную часть; последнюю следует интерпретировать как матричный элемент.

* * *

Оставшаяся часть этого раздела поясняет данное утверждение, и читатель может опустить ее без ущерба для дальнейшего.

Вычисление эффективного действия, безусловно, весьма удобный способ определения дилатационной аномалии. Термин «эффективное действие» фактически применяется для обозначения двух разных объектов. Один объект — это сумма всех вакуумных петель в заданном внешнем поле. Полученный таким образом функционал Γ , зависящий от внешнего поля, часто называют эффективным действием, хотя более точным является другое его название — генератор одночастично неприводимых вершин. Другой объект — эффективное действие в смысле Вилсона¹³ $S_w(\mu)$, который отличается лишь тем, что в вакуумных петлях учитывается только вклад виртуальных импульсов $p > \mu$. Если Γ представляет собой ϵ -числовой функционал от внешнего поля, то $S_w(\mu)$ — квантовополевой оператор; его можно рассматривать как исходное действие по отношению к низкочастотным флуктуациям. Функционал Γ получается взятием матричных элементов от $\exp(iS_w(\mu))$. Подчеркнем еще раз, что различие между Γ и S_w связано с инфракрасной областью $p \lesssim \mu$.

Стандартное рассуждение, из которого вытекает (2.21), построено на рассмотрении Γ . Именно с помощью этого функционала определяется эффективная константа связи $g^2(\mu)$,

$$\Gamma = -\frac{1}{4} \frac{1}{g^2(\mu)} (G_{\mu\nu}^2)_{\text{ext}} + \dots,$$

дифференцирование которой дает полную β -функцию. Если, однако, мы хотим получить θ_{μ}^μ в операторной форме, вместо Γ необходимо вычислить $S_w(\mu)$.

Иными словами, в двухпетлевых вакуумных графиках во внешнем поле нужно аккуратно выделить инфракрасный вклад.

В КХД этого пока не сделано. Вопрос о том, совпадают или нет высшие коэффициенты в операторной дилатационной аномалии с высшими коэффициентами в β -функции, остается открытым. Но в более простой модели, скалярной электродинамике, показано, что такого совпадения нет¹⁰. Действительно, в скалярной электродинамике (ср. с (2.25))

$$S_W(\mu) = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{2\pi}{\alpha_0} + \frac{1}{3} \ln \frac{M_0}{\mu} + \frac{\alpha_0}{2\pi} \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \ln \frac{M_0}{\mu} \right] F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z D_\mu \varphi^* D_\mu \varphi \right\}, \quad (2.22)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности фотонного поля, φ — комплексное скалярное поле, Z — его константа перенормировки

$$Z = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \frac{\alpha_0}{\pi} \ln \frac{M_0}{\mu} \quad (2.23)$$

и ξ — калибровочный параметр в пропагаторе фотона ($D_{\mu\nu} = e^2 [-g_{\mu\nu} + (\xi k_\mu k_\nu / k^2) / k^2]$).

Из формулы (2.22) видно, что двухпетлевой вклад в оператор $F_{\mu\nu}^2$ не совпадает со вторым коэффициентом β -функции ($\beta^{(2)} = 1/\pi$). Более того, он вообще не является калибровочно инвариантным!

Калибровочная инвариантность восстанавливается, если перейти от S_W к Γ , т. е. после взятия матричного элемента. Формально оператор $\int d^4x D_\mu \varphi^* D_\mu \varphi$ равен нулю по уравнениям движения. Можно убедиться, однако, что во внешнем фотонном поле из-за инфракрасного вклада¹⁰

$$\langle D_\mu \varphi^* D_\mu \varphi \rangle = \frac{1}{64\pi^2} F_{\mu\nu}^2. \quad (2.24)$$

Комбинируя (2.22) — (2.24), находим, что

$$\Gamma = \int \left[-\frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{2\pi}{\alpha_0} + \frac{1}{3} \ln \frac{M_0}{\mu} + \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{M_0}{\mu} \right) F_{\mu\nu}^2 d^4x + \dots \right] \quad (2.25)$$

(ср. с (2.22)). Двухпетлевой коэффициент перед $F_{\mu\nu}^2$ в Γ , как и должно быть, соответствует двухпетлевому коэффициенту в β -функции.

2.4. Аномалии и внешние токи. Если в квантовую хромодинамику ввести дополнительно взаимодействие кварков с фотонами или с другими «внешними» токами, то помимо аксиальной и масштабной аномалий (2.9) и (2.20) появляются и другие, а в аномальных уравнениях для $\partial^\mu j_{\mu A}$ и θ_μ^μ появляются фотонные члены. Обсудим вкратце оба эффекта. Для простоты ограничимся взаимодействием с фотонами, не рассматривая другие внешние токи.

Рассмотрим один из ароматно-октетных аксиальных токов

$$a_\mu^3 = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d \quad (2.26)$$

с квантовыми числами π^0 -мезона. Как отмечалось в разделе 2.2, в КХД $\partial^\mu a_\mu^3 = 0$. В присутствии фотонов дивергенция a_μ^3 отлична от нуля. Легко сообразить, что (см. рис. 5)

$$\partial^\mu a_\mu^3 = \frac{\alpha}{2\pi} N_c (Q_u^2 - Q_d^2) F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

где $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$, $N_c = 3$ — число цветов, $Q_u = 2/3$ и $Q_d = -1/3$ — электрические заряды u - и d -кварков. В правой части (2.27) $F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ — оператор по отношению к фотонам. Если бы мы интересовались амплитудой пере-

хода в два фотона с импульсами $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ и векторами поляризации $\epsilon^{(1)}$ и $\epsilon^{(2)}$, то

$$F\tilde{F} \rightarrow (-2) F^{(1)}\tilde{F}^{(2)}, \quad F_{\mu\nu}^{(i)} = k_{\mu}^{(i)}\epsilon_{\nu}^{(i)} - k_{\nu}^{(i)}\epsilon_{\mu}^{(i)}.$$

Соотношение (2.27) имеет далеко идущие следствия. Зададимся вопросом: «как выглядит амплитуда перехода тока a_{μ}^3 — именно тока, а не $\partial^{\mu}a_{\mu}^3$ — в два реальных фотона?» Чтобы ответить на него, необходимо прежде всего провести кинематический анализ, т. е. выписать все кинематические структуры для амплитуды $a_{\mu}^3 \rightarrow 2\gamma$ при условии $k^{(1)2} = k^{(2)2} = 0$ плюс калибровочная инвариантность по любому из фотонов и плюс соотношение (2.27). Опуская детали этого простого упражнения, приведем ответ:

$$\langle 0 | a_{\mu}^3 | 2\gamma \rangle = -\frac{iq_{\mu}}{q^2} \frac{4\alpha}{\pi} N_c (Q_u^2 - Q_d^2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{\mu}^{(1)} \epsilon_{\nu}^{(1)} k_{\alpha}^{(2)} \epsilon_{\beta}^{(2)} +$$

+ поперечная по q часть, (2.28)

где $q = k^{(1)} + k^{(2)}$.

Поразительным моментом является наличие полюсного множителя q_{μ}/q^2 в правой части ^{14, 15}. Подчеркнем, что (2.28) — точный результат квантовой хромодинамики, справедливый, в частности, в пределе $q^2 \rightarrow 0$. Технически сингулярность в a_{μ}^3 при $q^2 = 0$ есть следствие безмассовости кварков в треугольной диаграмме рис. 5 (имеется в виду инфракрасная интерпретация аномалии). Однако в теории с невылетанием цвета говорить о кварках как о физических состояниях спектра не приходится. Как же понять сингулярность амплитуды $\langle 0 | a_{\mu}^3 | 2\gamma \rangle$ в физических терминах?

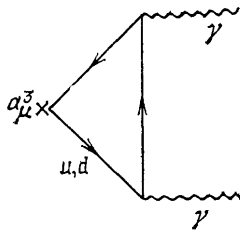


Рис. 5

Объяснение может быть только одно. В физическом спектре должны существовать безмассовые бесцветные составные частицы, которые могут переходить как

в фотоны, так и в аксиальный ток a_{μ}^3 . Вклад этих частиц должен насыщать матричный элемент $\langle 0 | a_{\mu}^3 | 2\gamma \rangle$, точнее, его сингулярную часть.

Таким образом, с учетом безмассовости кварков и в предположении невылетания цвета доказано существование безмассовых адронов. Доказательство основано на том требовании, чтобы аномальные вклады в a_{μ}^3 на уровне кварков и на уровне адронов сшивались друг с другом. Это элегантное рассуждение принадлежит 'т Хоофту ¹⁵ и в литературе получило название условия самосогласования 'т Хоофта.

Попытаемся выяснить, о каких именно адронах идет речь *). В принципе, есть два альтернативных варианта, каждый из которых приводит к сингулярности в a_{μ}^3 :

- а) безмассовые барионы;
- б) безмассовый π -мезон.

Рассмотрим сначала первый сценарий, $M_b = 0$. В теории с u -, d -, s -кварками барионы со спином $1/2$ образуют известный октет

$$B = (p, n, \Sigma^{\pm}, \Lambda, \Sigma^0, \Xi^{-}, \Xi^0). \quad (2.29)$$

*) Аргументы, которые приведены ниже, несколько упрощают ситуацию, оставляя в стороне ряд тонких моментов.

В частности, при обсуждении «барионного» сценария рассматривается лишь октет (2.29). Таким образом, молчаливо полагается, что барионы с другими квантовыми числами, например, $J^P = 1/2^{-}$, не вносят вклада в полюсную часть амплитуды $\langle 0 | a_{\mu}^3 | 2\gamma \rangle$. Строго доказать, что суммарный эффект других барионов не может быть равен (2.28), довольно трудно — требуются дополнительные предположения (см. в этой связи ^{16, 17}). Поэтому, хотя канва доказательства спонтанного нарушения $SU(3)_A$ -симметрии в общих чертах дана здесь правильно, не хотелось бы, чтобы у читателя создалась иллюзия, что вывод о спонтанном нарушении киральной инвариантности — тривиальное обстоятельство, следующее почти из ничего.

Важно, что в рамках этого сценария как векторная, так и аксиальная $SU(3)$ -симметрии реализуются линейно *), и, следовательно, константы связи всех барионов с фотонами и константы $\langle B | a_\mu^3 | B \rangle$ при нулевых переданных импульсах известны (например, $\langle \Sigma^+ | a_\mu^3 | \Sigma^+ \rangle = 2\bar{\Sigma}\gamma_\mu\gamma_5\Sigma$). Вычисляя треугольную диаграмму рис. 6 (точнее, полюсную часть), находим, что вклад барионного октета (2.29) в полюсную часть амплитуды обращается в нуль из-за сокращений: протон сокращает Ξ^- , а Σ^- сокращает Σ^+ . (Остальные барионы отцепляются от фотона.) Немедленный вывод: сценарий (а) не согласуется с аномальным соотношением (2.27).

Таким образом, приходим к заключению, что в реальной ситуации имеет место сценарий б) с безмассовым пионом. Условие самосогласования 'тХоофта' при этом выглядит тривиально (рис. 7) и требует лишь определенного соотношения между константой перехода π^0 в a_μ^3 и амплитудой $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Соответствующий результат давно известен, это предсказание PCAC для амплитуды $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ в терминах f_π знаменитой константы распада $\pi \rightarrow \mu\nu$ ($\langle 0 | a_\mu^3 | \pi^0 \rangle = \sqrt{2} if_\pi q_\mu$, где q — импульс пиона; прекрасный обзор PCAC и подробную библиографию см. в¹⁸⁾).

Существование безмассового пиона, сцепленного с аксиальным током a_μ^3 , означает спонтанное нарушение аксиальной $SU(3)_A$ -симметрии, точнее, ее нелинейную голдстоуновскую реализацию.

Подведем итог. Анализ аномалий в КХД с внешними токами позволяет получить важную дополнительную информацию. В частности, удается доказать столь глубокий результат, как спонтанное нарушение ароматной $SU(3)_A$ -группы и наличие восьмерки голдстоуновских мезонов в КХД.

Здесь уместно сделать небольшое отступление исторического характера. Голдстоуновская природа π -, K -, η -мезонов эксплуатировалась в адронной физике задолго до эры КХД. Техника мягких пионов была создана в 60-е годы. Гипотеза о приближенной киральной инвариантности сильных взаимодействий — а в то время эта догадка действительно была смелой гипотезой — генерировала целый ряд изящных результатов в низкоэнергетической пионной физике. Наиболее типичными, возможно, являются соотношения Гольдбергера — Треймана и Адлера — Вайсбергера (см. в¹⁸⁾). Следствия PCAC оказались чрезвычайно полезными в самых разнообразных приложениях и в целом подтверждались данными. Это обстоятельство окончательно утвердило представление о приближенной киральной инвариантности, что, в свою очередь, при создании КХД послужило ключевым аргументом в пользу векторной связи глюонов с кварками¹⁹⁾. Несколько позднее те же идеи позволили определить массу токовых u -, d - и s -кварков²⁰⁾ и фиксировать кварковый конденсат.

Но вернемся к аномалиям. В начале раздела отмечалось, что введение фотонов (и других «внешних» токов), кроме новых аномалий, модифицирует и старые КХД-аномалии для $\partial^\mu j_{\mu A}$ и θ_μ^μ , приводя к новым членам. Соответствующие эффекты мы обсудим в разделе 3.3.

3. Низкоэнергетические теоремы КХД. Приложения к адронной физике. Низкоэнергетические теоремы в теории поля были изобретены почти столь же давно, как и сама теория поля. Достаточно вспомнить теоремы

*) В КХД удастся строго показать, что спонтанное нарушение векторной $SU(3)_V$ -симметрии невозможно¹⁷⁾.

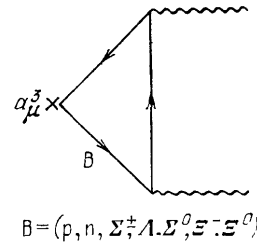


Рис. 6

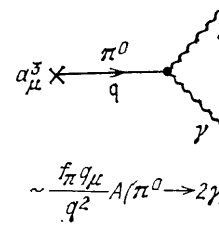


Рис. 7

Лоу²¹ для тормозного излучения фотона и рассеяния фотона на адроне в пределе малых частот.

Как правило, низкоэнергетические теоремы представляют собой соотношения между амплитудами или n -точечными функциями Грина с разным числом концов (частиц) при низких энергиях. Связь между амплитудами возникает как отражение некоторой симметрии, точной или аномальной, существующей в теории. Например, вышеупомянутые теоремы Лоу — следствие калибровочной инвариантности электромагнитного взаимодействия.

Поиски симметрии и ограничений, которые накладывают первые на наблюдаемые величины, приобретают особое значение в теории адронов. Низкоэнергетические теоремы, или тождества Уорда, вытекающие из общих свойств теории и не зависящие от неизвестных деталей конфайнмента, дают информацию о физических процессах, которую зачастую невозможно получить никаким другим способом. В чисто теоретическом плане они служат своеобразными островками известного, точками опоры, к которым прикладывается теоретический «рычаг».

Помимо теорем PCAC, которые представляют собой классический образец низкоэнергетических теорем и были получены задолго до хромодинамической эры*), в хромодинамике возникают свои специфические предсказания как для процессов с участием голдстоуновских мезонов (π , η , K), так и для других величин. Несколько низкоэнергетических теорем было получено вскоре после создания КХД (например,²²). Систематическое исследование всего предмета было начато в работах^{23–26}, а в последнее время развито большое число приложений, основанных на соотношениях (2.9), (2.20). Некоторые из них мы обсудим ниже.

Наиболее нетривиальные результаты относятся к амплитудам, описывающим конверсию глюонов в адроны и фотоны на больших расстояниях. Информация, добытая таким образом, дополняет и уточняет представления об устройстве вакуума и адронов, которые сложились в результате развития метода правил сумм КХД.

В этом разделе мы расскажем о том, как получаются основные низкоэнергетические теоремы, специфические для квантовой хромодинамики. Возможности низкоэнергетических теорем будут проиллюстрированы на нескольких поучительных примерах.

3.1. Масштабные тождества Уорда. Если $m_{u,d,s} = 0$, лагранжиан КХД не содержит массовый параметр, и он возникает только на квантовом уровне,

$$\mu = M_0 e^{-8\pi^2/bg_0^2}, \quad (3.1)$$

где M_0 — масса ультрафиолетового регулятора, а g_0 — соответствующая голая константа связи, $g_0 = g(M_0)$. Это же самое обстоятельство на другом языке можно сформулировать так: наивный след тензора энергии-импульса равен нулю, но за счет треугольной аномалии

$$\sigma(x) \equiv \theta_\mu^\mu(x) = -\frac{b\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a. \quad (3.2)$$

Мы уже встречались с соотношением (3.2) ранее (см. формулу (2.20)).

*) В настоящем обзоре «чистые» следствия PCAC как таковые не обсуждаются. Соответствующие низкоэнергетические соотношения, однако, широко используются как промежуточные строительные блоки. В частности, раздел 3.2, по существу, содержит вывод старого результата Глэшоу — Вайнберга, связывающего коррелятор псевдоскалярных кварковых токов при нулевом импульсе с вакуумным ожиданием $\langle qq \rangle$.

Классическая масштабная инвариантность не исчезает бесследно, и оставляет в квантовой теории воспоминание в виде соотношений типа²³

$$\lim_{q \rightarrow 0} i \int e^{iqx} dx \langle T \{ \mathcal{O}(x), \sigma(0) \} \rangle_{\text{connected}} = -d_n \langle \mathcal{O} \rangle, \quad (3.3)$$

где \mathcal{O} — произвольный локальный оператор, построенный из полей глюонов и/или u-, d- и s-кварков, d_n — его нормальная размерность. Фактически соотношение (3.3) справедливо с точностью до поправок $\mathcal{O}(m_q)$, которые всюду подразумеваются, но не оговариваются явно, за исключением тех случаев, где это необходимо. Чтобы не загромождать запись, индекс «connected» в дальнейшем будем опускать.

Поучительно рассмотреть несколько частных случаев. Если $\mathcal{O}(x) = -(b\alpha_s/8\pi) G^2(x) = \sigma(x)$, то

$$i \int \langle T \{ \sigma(x) \sigma(0) \} \rangle dx = -4 \langle \sigma \rangle. \quad (3.4)$$

Выбрав в качестве \mathcal{O} скалярную плотность кварков, получаем

$$i \int \langle T \{ \bar{q}(x) q(x), \sigma(0) \} \rangle dx = -3 \langle \bar{q}q \rangle. \quad (3.5)$$

Связь между различными функциями Грина, в которых фигурирует оператор σ , имеет место не только при нулевых внешних импульсах, как в (3.3). Точнее говоря, не требуется, чтобы все внешние импульсы равнялись нулю, — те импульсы, которые втекают в «посторонние» операторы \mathcal{O} , могут быть произвольными²⁷.

Вывод этих формул совершенно однотипен, поэтому сконцентрируемся на простейшей из них, формуле (3.3). Начнем доказательство с перемасштабирования глюонного поля,

$$\bar{G}_{\mu\nu}^a = g_0 G_{\mu\nu}^a.$$

Тогда зависимость от g_0 в лагранжиане сводится к $(-1/4g_0^2) \bar{G}_{\mu\nu}^a \bar{G}_{\mu\nu}^a$ и, следовательно,

$$i \int \langle T \{ \mathcal{O}(x), \bar{G}^2(0) \} \rangle dx \equiv -\frac{d}{d(1/4g_0^2)} \langle \mathcal{O} \rangle. \quad (3.6)$$

Кроме того, аргументы, основанные на ренормгруппе, плюс отсутствие других массовых параметров, кроме M_0 , диктуют

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{const} \cdot (M_0 e^{-8\pi^2/bg_0^2})^{d_n}. \quad (3.7)$$

Выполняя дифференцирование, приходим к (3.3).

Простой вывод, приведенный выше, должен быть дополнен, на самом деле, какой-либо регуляризацией, поскольку в большинстве случаев $\langle \mathcal{O} \rangle$ сильно расходится в теории возмущений (редкое исключение из этого правила — оператор $\bar{q}q$, вакуумное ожидание которого исчезает в теории возмущений, если $m_q = 0$). Во всех случаях мы определяем $\langle \mathcal{O} \rangle$ так, чтобы в теории возмущений $\langle \mathcal{O} \rangle = 0$. Тогда ультрафиолетовое обрезание M_0 действительно появляется только в комбинации (3.7). В²³ показано, что исчерпывающе корректная регуляризационная процедура, включающая достаточное число регуляторных полей, дает те же ответы.

Обсудим теперь вопрос о феноменологических следствиях масштабных тождеств Уорда.

В мире без легких кварков наилегчайшим, а следовательно, стабильным адроном был бы скалярный глюоний. Изучение свойств этого мезона (будем обозначать его σ_g) и, в частности, амплитуд рассеяния составляло бы важное направление в «экспериментальной» физике.

Весьма вероятно, что масса σ_g мала по сравнению с характерным масштабом в этом канале ($\sim 20 \text{ ГэВ}$)²³. С этой точки зрения ситуация отчасти похо-

жа на ситуацию с π -мезонами реальном мире, $m_\pi^2 \ll 1 \text{ ГэВ}^2$. Конечно, малость m_π^2 параметрическая, а подавление $m_{\sigma_g}^2$ носит, по-видимому, численный характер. Несмотря на это обстоятельство, можно поставить следующую задачу: найти низкоэнергетический (древесный) лагранжиан взаимодействия σ_g , реализующий масштабные тождества Уорда (3.3) — (3.5) аналогично тому, как киральный пионный лагранжиан реализует на древесном уровне киральные тождества Уорда.

Решение было дано в ²⁷, развернутое обсуждение ряда более сложных случаев, включающих, например, электромагнетизм, дано в ²⁸. Сам факт существования решения далеко не тривиален и критическим образом зависит от знака энергии вакуума: решение стабильно только в том случае, если $\varepsilon_{\text{vac}} < 0$.

Отметим, что древесное приближение стандартно в задачах подобного типа. Эффективная теория, содержащая бесконечное число вершин, непереяормируема, и поэтому включение петлевых графиков представляется бессмысленным.

Петлевые графики малы по сравнению с древесными при большом числе цветов. В трехцветной глюодинамике они подавлены численно из-за факторов $(4\pi^2)^{-1}$.

Итак, наша задача — найти эффективную теорию поля $\sigma(x)$ (см. (3.2)), в которой $\theta_\mu^\mu = \sigma$. (Это поле будем называть дилатоном.) Отметим, что нормальная размерность $\sigma(x)$ равна четырем. Поэтому, если кинетический член в лагранжиане имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{кин}} = \text{const} \cdot (\partial_\mu \sigma)^2 \sigma^{-3/2}, \quad (3.8)$$

то интеграл $\int \mathcal{L}_{\text{кин}} d^4x$, очевидно, масштабно инвариантен, и, следовательно, $\mathcal{L}_{\text{кин}}$ дает нулевой вклад в θ_μ^μ .

Осталось только подобрать потенциальную часть $\mathcal{L}_{\text{пот}}(\sigma)$ таким образом, чтобы обеспечить желаемое равенство $\theta_\mu^\mu = \sigma$.

При масштабном преобразовании $x \rightarrow x(1 + \varepsilon)$ изменение поля σ таково: $\sigma \rightarrow \sigma(1 - 4\varepsilon)$. Соответствующее изменение действия

$$\Delta_{\text{масшт}} \int \mathcal{L}_{\text{пот}}(\sigma) d^4x = \int \left(4\mathcal{L}_{\text{пот}} - 4\sigma \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{пот}}}{\delta \sigma} \right) d^4x, \quad (3.9)$$

очевидно, следует приравнять интегралу $-\int d^4x \theta_\mu^\mu(x)$.

В итоге получаем уравнение

$$4\mathcal{L}_{\text{пот}} - 4\sigma \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{пот}}}{\delta \sigma} = -\sigma, \quad (3.10)$$

решение которого имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{пот}} = \frac{1}{4} \sigma (\ln \sigma + \text{const}). \quad (3.11)$$

Константы в (3.11) и (3.9) выражаются через массу σ_g — обозначим ее m — и энергию вакуума ε_{vac} . Удобно переопределить поле, $\sigma = 4\varepsilon_{\text{vac}} \exp \chi$, тогда окончательный ответ для эффективного лагранжиана примет вид *)

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{\varepsilon_{\text{vac}}}{m^2} \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 e^{\chi/2} + \varepsilon_{\text{vac}} (\chi - 1) e^\chi. \quad (3.12)$$

Напомним, что $\varepsilon_{\text{vac}} < 0$. На рис. 8 приведена потенциальная часть эффективного лагранжиана дилатона.

*) Канонический тензор энергии-импульса, построенный по (3.12), дает θ_μ^μ , не совпадающее с (3.9). Дело в том, что тензор энергии-импульса скалярного поля неоднозначен, и для того, чтобы воспроизвести (3.9), к $\theta_{\mu\nu}^{\text{канон}}$ следует добавить $[-(8\varepsilon_{\text{vac}}/3m^2) \times (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) \exp \chi]$ — сохраняющийся и симметричный кусок.

До сих пор мы фактически использовали лишь информацию, содержащуюся в (3.4) и других аналогичных тождествах Уорда. Теоремы (3.3) фиксируют вид любого локального «белого» оператора \mathcal{O} (в глюодинамике) в терминах одной константы:

$$\mathcal{O} = \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{vac}} \exp \left(\frac{d_n}{4} \chi \right). \quad (3.13)$$

В частности, как и следовало ожидать,

$$\sigma = \langle \sigma_{\text{vac}} \rangle e^\chi = 4\varepsilon_{\text{vac}} e^\chi.$$

Одно из следствий формулы (3.13), очевидно, таково:

$$\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle = \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle.$$

Свойство факторизации не покажется удивительным, если вспомнить, что решение для эффективной скалярной теории, которое мы построили в этом разделе, справедливо в древесном приближении, т. е. в старшем порядке по $1/N_c$. При $N_c \rightarrow \infty$ вакуумные средние белых операторов действительно факторизуются. Поучительно проверить, что лагранжиан (3.12) удовлетворяет общим требованиям многоцветной хромодинамики^{29, 30}.

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \frac{m}{|\varepsilon_{\text{vac}}|^{1/2}} (\partial_\mu \varphi)^2 \varphi + \dots - \\ - \frac{2}{3!} \frac{m^3}{|\varepsilon_{\text{vac}}|^{1/2}} \varphi^3 + \dots,$$

где мы перешли к правильно нормированному полю φ так, чтобы кинетический член был нормирован. Поскольку $m \sim N_c^0$ и $\varepsilon_{\text{vac}} \sim N_c^2$, взаимодействие выключается в полном соответствии с общими правилами: трilinearная константа — как N_c^{-1} , четырехлинейная — как N_c^{-2} , и т. д.

Лагранжиан (3.12) исчерпывающим образом описывает взаимодействие скалярного глюония при энергиях порядка m_{σ_g} . К сожалению, по очевидным причинам следствия, вытекающие из (3.12), нельзя подвергнуть прямой экспериментальной проверке.

Очень грубую косвенную оценку, которая одновременно показывает, насколько существенны эффекты легких кварков, получим следующим образом.

Предположим, что формула типа (3.13) имеет место не только в глюодинамике, но и в теории с кварками. Более того, будем считать, что она справедлива как для глюонных, так и для кварковых операторов. Если принять эти гипотезы — при этом автоматически выбрасывается вклад скалярного кваркония σ_q и смешивание $\sigma_g \sigma_q$, — мы легко найдем нуклонный матричный элемент от $\bar{u}u + \bar{d}d$. На древесном уровне

$$\langle N | \bar{u}u + \bar{d}d | N \rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle \cdot \frac{3}{4} \langle N | \chi | N \rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle \frac{3}{4} \frac{\langle N | \theta_{\mu\mu} | N \rangle}{\langle \theta_{\mu\mu} \rangle} = \\ = \frac{3}{4} \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle \frac{m_N}{4\varepsilon_{\text{vac}}} \bar{\Psi}_N \Psi_N, \quad (3.14)$$

где Ψ_N — волновая функция нуклона, $\langle N | \theta_{\mu\mu} | N \rangle = m_N \bar{\Psi}_N \Psi_N$ и $\langle \theta_{\mu\mu} \rangle = 4\varepsilon_{\text{vac}}$. С другой стороны, матричный элемент $\langle N | \bar{u}u + \bar{d}d | N \rangle$ более или менее известен эмпирически и составляет приблизительно $3\bar{\Psi}_N \Psi_N$. Теорети-

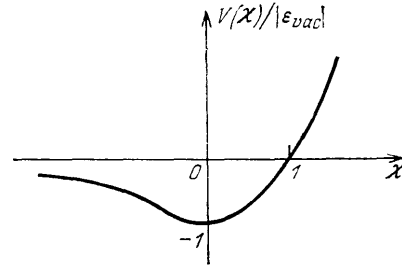


Рис. 8

ческая оценка (3.14) дает $1,8 \bar{\Psi}_N \Psi_N$, если подставить стандартные значения кваркового и глюонного конденсатов. Отметим, что знаки эмпирической и теоретической оценок совпадают, а абсолютные значения расходятся в два раза. Вывод таков. Результаты для скалярного глюония, полученные в глюодинамике, правильны по порядку величины и в реальном мире. Эффект, связанный с включением кварков, оказывается порядка единицы.

3.2. Корреляционные функции топологической плотности. Оператор

$$K = \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \quad (3.15)$$

естественно назвать плотностью топологического заряда (ср. с (1.35)). Если СР-инвариантность не нарушена, очевидно, $\langle K \rangle = 0$, и физический интерес представляют корреляторы K с другими СР-нечетными операторами.

Ниже мы покажем, что²⁶

$$i \int \langle T \{ K(x), K(0) \} \rangle dx = \Delta_K, \quad (3.16)$$

$$i \int \left\langle T \left\{ \sum_{q=u, d} m_q \bar{q}(x) i\gamma_5 q(x), K(0) \right\} \right\rangle dx = -2\Delta_K, \quad (3.17)$$

где для простоты предположено, что в теории имеется всего два легких кварка, u и d , и

$$\Delta_K = -\frac{1}{8} f_\pi^2 m_\pi^2 \frac{4m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} = O(m_q). \quad (3.18)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что функция Грина топологической плотности при нулевом импульсе, формула (3.16), обращается в нуль, если масса хотя бы одного кварка равна нулю. Поэтому в этом разделе мы не считаем $m_q = 0$, в отличие от других разделов, где рассматривался киральный предел.

Обобщение на случай трех легких кварков тривиально и по существу не меняет результатов.

Исходным в доказательстве является уравнение для дивергенции аксиального тока a_μ^0 (SU(2)-аналог тока $j_{\mu A}$, см. (2.6))

$$\begin{aligned} \partial_\mu a_\mu^0 &= 2(m_u \bar{u} i\gamma_5 u + m_d \bar{d} i\gamma_5 d) + 4K, \\ a_\mu^0 &= \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Введем двухточечные функции

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu}(q) &= i \int e^{iqx} \langle T \{ a_\mu^0(x), a_\nu^0(0) \} \rangle dx, \\ \tilde{\pi}_\mu(q) &= i \int e^{iqx} \langle T \{ a_\mu^0(x), K(0) \} \rangle dx. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Совершенно очевидно, что они удовлетворяют следующим условиям:

$$q_\mu q_\nu \pi_{\mu\nu}(q) \rightarrow 0, \quad q_\mu \tilde{\pi}_\mu(q) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad q \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

которые предполагают отсутствие физических безмассовых состояний, связанных с a_μ^0 ($m_\pi \neq 0$, поскольку массы u - и d -кварков учитываются явно).

Интегрируя по частям, сводим с помощью (3.19) $q_\mu q_\nu \pi_{\mu\nu}$ и $q_\mu \tilde{\pi}_\mu$ к T -произведениям дивергенций плюс контактный член, выражающийся через одно-

временный коммутатор типа $[m_q \bar{q}(x) \gamma_5 q(x), a_0(0)] \delta(x_0)$:

$$\begin{aligned} 0 = (q_\mu q_\nu \pi_{\mu\nu})_{q=0} &= \langle 4(m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d) \rangle + \\ &+ 16\{K, K\} + 16\left\{ \sum_{q=u,d} m_q \bar{q}i\gamma_5 q, K \right\} + \\ &+ 4\left\{ \sum_{q=u,d} m_q \bar{q}i\gamma_5 q, \sum_{q=u,d} m_q \bar{q}i\gamma_5 q \right\}, \quad (3.22) \\ 0 = (q_\mu \tilde{\pi}_\mu)_{q=0} &= 4\{K, K\} + 2\left\{ \sum_{q=u,d} m_q \bar{q}i\gamma_5 q, K \right\}. \end{aligned}$$

(Для того, чтобы не загромождать формул, в фигурных скобках мы опустим аргументы и $i \int d^4x T$; ср. с (3.16).)

Используя соотношение $(m_u + m_d) \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle = -f_\pi^2 m_\pi^2$, хорошо известное в PCAC, и исключая из (3.22) «лишний» коррелятор, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} 16\{K, K\} &= -2f_\pi^2 m_\pi^2 + O(m_{u,d}^2) + \\ &+ 4\left\{ \sum_{q=u,d} m_q \bar{q}i\gamma_5 q, \sum_{q=u,d} m_q \bar{q}i\gamma_5 q \right\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Т-произведение в правой части по виду пропорционально $m_{u,d}^2$, в то время как сейчас мы охотимся за членами, линейными по массе кварка. Это означает, что в Т-произведении следует удержать лишь такие промежуточные состояния, чей квадрат массы пропорционален $m_{u,d}$. Важно, что есть только одно такое состояние — пион с кварковым содержанием $\bar{u}u - \bar{d}d$. Как известно³¹, синглетное состояние $\sim(\bar{u}u + \bar{d}d)$ не становится безмассовым в киральном пределе из-за глюонной аномалии в синглетном аксиальном токе.

Вычет пиона в кварковый ток по существу фиксируется PCAC,

$$\langle 0 | \bar{u}i\gamma_5 u | \pi^0 \rangle = -\langle 0 | \bar{d}i\gamma_5 d | \pi^0 \rangle = \frac{f_\pi m_\pi^2}{\sqrt{2}(m_u + m_d)}. \quad (3.24)$$

Подставляя пионный полюс в (3.23), немедленно приходим к теореме, цитирувавшейся выше (см. (3.16) — (3.18)). Отметим, что в частном случае $m_u = m_d$ соотношение (3.18) было впервые получено в²² в другом контексте.

Здесь уместно сделать два замечания. Во-первых, мы хотели бы подчеркнуть связь между теоремой (3.16) — (3.18) и U(1)-проблемой. Если считать — в разрез с действительностью — что масса синглетного псевдоскалярного мезона обращается в нуль в киральном пределе, то, добавив это состояние к вкладу пиона, сразу же получим нуль в правой части (3.23), по крайней мере, в линейном по $m_{u,d}$ приближении²⁶. Таким образом, эффект носит качественный характер:

$$\begin{aligned} \text{есть U(1)-симметрия} &\rightarrow i \int \langle T \{ K(x), K(0) \} \rangle d^4x = 0, \quad (3.25) \\ \text{нет U(1)-симметрии} &\rightarrow i \int \langle T \{ K(x), K(0) \} \rangle d^4x \neq 0. \end{aligned}$$

Второе замечание касается обобщения теоремы на случай трех легких кварков. Не составляет труда убедиться, повторив вывод заново с включением s-кварка, что изменяется только ответ для Δ_K , а именно²⁶

$$(\Delta_K)_{u,d,s} = -\frac{3}{8} f_\pi^2 (m_\pi^2 + m_\eta^2) \frac{m_u m_d m_s}{(m_u + m_d + m_s)(m_u m_d + m_u m_s + m_d m_s)}. \quad (3.26)$$

В пределе $m_s/m_{u,d} \gg 1$ формула (3.26) совпадает с (3.18). Чтобы проверить это последнее утверждение, нужно воспользоваться формулой для отно-

шения масс π и η , вытекающей из PCAC:

$$\frac{m_\pi^2}{m_\eta^2} = \frac{3}{4} \frac{m_u + m_d}{m_s}.$$

Приложение низкоэнергетической теоремы (3.16), которое немедленно приходит на ум, — вычисление массы так называемого фантомного аксиона^{26, 32}. Не вникая в детали этой конструкции, отметим здесь только, что фантомный аксион — псевдоскалярная частица с нулевой классической массой и взаимодействием типа

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}}^{(a)} = \frac{g^2}{32\pi^2 \sqrt{2}\Phi_0} a(x) G_{\mu\nu}^a(x) \tilde{G}_{\mu\nu}^a(x), \quad (3.27)$$

где Φ_0 — некоторый большой параметр размерности $[m]$ и $a(x)$ — поле аксиона. Масса аксиона возникает на квантовом уровне из-за того обстоятельства, что коррелятор²⁶ (3.16) отличен от нуля. Комбинируя (3.27), (3.16) и (3.18), легко получить

$$m_a = \left(\frac{1}{2|\Phi_0|^2} |\Delta_K| \right)^{1/2} = \frac{f_\pi m_\pi}{4|\Phi_0|} \left[\frac{4m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} \right]^{1/2}. \quad (3.28)$$

3.3. Конверсия глюонов в пионы и фотоны. Любой теоретик, занимающийся КХД, но не знакомый с низкоэнергетическими теоремами, скажет, что матричные элементы типа

$$\langle 0 | \alpha_s G^2 | 2\pi \rangle, \langle 0 | \alpha_s G^2 | 2\gamma \rangle, \langle 0 | \alpha_s G \tilde{G} | 2\gamma \rangle \quad (3.29)$$

нельзя вычислить в современной теории, поскольку они определяются динамикой конфайнмента на очень больших расстояниях. Последняя часть утверждения справедлива, и все же, как это ни парадоксально, амплитуды конверсии глюонов (3.29) однозначно фиксируются при малых импульсах конечных частиц. Например,

$$\left\langle 0 \left| -\frac{b\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right| \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) \right\rangle = (p_1 + p_2)^2 + O(p^4). \quad (3.30)$$

Начнем с пионов и рассмотрим амплитуду $\langle \pi^+ \pi^- | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle$, где $\theta_{\mu\nu}$ — полный регуляризованный тензор энергии-импульса КХД.

Наиболее общее выражение для этого матричного элемента таково:

$$\langle \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle = A r_\mu r_\nu + B q_\mu q_\nu + C g_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

где $r = p_1 - p_2$, $q = p_1 + p_2$, A , B , C — некоторые скалярные функции четырехимпульсов. Для мягких пионов, однако, эти функции сводятся к константам, значения которых определяются следующими требованиями (в киральном пределе):

- а) сохранение и симметрия $\theta_{\mu\nu}$;
- б) условие нормировки, $\langle \pi^+(p) | \theta_{\mu\nu} | \pi^+(p) \rangle = 2p_\mu p_\nu$;
- в) нейтральность $\theta_{\mu\nu}$ относительно аксиального заряда, $[\theta_{\mu\nu}(x), Q_5] = 0$.

Пункты а) и б) очевидны сами по себе. Пункт в) чуть менее тривиален. Напомним, однако, что в киральном пределе аксиальный заряд Q_5 операторно сохраняется и, следовательно,

$$[Q_5, \theta_{00}(x)] = i\partial_\mu a_\mu(x) = 0.$$

Впрочем, то обстоятельство, что коммутатор $[\theta_{\mu\nu}(x), Q_5]$ обращается в нуль, можно проверить и непосредственно, поскольку явное выражение для $\theta_{\mu\nu}$ и Q_5 в терминах фундаментальных полей известно.

Более удобна другая форма записи условия в):

$$в') \langle \pi^+ \pi^- | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle \rightarrow 0, \text{ если } p_1 \text{ или } p_2 \rightarrow 0.$$

Эквивалентность в) и в') становится понятной, если учесть, что

$$\langle \pi^+ \pi^- | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle_{p_1 \rightarrow 0} = i f_{\pi}^{-1} \langle \pi^+ | [\theta_{\mu\nu}, Q_5] | 0 \rangle.$$

Комбинируя а), б), в'), приходим к следующему результату:

$$\langle \pi^+ \pi^- | \theta_{\mu\nu} | 0 \rangle = \frac{1}{2} r_{\mu} r_{\nu} - \frac{1}{2} q_{\mu} q_{\nu} + \frac{1}{2} q^2 g_{\mu\nu}, \quad (3.32)$$

$$\langle \pi^+ \pi^- | \theta_{\mu\mu} | 0 \rangle = q^2. \quad (3.33)$$

Используя аномальное уравнение (2.20), воспроизводим (3.30) *).

Левая часть (3.30) пропорциональна α_s , в то время как правая часть этого фактора не содержит. Подобный «дисбаланс» имеет место и для конверсии глюонов в фотоны (см. ниже) и приводит к далеко идущим следствиям.

Вне связи с физикой адронов заметим, что изложенные выше идеи были позднее использованы в работе³³, трактующей уравнение для распространения голдстоуновских бозонов в гравитационном поле. Соотношение (3.32) фактически означает, что в этом уравнении отсутствует член, пропорциональный скалярной кривизне, — так называемый ξ -член.

Если пионный матричный элемент (3.29) измеряет связь глюонов (в канале 0^+) с «реальными» кварками, то фотонные амплитуды зондируют виртуальные кварковые петли, поскольку прямое взаимодействие фотонов с глюонами отсутствует. В частности, имеем

$$\left\langle 0 \left| \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}_{\alpha\beta}^a \right| \gamma(k_1) \gamma(k_2) \right\rangle = \frac{\alpha}{\pi} N_c \langle Q_q^2 \rangle F_{\mu\nu}^{(1)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (3.34)$$

где $F_{\mu\nu}^{(i)} = k_{\mu}^{(i)} \epsilon_{\nu}^{(i)} - k_{\nu}^{(i)} \epsilon_{\mu}^{(i)}$.

Подробное обсуждение теоремы для $\langle 0 | G^2 | 2\gamma \rangle$, содержащее ряд нетривиальных моментов, дано в⁴⁸.

Формула (3.34) справедлива в киральном пределе и, кроме того, предполагают, что передача импульса $(k_1 + k_2)^2$ мала по сравнению с характерным адронным масштабом (~ 1 ГэВ).

Для того чтобы вывести (3.34), следуя Крютеру, умножим амплитуду

$$\langle 0 | \sum_q \bar{q} \gamma_{\mu} \gamma_5 q | \gamma(k_1) \gamma(k_2) \rangle$$

на $q_{\mu} \equiv (k_1 + k_2)_{\mu}$ и устремим $q \rightarrow 0$. С одной стороны, поскольку в синглетном канале нет безмассовых частиц даже при $m_q = 0$, мы должны получить нуль. С другой стороны, явное вычисление дивергенции аксиального тока дает

$$n_f \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a - N_c \frac{\alpha}{\pi} F_{\mu\nu}^{(1)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(2)} \sum_q Q_q^2, \quad (3.35)$$

где учтены глюонная и фотонная аномалии.

В заключение приведем без вывода формулы для конверсии $G\tilde{G}$ в π и η ³⁴⁻³⁶:

$$\begin{aligned} \left\langle 0 \left| \frac{3\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \right| \pi^0 \right\rangle &= \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{m_d - m_u}{m_d + m_u} f_{\pi} m_{\pi}^2, \\ \left\langle 0 \left| \frac{3\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \right| \eta \right\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}} f_{\pi} m_{\eta}^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

*) Эта формула без явного вывода была приведена в работе²⁴. Явный вывод и доказательство отсутствия неоднозначностей в тензоре энергии-импульса пионов даны в²⁵.

3.4. К о р р е л я т о р с м е ш а н н ы х т о к о в. В работах⁴⁶ была получена интересная низкоэнергетическая теорема для коррелятора токов

$$J_{\mu}^{ij} = \bar{g} \bar{q}^i(x) \gamma_{\alpha} G_{\alpha\mu}^a(x) t^a q^j(x),$$

где t^a — матрицы Гелл-Манна, а i — ароматный значок, $q^1 = v$, $q^2 = d$, $q^3 = s$ (предполагается, что $i \neq j$; для одинаковых i, j следует удержать лишь несинглетную по аромату часть). Ток J_{μ}^{ij} довольно необычен, он содержит как кварковые, так и глюонные поля — с таким объектом мы сталкиваемся здесь впервые.

Результат работ⁴⁶ можно сформулировать так:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ij} &= i \int d^4x \langle T \{ J_{\mu}^{ij}(x), J_{\nu}^{ij}(0) \} \rangle = \\ &= \frac{g^2}{8} g_{\mu\nu} \left\langle \left(\sum_{q=u, d, s} \bar{q} \gamma_{\beta} t^a q \right) (\bar{q}^i \gamma_{\beta} t^a q^i + \bar{q}^j \gamma_{\beta} t^a q^j) \right\rangle. \end{aligned}$$

Левая часть представляет собой двухточечную функцию при нулевом импульсе, правая — вакуумное среднее от локального оператора. Если считать, что $m_q \neq 0$, в правой части возникают поправки $O(m_q^2)$.

Вывод данного соотношения принципиально не отличается от вывода других соотношений такого типа. Исходное наблюдение⁴⁶ состоит в том, что ток J_{μ}^{ij} является дивергенцией оператора, напоминающего кварковую часть тензора энергии-импульса (но не синглетного по аромату). Именно,

$$J_{\mu}^{ij} = \partial_{\alpha} \theta_{\mu\nu}^{ij},$$

где

$$\theta_{\mu\alpha}^{ij} = \bar{q}^i \gamma_{\mu} i D_{\alpha} q^j.$$

Далее в⁴⁶ рассматривается двухточечная функция $\langle T \{ \theta_{\mu\alpha}^{ij}(x), J_{\nu}^{ij}(0) \} \rangle$. После дифференцирования по x в пределе нулевого импульса получаем, с одной стороны, нуль (безмассовых частиц в данном канале нет), а с другой стороны — интересующий нас коррелятор плюс одновременной коммутатор $[\theta_{\mu\alpha}^{ij}, J_{\nu}^{ij}]$ плюс швингеровский член. Вычисляя коммутатор и швингеровский член, приходим к цитированной выше теореме. Она используется при описании глубоко неупругого рассеяния лептонов на адронах и для предсказания массы гибридных мезонов в рамках правил сумм КХД.

В последующих разделах мы дополнительно обсудим некоторые ситуации, в которых низкоэнергетические теоремы помогают решить конкретные задачи адронной физики.

3.5. Э ф ф е к т и в н а я с в я з ь х и г г с о в с к о г о б о з о н а с н у к л о н а м и и п и о н а м и. Если бы в природе существовал легкий, с массой $1-2 \text{ ГэВ}$, хиггсовский бозон H — что, вообще говоря, не исключено, — то сечение его рождения и распадные свойства в значительной степени определялись бы константами $H\bar{N}N$ и $H\pi\pi$. Вычисление этих констант, даже если такого бозона и не существует, — прекрасная учебная задача, решение которой доставит удовольствие любому теоретику.

Итак, рассмотрим хиггсовский бозон H , взаимодействие которого с кварками имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{\eta} H \sum_q m_q \bar{q} q, \quad (3.37)$$

где η — вакуумное среднее, равное $(V\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$ в стандартной модели Глэшоу — Вайнберга — Салама. Мы, однако, будем считать η независимым параметром.

Первый вопрос: «Чему равняется вершина $H\bar{N}N$ при малом переданном импульсе?» (ответ на него дан в работе³⁷).

Поскольку нуклон состоит из u - и d -кварков, на первый взгляд, доминирующую роль должно играть слагаемое $m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d$. Вспомним, однако, что массы токовых u -, d -кварков — а в (3.37) фигурируют именно они — весьма малы. Если параметризовать вершину $H\bar{N}N$ в виде $-(1/\eta)\lambda H\bar{N}N$, где λ — константа размерности массы, то

$$(\lambda)_{u,d} \approx 2m_u + m_d \approx 15 \text{ МэВ для протона,} \quad (3.38)$$

что пренебрежимо мало. В дальнейшем будем считать, что $m_u = m_d = 0$.

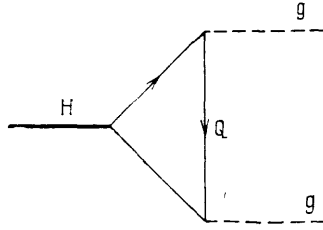


Рис. 9

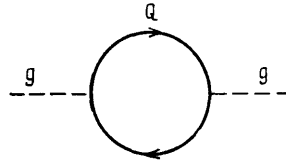


Рис. 10

Как это ни парадоксально, связь H -бозона с нуклоном определяется в основном его взаимодействием с очень тяжелыми кварками, т. е. такими, масса которых $m_Q \gg M_H/2$. Поскольку таких кварков нет в нуклоне^{*}), они проявляются только в виртуальных петлях, индуцируя эффективный лагранжиан глюон-бозонного взаимодействия (рис. 9). Ответ для этого лагранжиана легко определяется либо явным вычислением диаграммы рис. 9, либо, что эквивалентно, дифференцированием по m_Q известной петли рис. 10 (подробнее см.³⁸). На рис. 9 показана схема перехода H -бозона в глюоны через петлю тяжелых кварков, а на рис. 10 — вклад тяжелого кварка Q в перенормировку цветового заряда. Так или иначе, находим

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{12} H n_Q \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a, \quad (3.39)$$

где n_Q — число тяжелых кварков. Таким образом, задача сведена к вычислению матричного элемента $\langle N | (\alpha_s/\pi) G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | N \rangle$ при нулевой передаче импульса. Именно на этом, наименее тривиальном этапе в дело вступает низкоэнергетическая теорема.

Действительно, используем аномальное тождество (2.20), которое в киральном пределе ($m_{u,d,s} = 0$) имеет вид

$$\theta_{\mu\mu} = -\frac{9\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + O(m_Q^{-2}).$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что при $m_Q \rightarrow \infty$ тяжелые кварки вообще выпадают, и коэффициент в функции Гелл-Манна—Лоу определяется только глюонами и тремя безмассовыми кварками в соответствии с теоремой о декаплинге³⁹.

С другой стороны, из определения тензора энергии-импульса, очевидно, вытекает

$$\langle N | \theta_{\mu\mu} | N \rangle = m_N \bar{\Psi}_N \Psi_N. \quad (3.40)$$

Масса нуклона есть среднее по нуклону от чисто глюонного оператора!

^{*}) Точнее говоря, их примесь мала, $\ll (\mu^2/4m_Q^2)$.

Комбинируя (3.40) и (3.39), получаем, что для каждого тяжелого кварка

$$\lambda_Q = \frac{2}{27} m_N \approx +70 \text{ МэВ} \quad (3.41)$$

— результат, превышающий (3.38) примерно в пять раз.

Аналогичным образом решается вопрос о связи легкого хиггсовского мезона с пионами ⁴⁰. Так же, как и в нуклонном случае, прямое взаимодействие с легкими кварками пренебрежимо мало, и доминирующую роль играет индуцированная вершина (3.39).

Для того чтобы найти конверсию глюонов в пару голдстоуновских мезонов ($\pi\pi$, $K\bar{K}$, $\eta\eta$), воспользуемся соотношением (3.30). Учítывая, что в распаде $H \rightarrow \pi^+\pi^-$, очевидно, $(p_1 + p_2)^2 = M_H^2$, из (3.30) и (3.39) получаем

$$A(H \rightarrow \pi^+\pi^-) = -\frac{1}{\eta} \frac{n_Q}{27} M_H^2. \quad (3.42)$$

Отсюда видно, что для хиггса с массой 1 ГэВ переход в пару $\pi^+\pi^- + \pi^0\pi^0$ является доминирующей модой распада,— обстоятельство, которое было обнаружено не сразу. Ранее считалось, что такой бозон должен распадаться в основном на $\mu^+\mu^-$ (или K^+K^-). Для трех тяжелых кварков (с, b, t) формула (3.42) дает

$$\frac{\Gamma(H \rightarrow \pi\pi)}{\Gamma(H \rightarrow \mu^+\mu^-)} \approx \frac{1}{27} \frac{M_H^2}{m_\mu^2} \sim 10. \quad (3.43)$$

Отвлекаясь несколько в сторону от основной линии изложения, отметим, что существует удивительно изящный общий метод ⁴⁰ для расчета «тормозного излучения» мягкого хиггсовского бозона в любом процессе с легкими кварками и/или глюонами. Действительно, при нулевом импульсе хиггса поле H в лагранжиане (3.39) сводится к константе, и этот лагранжиан, добавляясь к основному члену,

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a,$$

эффективно меняет константу связи α_s . Насколько именно изменяется α_s , легче всего установить с помощью перемасштабировки полей, к которой мы уже прибегали при выводе формул (3.4). В терминах $\bar{G}_{\mu\nu}^a$

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}} + \mathcal{L}_{\text{эфф}} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{g^2} - \frac{H}{\eta} \frac{n_Q}{12\pi^2} \right) \bar{G}_{\mu\nu}^a \bar{G}_{\mu\nu}^a.$$

Значит,

$$\delta\alpha_s = \frac{H}{\eta} n_Q \frac{\alpha_s^2}{3\pi}. \quad (3.44)$$

Поэтому если известна зависимость от α_s амплитуды «базисного» процесса $a \rightarrow b$, не составляет труда определить амплитуду процесса $a \rightarrow b + \text{мягкий } H$. Именно

$$A(a \rightarrow b + \text{мягкий } H) = \frac{n_Q}{\eta} \frac{\alpha_s^2}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} A(a \rightarrow b). \quad (3.45)$$

(Подчеркнем еще раз, что в базисном процессе не должны участвовать реальные тяжелые кварки, в противном случае обсуждаемый глюонный механизм будет затенен прямой связью $H\bar{Q}Q$.)

Для пертурбативных амплитуд, связанных с жесткими глюонами, $A(a \rightarrow b) \sim \alpha_s^k$, и согласно (3.45) тормозное излучение хиггса подавлено лишней степенью α_s . Гораздо более эффективно хиггсовские частицы стряхиваются в том случае, когда переход $a \rightarrow b$ генерируется непертурбативными

эффектами. Тогда $A(a \rightarrow b) \sim \Lambda_{\text{КХД}}^d \sim \exp(-2\pi d/b\alpha_s)$ (ср. с формулой (3.7)). При этом амплитуда испускания мягкого хиггсовского бозона

$$A(a \rightarrow b + H)_{p_H \rightarrow 0} = d \cdot \frac{2}{27} n_Q \eta^{-1} A(a \rightarrow b). \quad (3.46)$$

Мы надеемся, что читатель получил достаточное представление о могуществе метода при решении задач с легкими хиггсами. Близким родственником легких хиггсов является так называемый аксион. Свойства аксиона также в значительной степени фиксируются низкоэнергетическими теоремами; см. раздел 3.2.

3.6. С п е к т р п и о н о в в р а с п а д а х $\psi' \rightarrow J/\psi \pi\pi$, $\Upsilon' \rightarrow J\pi\pi$. Прежде всего опишем качественно экспериментальную ситуацию. Известно, что пионы в распадах $\psi' \rightarrow J/\psi \pi\pi$, $\Upsilon' \rightarrow \Upsilon \pi\pi$ испускаются в основном в S-волне. Вклад D-волновых пионов в полную вероятность распада не превышает нескольких процентов. Кроме того, эффективная амплитуда

$$A_{\text{eff}}(q^2) = \left[\frac{d\Gamma}{dq^2}(\text{ф.о.})^{-1} \right]^{1/2} = [(S\text{-волна})^2 + (\overline{D\text{-волна}})^2]^{1/2} \quad (3.47)$$

хорошо аппроксимируется линейной зависимостью типа

$$A_{\text{eff}} = C(q^2 - \delta). \quad (3.48)$$

(Черта в (3.47) означает усреднение по фазовому объему (ф. о.) пионов, C и δ в (3.48) — числовые константы, $q = p_1 + p_2$.)

Вопросы, обращенные к теории, таковы:

- Почему относительный вес D-волны так ничтожно мал?
- Можно ли было предвидеть заранее линейную зависимость A_{eff} ?
- Каковы теоретические предсказания для C и δ ?

Приступая к теоретическому анализу, в качестве отправной точки возьмем мультипольное разложение^{41–43}, которое отражает то обстоятельство, что процесс протекает в две стадии: сначала (квази)локальное испускание глюонов тяжелыми кварками^{*}), а затем конверсия глюонов в пионы на больших расстояниях. В итоге амплитуда факторизуется:

$$A(n_i^3 S_1 \rightarrow n_f^3 S_1 + \pi\pi) = \langle A_{if} \rangle \langle 0 | \alpha_s \mathbf{E}^a \mathbf{E}^a | \pi\pi \rangle + \text{высшие мультиполи}, \quad (3.49)$$

где \mathbf{E}^a — хромoeлектрическое поле, а коэффициент $\langle A_{if} \rangle$ содержит информацию только о тяжелом кварконии. Его можно найти, используя какую-нибудь модель кваркония, или, как это сделано в²⁴, феноменологически, по распаду $\psi' \rightarrow J/\psi \eta$.

Так или иначе, поскольку нас интересует сейчас не структура кваркония, а динамика глюонного поля, будем рассматривать $\langle A_{if} \rangle$ как данное число и сконцентрируемся на пионном матричном элементе. Поскольку наша задача педагогическая, будем работать в киральном пределе, $m_\pi^2 = 0$.

Прежде всего,

$$\alpha_s \mathbf{E}^a \mathbf{E}^a = \frac{\alpha_s}{2} (\mathbf{E}^a \mathbf{E}^a + \mathbf{H}^a \mathbf{H}^a) + \frac{\alpha_s}{2} (\mathbf{E}^a \mathbf{E}^a - \mathbf{H}^a \mathbf{H}^a) = \alpha_s \theta_{00}^G + \frac{2\pi}{b} \theta_{\mu\mu}, \quad (3.50)$$

где \mathbf{H}^a — хромомангнитное поле и θ_{00}^G — (00)-компонента глюонной части тензора энергии-импульса.

Воспользовавшись теоремой (2.20), получаем

$$\langle \pi^+ \pi^- | \alpha_s \mathbf{E}^a \mathbf{E}^a | 0 \rangle = \frac{2\pi}{b} q^2 + \langle \pi^+ \pi^- | \alpha_s(\mu) \theta_{00}^G(\mu) | 0 \rangle. \quad (3.51)$$

^{*}) Расстояние между Q и \bar{Q} в системе J/ψ , и тем более Υ , заметно меньше, чем 1 фм характерное расстояние для «нормальных старых» адронов.

В правой части нам пришлось указать точку нормировки оператора $\alpha_s \theta_{00}^G$, поскольку он не является ренорм-инвариантным; μ — порядка обратного радиуса кваркония.

Повторяя почти дословно рассуждения, приведшие к (3.32), (3.33), легко проверить, что

$$\begin{aligned} \langle \pi^+(p_1) \pi^-(p_2) | \theta_{\mu\nu}^G | 0 \rangle = & \rho_\pi^G(\mu) \left(\frac{1}{2} r_\mu r_\nu - \frac{1}{2} q_\mu q_\nu \right) + \\ & + \left(\frac{11}{36} + \frac{1}{4} \rho_\pi^G(\mu) \right) q^2 g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где ρ_π^G — доля импульса пиона, приходящаяся на глюоны, $\rho_\pi^G(\mu \sim 1 \text{ ГэВ})_{\text{эксп}} \approx 0,4$.

На этом этапе удобно переписать амплитуду $\psi' \rightarrow J/\psi \pi \pi$ — для определенности будем говорить именно об этом распаде — в лоренц-инвариантном виде:

$$\begin{aligned} A(\psi' \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-) = & \frac{-\langle A_{1t} \rangle}{M_{\psi'}^2} (\varepsilon'_\alpha \varepsilon_\alpha) \times \\ & \times \left(\frac{2\pi}{b} q^2 \mathcal{P}^2 + \langle \pi^+ \pi^- | \alpha_s(\mu) \theta_{\beta\gamma}^G(\mu) | 0 \rangle \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\gamma \right), \quad \mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\psi'). \end{aligned} \quad (3.53)$$

В системе покоя ψ' -мезона формула (3.53) сводится к (3.49).

Опуская ряд арифметических действий, таких как подстановка (3.52) и перегруппировка членов, цитируем ответ для амплитуды²⁵:

$$\begin{aligned} A(\psi' \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-) = & -\langle A_{1t} \rangle (\varepsilon'_\alpha \varepsilon_\alpha) \times \\ & \times \frac{2\pi}{b} \left\{ \left[q^2 - \kappa \frac{(q \mathcal{P})}{\mathcal{P}^2} \right] + \frac{3}{2} \kappa \left[r_\beta r_\gamma - \frac{1}{3} (q_\beta q_\gamma - q^2 g_{\beta\gamma}) \right] \frac{\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\gamma}{\mathcal{P}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\kappa = \frac{b}{6\pi} \alpha_s(\mu) \rho_\pi^G(\mu).$$

Член в первых квадратных скобках представляет собой чистую S-волну, а во вторых квадратных скобках — D-волну, в чем легко убедиться, перейдя в СЦМ $_{\pi^+\pi^-}$. В формуле (3.54) выброшены несущественные поправки $O(\alpha_s)$ к S-волновой амплитуде.

Таким образом, амплитуда $\psi' \rightarrow J/\psi \pi \pi$ полностью фиксирована. Теоретическое предсказание (3.54) обладает следующими особенностями.

а) Вклад D-волны в амплитуду $\mathcal{A}_{\text{эф}}$, введенную в (3.47), по отношению к S-волне равен $\kappa^2/5$. Хотя количественная оценка κ не очень точна из-за того, что μ для ψ' всего несколько сотен МэВ, весьма сильное подавление D-волны несомненно. Действительно, если $\alpha_s(\mu) \sim 0,7$, $\rho_\pi^G(\mu) \sim 0,4$, то

$$\kappa_{\psi'} \sim 0,15 - 0,2 \quad (3.55)$$

и $\kappa^2/5 \sim 10^{-2}$.

Это обстоятельство означает, что глюоны весьма охотно приходят в кварковые состояния в канале 0^+ , но в канале 2^+ параметр смешивания мал, $O(\alpha_s/\pi)$.

б) Выкинув D-волну — теперь на совершенно законных основаниях, — запишем амплитуду в виде

$$A(\psi' \rightarrow J/\psi \pi \pi) = -\langle A_{1t} \rangle (\varepsilon'_\alpha \varepsilon_\alpha) \cdot \frac{2\pi}{b} [q^2 - \kappa (\Delta M)^2]; \quad (3.56)$$

здесь $\Delta M = M_{\psi'} - M_{J/\psi}$. Прежде всего, (3.56) очень хорошо воспроизводит эмпирическую линейную q^2 -зависимость (3.48), причем теоретический и экспериментальный наклоны по q^2 согласуются друг с другом. Кроме того,

интерсепт в (3.56) расположен при положительном значении q^2 , равном $0,1 \text{ ГэВ}^2$, если $\kappa = 0,2$ ($\delta_{\psi' \text{ эксп}}$ тоже примерно равно $0,1 \text{ ГэВ}^2$).

Воодушевленные этим успехом в чармонии, попытаемся предсказать интерсепт пионного спектра, т. е. $\delta_{\pi'}$, в распаде $\Upsilon' \rightarrow \Upsilon \pi$. Теоретическая точность как мультипольного разложения, так и разложения по α_s здесь, по-видимому, намного лучше, поскольку размер боттомония заметно меньше, $\sim (1 \text{ ГэВ})^{-1}$. Известно, что зависимость $\rho_{\pi}^G(\mu)$ весьма слабая, и основное изменение сводится к падению α_s примерно вдвое. Поэтому следует ожидать уменьшения примерно вдвое $\kappa_{\Upsilon'}$ и $\delta_{\Upsilon'}$ по сравнению с параметрами в распаде $\psi' \rightarrow J/\psi \pi$.

Это предсказание, затрагивающее весьма тонкие аспекты КХД, было подтверждено последующими экспериментами.

Заключение. Квантовые аномалии в теории поля обсуждаются в течение вот уже почти 20 лет. В последнее время эта тема оказалась в эпицентре теоретической активности. Выяснилось, что квантовые аномалии проявляются и играют важную роль в самых разных областях, от двумерных моделей до теории струн.

Настоящий обзор не претендует на полный широкий охват огромного количества работ по теоретической физике высоких энергий, посвященных аномалиям. Мы поставили перед собой очень ограниченную цель: дать педагогическое введение в предмет, пояснить простую физическую суть явления, разрушить тот ореол таинственности, который возник отчасти из-за успешной и глубокой математизации. С этой целью рассматривалась простейшая калибровочная модель — двумерная квантовая электродинамика.

Затем мы сконцентрировались на квантовой хромодинамике — теории, которая по очевидным причинам занимает выделенное место среди других калибровочных моделей. Аномалии в КХД — это очень существенная часть теории, особенно если речь идет о непертурбативных эффектах. Достаточно напомнить, что возникновение массового масштаба неразрывно связано с аномалией в следе тензора энергии-импульса. Мы рассмотрели разнообразные следствия, вытекающие из факта существования аномалии, от спонтанного нарушения $SU(3)_A$ -симметрии до массы аксиона. По существу, за бортом осталась лишь одна тема, также примыкающая к вопросу об аномалиях: это $U(1)$ -проблема (проблема η' -мезона; см., однако, раздел 3.2). Причина в том, что $U(1)$ -проблема посвящен целый ряд специальных обзоров (см. ^{44, 47} и ссылки там).

Я благодарен М. Б. Волошину за подробное обсуждение различных аспектов модели Швингера на колечке, рассмотренной в разделе 1, а также Д. И. Дьяконову и В. Ю. Петрову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- ¹ Treiman S. B., Jackiw R., Gross D. J. // Lectures on Current Algebra and its Applications. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1972.
- ² Faddeev L. D. // Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 145. P. 81.
Faddeev L. D., Shatashvili S. L. // Ibidem. 1986. V. 167. P. 225.
Jackiw R., Rajaraman R. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1219.
Rajaraman R. // Phys. Lett. Ser. B. 1985. V. 154. P. 305; V. 162. P. 148.
Rajaraman R., Lott J. // Ibidem. V. 165. P. 321.
Шаташвили С. Л. // ТМФ. 1987. Т. 71. С. 40.
- ³ Green M., Schwarz J. // Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 149. P. 117.
- ⁴ Морозов А. Ю. // УФН. 1986. Т. 150. С. 337.
- ⁵ Casher A., Kogut J., Susskind L. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 792.
- ⁶ Kogut G., Susskind L. // Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 11. P. 3594.
- ⁷ Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. // Fortschr. Phys. 1984. Bd 32. S. 585.
- ⁸ Adler S. L., Bardeen W. A. // Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 1517.
- ⁹ Collins J. S., Duncan L., Joglekar S. D. // Phys. Rev. Ser. D. 1977. V. 16. P. 438.
- ¹⁰ Shifman M. A., Vainshtein A. I. // Nucl. Phys. Ser. B. 1986. V. 277. P. 456.

- ¹¹ Ferrara S., Zumino B.//*Ibidem*. 1975. V. 87. P. 207.
- ¹² Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.//*Phys. Lett. Ser. B*. 1985. V. 57. P. 169.
- ¹³ Wilson K., Kogut J.//*Phys. Rep.* 1974. V. 12. P. 75.
- ¹⁴ Dolgov A.D., Zakharov V.I.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1971. V. 12. P. 68.
- ¹⁵ 't Hooft G.//*Recent Developments in Gauge Theories*/Ed. by G. 't Hooft et al.—New York: Plenum, 1980.—P. 241.
- ¹⁶ Coleman S., Witten E.//*Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 100.
- ¹⁷ Vafa C., Witten E.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1984. V. 234. P. 173.
- ¹⁸ Вайнштейн А. И., Захаров В. И.//*УФН*. 1970. Т. 100. С. 225.
- ¹⁹ Nambu Y.//*Preludes in Theoretical Physics*/Ed. by A. de Shalit. — Amsterdam: North-Holland, 1966;
Fritzsche H., Gell-Mann M.//*Proc. of the 16th Intern. Conference on High Energy Physics*.—Batavia, 1972. —V. 2. P. 135;
Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H.//*Phys. Lett. Ser. B*. 1973. V. 47. P. 365;
Weinberg S.//*Phys. Rev. Lett.* 1973. V. 31. P. 494.
- ²⁰ Leutwyler H.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1974. V. 76. P. 413.
Weinberg S.//*Festschrift for I. I. Rabi*/Ed. by L. Motz.—New York: Academy of Sciences, 1978.
- ²¹ Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.//*Релятивистская квантовая теория*.—М.: Наука, 1971.—Ч. 2. § 141, 142;
Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. *Квантовая электродинамика*.—М.: Наука, 1969.—§ 40.2.
- ²² Crewther R.//*Phys. Lett. Ser. B*. 1977. V. 70. P. 349.
- ²³ Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1981. V. 191. P. 301.
- ²⁴ Voloshin M. B., Zakharov V.I.//*Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 688.
- ²⁵ Novikov V.A., Shifman M.A.//*Zs. Phys. Kl. C*. 1981. Bd 8. S. 43.
- ²⁶ Shifman M.A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1980. V. 166. P. 493.
- ²⁷ Migdal A. A., Shifman M. A.//*Phys. Lett. Ser. B*. 1982. V. 114. P. 445.
- ²⁸ Ellis J., Lanik J.//*Ibidem*. 1985. V. 150. P. 289.
- ²⁹ 't Hooft G.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1974. V. 72. P. 461.
- ³⁰ Witten E.//*Ibidem*. 1979. V. 160. P. 57.
- ³¹ Weinberg S.//*Phys. Rev. Ser. D*. 1975. V. 11. P. 3583.
- ³² Kim J. F.//*Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 43. P. 103.
- ³³ Волошин М. Б., Долгов А. Д.//*ЯФ*. 1982. Т. 35. С. 213.
- ³⁴ Gross D., Treiman S.B., Wilczek F.//*Phys. Rev. Ser. D*. 1979. V. 19. P. 2188.
- ³⁵ Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1980. V. 165. P. 55.
- ³⁶ Ioffe B. L., Shifman M. A.//*Phys. Lett. Ser. B*. 1980. V. 95. P. 99.
- ³⁷ Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.//*Phys. Lett. Ser. B*. 1978. V. 78. P. 443.
- ³⁸ Окунь Л. Б.//*Лептоны и кварки*.—М.: Наука, 1981.—Гл. 24.
- ³⁹ Appelquist T., Carrazzone J.//*Phys. Rev. Ser. D*. 1975. V.11. P. 2856.
- ⁴⁰ Волошин М. Б.//*ЯФ*. 1986. Т. 44. С. 738.
- ⁴¹ Gottfried K.//*Phys. Rev. Lett.* 1978. V. 40. P. 598.
- ⁴² Voloshin M. B.//*Nucl. Phys. Ser. B*. 1979. B. 154. P. 365.
Peskin M.//*Ibidem*. V. 156. P. 365.
- ⁴³ Yan T. M.//*Phys. Rev. Ser. D*. 1980. V. 22. P. 1652.
- ⁴⁴ 't Hooft G.//*Phys. Rep.* 1986. V. 142. P. 357.
- ⁴⁵ Gribov V. N.//*Preprint KFKI-1981-66*.—Budapest, 1981.
- ⁴⁶ Балицкий Я. Я., Дьяконов Д. И., Юнг А. В.//*ЯФ*. 1982. Т. 35. С. 1300.
Balitsky I. I., Dyakonov D. I., Yung A. V.//*Zs. Phys. Kl. C*. 1986. Bd 33. S. 265.
- ⁴⁷ Дьяконов Д., Эйдем М.//*Материалы XVI Зимней школы ЛИЯФ*.—Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1981.—С. 123.
Дьяконов Д. И.//*Материалы XXI Зимней школы ЛИЯФ*.—Л.: ЛИЯФ АН СССР, 1986.—С. 3.
- ⁴⁸ Leutwyler H., Shifman M. Bern University Preprint BUTP-89/2.