

СВОЙСТВА ФРАКТАЛЬНОГО АГРЕГАТА

Б. М. Смирнов

(Институт высоких температур АН СССР)

В статье Жюльена дано описание физической природы фрактального агрегата — системы, образуемой из твердых частиц в процессе их сближения. В данной статье содержатся некоторые дополнения к этому описанию, что позволяет, по моему мнению, более глубоко представить физические свойства этого объекта. Отметим сначала, что фрактальный агрегат (или, как часто его называют, фрактальный кластер) — это один из типов кластеров *) с фрактальной структурой. Такой кластер может быть собран из отдельных

*) Обычно кластером принято называть большое число связанных атомов или молекул, которые внутри этой системы сохраняют свою индивидуальность. В последнее время этот термин распространился на системы, состоящие из большого числа связанных макроскопических частиц.

твердых частиц, соединение которых происходит по определенному закону. Такие агрегаты образуются в растворе при образовании геля, т. е. кластера, состоящего из соединенных частиц — золей; при образовании подобных систем в дымах и туманах, при релаксации металлического пара, при образовании пленок на поверхности в процессе напыления их из струи, содержащей аэрозоли и т. д. Тем самым фрактальный кластер (агрегат) образуется в процессах роста кластера при слипании твердых частиц. Физический характер образования фрактального кластера определяет его структуру и свойства.

Сравним фрактальный кластер с перколяционным кластером, который также обладает структурой, но имеет отношение к другим физическим процессам. Рассмотрим простейшую модель построения перколяционного кластера. Возьмем кубическую решетку и соединим некоторые из соседних узлов решетки. Из этих соединительных линий и состоит перколяционный кластер. Введем вероятность p того, что соседние узлы решетки связаны так, что $1-p$ представляет собой вероятность того, что соседние узлы не соединены.

Из связанных таким образом областей получим кластеры, обладающие фрактальной структурой. По мере роста вероятности p характерные размеры таких кластеров растут, и при некотором значении $p = p_c$ образуется бесконечный кластер, что существенно в процессах переноса. Этот кластер обладает фрактальными свойствами, однако можно отметить его принципиальное отличие от фрактального кластера, образующегося в процессах роста. Для фрактального кластера его средняя плотность ρ падает по мере увеличения его размера R в соответствии с формулой $\rho \sim R^{D-d}$, где d — размерность пространства, D — фрактальная размерность кластера. Поэтому плотность фрактального кластера бесконечных размеров стремится к нулю. Что касается перколяционного кластера, то он может стать бесконечным только при условии, что его плотность превышает некоторую критическую величину. Столь принципиальное отличие свойств этих кластеров отражает различие физических процессов, которые за ними стоят.

Одним из основных параметров системы с фрактальной структурой является ее фрактальная размерность D , вводимая на основе формулы

$$C(r) = \frac{\langle \rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle}{\langle \rho^2(\mathbf{r}') \rangle} \sim r^{d-D}, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — координата, $C(r)$ — корреляционная функция, $\rho(\mathbf{r})$ — плотность вещества, d — размерность пространства, усреднение проводится по координатному пространству. Из этой формулы вытекают и основные способы определения фрактальной размерности рассматриваемого кластера.

Существующие математические модели описывают возможные физические ситуации при агрегации частиц в кластер. В таблице представлены значения фрактальной размер-

Фрактальная размерность кластера, образующегося в трехмерном пространстве при ассоциации твердых частиц

| Модель агрегации | Фрактальная размерность |
|--|-------------------------|
| 1. Частица — кластер, прямолинейная траектория | 3 |
| 2. Частица — кластер, броуновское движение | $2,46 \pm 0,05$ |
| 3. Кластер — кластер, прямолинейная траектория | $1,94 \pm 0,08$ |
| 4. Кластер — кластер, броуновское движение | $1,77 \pm 0,03$ |
| 5. Кластер — кластер, малая вероятность слипания | $2,02 \pm 0,06$ |

ности кластеров, образующихся при разных механизмах его роста. Деление на разные способы роста кластера может быть проведено по следующим параметрам. Во-первых, кластер может расти за счет присоединения к нему отдельных частиц (агрегация кластер-частица), или же он образуется при объединении двух кластеров, которые, в свою очередь, являются результатом агрегации кластеров меньших размеров (кластер-кластерная агрегация). Во-вторых, объединяющиеся частицы или кластеры могут иметь разный характер движения в пространстве (броуновское или прямолинейное), а это отражается на компактности кластера. В-третьих, компактность образуемого кластера зависит от вероятности, с которой объединяются соприкасающиеся частицы. Чем меньше эта вероятность, тем глубже внедряются частицы в кластер или кластер в кластер, т. е. тем более компактным является образуемый кластер. Данные таблицы относятся к трехмерному случаю и описывают собой различные реальные физические ситуации. Погрешность в приведенных цифрах представляет собой, как правило, статистическую погрешность результатов разных расчетов.

Рост фрактального кластера аналогичен ряду физических процессов и структур. К ним относится диэлектрический пробой, гидродинамические структуры, образуемые при введении жидкости (или газа) под давлением в более вязкую жидкость, структуры на фронте волны кристаллизации аморфного вещества. Аналогии этих процессов и структур

состоят в том, что при некоторых условиях они имеют одинаковое математическое описание.

Для демонстрации этой аналогии рассмотрим процесс образования фрактального кластера для случая, когда к нему присоединяются отдельные частицы, совершающие диффузионное движение в пространстве. Этот процесс удобно описать на основе метода Монте-Карло, задавая случайное движение присоединяемых к кластеру частиц, причем эти частицы подводятся к кластеру поочередно. Для кластера с бесконечно большим числом частиц можно использовать другое описание, рассматривая кластер как некоторое образование с границей, на которую направлен поток частиц. В результате присоединения этих частиц граница кластера перемещается, т. е. кластер растет.

Учитывая диффузионный характер движения частиц, имеем для потока частиц на кластер $j = -D \nabla N$, где D — коэффициент диффузии частиц, N — их плотность. В стационарном случае это дает уравнение Лапласа для плотности частиц:

$$\Delta N = 0. \quad (2)$$

К этому уравнению следует добавить граничное условие для скорости роста границы v :

$$v = -a n \nabla N, \quad (3)$$

где a — некоторый коэффициент, n — единичный вектор, направленный перпендикулярно к границе.

Граничное условие (3) создает «рваную» границу. Действительно, чем меньше радиус кривизны границы, тем скорее идет ее рост. Это вызывает возникновение неустойчивости, которая ускоряет рост границы по мере уменьшения радиуса кривизны ее участков, т. е. этот процесс приводит к дроблению масштаба границы. Мы получим правильную картину, если введем минимальный размер радиуса кривизны поверхности, который соответствует размеру отдельной частицы. При таком описании структура поверхности кластера будет соответствовать полученной при другом описании, когда рост кластера происходил в результате присоединения к нему отдельных частиц. Фрактальные свойства кластера при обоих описаниях совпадают.

Аналогии в процессе роста фрактального кластера и вышеуказанных процессов и структур состоят в их одинаковом математическом описании, основанном на уравнениях (2), (3). Однако физическая величина, входящая в эти уравнения, для каждого процесса своя. В случае диэлектрического пробоя этой величиной является потенциал электрического поля, для гидродинамических структур — «вязких пальцев» — ею является давление, а в процессах кристаллизации аморфного вещества — температура. В связи с различным физическим характером рассматриваемых процессов и структур наряду с аналогией в их описании имеются специфические особенности каждого из них. Продемонстрируем это на примере гидродинамических структур.

Гидродинамические структуры — «вязкие пальцы» возникают при введении менее вязкой жидкости в более вязкую под давлением. Наиболее просто этот процесс осуществляется в приборе Хеле — Шоу, который представляет собой две параллельные пластины, между которыми находится вязкая жидкость, причем расстояние между пластинами во много раз меньше их размеров. Через отверстие в верхней пластине вводится менее вязкая жидкость, причем скорость движения ее границы определяется формулой

$$v = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla p, \quad (4)$$

где η — коэффициент вязкости для более вязкой жидкости, p — давление. Это условие эквивалентно граничному условию (3), и, если добавить сюда уравнение $\Delta p = 0$, можно увидеть аналогию в математическом описании процесса роста фрактального кластера и процесса образования гидродинамических структур. Однако выбор минимального масштаба в этих случаях разный, и поэтому фрактальный кластер и «вязкий палец» при некоторых условиях могут иметь разную физическую природу.

В процессе образования «вязких пальцев» принципиальное значение имеет число капиллярности

$$N_{\text{cap}} = \frac{v\eta}{\sigma}, \quad (5)$$

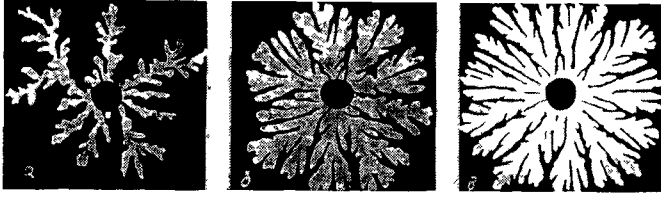
где v — скорость на вершине пальца, η — коэффициент вязкости более вязкой жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе между жидкостями. При введении менее вязкой жидкости в более вязкую граница раздела между ними дробится в процессе движения жидкостей. Минимальный размер масштаба границы оценивается из соотношения

$$\lambda \sim b N_{\text{cap}}^{-1/2} \quad (6)$$

в случае, когда движение двумерное, т. е. этот масштаб больше расстояния между пластинами ($N_{\text{cap}} \ll 1$). Отсюда следует, что в зависимости от условий создания «вязкие паль-

цы» могут иметь разную морфологию (см. рисунок). При определенных условиях их структура может быть фрактальной.

Таким образом, налицо различия в природе фрактального кластера и гидродинамической структуры «вязкого пальца». В случае фрактального кластера в процессах роста, ограниченного диффузией частиц, образуемый кластер всегда имеет фрактальную структуру, причем минимальный масштаб этой структуры отвечает размеру входящих в нее час-



Структура «вязкого пальца» при введении воздуха в жидкий кристалл для разных условий эксперимента (Horvath V, Kertesz J, Vicsek T //Europhys Lett 1987. V. 4. P. 1133

тиц. В случае «вязкого пальца» минимальный размер структуры определяется параметрами процесса, и структура границы между жидкостями не всегда является фрактальной.

Таким образом, фрактальный кластер — физический объект, образуемый в процессах роста при слипании твердых частиц, обладает специфическими физическими свойствами и имеет аналогии с рядом физических процессов и структур.