

537.614

СПИНОВЫЕ СТЕКЛА И НЕЭРГОДИЧНОСТЬ

И. Я. Коренблит, Е. Ф. Шендер

(Ленинградский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова АН СССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	267
2. Основные экспериментальные результаты	269
2.1. Статические свойства. 2.2. Динамические эффекты. 2.3. «Старение» спиновых стекол. 2.4. Спиновое стекло и дальний магнитный порядок.	
3. Модель бесконечного радиуса	276
4. Параметр порядка Паризи	280
5. Анзац Паризи. Решение вблизи температуры перехода	281
6. Уравнения состояния спинового стекла при произвольных температурах. Низкотемпературные свойства	283
7. Векторное спиновое стекло	286
7.1. Изотропный магнетик. 7.2. Анизотропное стекло. 7.3. Влияние случайной анизотропии. 7.4. Экспериментальное исследование H , T -диаграммы.	
8. Неэргодические магнитоупорядоченные системы	289
9. Ультраметрическая топология пространства состояний. Несамоеусредняемость параметра порядка в спиновых стеклах	293
10. Спиновые стекла с обменным взаимодействием, зависящим от расстояния	297
10.1. Пространственная дисперсия в схеме Паризи. 10.2. Другие аналитические подходы. 10.3. Численное моделирование. Эвристические модели.	
11. Спин-стекольные модели в проблемах комбинаторной оптимизации и биологии	303
12. Заключение	304
Список литературы	305

1. Введение. Спиновыми стеклами называют неупорядоченные магнетики, в которых энергия обменного взаимодействия случайным образом меняет не только величину, но и знак. В таких системах с конкурирующими взаимодействиями, в отличие от обычных магнетиков, с понижением температуры дальнего магнитного порядка не возникает. Но не происходит и медленного постепенного замораживания спинов. Ниже некоторой, достаточно хорошо фиксируемой на эксперименте температуры магнетик переходит в новое состояние, не имеющее аналогов в упорядоченных системах. Характерным свойством этого состояния является чрезвычайно медленная релаксация. Типичные времена установления равновесия, во всяком случае, превосходят 10^4 — 10^5 с. Одновременно наблюдаются явления необратимости статических свойств.

Так как энергия обменного взаимодействия сильно зависит от расположения магнитных и немагнитных атомов, то в классе неупорядоченных магнетиков большинство веществ принадлежит к спиновым стеклам. В настоящее время известно огромное число спиновых стекол — металлов, диэлектриков и полупроводников; разбавленных сплавов (т. е. с малой концентрацией магнитных атомов) и концентрированных; кристаллических и аморфных веществ (подробнее см. ниже и обзоры ¹⁻⁴).

Похожие явления наблюдаются и в других системах, магнитных и немагнитных, в которых имеются конкурирующие взаимодействия: в диэлектриках, легированных примесями с электрическим дипольным моментом⁵, в смесях сегнето- и антисегнетоэлектриков⁶⁻⁸, в дипольных магнетиках⁹, в неупорядоченных сверхпроводниках с джозефсоновскими связями^{10,11}.

Первая попытка построить теорию спиновых стекол была сделана Эдвардсом и Андерсоном¹². Они предположили, что с понижением температуры происходит переход в состояние со случайно распределенным молекулярным полем, однозначно определяющим ориентацию каждого спина. Роль параметра порядка в этой теории играет величина $q = \langle \overline{S_r} \rangle^2$ (S_r — вектор спина в точке r , угловые скобки означают термодинамическое усреднение, черта — усреднение по расположению магнитных атомов). Теория Эдвардса — Андерсона объясняет излом в температурной зависимости восприимчивости, обнаруженной впервые в работе Канеллы и Мидоша¹³, но не в состоянии объяснить явлений необратимости и долговременной релаксации. Возникла потребность в последовательной теории, не использующей каких-либо априорных предположений о природе основного состояния.

Такую теорию удалось построить для модели с бесконечным радиусом взаимодействия (энергия взаимодействия является случайной величиной, не зависящей от расстояния между спинами). Эта теория для спиновых стекол играет ту же роль, что теория молекулярного поля для магнитоупорядоченных веществ.

Свойства спинового стекла, описываемого моделью бесконечного радиуса, оказались неожиданными и непохожими на то, с чем до сих пор имела дело физика твердого тела. С понижением температуры в такой модели происходит фазовый переход из парамагнитного или магнитоупорядоченного состояния в фазу, которую можно назвать неэргодической. Основное состояние в этой фазе вырождено: имеется бесконечно много наборов ориентаций спинов, соответствующих в макроскопическом пределе одной и той же энергии. Эти наборы отличаются переворотом бесконечного числа спинов, поэтому барьеры между различными реализациями основного состояния также бесконечны, так что усреднение по времени и по ансамблю приводит, вообще говоря, к различным результатам. Свойства такого неэргодического состояния описываются не одним, а бесконечно многими параметрами порядка — функцией.

Вырождение основного состояния связано с тем, что в магнетике с конкурирующими обменными взаимодействиями неизбежно возникают фрустрации (неудовлетворенные связи), т.е. пары спинов, энергия взаимодействия которых не соответствует минимуму. Основное состояние системы имеет сложную и необычную иерархическую структуру, присущую, по-видимому, всем случайным системам, в которых наложенные связи не могут быть удовлетворены одновременно. Не удивительно поэтому, что идеи теории молекулярного поля и полученные результаты оказались полезными для различных проблем биологии, теории комбинаторной оптимизации и т. д.¹⁴

Теория молекулярного поля качественно хорошо описывает статические свойства реальных спиновых стекол, хотя вопрос о величине нижней критической размерности, от которой, как обычно в теории фазовых переходов, зависит применимость модели бесконечного радиуса к реальным веществам, остается открытым.

Изучение спиновых стекол бурно развивается в течение последних 10—12 лет. На международных конференциях по магнетизму до 20% докладов посвящены вопросам, так или иначе связанным со спиновыми стеклами. И, хотя теория реальных стекол с конечным радиусом взаимодействия еще не построена, так что проблема спинового стекла еще очень далека от завершения, в настоящее время пройден этап, в результате которого возникла картина спинового стекла как принципиально нового физического состояния.

Количество статей, посвященных спиновым стеклам, огромно. В настоящем обзоре мы не ставим себе целью охватить все вопросы, относящиеся к этой проблеме. Наша цель — осветить основные экспериментальные результаты и новые теоретические идеи, в первую очередь основы теоретического описания неэргодического состояния случайных систем.

Обзор построен следующим образом.

В разделе 2 изложены основные экспериментальные свойства, выделяющие спиновые стекла как особый класс магнитных веществ.

В разделах 3—6, 9 и 11 сформулирована модель бесконечного радиуса, предложенная Шеррингтоном и Киркпатриком (ШК) для изинговских спиновых стекол, рассмотрены свойства неэргодического состояния, присущего этой модели, и показано, каким образом методы, развитые при изучении этой модели, могут быть использованы для исследования проблем оптимизации и в биологии. Читатели, которые интересуются общими вопросами статистической физики и ее приложениями к областям, непосредственно с физикой неупорядоченных систем не связанными, могут ограничиться чтением только этих глав.

В разделах 7 и 8 модель ШК обобщается для более сложных систем: векторных спиновых стекол, неупорядоченных антиферромагнетиков, и полученные результаты используются для интерпретации статических свойств неупорядоченных магнетиков.

Наконец, раздел 10 посвящен попыткам выйти за пределы модели бесконечного радиуса. Рассматриваются, в частности, эвристические модели состояния спинового стекла, основанные на результатах численного моделирования. Обсуждается проблема фазового перехода в состояние спинового стекла.

Из-за недостатка места мы не будем касаться многих интересных объектов, тесно связанных со спиновыми стеклами, но обладающих особыми свойствами. Сюда относятся магнетики со случайной анизотропией или случайным полем. Эти разделы физики неупорядоченных систем заслуживают специального обзора.

2. Основные экспериментальные результаты.

2.1. Статические свойства. Уже очень простые магнитные измерения показывают своеобразие спиновых стекол. Оказывается, что ниже

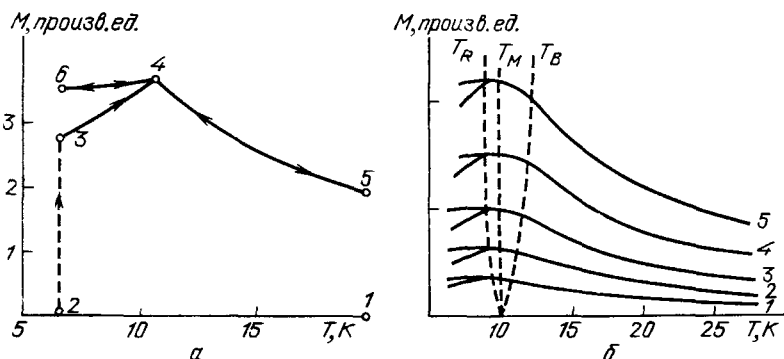


Рис. 1. Зависимость намагниченности от температуры в сплавах AgMn (2,6 ат. % Mn)¹⁸. а — Охлаждение в нулевом магнитном поле (направление процесса $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$) и в поле 6 Гс ($5 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5$). б — Намагниченность как функция температуры при различных магнитных полях (в Гс): 80 (1), 130 (2), 260 (3), 340 (4), 500 (5); T_R , T_M , T_B — соответственно температуры, в которых начинается необратимость, имеет максимум M , нарушается закон Кюри

определенной температуры T_g магнитная восприимчивость образца зависит от его предыстории: охлаждение в магнитном поле и включение поля после

охлаждения до температур ниже T_g приводит к разным значениям магнитного момента (рис. 1, а). Изотермическая намагниченность M_{ZFC} , полученная охлаждением в нулевом поле, является необратимой, а термостатическая M_{FC} (охлаждение в поле) обратима. Термостатическая восприимчивость, как правило, почти не зависит от температуры ниже T_g . Необратимость восприимчивости наблюдается во всех спиновых стеклах и является одним из главных и наиболее простых критериев перехода системы в состояние спинового стекла, а T_g считается температурой перехода в это состояние.

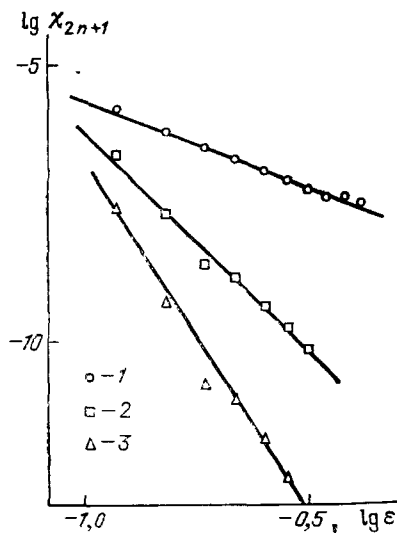


рис. 2 Температурная зависимость коэффициентов χ_{2n+1} в аморфном алюмосиликате марганца с содержанием Mn ат. 15 %²². 1 — $n = 1$, 2 — $n = 2$, 3 — $n = 3$

ный рост нелинейной восприимчивости $\chi_{nl} = \chi - (M/H)$ был обнаружен во многих спиновых стеклах¹⁹⁻²⁹. На рис. 2 показана температурная зависимость нелинейных восприимчивостей χ_{2n+1} ($n = 1, 2, 3$), т.е. коэффициентов в разложении намагниченности по степеням H , для алюмосиликата марганца с 15 % ат. Mn²².

Обычно результаты измерений полевой и температурной зависимости нелинейной восприимчивости обрабатываются по скейлинговой формуле типа

$$\chi_{nl} \sim H^{2/\delta} f\left(\frac{H^2}{\varepsilon^{\beta+\gamma}}\right), \quad \varepsilon = \frac{T - T_g}{T_g}. \quad (2.1)$$

Полученные при этом значения индексов на первый взгляд не универсальны и меняются от вещества к веществу. По мнению авторов работ^{30,31}, различие в индексах может быть объяснено влиянием случайной анизотропии, которая обуславливает переход (кроссовер) от изинговского к гейзенберговскому критическому поведению при увеличении магнитного поля³².

Характерной особенностью спиновых стекол является линейная зависимость магнитной теплоемкости C_M от температуры при $T \ll T_g$ и плавный максимум теплоемкости при температурах несколько выше T_g ³³⁻³⁶. В работе³⁵ обнаружены особенности производных dC_M/dT и d^2C_M/dT^2 , которые авторы связывают с переходом в состояние спинового стекла.

2.2. Динамические эффекты. Уже в ранних работах было обнаружено, что реальная часть восприимчивости спиновых стекол неожиданно сильно зависит от частоты^{1,3}. Даже при очень низких частотах порядка или меньше 1 Гц максимум восприимчивости χ_{ZFC} смещается с рос-

том ω в сторону высоких температур и уширяется³⁷ (рис. 3, а). Частотная дисперсия $\chi'(\omega)$ сопровождается поглощением мощности, так что в спиновых стеклах отлична от нуля мнимая часть восприимчивости $\chi''(\omega)$ (рис. 3, б). Быстрый рост χ'' с понижением температуры (перегиб на кривой $\chi''(T)$)

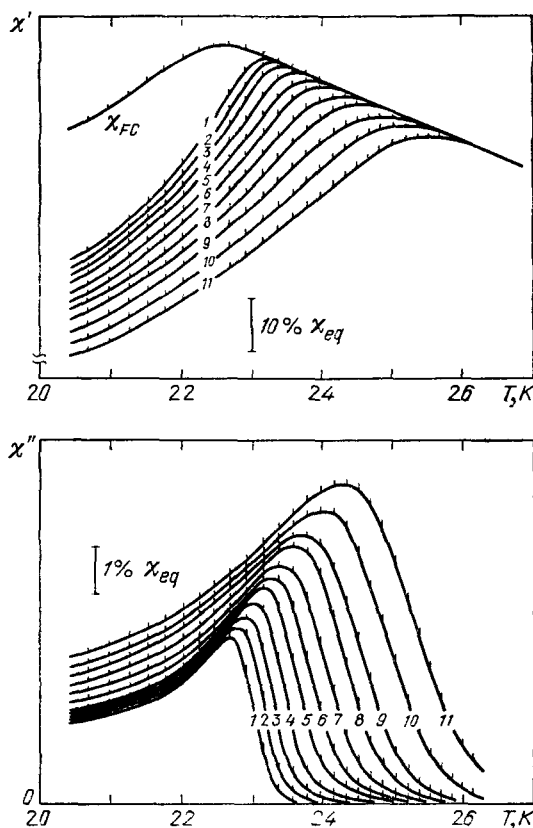


Рис. 3 Восприимчивость $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ аморфного металлического спинового стекла $(\text{Fe}_{0,15}\text{Ni}_{0,85})_{75}\text{P}_{16}\text{B}_6\text{Al}_3$ как функция температуры при различных частотах³⁷. Кривые 1—11 соответствуют частотам $f = \omega/2\pi$ (Гц) = 0,51 (1), 1,7 (2), 5,1 (3), 17 (4), 56 (5), 170 (6), 510 (7), 1,7 10^3 (8), 5,1 10^3 (9), 17 10^3 (10) и 51 10^3 (11), χ_{FC} — статическая восприимчивость, измеренная в нулевом магнитном поле

обычно начинается при температурах, соответствующих максимуму $\chi'(T)$. Частотная зависимость $\chi''(\omega)$ является слабой. Даже при самых низких частотах $\sim 10^{-2}$ Гц, при которых проводились измерения, $\chi''(\omega)$ отлична от нуля³⁷⁻³⁹.

Если $\chi''(\omega)$ почти не зависит от частоты при низких частотах и выполняется флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ), то интенсивность магнитных шумов

$$(M^2)_{\omega} \sim \frac{\chi''(\omega)}{\omega} \sim \frac{1}{\omega}, \quad (2.2)$$

т.е. должен наблюдаться $1/f$ -шум. Он, действительно, наблюдался в нескольких спиновых стеклах³⁹⁻⁴². Результаты для $\text{Eu}_{0,4}\text{Sr}_{0,6}\text{S}$ приведены на рис. 4³⁹. Восприимчивости $\chi''(\omega)$, измеренная прямым образом и вычисленная по интенсивности шума с помощью ФДТ, хорошо согласуются друг с другом. Интенсивность шума очень сильно меняется при приложении слабого магнитного поля. После приложения поля всего в 0,3 Гс стационарное значение интенсивности шума увеличивается в 10 раз⁴¹. Отметим, наконец, что, согласно⁴¹, спектр шумов, измеренный в поле, включенном при $T > T_g$, как и намагниченность, не зависит от времени наблюдения.

Между $\chi''(\omega)$ и $\chi'(\omega)$ существует эмпирическое соотношение^{37,43-45}

$$\chi''(\omega) = -\frac{\pi}{2} \frac{d\chi'}{d \ln \omega}, \quad (2.3)$$

которое можно получить, если предположить, что в спиновом стекле имеется широкий спектр времен релаксации^{43,46}.

Воспользовавшись теоремой Крамерса — Кронига и считая $\chi''(\omega) = \text{const}$, получаем, что действительная часть восприимчивости $\chi'(\omega) \sim \ln \omega$. Это означает логарифмическую зависимость неравновесной восприимчивости от времени. Такого типа зависимости, действительно, наблюда-

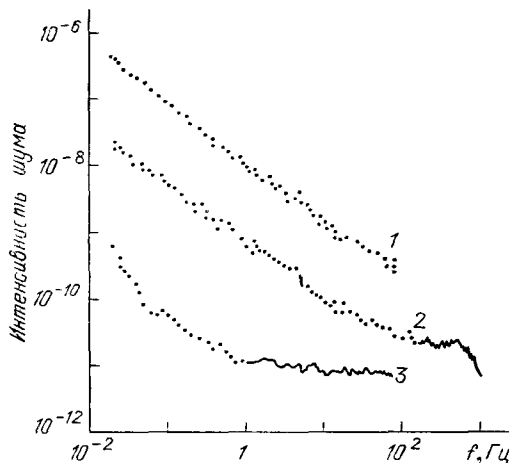


Рис. 4 Магнитный шум в $\text{Eu}_{0,4}\text{Sr}_{0,6}\text{S}^{39}$. $T_g = 1,53$ К. T (К) = 1,42 (1), $T = 1,82$ (2) и 1,42 (3), без образца

лись в спиновых стеклах с 1974 г.^{47,48}. При приложении магнитного поля к образцу, охлажденному до $T < T_g$ без поля, намагниченность сначала скачком (за микроскопические времена) увеличивается, а затем медленно растет, приближаясь к равновесному значению по закону, близкому к логарифмическому (или степенному с малым показателем степени), за времена вплоть до времен порядка часов или даже суток. Наоборот, если образец охлажден в поле до $T < T_g$, то после выключения поля намагниченность сначала падает скачком, а затем медленно уменьшается, оставаясь конечной даже через время $t \approx 10^5$ с (рис. 5)⁴⁹.

Эти особенности динамики спиновых стекол, как и необратимость статической восприимчивости, показывают, что в спиновых стеклах имеется широкий спектр времен релаксации, который простирается до макроскопических времен $t \approx 10^5$ с, а возможно, и больше — никаких ограничений сверху на длительность релаксации пока не получено.

Поглощение на низких частотах и необратимость статической восприимчивости наводят на мысль, что основное состояние спиновых стекол при $T < T_g$ вырождено или квазивырождено. Минимумы энергии («долины»), соответствующие различным наборам ориентаций спинов, отделены друг от друга макроскопически высокими барьерами, и потому релаксация происходит за макроскопически большие времена.

На рис. 5 видно, что зависимость остаточной намагниченности от M_{TRM} времени, строго говоря, отличается от логарифмической. В работах^{50,51} было показано, что зависимость M_{TRM} от времени лучше описывается так называемой растянутой экспонентой (закон Кольрауша)

$$M_{\text{TRM}} = M_0 \exp[-C(\omega_0 t)^{1-n}(1-n)^{-1}], \quad (2.4)$$

где C и ω_0 являются константами, а n — функция температуры (рис. 6)⁵⁰.

Медленные релаксационные процессы, описываемые законом Кольрауша, наблюдаются во многих неупорядоченных системах, в том числе и в обычных стеклах^{52,53}.

Релаксация по закону Кольрауша может быть, конечно, объяснена, если подобрать соответствующим образом спектр времен релаксации и считать, что различные процессы релаксации происходят одновременно и независимо, так что

$$M(t) = \int W(\tau) e^{-t/\tau} d\tau, \quad (2.5)$$

где $W(\tau)$ — функция распределения времен релаксации.

В работе⁵⁴ для объяснения закона Кольрауша была предложена модель иерархической релаксации, которая предполагает не параллельную, а

последовательную релаксацию различных степеней свободы: для того, чтобы включались в релаксацию степени свободы более высокого уровня, необходимо, чтобы произошла релаксация степеней свободы более низкого уровня. Как мы увидим в дальнейшем, иерархическая структура степеней свободы естественным образом возникает в простейшей модели спинового стекла.

2.3. «Старение» спиновых стекол. Обратимость статической восприимчивости, измеренной охлаждением в поле, наводит на мысль, что состояние, полученное таким способом, является равновесным. Так и считали до 1983 г., когда в работе ⁵⁵ было показано, что релаксация намагниченности после выключения поля зависит от времени t_w , в течение которого система находится в магнитном поле при данной температуре $T < T_g$ (рис. 7), хотя до выключения поля намагниченность от времени не зависит ⁵⁵⁻⁵⁷.

Зависимость скорости релаксации от времени ожидания t_w прослежена до $t_w \sim 10^5$ с ⁵⁸. Таким образом, в состоянии, полученном охлаждением в поле, происходят долговременные процессы установления равновесия, не меняющие значения намагниченности ⁵¹.

Аналогичные эффекты памяти наблюдались и в состоянии, полученном охлаждением в нулевом поле ^{37,55,56,59-61}: процесс установления равновесной намагниченности после включения поля при $T < T_g$ зависит от времени ожидания до включения поля.

Динамические свойства системы при $t < t_w$ и $t > t_w$ несколько разные. В работах ^{58,56,49} были предложены различные модификации соотношения (2.4), которые учитывают влияние процесса старения на динамику. В ⁵⁷ указано на интересную связь, которая существует между логарифмическими производными по времени термостатической S_R и изотермической S_I восприимчивости:

$$\begin{aligned} -S_R(T) &= S_I(T), \quad t \ll t_w, \\ -S_R(T) &= kS_I(T), \quad t \gg t_w \end{aligned} \quad (2.6)$$

где k не зависит от времени и больше единицы.

Влияние времени ожидания на динамику очень ярко проявляется при исследовании спектра шумов ⁴¹. Область частот, в которой интенсивность шумов $\sim \omega^{-1}$, зависит от времени ожидания. Если $t_w > 70$ ч, то спектр шума стационарен и меняется по закону ω^{-1} в интервале частот от $2 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-2} Гц.

2.4. Спиновое стекло и дальний магнитный порядок. Во многих экспериментальных работах было показано, что с понижением температуры переход в спиновое стекло возможен не только из парамагнитного состояния, но и из магнитоупорядоченного, ферро- или антиферромагнитного. Такой переход часто называют возвратным. Неэргодичность проявляется, как и обычно, в динамических экспериментах и необра-

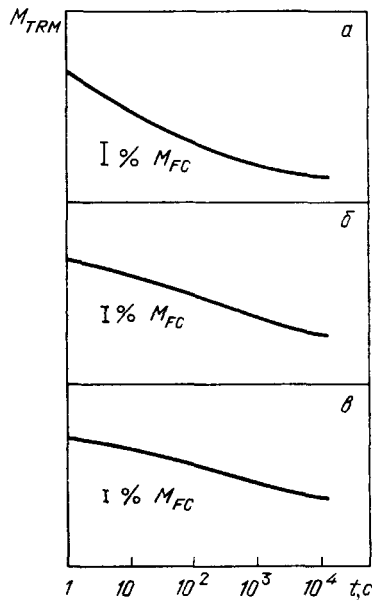


Рис. 5. Термостатическая намагниченность сплава CuMn (5 ат. % Mn). $T/T_g = 0,96$ (а), $0,89$ (б) и $0,75$ (в). $T_g = 28$ К.

тимости статической восприимчивости⁶²⁻⁸⁶. На рис. 8 показаны фазовые диаграммы твердых растворов $\text{Eu}_{1-x}\text{Sr}_x\text{S}$ и $\text{Fe}_x\text{Mg}_{1-x}\text{Cl}_2$, демонстрирующих такие переходы. Более сложен вопрос о том, сохраняется ли дальний порядок в неэргодическом состоянии. Для перехода из ферромагнитного состояния от-

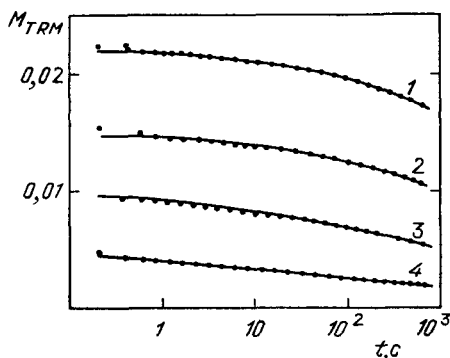


рис. 6. Зависимость остаточной намагниченности от времени в AgMn 2,6 ат. % Mn при различных температурах⁸⁰. $T/T_g = 0,771$ (1), 0,856 (2), 0,897 (3) и 0,996 (4). Кривые построены по формуле (2.4)

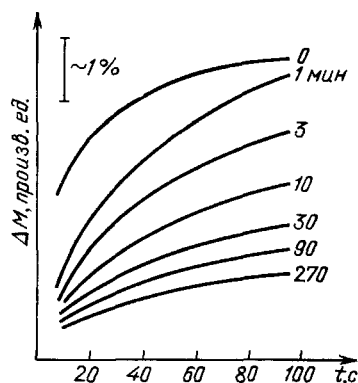


рис. 7. Изменение со временем намагниченности в образце CuMn (4 ат. % Mn), охлажденному в нулевом магнитном поле⁸⁵. Около кривых указано время ожидания (в мин) до включения магнитного поля. $T = 23 \text{ K}$, $T_g = 26 \text{ K}$

ветить на этот вопрос по причинам, о которых речь пойдет ниже, пока трудно. К настоящему времени убедительные результаты были получены для разбавленного изинговского антиферромагнетика $\text{Fe}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Cl}_2$. Температурная зависимость восприимчивости для $\text{Fe}_{0,55}\text{Mg}_{0,45}\text{Cl}_2$ показана на рис. 9. Максимум восприимчивости соответствует температуре Нееля, а переходу в

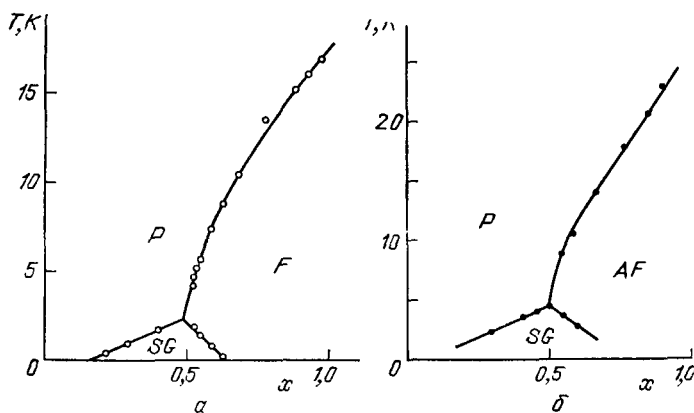


рис. 8. Фазовые диаграммы неупорядоченных растворов $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}$ (а)⁶³ и $\text{Fe}_x\text{Mg}_{1-x}\text{Cl}_2$ (б)⁶⁸. P — парамагнитная фаза, F , AF — соответственно ферро- и антиферромагнитная фазы, SG — состояние спинового стекла

неэргодическое состояние — температура, при которой появляется частотная дисперсия $\chi'(\omega)$. В то же время интенсивность брэгговского рассеяния нейтронов, пропорциональная намагниченности подрешеток, плавно нарастает с понижением температуры в глубь неэргодической фазы без каких-либо видимых особенностей при $T = T_g$ ⁷¹, т.е. ниже T_g дальний антиферромагнитный порядок сохраняется.

При возвратном переходе из ферромагнитного состояния $\chi'(\omega)$ резко падает вблизи T_g (рис. 10)⁸⁵. Это дало основание полагать, что намагниченность обращается в нуль при переходе в спиновое стекло. К такому же выводу пришли и авторы ряда работ, в которых измерялись намагниченность

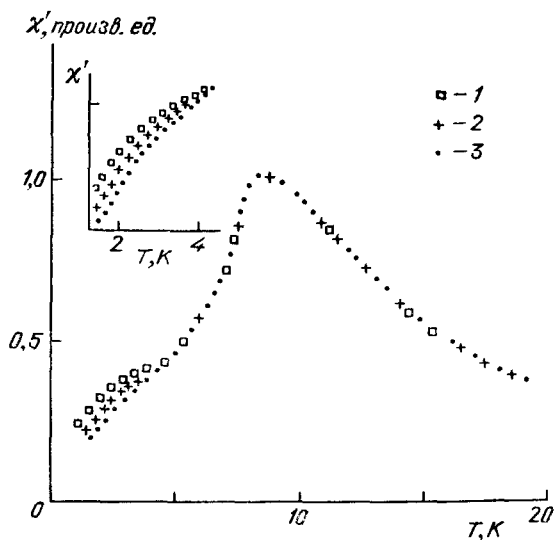


Рис. 9. Температурная зависимость действительной части восприимчивости раствора $\text{FeMg}_{0.50.45}\text{Cl}_2$ при частотах 11 Гц (1), 345 Гц (2) и 2785 Гц (3) $T_N = 7,5^\circ\text{K}$, $T_g = 3,0^\circ\text{K}$

насыщения, интенсивность брэгговского рассеяния нейтронов, коэффициент жесткости спиновых волн (см. ^{64,72,73,74,87-91}, а также ссылки в ^{1,3}). Однако в последние годы накапливается все больше данных в пользу того, что магнитный момент сохраняется при переходе в спиновое стекло. Эти данные получены с помощью различных макроскопических измерений, магнитной

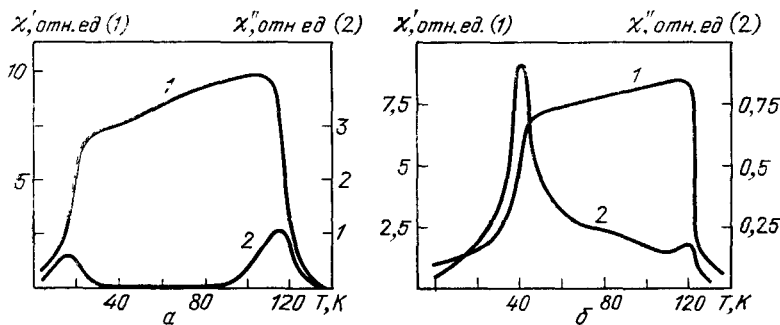


Рис. 10. Температурные зависимости действительной χ' и мнимой χ'' частей линейной магнитной восприимчивости сплавов $\text{Fe}_{65}\text{Ni}_{25}\text{Cr}_{10}$ (а) и $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{Mn}_{20}$ (б). Максимумы χ'' соответствуют температурам T_c и T_g

нейтронографии, мессбауэровских экспериментов ^{80,81,75-78,92-97}. Авторы недавних работ ^{80,81,93-98} считают, что спад восприимчивости χ' при $T < T_g$ связан с резким ростом энергии анизотропии и коэрцитивной силы и не обязательно свидетельствуют об исчезновении намагниченности.

Существенную информацию об изменении состояния системы при переходе в спиновое стекло дают мессбауэровские эксперименты, показывающие, что в $T = T_g$ начинается замораживание компонент спинов, поперечных намагниченности. Это хорошо видно из температурных зависимостей намаг-

ниченности и сверхтонкого поля, показанных на рис. 11. Они совпадают выше T_g , а ниже, когда начинается замораживание поперечных компонент спина, намагниченность меньше.

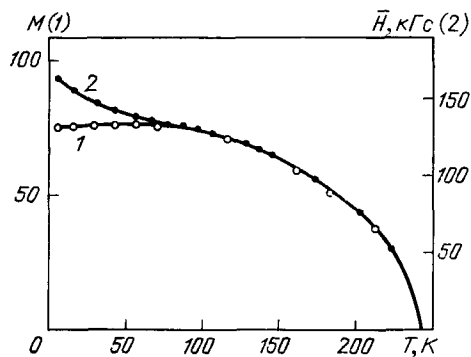


Рис. 11. Зависимость от температуры среднего сверхтонкого поля (\bar{H}) на железе (темные кружки) и намагниченности насыщения (M) (светлые кружки) в аморфном сплаве $(\text{Fe}_{0.765}\text{Mn}_{0.235})_{75}\text{P}_{10}\text{B}_6\text{Al}_3$ ⁹³

3. Модель бесконечного радиуса. Наиболее простой моделью, позволяющей проследить возникновение неэргодичности в спиновых стеклах, является модель бесконечного радиуса, предложенная Шеррингтоном и Киркпатриком ^{99,100}. В ней считается, что энергии обменного взаимодействия спинов J_{ij} не зависят от расстояния между ними и величины J_{ij} распределены по гауссовскому закону

$$P(J_{ij}) = \frac{N^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}J} \exp \left\{ -\frac{[J_{ij} - (J_0/N)]^2}{2J^2} N \right\}; \quad (3.1)$$

здесь N — число спинов в системе, $J_0/N > 0$ и $J/N^{1/2}$ — среднее значение и дисперсия энергий взаимодействия. Они определены таким образом, чтобы при $N \rightarrow \infty$ полная энергия системы была пропорциональна N .

Рассмотрим для начала изинговский магнетик с гамильтонианом *)

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i; \quad (3.2)$$

$\sigma_i = \pm 1$, H — внешнее поле. Его свободная энергия

$$F = -T \overline{\ln Z}, \quad Z = \text{Sp} \exp \left(-\frac{\mathcal{H}}{T} \right), \quad (3.3)$$

где черта означает конфигурационное усреднение с гауссовскими функциями распределения (3.1).

Буквальное вычисление свободной энергии, предполагающее сначала термодинамическое усреднение для системы с заданными распределениями обменных интегралов, а потом усреднение по их распределению, провести не удастся. Свободную энергию вычисляют с помощью так называемого метода реплик, который позволяет провести вначале конфигурационное усреднение. Для этого заметим, что (3.3) можно представить в виде

$$F = -T \lim_{n \rightarrow 0} \overline{[(Z^n - 1)n^{-1}]}. \quad (3.4)$$

При целых n величина Z^n представляет из себя статсумму n независимых систем (реплик) с одним и тем же распределением обменных интегралов:

$$Z^n = \text{Sp} \exp \left(\frac{1}{2T} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \right). \quad (3.5)$$

*) Мы пользуемся системой единиц, в которой магнетон Бора $\mu_B = 1$, а температура измеряется в энергетических единицах.

Величину Z^n легко усреднить по распределениям (3.1). Свободную энергию можно затем получить, аналитически продолжив Z^n с целых n и произведя предельный переход $n \rightarrow 0$. Этот переход является самым тонким местом метода реплик, поскольку аналитические свойства Z^n как функции n известны плохо. Такую высокую цену приходится платить за то, чтобы задачу о термодинамике неупорядоченной системы свести к задаче с эффективным гамильтонианом.

После интегрирования величины Z^n по всем J_{ij} с функциями распределения (3.1) получим:

$$F = -T \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \left(\exp \frac{J^2 N n}{4T^2} \right) \text{Sp} \exp \left[\sum_{\alpha \neq \beta} \left(\sum_{i, j} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta \right)^2 \frac{J^2}{2NT^2} + \frac{J_0}{2NT} \sum_{\alpha} \left(\sum_i \sigma_i^\alpha \right)^2 + \frac{H}{T} \sum_{\alpha} \sum_i \sigma_i^\alpha \right] - 1 \right\}. \quad (3.6)$$

В (3.6) опущены члены, исчезающие в термодинамическом пределе.

Чтобы свести задачу к одноузельной, воспользуемся интегральным преобразованием

$$e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{y^2}{2} + (2\lambda)^{1/2} y x \right] dy. \quad (3.7)$$

С его помощью перепишем (3.6) в виде

$$F = -T \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left[\left(\exp \frac{J^2 N n}{4T^2} \right) \int \prod_{\alpha} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} dx^\alpha \times \right. \\ \left. \times \prod_{\alpha\beta} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} dy^{\alpha\beta} \exp (-N\Phi(x^\alpha, y^{\alpha\beta})) - 1 \right], \quad (3.8)$$

$$\Phi(x^\alpha, y^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > \beta} (y^{\alpha\beta})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (x^\alpha)^2 - \\ - \ln \text{Sp} \exp \left(\frac{J}{T} \sum_{\alpha > \beta} y^{\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta + \frac{J_0^{1/2}}{T^{1/2}} \sum_{\alpha} x^\alpha \sigma^\alpha + \frac{H}{T} \sum_{\alpha} \sigma^\alpha \right). \quad (3.9)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ интегралы в (3.8) могут быть вычислены методом перевала. В стационарной точке имеем

$$y_0^{\alpha\beta} = \frac{J}{T} \langle \sigma^\alpha \sigma^\beta \rangle, \quad x_0^\alpha = \left(\frac{J_0}{T} \right)^{1/2} \langle \sigma^\alpha \rangle, \quad (3.10)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение с эффективным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = - \sum_{\alpha} (J_0 m^\alpha + H) \sigma^\alpha - \frac{J^2}{T} \sum_{\alpha > \beta} q^{\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta, \quad (3.11)$$

здесь

$$m^\alpha = \langle \sigma^\alpha \rangle, \quad q^{\alpha\beta} = \langle \sigma^\alpha \sigma^\beta \rangle, \quad \alpha \neq \beta. \quad (3.12)$$

После взятия шпура с \mathcal{H}_{eff} нужно произвести предельный переход $n \rightarrow 0$.

(3.10)–(3.12) представляют собой самосогласованную систему уравнений, которая, вообще говоря, имеет много решений. В ^{99,100} исследовано простейшее решение, когда величины m^α и $q^{\alpha\beta}$ не зависят от репличных индексов (реплично-симметричное решение):

$$m^\alpha = m, \quad q^{\alpha\beta} = q.$$

Тогда с помощью еще одного преобразования типа (3.7) можно привести уравнения самосогласования к виду

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-z^2/2} \operatorname{th}^2 \frac{E(z)}{T} dz, \\ m &= \int \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{th} \frac{E(z)}{T} dz, \\ E(z) &= J_0 m + H + J q^{1/2} z, \end{aligned} \quad (3.13)$$

а свободная энергия равна

$$f = \frac{F}{N} = T \left[\frac{J_0 m^2}{2T} - \frac{J^2 (1-q)^2}{4T^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-z^2/2} \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{E(z)}{T} \right) dz \right]. \quad (3.14)$$

Из (3.13) видно, что m — это средняя намагниченность, усреднение проводится по распределению молекулярных полей, которое в данной модели оказалось гауссовским. Параметр q , который впервые ввели Эдвардс и Андерсон¹², имеет, как видно из (3.13), смысл среднего по всем узлам от квадрата намагниченности в узле

$$q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i \rangle_T^2; \quad (3.15)$$

$\langle \dots \rangle_T$ означает термодинамическое усреднение для данной релаксации. При $H = J_0 = 0$ намагниченность m , определяемая (3.13), равна нулю при всех температурах. Параметр q равен нулю при $T > T_g = J$ и отличен от нуля при $T < T_g$. Таким образом, реплично-симметричное решение приводит к фазовому переходу в состояние с $q \neq 0$. Из (3.13) следует, что восприимчивость подчиняется закону Кюри в парамагнитной фазе $\chi \sim T^{-1}$, в точке перехода имеет излом. Нелинейная восприимчивость в этой точке расходится.

$$\chi_{nl} \sim (T - T_g)^{-1}.$$

Оба эти факта качественно согласуются с экспериментальными результатами.

В магнитном поле q отлично от нуля при любой температуре, и фазового перехода в реплично-симметричной модели нет.

Однако уже в работе Шеррингтона и Киркпатрика было показано, что при низких температурах энтропия реплично-симметричного решения становится отрицательной. Это стимулировало исследование устойчивости реплично-симметричного решения относительно флуктуаций, нарушающих репличную симметрию¹⁰¹. Исследуя собственные значения матрицы устойчивости

$$\hat{M} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^{\alpha\beta} \partial y^{\gamma\delta}}, \quad (3.16)$$

де Альмейда и Таулесс обнаружили, что одно из собственных значений меняет знак при температуре, удовлетворяющей уравнению

$$T^2 = J^2 \int \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{ch}^{-4} \frac{E(z)}{T} dz, \quad (3.17)$$

где величины m и q должны определяться из системы (3.13). Выше этой температуры T_g реплично-симметричная перевальная точка соответствует, действительно, экстремуму функционала Φ , а ниже — это седловая точка. Значит, при температуре $T = T_g$ (J_0, H_0) происходит нарушение репличной симметрии и возникает какое-то новое состояние.

Изменение знака собственного значения матрицы устойчивости связано с особенностью обобщенной восприимчивости $\chi^{(2)} = \overline{\chi_i}^{102}$, где локальная восприимчивость

$$\chi_i = \sum_j (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle). \quad (3.18)$$

Если $H = J_0 = 0$, то из (3.17) следует $T_g = J$, т.е. реплично-симметричное решение устойчиво только в парамагнитной фазе, когда $q = 0$. Магнитное поле не уничтожает переход, а лишь уменьшает T_g . Решение системы (3.17), (3.13) дает:

$$T_g(H) = J \left[1 - \left(\frac{3}{4} \frac{H^2}{J^2} \right)^{1/3} \right], \quad H \ll J, \quad (3.19)$$

$$= (3 \sqrt{2\pi})^{-1} J \exp \left(-\frac{H^2}{2J^2} \right), \quad H \gg J. \quad (3.20)$$

Фазовая диаграмма на плоскости (T, H) , определяемая уравнением (3.17), приведена на рис. 12. Сплошная линия — так называемая линия Алмейда Таулесса (АТ) — соответствует решению уравнения (3.17). Пунктиром показана линия перехода в спиновое стекло для гейзенберговского магнетика (линия Габэя — Тулуза), о которой пойдет речь в разделе 8. Уменьшение T_g с ростом магнитного поля наблюдалось во всех «чистых» ($J_0 < J$) спиновых стеклах. Примером могут служить экспериментальные данные, показанные на рис. 1. Вопрос о том, по какому закону происходит уменьшение T_g , является более сложным. Мы его обсудим в разделе 8.

В методе реплик, усреднив с самого начала по $\{J_{ij}\}$, мы перешли к эффективному гамильтониану без случайных переменных. Можно попытаться вычислить свободную энергию для данного распределения $\{J_{ij}\}$, усредняя по беспорядку в самом конце. В работе Таулесса, Андерсона и Палмера (ТАП)¹⁰³ суммированием старших по $1/N$ членов высокотемпературного разложения получено следующее выражение для свободной энергии при $J_0 = H_0 = 0$:

$$F = Nf_0 + f_1, \quad (3.21)$$

где выше перехода

$$f_0 = -T \ln 2 - \frac{J^2}{4T}, \quad (3.22)$$

$$f_1 = -\frac{1}{4} T \ln \left(1 - \frac{J^2}{T^2} \right) + \text{несингулярные члены}.$$

Член, не зависящий от N в свободной энергии, расходится в точке перехода. Ниже температуры перехода экстенсивная часть F имеет вид

$$F = - \sum_{i>j} J_{ij} m_i m_j - \frac{1}{2T} \sum_{i>j} J_{ij}^2 (1 - m_i^2) (1 - m_j^2) + \\ + \frac{T}{2} \sum_i [(1 + m_i) \ln (1 + m_i) + (1 - m_i) \ln (1 - m_i)]; \quad (3.23)$$

$$m_i = \langle \sigma_i \rangle_T.$$

Уравнения для среднего спина на узле m_i получаются из условия стационарности F по всем m_i :

$$m_i = \text{th} \sum_j \frac{J_{ij}}{T} \left(m_j - m_i J_{ij} \frac{1 - m_j^2}{T} \right). \quad (3.24)$$

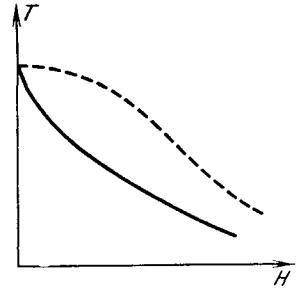


Рис. 12 T, H -фазовая диаграмма спинового стекла в модели бесконечного радиуса

Эффективное поле

$$\sum_j J_{ij} m_j - \sum_j J_{ij}^2 m_i \frac{1 - m_j^2}{T}, \quad (3.25)$$

действующее на спины, отличается от обычного выражения в приближении молекулярного поля вторым слагаемым. В упорядоченном магнетике $J_{ij}^2 \sim \sim N^{-2}$, поэтому второй член в эффективном поле $\sim N^{-1}$ и может быть отброшен, а для спинового стекла оба члена в эффективном поле, вообще говоря, одного порядка и не исчезают при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, теория молекулярного поля для спиновых стекол не сводится к замене одного из спинов на его среднее значение, корреляционные эффекты всегда существенны. Поэтому даже в парамагнитной фазе теплоемкость отлична от нуля.

Соотношения (3.24) представляют собой хорошо известные уравнения Бете. Второе слагаемое в эффективном поле — это член реакции Онзагера, он описывает уменьшение момента в узле j вследствие реакции спина σ_i . Действительно, поле, созданное в узле j спином σ_i , равно $J_{ij} m_i$, а уменьшение момента в узле j за счет этого поля равно $\chi_j J_{ij} m_i$. Так как локальная восприимчивость $\chi_j = 1 - m_j^2$, мы приходим к выражению (3.25).

Выше $T_g = J$ свободная энергия (3.22) совпадает с полученной методом реплик в ^{99,100}.

Решить уравнения (3.24) ниже T_g не удалось. Однако было показано ¹⁰⁴⁻¹⁰⁶, что ниже T_g возникает много решений уравнений (3.24), дающих одну и ту же свободную энергию f_0 . Количество решений экспоненциально велико, т. е. пропорционально $\exp(\alpha(T)N)$, $\alpha(T)$ — численный коэффициент, равный 0,2 при $T = 0$ и пропорциональный $(T_g - T)^6$ при $T \rightarrow T_g$. Их статистика разные, так как экстенсивная часть свободной энергии является случайной величиной на множестве решений. Поэтому, как мы увидим ниже, энтропия в расчете на один спин обращается в нуль при $T \rightarrow 0$.

4. Параметр порядка Паризи. Мы видели, что ниже температуры АТ реплично-симметричное решение неприменимо. Состояние системы должно описываться не одним параметром q , а набором величин $q^{\alpha\beta}$. Впервые внутренне непротиворечивую теорию, в которой нарушена репличная симметрия, предложил Паризи ¹⁰⁷. Теория его является эвристической в том смысле, что ни способ параметризации матрицы $q^{\alpha\beta}$, ни процедура аналитического продолжения этой матрицы $n \times n$ на $n = 0$ никакими общими принципами не заданы. Теорию Паризи, математически достаточно сложную и необычную, мы изложим в следующем параграфе. А сначала мы приведем предложенную Паризи ¹⁰⁸ физическую интерпретацию параметра порядка, полученного им в ¹⁰⁷.

Идея Паризи состоит в том, что параметр порядка спинового стекла должен содержать информацию о бесконечно большом вырождении основного состояния. Каждое состояние, которое мы будем нумеровать индексом α , определяется набором чисел заполнения $m_i^\alpha = \langle \sigma_i^\alpha \rangle_T$, i — номер узла. Введем величину

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i m_i^\alpha m_i^\beta, \quad (4.1)$$

которая характеризует перекрытие разных состояний. Очевидно, что $q^{\alpha\alpha} = \frac{1}{N} \sum_i (m_i^\alpha)^2$ совпадает с параметром Эдвардса — Андерсона. При $T = 0$ величина $N(1 - q^{\alpha\beta})$ — удвоенное число спинов, которое необходимо перевернуть, чтобы перейти из состояния α в состояние β .

Случайная величина $q^{\alpha\beta}$ описывается функцией распределения

$$W(q) = \sum_{\alpha, \beta} P_\alpha P_\beta \delta(q - q^{\alpha\beta}), \quad (4.2)$$

где P_α — статвес состояния α . Вероятность того, что $q^{\alpha\beta}$ принимает значение, не превышающее q , есть

$$x(q) = \int_0^q W(q') dq'. \quad (4.3)$$

Обратная функция $q(x)$, $0 \leq x \leq 1$ есть параметр порядка Паризи для спинового стекла. По определению функция $q(x)$ монотонно растет с ростом x . Если основное состояние не вырождено, то $q^{\alpha\beta}$ имеет только одно значение $q^{\alpha\alpha}$, так что $q(x) = \text{const}$. Если же состояние бесконечно вырождено, то в каком-либо интервале появляется зависимость $q(x)$ от аргумента. Таким образом, появление зависимости $q(x)$ от x сигнализирует о том, что система перешла в фазу с существенно вырожденным основным состоянием.

С функцией $q(x)$ непосредственно связана восприимчивость чистого спинового стекла $J_0 = 0$

$$\chi = \frac{1}{NT} \sum_{i,j} (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_T - \langle \sigma_i \rangle_T \langle \sigma_j \rangle_T). \quad (4.4)$$

Благодаря симметричному распределению обменных интегралов J_{ij} в (4.4) отличны от нуля только слагаемые с $i = j$, так что

$$\chi = \frac{1}{NT} \sum_i (1 - \langle \sigma_i \rangle_T^2). \quad (4.5)$$

Дальнейшие вычисления зависят от того, считаем ли мы, что система находится в одном из энергетических минимумов (или, как часто говорят, в одной долине) и в другие минимумы перейти не может, или проводим термодинамическое усреднение обычным образом по всем состояниям. Первый способ усреднения эквивалентен усреднению по времени. Из определения $q(x)$, которое было введено выше, видно, что при усреднении по состояниям одной долины

$$\frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_T^2 = \frac{1}{N} \sum_i (m_i^\alpha)^2 = q(1),$$

так что соответствующая восприимчивость

$$\chi_{\text{леq}} = \frac{1}{T} (1 - q(1)). \quad (4.6)$$

Если же усреднение проводится по Гиббсу, то

$$\frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_T^2 = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{\alpha, \beta} P_\alpha P_\beta m_i^\alpha m_i^\beta = \int_0^1 W(q) q dq = \int_0^1 q(x) dx,$$

и равновесная восприимчивость

$$\chi_{\text{eq}} = \frac{1}{T} \left(1 - \int_0^1 q(x) dx \right). \quad (4.7)$$

Восприимчивости (4.6) и (4.7) различаются, если $q(x)$ зависит от x .

5. Аппроксимация Паризи. Решение вблизи температуры перехода. В пределе $n \rightarrow 0$ из (3.9) — (3.12), согласно ¹⁰¹, следует, что свободная энергия при $J_0 = 0$ равна

$$f = T \max \left\{ -\frac{J^2}{4T^2} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{4} \sum_{\alpha > \beta} \frac{J^2}{T^2} (q^{\alpha\beta})^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \text{Sp exp} \left(\frac{J^2}{T^2} \sum_{\alpha > \beta} q^{\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta + \frac{H}{T} \sum_\alpha \sigma^\alpha \right) \right] \right\}. \quad (5.1)$$

Вблизи T_g экспоненту можно разложить по степеням $q^{\alpha\beta}$, так что

$$f = -T \lim_{2n} \frac{1}{2n} \left(\varepsilon \operatorname{Sp} \hat{q}^2 - \frac{1}{3} \operatorname{Sp} \hat{q}^3 + \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} \hat{q}^4 + \frac{H^2}{T^2} \sum_{\alpha, \beta} q^{\alpha\beta} \right), \quad (5.2)$$

где $\varepsilon = \frac{T_g - T}{T_g}$, $T_g = J$.

Вообще говоря, в (5.2) выписаны не все члены порядка q . Опущены также члены порядка $\varepsilon^2 q^2$. Можно, однако, убедиться в том, что нарушение репличной симметрии связано именно с оставленным в (5.2) слагаемым порядка q^4 , а отброшенные члены, по крайней мере во втором порядке по ε , сокращаются¹⁰². В соответствии с параметризацией Паризи матрицы \hat{q} определяются $k+1$ действительными числами q_i ($i = 0, \dots, k$) и k целыми числами m_i ($i = 1, \dots, k$) такими, что m_i/m_{i+1} есть целое число, причем $m_0 = 1$, $m_{k+1} = n$. Так, для $n = 8$, $k = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$ матрица \hat{q} имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & q_0 & q_1 & q_1 & & & \\ q_0 & 0 & q_1 & q_1 & & & \\ q_1 & q_1 & 0 & q_0 & & q_2 & \\ q_1 & q_1 & q_0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & q_0 & q_1 & q_1 \\ & & & & q_0 & 0 & q_1 & q_1 \\ & q_2 & & & q_1 & q_1 & 0 & q_0 \\ & & & & q_1 & q_1 & q_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Благодаря такой структуре каждый элемент q_i встречается в строке (столбце) $m_{i+1} - m_i$ раз. Поэтому, например,

$$\sum_{\alpha > \beta} (q^{\alpha\beta})^2 = n \sum_{i=0}^k (m_{i+1} - m_i) q_i^2. \quad (5.4)$$

Процедура предельного перехода $n \rightarrow 0$, согласно Паризи, состоит в том, что совокупность целых чисел m_i заменяется набором величин m_i ($i = 1, \dots, k$), лежащих в интервале $(0, 1)$, причем

$$1 \geq m_1 \geq m_2 \dots \geq m_k \geq 0. \quad (5.5)$$

Затем k стремится к бесконечности. Тогда m_i становится непрерывной переменной на интервале $(0, 1)$; мы будем обозначать ее x . В результате для суммы, рассмотренной в (5.4), имеем

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{\alpha > \beta} (q^{\alpha\beta})^2 = - \int_0^1 q^2(x) dx. \quad (5.6)$$

Аналогичным образом записываются другие члены в свободной энергии, после чего получаем выражение

$$f = \frac{1}{2} T \max \left[\int_0^1 \left(\varepsilon q^2(x) + \frac{1}{6} q^4(x) - \frac{1}{3} q^3(x) \right) dx - \right. \\ \left. - q^2(x) \int_x^1 q(y) dy + \frac{H^2}{T^2} \int_0^1 q(x) dx \right]. \quad (5.7)$$

Варьируя (5.7) по функции $q(x)$, получим для нее уравнение

$$2q(x) (\varepsilon - \bar{q}) + \frac{2}{3} q^3(x) = \int_0^x (q(x) - q(y))^2 dy - \frac{H^2}{T^2}, \quad (5.8)$$

$$\bar{q} = \int_0^1 q(x) dx.$$

Дифференцируя это уравнение два раза по x , имеем

$$q'(x)(2q(x) - x) = 0. \quad (5.9)$$

Нетривиальное решение уравнения (5.9) имеет вид

$$\begin{aligned} q(x) &= q(0) = \frac{x_0}{2}, & 0 \leq x \leq x_0, \\ &= \frac{x}{2}, & x_0 < x < x_1, \\ &= q(1) = \frac{x_1}{2}, & x_1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Подставляя (5.10) в уравнение (5.8) и в уравнение, получаемое дифференцированием (5.8) по x , найдем x_0 и x_1 :

$$x_0 = \left(6 \frac{H^2}{J^2}\right)^{1/3}, \quad x_1 = 2\varepsilon(1 + \varepsilon). \quad (5.11)$$

Функция $q(x)$ изображена на рис. 13.

Сдвиг температуры перехода, обусловленный магнитным полем, определяется из условия $x_0 = x_1$ и равен $\varepsilon(H) = (3H^2/4J^2)^{1/3}$. Мы видим, что сдвиг T_g , полученный из теории Паризи, совпадает с полученным из анализа устойчивости реплично-симметричного решения (см. (3.19)).

Из (5.7) нетрудно получить выражение (4.7) для восприимчивости, т. е. первые моменты функций $q(x)$, введенных исходя из модели долин и на основе реплично-несимметричного анзаца Паризи, совпадают. В работе ¹⁰⁸ Паризи показал, что все моменты этих функций совпадают, что доказывает правильность физической интерпретации решения Паризи.

Подставляя в (4.7) выражение (5.10) для $q(x)$, находим

$$\chi_{eq} = \frac{1}{J} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{H}{J}\right)^{4/3} \right]. \quad (5.12)$$

Важно отметить, что χ_{eq} не зависит от ε в рассматриваемом приближении. Мы увидим в дальнейшем, что χ_{eq} в нулевом магнитном поле не зависит от температуры всюду ниже точки перехода. Из (5.12) следует, что нелинейная восприимчивость в точке перехода расходится как $H^{-2/3}$.

Так как $q \sim \varepsilon$, свободная энергия $f(\varepsilon) - f(0) \sim \varepsilon^3$ и, значит, переход в спиновое стекло является переходом III рода.

6. Уравнения состояния спинового стекла при произвольных температурах. Низкотемпературные свойства. Общая схема исследования свойств спинового стекла вдали от точки фазового перехода такая же, как при $\varepsilon \ll 1$: сначала нужно подставить анзац Паризи в выражение (5.1) для свободной энергии и, осуществив предельный переход $n \rightarrow 0$, выразить свободную энергию через $q(x)$. Затем, варьируя функционал свободной энергии, получить уравнение для функции $q(x)$.

Изящный метод вывода функционала f был предложен Дуслентье ¹⁰⁹. Не останавливаясь здесь на математических выкладках, приведем результат:

$$\begin{aligned} f = & -\frac{J^2}{4T} - \frac{J^2}{4T} \left(\int_0^1 q^2(x) dx - 2q(1) \right) - \\ & - \frac{1}{(2\pi q(0))^{1/2}} \int \varphi(0, y) \exp \left[-\frac{(y-H)^2}{2J^2 q(0)} \right] dy, \end{aligned} \quad (6.1)$$

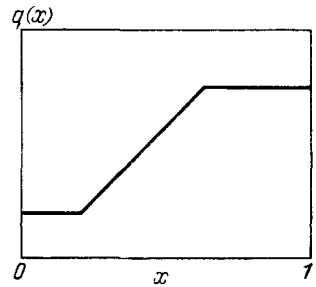


Рис. 13. Функция Паризи $q(x)$ во внешнем магнитном поле

где функция $\varphi(x, y)$ подчиняется уравнению

$$\dot{\varphi} = -J^2 \frac{\dot{q}}{2} \varphi'' - \frac{J^2}{2T} \dot{q} x (\varphi')^2 \quad (6.2)$$

с граничным условием

$$\varphi(1, y) = T \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{y}{T} \right). \quad (6.3)$$

Точка означает дифференцирование по x , а штрих — по y .

Варьирование функционала (6.1) с учетом (6.2) и (6.3) удобно провести, добавив в (6.1) к f равное нулю слагаемое \tilde{f} ¹¹⁰:

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \frac{1}{2J} \int_{-\infty}^{\infty} dy P(1, y) \left[\varphi(1, y) - T \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{y}{T} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2J} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P(x, y) \left[\varphi(x, y) + \frac{\dot{q}}{2} \varphi'' + \frac{J}{2T} x \dot{q} (\varphi'(x, y))^2 \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $P(x, y)$ — неопределенные множители Лагранжа. Варьируя функционал $f + \tilde{f}$ по $\varphi(x, y)$ и $\varphi(0, y)$, получим уравнение, которому удовлетворяет функция $P(x, y)$:

$$\dot{P}(x, y) = J^2 \frac{\dot{q}}{2} P'' - \frac{J^2}{T} \dot{q} (\varphi' P)' \quad (6.5)$$

с граничным условием

$$P(0, y) = (2\pi q(0))^{-1/2} \exp \left[-\frac{(y-H)^2}{2J^2 q(0)} \right]. \quad (6.6)$$

Варьируя $f + \tilde{f}$ по $q(x)$ и используя уравнение (6.5), получим соотношение, связывающее $q(x)$ с $\varphi(x, y)$ и $P(x, y)$:

$$q(x) = \frac{1}{J} \int m^2(x, y) P(x, y) dy, \quad (6.7)$$

где введено удобное для дальнейшего обозначение $m(x, y) = \varphi'(x, y)$. В парамагнитной фазе, когда φ от x не зависит, функция $m(y)$ согласно (6.3) равна $\operatorname{th}(y/T)$, т. е. совпадает с намагниченностью спина, находящегося в поле y .

Система уравнений (6.2), (6.5) с граничными условиями (6.3), (6.6) позволяет в принципе найти $q(x)$ и свободную энергию при любой температуре. Впервые полная система уравнений этого типа была получена в работах¹¹¹⁻¹¹³. Из (6.7) видно, что $P(x, y)$ имеет смысл функции распределения молекулярных полей y для долин, перекрытие которых не превосходит $q(x)$.

Учитывая стационарность свободной энергии, можно получить простую форму для среднего магнитного момента

$$m = -\frac{\partial f}{\partial H} = \frac{1}{J} \int m(0, y) P(0, y) dy. \quad (6.8)$$

В парамагнитной фазе соотношения (6.7) и (6.8) переходят в уравнение состояния (3.13), полученные в реплично-симметричном приближении.

Дифференцируя (6.7) по x и используя (6.5) и (6.2), получим важное соотношение, справедливое во всей неэргодической фазе:

$$1 = \int P(x, y) (\varphi''(x, y))^2 dy. \quad (6.9)$$

При $T = T_g$, когда $P(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ не зависят от x , соотношение (6.9) переходит в уравнение (3.17) для линии АТ.

Физический смысл соотношения (6.9), которое называют условием маргинальности, будет обсужден ниже.

Система (6.2) — (6.6) может быть решена аналитически только вблизи T_g , когда она, естественно, приводит к результатам, изложенным в предыдущем разделе. Но с помощью соотношения маргинальности (6.9) удастся исследовать некоторые общие свойства спиновых стекол при низких температурах.

Воспользовавшись стационарностью функционала $f + \tilde{f}$, получим из (6.1), (6.4) следующее выражение для энтропии S :

$$S = -\frac{\partial (f + \tilde{f})}{\partial T} = -\frac{1}{4T^2} (1 - q(1))^2 + \int P(1, y) \left[\ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{y}{T} \right) - \frac{y}{T} \operatorname{th} \frac{y}{T} \right] dy. \quad (6.10)$$

Из соотношения (6.9), взятого в точке $x = 1$, следует

$$1 = \frac{J}{T^2} \int P(1, y) \operatorname{ch}^{-4} \frac{y}{T} dy. \quad (6.11)$$

Главный вклад в этот интеграл дают $y \ll T$, поэтому равенство (6.11) при $T \rightarrow 0$ выполняется только в том случае, если

$$P(1, yT) T^{-1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \text{const.}$$

Тогда из (6.7) получаем, что при $T \rightarrow 0$ разность $1 - q(1) \sim T^2$, а из (6.10) следует, что $S \sim T^2$ ¹¹⁰. Таким образом, теория Паризи свободна от противоречия, содержащегося в реплично-симметричной теории — при нулевой температуре энтропия спинового стекла в расчете на один спин в теории Паризи равна нулю.

Дифференцируя (6.8) по H и учитывая нечетность функции $m(0, y)$, находим

$$\chi_{eq} = \lim_{H \rightarrow 0} \left(\frac{1}{J} \int P(0, y) \varphi''(0, y) dy \right). \quad (6.12)$$

Но $q(0) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow 0$, так что согласно (6.6)

$$\lim_{H \rightarrow 0} P(0, y) = J \delta(y).$$

Поэтому

$$\chi_{eq} = \varphi''(0, 0). \quad (6.13)$$

С другой стороны, из соотношения маргинальности, взятого в точке $x = 0$, следует, что $\varphi''(0, 0) = J^{-1}$. Таким образом, оказывается, что во всей фазе спинового стекла равновесная восприимчивость равна J^{-1} и не зависит от температуры.

На эксперименте обычно почти не зависит от температуры восприимчивость, полученная охлаждением в поле χ_{FC} (см. рис. 1). Поскольку к тому же именно эта восприимчивость является обратимой и не зависит от времени ожидания, можно думать, что, несмотря на эффекты старения, χ_{FC} во многом похожа на равновесную восприимчивость.

Мы видим, что решение Паризи приводит к разумным физическим результатам. Возникает, однако, вопрос, является ли устойчивой перевальная точка, соответствующая параметризации Паризи. Этот вопрос исследовался в работах^{114–116}. Было показано, что собственные значения соответствующей матрицы неотрицательны, причем одно из них при всех температурах равно нулю. Это значит, что решение Паризи маргинально устойчиво. Обращение в нуль одного из собственных значений обеспечивается равенством (6.9), которое, таким образом, означает, что в спектре возбуждений спинового стекла имеется бесщелевая мода¹¹⁷. Существование этой моды обусловлено вырождением основного состояния спинового стекла.

Схема Паризи допускает и более сложную параметризацию, чем та, которую мы здесь изложили¹¹⁸. Функционал свободной энергии содержит

при этом дополнительную произвольную функцию $\Delta(x)$, что означает возможность выбора произвольной калибровки в уравнениях (6.2), (6.5), (6.7). Впервые функция $\Delta(x)$ была введена Сомполинским, развившим динамическую теорию спиновых стекол^{119, 120}. В основу теории Сомполинского положено предположение о том, что спиновое стекло характеризуется бесконечным набором времен релаксации t_x , $0 \leq x \leq 1$. В термодинамическом пределе все времена t_x стремятся к бесконечности таким образом, что $t_x/t_x \rightarrow 0$, если $x > x'$. С этой точки зрения функция $q(x)$ определена как коррелятор $\langle \sigma_i(0) \sigma_i(t_x) \rangle$ и измеряет корреляцию, которая осталась в момент t_x . Поэтому $q(x)$ есть монотонно растущая функция x . Функция $\Delta(x)$ связана с локальной восприимчивостью, измеренной на частоте $\omega_x = t_x^{-1}$. В частности, $\Delta(0) = T(\chi_{\text{eq}} - \chi_{\text{неeq}})$, т. е. измеряет необратимый отклик системы. Функционал Сомполинского для свободной энергии переходит в функционал Паризи, если выбрать калибровку $\dot{\Delta} = -(J/T) x \dot{q}$. Все физические результаты от калибровки, естественно, не зависят.

7. Векторное спиновое стекло. Модель бесконечного радиуса естественным образом обобщается для магнетика с гейзенберговским обменным взаимодействием. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} (\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j) - D \sum_i (\mathbf{S}_i^2)^2 - \sum_i (\mathbf{H}_i \mathbf{S}_i), \quad (7.1)$$

где \mathbf{S} — классический спин, длину которого удобно считать равной $\sqrt{3}$, D — энергия одноионной магнитной анизотропии. Вообще говоря, в неупорядоченных магнетиках направление оси магнитной анизотропии и величина энергии могут флуктуировать в пространстве. О влиянии случайной анизотропии на свойства спинового стекла будет сказано в конце этого раздела. Энергии обменного взаимодействия J_{ij} , как и раньше, распределены по нормальному закону (3.1).

Векторное спиновое стекло в отличие от изинговского в реплично-симметричном приближении описывается несколькими параметрами. Кроме параметра Эдвардс—Андерсона, который в этом случае является тензором

$$q_{\mu\nu} = \langle \langle \mathbf{S}_\mu \rangle_{\text{T}} \langle \mathbf{S}_\nu \rangle_{\text{T}} \rangle_{\text{c}} \quad (\mu, \nu = x, y, z), \quad (7.2)$$

возникает так называемый квадрупольный параметр

$$Q_{\mu\nu} = \langle \langle \mathbf{S}_\mu \mathbf{S}_\nu \rangle_{\text{T}} \rangle_{\text{c}}; \quad (7.3)$$

$\langle \dots \rangle_{\text{c}}$ — конфигурационное усреднение. Наконец, при $J_0 > J$ возникает намагниченность $m = \langle \langle \mathbf{S} \rangle_{\text{T}} \rangle_{\text{c}}$.

Если магнитное поле направлено по оси анизотропии, то тензоры $q_{\mu\nu}$ и $Q_{\mu\nu}$ диагональны и имеют по две неравные компоненты — продольную и поперечную. Условие $S^2 = 3$ связывает Q_{\parallel} и Q_{\perp} , так что при $J_0 = 0$ магнетик описывается тремя параметрами: q_{\parallel} , q_{\perp} и $X = (Q_{\parallel} - 1)/2$. Они определяются из самосогласованной системы уравнений (7.2), (7.3), в которой термодинамическое усреднение проводится с эффективным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = a\mathbf{S} + bS_z^2, \quad (7.4)$$

где

$$a_{\mu} = (H\delta_{\mu z} + Jq_{\mu}^{1/2}t_{\mu})T^{-1}, \quad (7.5)$$

$$b = J^2T^{-2}(q_{\perp} - q_{\parallel} + 3X) + DT^{-1}, \quad (7.6)$$

а конфигурационное усреднение производится по нормальному распределению случайных полей t^{121} . Обращает на себя внимание, что эффективная анизотропия отличается от кристаллографической. Дополнительное слагаемое обусловлено неупорядоченностью системы и отлично от нуля только в стеклах с выделенной осью или плоскостью. В изотропных стеклах ($D = 0$) в отсутствие магнитного поля параметр $X = 0$, $q_{\perp} = q_{\parallel}$, и тогда $b = 0$.

7.1. Изотропный магнетик, $D = 0$. Если магнитное поле $H = 0$, то уравнения (7.2), (7.3) имеют нетривиальное решение $q_{\perp} = q_{\parallel} \neq 0$ при $T < T_g = J$.

Во внешнем магнитном поле параметр q_{\parallel} отличен от нуля при всех температурах. Анализ уравнений (7.4) — (7.6) приводит к выводу¹²¹, что при $H \ll J$ на линии, определяемой уравнением

$$T_g(H) = J \left(1 - \frac{23}{100} \frac{H^2}{J^2} \right), \quad (7.7)$$

в системе происходит фазовый переход III рода¹²² — возникает отличная от нуля компонента q_{\perp} . Как показал анализ устойчивости реплично-симметричного решения¹²³⁻¹²⁶, при этой же температуре возникает неэргодичность — параметры q_{\parallel} и q_{\perp} становятся функциями x . Вблизи $T_g(H)$, когда

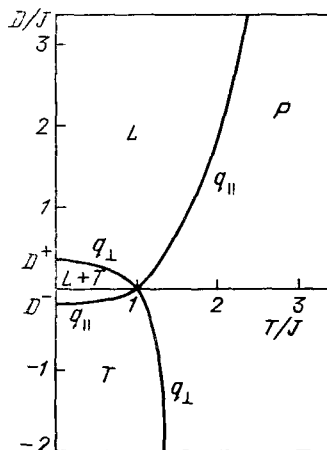


Рис. 14. T, D -фазовая диаграмма спинного стекла с одноосной анизотропией. P — парамагнитная фаза ($q_{\parallel} = q_{\perp} = 0$), L — продольное спинное стекло ($q_{\parallel} \neq 0, q_{\perp} = 0$), T — поперечное стекло ($q_{\parallel} = 0, q_{\perp} \neq 0$), $L + T$ — смешанная фаза ($q_{\parallel} \neq 0, q_{\perp} \neq 0$). $D^+ = 0,32J$, $D^- = -0,20J$

$JH^2 \gg (T_g(0) - T_g(H))^3$, q_{\parallel} слабо зависит от x ; разность $q_{\parallel}(1) - q_{\parallel}(0) \sim \varepsilon^2$. В то же время $q_{\perp}(x)$ меняется с x примерно так же, как функция $q(x)$ в модели Изинга без магнитного поля: $q(0) = 0, q_{\perp}(1) \sim \varepsilon$. Если же $JH^2 \approx (T_g(0) - T_g(H))^3$, т.е. вблизи линии АТ, то как $q_{\perp}(x)$, так и $q_{\parallel}(x)$ существенно зависят от x ¹²⁶. Вследствие слабой зависимости q_{\parallel} от x вблизи линии (7.7), которую называют линией Габэя — Тулуза (ГТ), необратимость продольной восприимчивости не проявляется, она становится заметной при более низких температурах, вблизи линии АТ. Следует подчеркнуть, что, строго говоря, в векторном спинном стекле на линии АТ никакого фазового перехода не происходит, она лишь условно отделяет область температур, где неэргодичность в продольном направлении мала, от области, где она становится существенной. Фазовый переход происходит на линии ГТ. Но на этой линии должна быть заметной необратимость только поперечной восприимчивости.

7.2. Анизотропное стекло, $D \neq 0$. В анизотропном стекле продольные и поперечные компоненты спина замерзают при разных температурах, причем температура перехода в «продольное» или «поперечное» стекло зависит, очевидно, от величины и знака D . Фазовая диаграмма на плоскости (T, D) показана на рис. 14^{127,128}. В интервале $D^+ > D > D^-$ в системе происходит с понижением температуры два фазовых перехода: сначала возникает q_{\parallel} (q_{\perp}), затем q_{\perp} (q_{\parallel}).

Строго говоря, реплично-симметричные уравнения справедливы только до температуры первого фазового перехода. Как только возникает q_{\parallel} (q_{\perp}), система переходит в неэргодическое состояние, и для того, чтобы понять, что происходит при более низких температурах, необходимо, воспользовав-

шись анзацем Паризи, ввести функции $q_{||,-}(x)$. Как считают авторы работы ¹²⁹, и в неэргодическом состоянии второй переход имеет место. В этой же работе изучены фазовые диаграммы при $J_0 > J$, когда в системе имеется дальний ферромагнитный порядок.

Подробное экспериментальное исследование фазовой диаграммы анизотропного спинового стекла приведено в работах ^{130,131}. В сплавах с большой анизотропией типа легкая ось спин-стекольные свойства проявляются только в продольной восприимчивости, а в сплавах с анизотропией типа легкая плоскость — в поперечной восприимчивости. В сплавах с малой анизотропией в согласии с фазовой диаграммой на рис. 14 с понижением температуры наблюдались ¹³¹ два последовательных перехода.

7.3. Влияние случайной анизотропии. В неупорядоченных магнетиках случайным является не только обмен, но и анизотропия. Флуктуации внутреннего электрического поля, действующего на электроны d- или f-оболочки, приводят к флуктуациям энергии одноионной анизотропии и направления оси анизотропии. Анизотропным может быть и взаимодействие между спинами. В диэлектрических спиновых стеклах случайная анизотропия обусловлена в первую очередь дипольным или псевдодипольным взаимодействием между локальными магнитными моментами. В полупроводниках с магнитными примесями анизотропия псевдодипольного типа обусловлена тем, что спектр электронных или дырочных состояний формируется под влиянием сильного спин-орбитального взаимодействия с решеткой ¹³². В металлических спиновых стеклах главную роль играет анизотропия типа Дзялошинского — Морри (ДМ). Ее происхождение было объяснено в работах Ферта и Леви ^{133,134}. Она связана с влиянием спин-орбитального взаимодействия электронов с немагнитными примесями на косвенное обменное взаимодействие РККИ между локальными спинами. Анизотропная добавка к обменной энергии РККИ между спинами S_A и S_B , обусловленная немагнитной примесью в точке C , пропорциональна

$$\mathcal{H}_{DM} \sim - \frac{[R_{AC}R_{BC}][S_AS_B]}{R_{AC}R_{BC}R_{AC}}, \quad (7.8)$$

где R_{AB} , R_{AC} , R_{BC} — стороны треугольника, образованного магнитными и немагнитными атомами. Для большой концентрации немагнитных примесей, когда длина свободного пробега электронов порядка или меньше среднего расстояния между магнитными примесями, соответствующая формула получена в ¹³⁵.

Если спины, ориентированные в равновесии в соответствии с распределением обменной энергии и энергии случайной анизотропии, однородно повернуть, то энергия системы повысится. Поскольку в спиновом стекле релаксация к новому положению равновесия происходит достаточно медленно, то соответствующая энергия анизотропии может быть измерена по влиянию на ширину и форму петли гистерезиса, на положение линии электронного спинового резонанса, проявляется в крутильных экспериментах ¹³⁶⁻¹³⁸. Энергия анизотропии в металлических стеклах резко увеличивается при добавлении немагнитных примесей с большой константой спин-орбитальной связи. Это подтверждает правильность идеи Ферта и Леви о механизме случайной анизотропии ДМ.

Случайная анизотропия смешивает продольную и поперечные компоненты спинов и потому существенно меняет фазовую диаграмму спиновых стекол ^{32,139}. В рамках модели бесконечного радиуса взаимодействие ДМ моделируется слагаемым в гамильтониане

$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j} S_i^\mu D_{ij}^{\mu\nu} S_j^\nu.$$

причем среднее значение тензора $D_{ij}^{\mu\nu}$ равно нулю, а дисперсия равна D^2/N . Если внешнее магнитное поле не слишком сильное ³², $(H/T)^{2/3} \ll D/T \ll 1$, то случайная анизотропия сильно смешивает продольную и поперечные компоненты спинов, так что переход является почти изинговским и происходит на линии АТ. В сильном поле, при $(H/T)^{5/2} \gg D/T$, происходит поперечное замерзание на линии ГТ. Наконец, промежуточная область $(H/T)^{5/2} \ll D/T \ll (H/T)^{2/3}$ является переходной, и форма фазовой границы не совпадает ни с линией АТ, ни с линией ГТ.

7.4. Экспериментальное исследование H , T -диаграммы. Работы ^{101,121} стимулировали большое число экспериментов, в которых исследовалась H — T -диаграмма спиновых стекол. Во всех «чистых» спиновых стеклах, как уже отмечалось, наблюдалось уменьшение температуры перехода во внешнем магнитном поле. В магнитном поле температура максимума восприимчивости и температура, при которой начинается необратимость, не совпадают, и поэтому неясно, какую температуру следует отождествлять с $T_g(H)$ (см., например, анализ в ¹⁵). В большинстве экспериментальных работ определяемая тем или иным способом $T_g(H)$ уменьшается по закону $\varepsilon \sim H^{2/3}$, который должен иметь место в изинговских спиновых стеклах, а не в гейзенберговских. Можно указать только небольшое число работ, в которых наблюдалась линия ГТ в векторных спиновых стеклах ^{130,140–142}. Возможно, это связано с влиянием случайной анизотропии. Если магнитное поле мало по сравнению со случайной анизотропией, то, как отмечалось в п. 7.3, стекло является изингоподобным. Но и в стеклах со слабой анизотропией, когда переход происходит на линии ГТ, может наблюдаться зависимость АТ, так как именно на линии АТ начинается сильная неэргодичность продольных компонент спина. В связи с этим отметим, что производная от магнитной части теплоемкости в CuMn имеет аномалию на линии ГТ ³⁵. Линия ГТ наблюдалась также при измерении поперечной магнитной восприимчивости ¹⁴³.

В заключение этого раздела отметим, что в спиновых стеклах квантовые флуктуации дают вклад в свободную энергию, не обращающийся в нуль при $T = 0$ даже в модели бесконечного радиуса. Однако качественно на вид фазовой диаграммы квантовые флуктуации не влияют ^{146,147}.

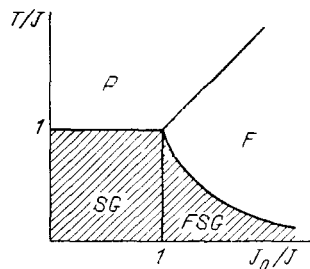


Рис. 15 Фазовая диаграмма неупорядоченного изинговского магнетика с $\tilde{J}_{ij} = J_0/N$. Заштрихована область неэргодичности. Вертикальная прямая отделяет область $J_0 < J$, в которой $m = 0$, от области $J_0 > J$, в которой $m \neq 0$.

8. Неэргодические магнитоупорядоченные системы. Из уравнений Шеррингтона — Киркпатрика (3.13) видно, что в отсутствие магнитного поля спонтанная намагниченность равна нулю, если $J_0 < J$. При $J_0 > J$ возможно ферромагнитное упорядочение. Соответствующая фазовая диаграмма для изинговского магнетика изображена на рис. 15. Между линией $T = J_0$ и линией АТ расположена реплично-симметричная фаза фрустрированного ферромагнетика, которая описывается уравнениями состояния (3.13). На линии АТ происходит нарушение репличной симметрии, и вся заштрихованная область обладает свойствами спинового стекла. Заметим, что T_g не обращается в нуль ни при каких J_0 . При $J_0 \gg J$ T_g экспоненциально мала и описывается формулой (3.20), в которой надо заменить H на J_0 .

Поскольку на линии АТ восприимчивость не обращается в бесконечность, то при переходе из фазы фрустрированного ферромагнетика в неэргодическое состояние намагниченность не исчезает. Такую фазу, в которой сосуществуют обычный магнитный параметр порядка и функция Паризи

$q(x)$, часто называют смешанной. Смешанную фазу, в которой $m \neq 0$, мы будем называть ферростеклом.

Как уже отмечалось, в чистом спиновом стекле с $m = 0$ равновесная восприимчивость не зависит от T . Поэтому температурные фазовые переходы из ферромагнитной в смешанную фазу невозможны, а, значит, границей между «чистым» спиновым стеклом и смешанной фазой является вертикальная прямая¹²¹, показанная на рис. 15. Таким образом, при любом соотношении между параметрами намагниченность в смешанной фазе отлична от нуля вплоть до $T = 0$.

Экспериментальное доказательство существования смешанной фазы было получено, как уже говорилось, для фрустрированного антиферромагнетика. Богатая фазовая диаграмма антиферромагнетика во внешнем поле, в которой, в зависимости от соотношения между параметрами, возможен переход I или II рода, разные мультикритические точки, позволяет, в принципе, изучить как влияние фрустраций и неэргодичности на фазовые переходы различного типа и мультикритические точки, так и наоборот, влияние изменения дальнего порядка на переход в спиновое стекло. В рассмотренных нами до сих пор объектах (чистое и ферростекло) магнитное поле монотонно уменьшает область температур, где существует неэргодическая фаза. В антиферромагнитных спиновых стеклах, где поле подавляет как дальний порядок, так и неэргодичность, можно ожидать более сложной зависимости от поля.

Естественное обобщение¹⁴⁸ модели Шеррингтона — Киркпатрика для описания неэргодических антиферромагнетиков заключается в том, что спины σ_{pi} считаются распределенными по двум подрешеткам $p = 1, 2$, а в изинговском обменном гамильтониане системы

$$\mathcal{H} = \sum_{i, j} J_{ij} \sigma_{1i} \sigma_{2j} - \frac{1}{2} \sum_{p; i, j} V_{ij} \sigma_{pi} \sigma_{pj} - H \sum_{p, i} \sigma_{pi} \quad (8.1)$$

энергии внутри- и междоузельного взаимодействия V_{ij} и J_{ij} распределены нормально со средними значениями V_0/N и J_0/N и дисперсиями $VN^{-1/2}$ и $JN^{-1/2}$, N — число спинов в подрешетке.

Система уравнения для намагниченностей подрешеток $m_{1,2}$ и параметров Эдварса — Андерсона $q_{1,2}$, описывающая систему выше T_g , имеет вид¹⁴⁹

$$m_{1,2} = \langle \text{th } E_{1,2} \rangle_c, \quad q_{1,2} = \langle \text{th}^2 E_{1,2} \rangle_c, \quad (8.2)$$

$$E_{1,2} = H - J_0 m_{2,1} + V_0 m_{1,2} + z (J^2 q_{2,1} + V^2 q_{1,2})^{1/2},$$

а уравнение для температуры АТ —

$$(T_g^2 - V^2 \langle \text{ch}^{-4} E_1 \rangle_c) (T_g^2 - V^2 \langle \text{ch}^{-4} E_2 \rangle_c) - J^4 \langle \text{ch}^{-4} E_1 \rangle_c \langle \text{ch}^{-4} E_2 \rangle_c = 0. \quad (8.3)$$

Конфигурационное усреднение по случайным полям z проводится, как и в (3.13), с гауссовской функцией распределения. Свободная энергия в эргодическом состоянии

$$f = -\frac{J_0}{2} m_1 m_2 + \frac{J_0}{4} (m_1^2 + m_2^2) - \frac{J^2}{4T} (1 - q_1) (1 - q_2) -$$

$$- \frac{V^2}{8T} [(1 - q_1)^2 + (1 - q_2)^2] - \frac{T}{2} \langle \ln (4 \text{ch } E_1 \cdot \text{ch } E_2) \rangle_c. \quad (8.4)$$

Без поля при $V_0 = 0$ фазовая диаграмма в координатах $T (J^2 + V^2)^{-1/2}$, $J_0 (J^2 + V^2)^{-1/2}$ совпадает с диаграммой на рис. 15, в которой дальний порядок не ферро-, а антиферромагнитный. Но во внешнем поле неупорядоченный антиферромагнетик ведет себя совсем не так, как ферромагнетик.

В упорядоченном антиферромагнетике линия фазовых переходов II рода на плоскости T, H переходит, как известно, в трикритической точке, положение которой зависит от соотношения между J_0 и V_0 , в линию переходов

I рода. Пусть для начала V_0 и V малы, тогда внутриподрешеточным взаимодействием можно пренебречь и антиферромагнитный порядок возникает только переходом II рода.

Анализ формулы (8.3) показывает, что в этом случае при любых реальных соотношениях между параметрами типичным является рост с полем температуры перехода в смешанную фазу. Проще всего это увидеть у слабо

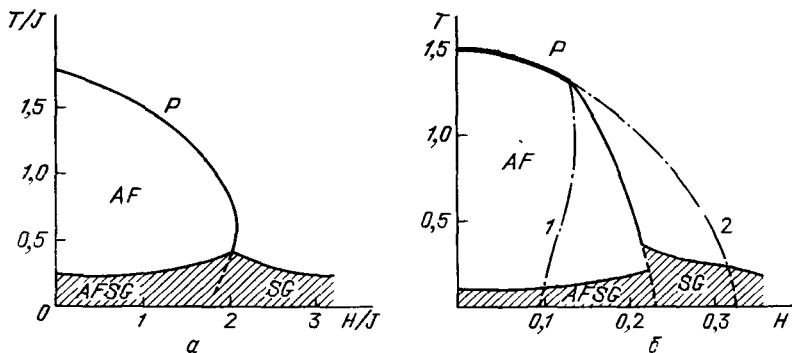


Рис 16. Фазовая диаграмма неупорядоченного изинговского антиферромагнетика в магнитном поле. Жирной линией показан переход II рода. Заштрихованы области неэргодичности. а — $V_0 = V = 0$, $J_0/J = 1,7$; штриховой линией показан наклон кривой $T_N(H)$ в неэргодической фазе. б — $V_0 = 1,25$, $J_0 = 0,25$, $V^2 = J^2 = 0,36$. Видна трикритическая точка. Штрихпунктирные линии — потери устойчивости парамагнитной (1) и антиферромагнитной (2) фаз, штриховые — предполагаемое поведение линий фазового перехода ниже $T_g(H)$

фрустрированного антиферромагнетика без внутриподрешеточного взаимодействия. В этом случае, согласно (8.3),

$$T_g = J^4 \langle \text{ch}^{-4} E_1(z) \rangle_c \langle \text{ch}^{-4} E_2(z) \rangle_c. \quad (8.5)$$

Если внешнее поле не слишком сильно компенсирует молекулярное, так что $|H - J_0 m_{1,2}| \gg J$, то T_g , аналогично (3.20), описывается формулой

$$T_g(H) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} J \exp \left\{ -\frac{1}{4J^2} [(H - J_0 m_1)^2 + (H - J_0 m_2)^2] \right\}. \quad (8.6)$$

В магнитоупорядоченной фазе ($H < J_0$), когда $m_1 = -m_2 = 1$, $T_g(H)$ уменьшается с полем, и на границе области $|H - J_0 m_{1,2}| \gg J$ температура

$$T_g(H \approx J_0) \approx \exp \left(-\frac{J_0^2}{J^2} \right). \quad (8.7)$$

Если $H > J_0$, то $m_1 = m_2 = 1$, и

$$T_g(H) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} J \exp \left[-\frac{1}{2J^2} (H - J_0)^2 \right]. \quad (8.8)$$

Даже при $H - J_0 \gg J$ температура перехода из (8.8) может быть экспоненциально больше, чем T_g при $H < J_0$ (8.7). Значит, в области $|H - J_0| \approx J$, где происходит быстрое исчезновение параметра порядка, T_g экспоненциально сильно растет с полем.

Рост T_g с полем связан с уменьшением суммарного поля на одной из подрешеток и, соответственно, с увеличением локальной восприимчивости. При слабой неупорядоченности рост $T_g(H)$ происходит в узком интервале полей $\Delta H \approx J$ вблизи $H \approx J_0$, а с увеличением степени фрустрированности этот интервал расширяется. Из рис. 16, а видно, что при $J_0/J = 1,7$, что соответствует вполне реальной ситуации, когда $T_N(0)/T_g(0) = 9,4$, T_g монотонно растет с полем.

После пересечения с линией $T_N(H)$ температура $T_g(H)$ падает с ростом поля согласно формуле АТ (3.17). В тройной точке (T_0, H_0) , где линия фазового перехода II рода пересекается с кривой $T_g(H)$, последняя имеет излом. Отношение $T_g(H_0)/T_g(0)$ тем больше, чем меньше J/J_0 .

Флуктуации внутриподрешеточного обмена V , как следует из (8.3), только расширяют интервал полей, где $T_g(H)$ растет с H , и усиливают этот рост (мы пока считаем, что V_0/J_0 достаточно мало, так что нет метамгнитного перехода и трикритической точки).

Если среднее значение внутриподрешеточного обмена не слишком мало, то линия $T_g(H)$ пересекается не с $T_N(H)$, как на рис. 16, а, а с линией фазовых переходов I рода. Фазовая диаграмма имеет тогда вид, показанный на рис. 16, б^{150,151}. Ее главной особенностью является то, что на участке АВ

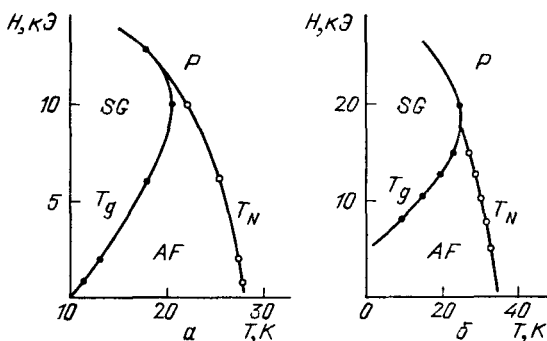


Рис. 17. H , T -фазовые диаграммы сплавов $\text{Fe}_{65}\text{Ni}_{14}\text{Co}_{20}$ (а) и $\text{Fe}_{65}\text{Ni}_{14}\text{Cr}_{20}$ (б)¹⁵⁴

в частности, полное «размытие» скачка фрустрациями и исчезновение метамгнитного перехода^{150,151}.

Система (8.2), (8.3) позволяет получить магнитную фазовую диаграмму в эргодическом состоянии и определить ее границу устойчивости (линию АТ). Для того чтобы построить магнитную фазовую диаграмму ниже $T_g(H)$, надо вместо уравнений Шеррингтона — Киркпатрика использовать уравнения Паризи состояния спинового стекла типа (6.1) — (6.6). Такие уравнения для антиферромагнитного спинового стекла были выведены в¹⁴⁹ и решены вблизи T_g . Решение показало, в частности, что линия $T_g(H)$ продолжается в неэргодическую фазу с небольшим изломом в тройной точке (T_0, H_0) , т. е. в неэргодической фазе, как и обычно, возможны фазовые переходы по полю (температуре) с возникновением (исчезновением) дальнего магнитного порядка.

Полученные в¹⁴⁹ уравнения позволили изучить некоторые магнитные свойства ниже T_g . Оказывается, что, независимо от соотношений между параметрами, намагниченность подрешеток плавно, не испытывая излома, меняется в T_g ; именно такое поведение, как мы уже отмечали, наблюдалось на опыте⁷¹. Обратимая магнитная восприимчивость испытывает излом в T_g , уменьшаясь в глубь неэргодической фазы.

В гейзенберговских антиферромагнетиках с анизотропией «легкая ось» типичным является сначала рост T_g с увеличением поля, приложенного вдоль легкой оси, затем падение $T_g(H)$ на линии фазовых переходов I рода (спин-флоп) и затем снова рост T_g в опрокинутой фазе¹⁵².

На линии перехода I рода, так же как и для метамгнетика, возникает скачкообразное изменение неэргодичности параметра порядка.

Фрустрации не только меняют фазовую диаграмму в эргодическом состоянии, о чем шла речь выше, но и могут изменить привычные температурные зависимости в антиферромагнетике. Так, фрустрации всегда приводят к росту поперечной восприимчивости ниже точки Нееля. Поведение продольной вос-

одновременно с магнитным переходом происходит скачкообразное возникновение (исчезновение) спин-стекольного параметра порядка $q(x)$, т. е. происходит фазовый переход I рода в неэргодическое состояние. На остальной части кривой, ограничивающей неэргодическое состояние, переход в спиновое стекло, как всегда, III рода.

Необходимо подчеркнуть, что даже в эргодическом состоянии фрустрации могут резко изменить привычную картину фазовых переходов. Возможно,

приемчивости сложнее; в зависимости от соотношения между V и J она может либо расти в глубь антиферромагнитной фазы, либо, как обычно, падать^{150, 152, 153}

Сильный, иногда в несколько раз, рост T_g с H в изинговских и гейзенберговских антиферромагнитных спиновых стеклах наблюдался экспериментально^{68, 73, 154} (рис. 17). В соответствии с изложенной выше теорией, относительное увеличение $T_g(H)$ тем больше, чем меньше степень фрустрированности. Рост поперечной восприимчивости с уменьшением температуры ниже T_g обнаружен в⁶⁹.

9. Ультраметрическая топология пространства состояний. Несамосредняемость параметра порядка в спиновых стеклах. Изучение структуры бесконечно вырожденного основного состояния, предпринятое после того, как стал понятен физический смысл параметра порядка Паризи, показало¹⁵⁵, что пространство состояний (долин) в решении Паризи обладает некоторыми весьма общими и, возможно, универсальными для систем с фрустрациями и беспорядком свойствами.

Прежде всего было установлено так называемое правило треугольника. Оно заключается в том, что если в пространстве состояний ввести расстояние между долинами α и β по формуле

$$d(\alpha, \beta) = \frac{1}{N} \sum_i (m_i^\alpha - m_i^\beta)^2 = 2(q(1) - q^{\alpha\beta}), \quad (9.1)$$

то все треугольники в пространстве состояний либо равносторонние $d(1,2) = d(1,3) = d(2,3)$, либо равнобедренные с основанием, меньшим боковой стороны $d(1,2) = d(1,3) > d(2,3)$. Правило треугольника было установлено в¹⁵⁵ при исследовании функции распределения $P(q_1, q_2, q_3)$, определяющей усредненную по распределению $\{J_{ij}\}$ вероятность одновременно обнаружить три долины с перекрытиями q_1, q_2, q_3 :

$$\begin{aligned} P(q_1, q_2, q_3) &= \langle P_J(q_1, q_2, q_3) \rangle_c = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{\substack{a \neq b, b \neq c, \\ a \neq c}} \delta(q_{ac} - q_1) \delta(q_{ab} - q_2) \delta(q_{bc} - q_3) \end{aligned} \quad (9.2)$$

(P_J — функция распределения для данной реализации). Использование алгебры матриц Паризи приводит к соотношению

$$\begin{aligned} P(q_1, q_2, q_3) &= \frac{1}{2} P(q_1) x(q_1) \delta(q_1 - q_2) \delta(q_2 - q_3) + \\ &+ \frac{1}{2} (P(q_1) P(q_2) \theta(q_1 - q_2) \delta(q_2 - q_3) + \text{перестановки}), \end{aligned} \quad (9.3)$$

которое и представляет собой правило треугольника.

В том, что правило треугольника является прямым следствием принятого способа параметризации матриц q , проще всего убедиться, проверив, что оно выполняется для матриц типа (5.3) еще до продолжения на $n \rightarrow 0$, при целых $n, k, \{m_k\}$.

Из правила треугольника следует, что все долины могут быть распределены по неперекрывающимся группам (кластерам), каждый из которых определяется максимальным расстоянием между долинами d (минимальным значением перекрытия q). Действительно, если долина γ принадлежит двум кластерам $I_1(d)$ и $I_2(d)$, то ее расстояние до двух долин α и β из кластеров $I_1(d)$ и $I_2(d)$ не превосходит d : $d(\gamma, \alpha) \leq d, d(\gamma, \beta) \leq d$. Но по правилу треугольника это означает, что $d(\alpha, \beta) \leq d$. Значит, кластеры, образованные на одном «уровне перекрытия» (т. е. с одним и тем же значением d и q), либо совпадают, либо не перекрываются вообще.

Такое свойство приводит к иерархической структуре пространства состояний спинового стекла. Изобразим точками на одном горизонтальном уровне

непересекающиеся кластеры состояний с одним и тем же максимальным значением расстояния $d(\alpha, \beta) < d$ (рис. 18). Каждый из кластеров можно в свою очередь разбить на кластеры с $d(\alpha, \beta) < d' < d$, изображенные на более низком горизонтальном уровне, и продолжать эту процедуру бесконечно, сколь угодно малыми шагами, вплоть до кластеров с максимальными расстояниями d' , равными нулю. Пространства с такой иерархической структурой (рис. 18) называются ультраметрическими. (Подробный обзор применений ультраметрии в физике см. в ¹⁴.)

Сильная корреляция между долинами, присущая ультраметрическому пространству, означает, что должна быть очень специфическая корреляция между микроскопическими распределениями намагниченностей в разных

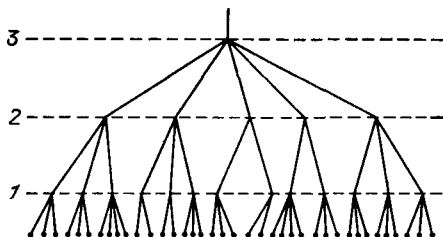


Рис. 18 Иерархическая структура состояний спинового стекла. Темные кружки на концах ветвей изображают состояния, ветви — кластеры. Расстояние между двумя состояниями определяется высотой уровня (1, 2, 3), на котором находится их ближайший предок

долинах. Этот очень интересный вопрос изучался в работе ¹⁵⁶. Вычисление корреляционных функций намагниченностей в разных долинах показало, что для любых долин, имеющих общего предка на генеалогическом древе рис. 18, можно разбить всю систему из N спинов на некоторое число подсистем таким образом, что намагниченность каждой подсистемы одинакова для всех долин. Если же любая пара выбранных долин имеет одного и того же ближайшего предка, то намагниченности внутри подсистем распределены для всех долин некоррелировано. Поэтому перекрытие долин (и другие аналогичные средние) просто связаны с намагниченностями подсистем. Например,

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i m_i^\alpha m_i^\beta = \sum_l \frac{c_l}{N} M_l^2; \quad (9.4)$$

здесь M_l — намагниченность подсистем, c_l — относительное число спинов в них. В ¹⁵⁶ приведена и более детальная информация о распределении намагниченностей.

Вернемся теперь к описанию спинового стекла как системы долин в ультраметрическом пространстве. Чтобы развить такое описание, необходимо выяснить статистические свойства величин

$$P_\alpha = e^{-\beta f_\alpha} \left(\sum_\gamma e^{-\beta f_\gamma} \right)^{-1}, \quad \beta = T^{-1}. \quad (9.5)$$

Дело в том, что свободные энергии долин одинаковы в термодинамическом пределе (т.е. одинакова свободная энергия на спин $\lim (F_\alpha/N)$ при $N \rightarrow \infty$), но поправки порядка N^{-1} к свободным энергиям являются случайными величинами ^{155, 157, 158}. Как показано в ^{158, 159}, если считать свободные энергии долин независимыми случайными переменными, распределенными по закону

$$P(f_\alpha) = \rho \exp \rho (f_\alpha - f_c) \theta(f_c - f_\alpha); \quad (9.6)$$

$$\rho = \beta x(q_{\max}),$$

то свободная энергия и корреляционные функции такой системы независимых долин совпадут с соответствующими величинами решений Паризи, здесь q_{\max} — максимальное значение функции $q(x)$. Энергию обрезания f_c и число долин L надо в конце вычислений устремить к бесконечности, оставляя

плотность состояний с данной энергией конечной:

$$\lim Le^{-\rho f_c} = v. \quad (9.7)$$

Все результаты не зависят от v .

Ультраметрическая топология пространства состояний и функция распределения (9.6) исчерпывающим образом характеризуют пространство долин. Если предположить, что система долин обладает этим свойством, то без каких-либо дальнейших гипотез можно воспроизвести решение Паризи¹⁵⁹.

Экспоненциальный рост функции распределения (9.6) с ростом f_α указывает на сильные флуктуации свободных энергий долин.

От распределения долин можно перейти к распределению кластеров $I(q)$, объединяющих долины с $q^{\alpha\beta} > q$. Введя статвеса W_I и свободные энергии кластеров f_I :

$$W_I = \sum_{\alpha \in I} P_\alpha = e^{-\beta f_I} \left(\sum_{I'} e^{-\beta f_{I'}} \right)^{-1}, \quad (9.8)$$

можно показать^{155, 158}, что функция распределения $P(f_I)$ отличается от (9.6) лишь заменой $q_{\text{ма}}$ на q . Мы видим, таким образом, что функция распределения зависит от параметров — поля, температуры, q — универсальным образом, через функцию ρ .

Из (9.6) можно получить усредненную по конфигурациям функцию распределения статвесов $f(W, y)$ при заданном y , которая определяет распределения всех физических величин. Она оказывается равной¹⁵⁵

$$f(W, y) = \frac{W^{y-2} (1-W)^{-y}}{\Gamma(y) \Gamma(1-y)}, \quad (9.9)$$

где

$$y = 1 - x(q) < 1, \quad (9.10)$$

$\Gamma(y)$ — гамма-функция.

Формулы (9.5) — (9.10) позволяют получить ясную картину распределения кластеров в ультраметрическом пространстве. Расходимость интеграла

$\int_0^1 f(W, y) dW$ на нижнем пределе показывает, что общее количество кластеров при любом значении $y \neq 1$ бесконечно за счет большого количества кластеров с малыми W .

Функция $Wf(W, y)$ определяет среднюю по $\{J_{ij}\}$ вероятность того, что случайно выбранная долина принадлежит кластеру со статвесом W . Как видно из (9.9), кластеры с малыми W дают пренебрежимо малый вклад в интеграл от $Wf(W, y)$, т. е. число состояний в них мало. При $y \rightarrow 1$ функция $Wf(W, y)$ расходится вблизи значения аргумента $W = 1$. Так как независимо от y сумма $\sum_I W_I$ равна 1, это значит, что в пределе $y \rightarrow 1$ основную роль

играет один кластер. Такой вывод представляется естественным, так как предел $y \rightarrow 1$ соответствует переходу в эргодическое состояние.

С поправками порядка N^{-1} к свободной энергии связан и дополнительный вклад в энтропию, выражающийся через P_α обычным образом:

$$\Delta S = - \sum_{\alpha} P_{\alpha} \ln P_{\alpha}. \quad (9.11)$$

Среднее по конфигурации значение ΔS равно

$$\Delta S = - \int_0^1 f(P) P \ln P dP = \psi(1) - \psi(y_1), \quad (9.12)$$

где $f(P) = f(W, y_1)$, а $y_1 = 1 - x(q_{\text{ма}})$ ¹⁵⁵; ψ — дигамма-функция. При $T \rightarrow 0$ эта величина расходится (напомним, что интенсивная часть энтропии,

пропорциональная N , стремится к нулю при $T \rightarrow 0$). В принципе, с помощью (9.9) может быть построена функция распределения энтропии.

Сильные флуктуации свободной энергии долин, определяемые (9.6), заставляют задуматься о конфигурационных флуктуациях параметра порядка Паризи. Наиболее удобным оказывается исследование флуктуаций функции

$$Y_J(q) = \int_q^1 P_J(q') dq' \quad (9.13)$$

(индекс J указывает, что величина вычислена для фиксированного распределения обменных интегралов), среднее значение которой равно $y(q)$. Так как

$$Y_J(q) = \sum_{\alpha, \beta} P_\alpha P_\beta \theta(q^{\alpha\beta} - q) = \sum_I W_I^2, \quad (9.14)$$

то функцию распределения $\Pi_J(Y)$ величин $Y_J(q)$ можно представить в виде

$$\Pi_J(Y) = \langle \delta(Y_J - Y) \rangle_c = \langle \delta(\sum_I W_I^2 - Y) \rangle_c. \quad (9.15)$$

Для Y , близких к 1, основной вклад в $\Pi_J(Y)$, так же как в $f(W, y)$, дает один кластер, и, как следует из (9.9), при $Y \rightarrow 1$

$$\Pi_J(Y) \sim (1 - Y)^{-\nu}. \quad (9.16)$$

Таким образом, наиболее вероятным является значение $Y = 1$, которое, вообще говоря, не имеет ничего общего со средним значением $\langle Y_J(q) \rangle_c = y(q)$. Мы видим, что даже в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ параметр порядка спинового стекла оказывается несомоусредняющимся. В точке перехода возникает не только функция распределения перекрытий долин $P_J(q)$, но и функция распределения для $P_J(q)$. Вычисления показывают¹⁵⁵, что, например, дисперсия $P_J(q)$ равна

$$\langle P_J(q_1) P_J(q_2) \rangle_c - P(q_1) P(q_2) = \frac{1}{3} (P(q_1) \delta(q_1 - q_2) - P(q_1) P(q_2)). \quad (9.17)$$

Вопрос о несомоусредняемости наблюдаемых величин изучался впервые Янгом, Брэем и Муром¹⁶⁰. Они показали, что такие величины, как энергия, намагниченность, параметр Эдвардса — Андерсона, не флуктуируют в макроскопическом пределе, а гиббсовская восприимчивость является несомоусредняющейся. Разные флуктуационные свойства m и $\chi = dm/dh$ могут быть качественно объяснимы тем, что хотя с увеличением N кривая $m(h)$ для каждой конкретной реализации приближается к прямой $\langle m(h) \rangle_c = \chi h$, но ее наклон в $h = 0$, вообще говоря, не имеет ничего общего с $\chi = \langle \chi_J \rangle_c$. Однако для измерения такой сильно флуктуирующей от образца к образцу восприимчивости нужны поля, меньшие характерного масштаба флуктуаций Δh ; поля, большие Δh , «замывают» флуктуации и восстанавливают несомоусредняемость. Так как $\Delta h \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ (авторы работы¹⁶⁰ считают, что $\Delta h \sim N^{-1/2}$), то, к сожалению, пока нельзя предложить реальный эксперимент, в котором проявлялась бы несомоусредняемость в спиновых стеклах. В то же время проверка несомоусредняемости ряда физических величин в модели Шеррингтона — Киркпатрика и ультраметрического распределения долин очень важна, так как позволяет исчерпывающим образом ответить на вопрос, дает ли экстремум функционала Φ , найденный Паризи, истинную свободную энергию спиновых стекол. Поэтому были проделаны численные эксперименты, результаты которых находятся в качественном согласии с теорией Паризи, сначала для малых¹⁶¹, а затем уже для достаточно больших¹⁶² систем, так что полученные качественные выводы можно считать надежными.

Отметим, что несомоусредняемость параметра порядка возникает и в так называемой модели случайных энергий¹⁶³, которая во многих отношениях похожа на модель Шеррингтона — Киркпатрика, но проще ее математически.

Теория молекулярного поля удовлетворительно описывает многие статистические свойства спиновых стекол. Но с точки зрения этой теории спиновое стекло представляет собой абсолютно неэргодическую систему, в которой барьеры между различными состояниями бесконечны, и потому динамика системы должна быть связана только с внутримолекулярными переходами. По существу именно эта динамика исследовалась в пионерских работах Сомполинского и Зиппелиуса^{119,120}. Однако эксперимент свидетельствует о том, что переходы между долинами имеют место, и именно этим обусловлен широкий спектр времен релаксации, который приводит к обсуждавшейся в разделе 1 специфике динамических свойств спиновых стекол. В связи с этим были предприняты попытки построить теорию динамических свойств спиновых стекол феноменологически¹⁶⁴⁻¹⁷¹. Предполагается, что в реальных стеклах с короткодействием сохраняется ультраметрическая структура метастабильных состояний, но барьеры между различными состояниями конечны. Задавая то или иное распределение барьеров или вероятностей переходов и решая кинетическое уравнение для вероятности $P_\alpha(t)$ обнаружить систему в состоянии α в момент времени t , можно получить наблюдаемые на эксперименте временные зависимости, в том числе затянутый экспоненциальный закон^{*}).

10. Спиновые стекла с обменным взаимодействием, зависящим от расстояния.

10.1. Пространственная дисперсия в схеме Паризи. В настоящее время считается достаточно надежно установленным, что анзац Паризи представляет собой правильное решение для модели бесконечного радиуса. Остается, однако, неясным, в какой степени ультраметрическая структура основного состояния описывает свойства реальных спиновых стекол, в которых энергия обменного взаимодействия так или иначе спадает с расстоянием.

В принципе, этот вопрос можно выяснить, развивая теорию возмущений, в которой малым параметром является обратный радиус обменного взаимодействия, а нулевым приближением — теория Паризи. Попытки такого рода были предприняты в работах¹⁷³⁻¹⁷⁸.

В спиновом стекле с короткодействием функционал свободной энергии вместо (6.1) приобретает вид^{176,179}

$$f(Q^{\alpha\beta}(\mathbf{r})) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{J^2}{T^2} \sum_{\alpha \neq \beta} (Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}))^2 + \frac{J^2}{4zT^2} \sum_{\alpha \neq \beta} (\nabla Q^{\alpha\beta}(\mathbf{r}))^2 - \right. \\ \left. - \ln \text{Sp} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{J^2}{T^2} \sum_{\alpha \neq \beta} Q^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \sigma^\alpha(\mathbf{r}) \sigma^\beta(\mathbf{r}) \right) \right], \quad (10.1)$$

где z — число соседей в радиусе взаимодействия, а матрица $Q^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \langle \langle \sigma^\alpha(\mathbf{r}) \sigma^\beta(\mathbf{r}) \rangle_T \rangle_c$ в модели с короткодействием зависит от координаты \mathbf{r} . Отсюда в низшем порядке по флуктуациям относительно решения Паризи

$$R_r^{\alpha\beta} = Q_r^{\alpha\beta} - q^{\alpha\beta}$$

получается эффективный лагранжиан

$$L(R_r^{\alpha\beta}) = -\frac{J}{2} \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha \neq \beta} (\nabla Q_r^{\alpha\beta})^2 + \sum R_r^{\alpha\beta} M^{\alpha\beta, \gamma\nu} R_r^{\gamma\nu} \right], \quad (10.2)$$

где \hat{M} — матрица устойчивости (3.16). Фурье-образ функции Грина флуктуаций $R^{\alpha\beta}$, определяемый соотношением

$$G_p^{\alpha\beta, \gamma\delta} = \langle R_p^{\alpha\beta} R_{-p}^{\gamma\delta} \rangle, \quad (10.3)$$

^{*}) Близкое по духу к указанным работам исследование проведено Гиназбургом¹⁷².

где p — импульс, находится из уравнения

$$\hat{G}_p(p^2 + \hat{M}) = \hat{I}, \quad (10.4)$$

т.е. свойства функции Грина тесно связаны со свойствами собственных значений матрицы устойчивости \hat{M} . В частности, существование бесщелевой моды обуславливает расходимость G_p при $p \rightarrow 0$.

Всего имеется 7 независимых функций $G_p^{\alpha\beta, \gamma\delta}$. Простейшая из них $G_p^{\alpha\beta, \alpha\beta} = G_p(x)$, где x определяется условием $q^{\alpha\beta} = q(x)$. Эта функция при малых p и $\varepsilon = (T_g - T)/T_g$ ведет себя следующим образом:

$$\begin{aligned} G_p(x) &\sim p^{-4}, \quad x \ll p, \\ G_p(x) &\sim p^{-2}, \quad x_1 \gg x \gg p, \end{aligned} \quad (10.5)$$

где $x_1 \sim \varepsilon$ находится из условия $q(x_1) = q(1)$. При $x \gg x_1$ функция $G(p) \sim \sim p^{-2}$.

Таким образом, характер сингулярности G_p при малых p зависит от x .

Кроме $G_p(x)$, имеется 6 независимых функций, которые зависят от двух или трех аргументов типа x . Их поведение может быть более сингулярным, чем (10.5). Наиболее сингулярная функция ведет себя как p^{-6} ¹⁷⁷. Чтобы найти спин-стекольную восприимчивость

$$\chi_{SG} = N^{-1} \sum_{i,j} (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_T - \langle \sigma_i \rangle_T \langle \sigma_j \rangle_T)^2,$$

надо знать поведение всех функций Грина при всех значениях репличных аргументов, так как χ_{SG} получается из $G^{\alpha\beta, \gamma\delta}$ суммированием по репличным индексам, т.е. при $n \rightarrow 0$ интегрированием по аргументу типа x . Однако до сих пор никому не удалось преодолеть математические трудности, стоящие на пути выполнения такой программы. Показано только, что коррелятор χ_{SG} , получаемый усреднением по одной долине (т.е. при $x \rightarrow 1$), ведет себя как p^{-2} ¹⁷⁵.

10.2. Другие аналитические подходы. Попытка построить ренормгрупповую схему для эффективного гамильтониана (10.1) предпринята в¹⁸⁰.

В работе¹⁸¹ с помощью разложения по обратному радиусу обменного взаимодействия введен эффективный гамильтониан, позволяющий свести задачу о фазовом переходе в спиновом стекле к задаче локализации Андерсона. В результате критическое поведение оказывается не скейлинговым, нелинейная восприимчивость колеблется между двумя огибающими. На эксперименте, однако, такого поведения не наблюдается; значения критических индексов различных величин существенно отличаются от предсказанных в¹⁸¹.

Не преодоленные до сих пор трудности, возникшие на пути построения теории спиновых стекол с конечным радиусом взаимодействия, стимулировали рассмотрение некоторых специальных моделей: модели с ближкодействием на решетке Бете¹⁸²⁻¹⁸⁴ *), модели разбавленного спинового стекла, предложенной Вианна и Брэем¹⁸⁶⁻¹⁸⁹. Пока неясно, какое отношение имеют полученные в этих работах результаты к реальным спиновым стеклам.

10.3. Численное моделирование. Эвристические модели. Теория молекулярного поля, как известно¹⁹⁰, правильно предсказывает параметр порядка и характер фазового перехода, если размерность пространства выше так называемой критической размерности d_c . Поскольку, как мы уже отмечали, пока последовательную аналитическую теорию спиновых стекол с короткодействием построить не удалось, были

*) О свойствах решетки Бете см., например,¹⁸⁵.

предприняты интенсивные исследования спиновых стекол с помощью численного моделирования.

10.3.1. *Модель Изинга.* Наиболее полно исследовалась простейшая модель: изинговский магнетик со взаимодействием ближайших соседей в простой квадратной или кубической решетке с симметричным распределением обменных взаимодействий. В большинстве работ использовался метод Монте-Карло. Вследствие медленности релаксации в спиновых стеклах требуются чрезвычайно длительные расчеты для получения достаточно надежных данных. Например, автору работы¹⁹¹ потребовалось полгода машинного времени на специально сконструированной быстродействующей ЭВМ, чтобы изучить поведение спинового стекла на больших временах.

Вопрос о фазовом переходе в двумерных стеклах решен уже давно. Точное вычисление статсуммы для конечных систем с числом частиц $N \leq 250$ ¹⁹², вычисление энергии дефекта¹⁹³ и проведенное по методу Монте-Карло машинное моделирование¹⁹⁴ показали, что в двумерных магнетиках фазового перехода нет. Параметр Эдварса — Андерсона при всех температурах равен нулю, а радиус корреляции нелинейной восприимчивости, сопряженной параметру Эдварса — Андерсона, хотя и растет с понижением температуры, но при всех температурах остается конечным.

Сложнее обстоит дело в трехмерном стекле. В работах^{192, 193} на основе машинного моделирования утверждалось, что в трехмерном случае фазового перехода нет и $d_c = 4$. Этот вывод был в согласии с результатами высокотемпературного разложения Фиша и Харриса¹⁹⁵. Однако впоследствии эти результаты были пересмотрены.

Впервые весомые аргументы в пользу того, что $d_c \leq 3$, были выдвинуты Брэм и Муром^{196, 197} и Макмилланом^{198, 199}, использовавшими метод, предложенный в¹⁹². Разобьем систему на блоки размером L и введем характерную энергию взаимодействия блоков \tilde{J} , зависимость которой от L определяется критическим индексом ν : $\tilde{J}(L) = JL^{-1/\nu}$. Если $\nu > 0$, то \tilde{J} стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$, т.е. в системе отсутствует корреляция между далекими спинами, и, значит, фазового перехода при конечной температуре нет. В этом случае ν определяет зависимость радиуса корреляции ξ от температуры: $\xi \sim (J/T)^\nu$. Если же $\nu < 0$, то при некоторой конечной температуре происходит фазовый переход.

Величина $\tilde{J}(L)$ совпадает с так называемой энергией дефекта, которую можно вычислить на ЭВМ. Зададим периодические граничные условия по всем осям, кроме одной, где используем случайные граничные условия.

Последнее означает, что направления спинов в первом и последнем рядах ($d = 2$) или на первой и последней плоскостях ($d = 3$) фиксированы случайно вверх или вниз. Если исследуемый образец рассматривать как часть бесконечной системы, то случайные граничные условия моделируют связь конечного образца с остальной частью системы. Энергия дефекта $E_{\text{деф}}$ — это разность между энергиями при заданных граничных условиях и таких, когда на одной из гиперповерхностей со случайными граничными условиями ориентация спинов изменена на противоположную.

Как показывают вычисления, функция распределения случайной величины $E_{\text{деф}}$ очень быстро выходит на асимптотику при увеличении размера образца L и, по-видимому, не зависит от вида функции распределения обменных интегралов. При этом все характерные параметры распределения: среднее значение, дисперсия и т.д. одинаково зависят от L . Поэтому в качестве $\tilde{J}(L)$ можно использовать любую из этих величин, например среднее значение $|\bar{E}_{\text{деф}}|$.

Вычисления показали, что $\nu > 0$ при $d = 2$, т.е., в двумерном случае нет фазового перехода при $T \neq 0$, а в трехмерном $\nu < 0$ и фазовый переход есть. Этот вывод подтверждается и с помощью высокотемпературного разло-

жения восприимчивости Эдварса — Андерсона²⁰⁰ χ_{SC} . Критический индекс этой восприимчивости при $d = 3$ оказался равным $\gamma = 2,9 \pm 0,5$, что хорошо совпадает с результатами монте-карловских вычислений¹⁹¹. Неправильный результат первой работы по высокотемпературным разложениям связан с тем, что анализировалось слишком мало членов ряда.

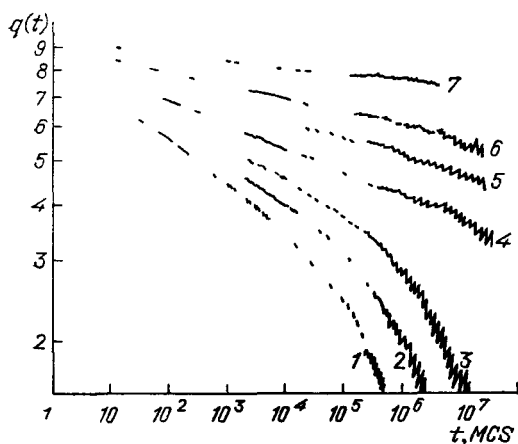


Рис 19 Функция $q(t)$ при температурах $T/T_g = 1,30$ (1) 1,25 (2) 1,20 (3) 1,10 (4) 1,00 (5) 0,60 (6) и 0,70 (7) Решетка размером 32^3 Данные показаны вместе с величиной ошибки Единица измерения времени MCS — монте-карловский шаг

равно или, по крайней мере, близко к трем^{201,202}. На рис. 19 приведена зависимость от времени величины $q(t)$, определенной как

$$q(t) = \frac{1}{N} \sum_i \langle \langle \sigma_i(0) \sigma_i(t) \rangle \rangle_T \quad (10.6)$$

Она связана с параметром Эдварса — Андерсона соотношением

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) \quad (10.7)$$

Характер релаксации совершенно разный выше и ниже температуры перехода $T_g = 1,1275$ (модель с энергией обменного взаимодействия ближайших соседей в решетке, равной ± 1) Выше T_g она экспоненциальная,

$$q(t) = A t^{-\nu} e^{-\omega t} \quad (10.8)$$

(β и x — функции температуры: $\beta(T_g) = 0,3$, $\beta(T) \rightarrow 1$ при $T \rightarrow \infty$), а ниже — степенная ($\omega = 0$) Несмотря на то, что с уменьшением температуры зависимость (10.8) становится очень медленной ($x(T) < 0,05$ при $T = 0,7$), общий вид кривых при всех $T < T_g$ указывает на то, что $q(t \rightarrow \infty) = 0$ Обобщая формулу (10.8), можно представить зависимость $q(t)$ в скейлинговом виде:

$$q(t) = t^{-\lambda} Q\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (10.9)$$

При этом время релаксации τ хорошо укладывается на степенную зависимость $\tau \sim (T - T_g)^{-z\nu}$ с $z\nu = 7,9 \pm 1,0$, $z = 6,1 \pm 0,3$.

В работах^{203,204} были сделаны попытки выяснить, нельзя ли описать основное состояние спиновых стекол с ближкодействием как систему долин в ультраметрическом пространстве. Однако малые размеры образцов не позволили сделать надежные выводы

Таким образом, машинное моделирование показало, что модели Изинга присущи основные особенности, наблюдавшиеся в экспериментах по спиновым стеклам: имеется фазовый переход, ниже T_g возникает долговременная

Наиболее полную картину фазового перехода в спиновом стекле с короткодействием удалось получить Огиельскому¹⁹¹. Изучая долговременную релаксацию в больших массивах спинов, вплоть до $64 \times 64 \times 64$, он приходит к выводу о том, что фазовый переход в трехмерном случае есть; при отличной от нуля температуре T_g радиус корреляции ξ расходится по закону $\xi \sim (T - T_g)^{-\nu}$, $\nu = 1,3$. При этой же температуре расходится характерное время релаксации (см. ниже). Но во всей низкотемпературной фазе параметр порядка равен нулю. По-видимому, радиус корреляции бесконечен всюду ниже T_g , т.е. любая температура $T < T_g$ является в трехмерном случае критической, а d_c

релаксация и, хотя $q(t) \rightarrow 0$ (при $t \rightarrow \infty$) при реально достижимых временах $q \neq 0$ ниже T_g .

Результаты численных экспериментов ¹⁹⁶⁻¹⁹⁹ привели Фишера и Хьюза ²⁰⁵ и Брэя и Мура ²⁰⁶ к эвристической модели изинговского спинового стекла, которую можно назвать капельной (см. также ²⁰⁷). Согласно этой модели, крупномасштабные возбуждения с характерным размером L , энергия которых, как показано в ¹⁹⁶⁻¹⁹⁹, $E \approx \tilde{J}(L) \sim L^y$, $y = -v^{-1}$, реализуются за счет переворота большого числа спинов в «каплях», поверхность которых порядка d_s . Весьма существенно, что индекс d_s , близкий по смыслу к фрактальной размерности, не связан тривиальным образом $d_s = d - 1$ с размерностью пространства, как это имеет место для изинговского ферромагнетика. Вообще говоря, $d_s \geq d - 1$, так как капля как фрактальный объект может иметь аномально большую поверхность.

Пусть теперь в такой системе произошло возмущение обменных интегралов δJ_{ij} с нулевым средним значением и дисперсией δJ . Тогда перераспределение ориентаций спинов на границе капли приводит к выигрышу энергии $\delta J \sim L^{2s/2}$. Если этот выигрыш больше энергии возбуждения в капле $E(L) \sim L^y$, т.е. если $\theta = (d_s/2) - y > 0$, то перераспределение спинов, действительно, происходит. Иными словами, если $\theta > 0$, то возмущение обменных интегралов δJ приводит к перераспределению ориентаций спинов, удаленных на расстояние $L > L_0 \approx (J/\delta J)^{1/\theta}$ от возмущенных обменных связей. Численное моделирование показало, что в двумерных стеклах $y = -0,3$ ^{196,197}, $d_s = 1,6$ ²⁰⁶ и $\theta = 1,1$, а в трехмерных $y = 0,2$, и так как $d_s \geq d - 1$, то $\theta > 0,8$. В трехмерном случае, когда есть фазовый переход при $T \neq 0$, имеет место неустойчивость спинового состояния не только по отношению к возмущению обменных интегралов, но и относительно слабых возмущений температуры: изменение температуры δT приводит к переориентации спинов на расстояниях $L > (\delta T)/T^{-1/\theta}$. Фазу спинового стекла в трехмерном случае называли в ²⁰⁶ хаотической. В ней нет замерзания спинов при любой $T \neq 0$.

Ряд явлений релаксационной динамики спиновых стекол был рассмотрен на основе капельной модели в ²⁰⁵.

10.3.2. *Гейзенберговское спиновое стекло.* Так как основные эксперименты проводились в гейзенберговских системах, то особый интерес представляет их численное моделирование. Все результаты численного моделирования систем со взаимодействием ближайших соседей указывают на то, что в гейзенберговских спиновых стеклах $d_c > 3$ ²⁰⁸⁻²¹². Авторы работ ^{209,210} вычисляли энергию дефекта и пришли к заключению, что $d_c = 4$. В ²¹² вычислялись по методу Монте-Карло спин-стеклольная восприимчивость и автокорреляционная функция для образцов размеров 8^3 , 16^3 , 32^3 с нормальным распределением обменных интегралов с единичной дисперсией. В этом случае теория среднего поля дает переход при $T_g^{MF} = \sqrt{6}/3 = 0,82$, а приближение Бете — Пайерлса — при $T_g^{BP} = 0,52$. Результаты численного моделирования в интервале $0,20 < T < 0,80$ никаких указаний на фазовый переход не дают. Восприимчивость и характерное время релаксации τ растут с понижением температуры степенным образом: $\chi_{SG} \sim T^{-\gamma}$, $\gamma = 3,4$; $\tau \sim T^{-zv}$, $zv = 5,9$, $z = 5,1$, так что температура перехода скорее всего равна нулю, как в двумерном изинговском спиновом стекле. Но в отличие от двумерного изинговского стекла, где с понижением температуры τ растет экспоненциально ²¹³⁻²¹⁵, здесь мы видим степенной рост, т.е. переходы между различными состояниями не связаны с преодолением барьеров. В то же время $q(t)$ логарифмически падает с ростом времени.

Все эти результаты разительно противоречат эксперименту. Эксперимент дает серьезные указания на то, что переход в спиновое стекло происходит при конечной температуре. Об этом свидетельствует сильный рост χ_{nl} при $T \rightarrow T_g$. Об этом же говорят и динамические свойства — характер зависимости T_g от ω .

Для некоторых спиновых стекол, в частности для CuMn , эта функция известна в очень широких пределах: от времен 10^{-8} с, характерных для нейтронных экспериментов²¹⁶, до времен порядка 10^4 с, соответствующих статистическим экспериментам. В работе²¹⁷ показано, что эти данные во всем интервале времен 10^{-8} с $< \tau < 10^4$ с хорошо описываются скейлинговым соотношением $\tau = \tau_0 [T/(T - T_0)]^{zv}$ с $zv = 5,5$ (рис. 20). При этом T_0 близка к температуре, при которой статическая восприимчивость имеет излом. В то же время закон Фулчера $\tau \sim \exp [E/(T - T_0)]$ и обобщение закона Аррениуса²¹⁸ $\tau \sim \exp (E/T^{zv})$, основанное на предположении, что при $T \rightarrow 0$ в системе возникают бесконечные барьеры, не описывают при разумных значениях параметров экспериментальные зависимости $T(\tau)$ во всем интервале времен.

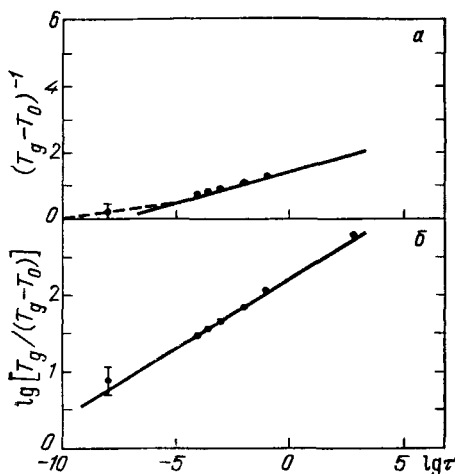


Рис. 20 Сопоставление закона Фулчера (а) и степенного закона (б) для температурной зависимости времени релаксации сплава CuMn (4,6 ат. % Mn)

Преимущества скейлингового соотношения перед другими возможными зависимостями следуют и из других экспериментальных работ²¹⁹⁻²²³.

Таким образом, экспериментальная ситуация в гейзенберговских магнетиках больше похожа на результаты численного моделирования для трехмерных изинговских стекол¹⁹¹, чем для гейзенберговских. Это хорошо иллюстрирует рис. 21, взятый из работы²¹². Даже экспериментально определенные индексы неплохо согласуются с вычислениями в¹⁹¹.

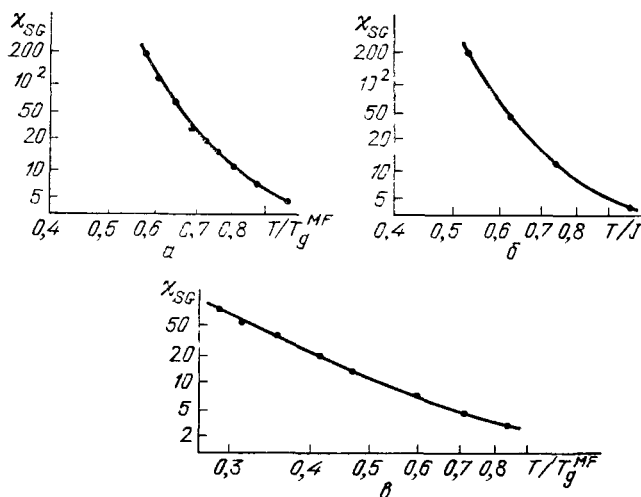


Рис. 21 а — Восприимчивость χ_{SG} как функция температуры для трехмерной модели Изинга со взаимодействием ближайших соседей по результатам численного моделирования; T_g^{MF} — температура перехода в приближении молекулярного поля. б — Экспериментальные данные из работы²¹. в — Результаты численного моделирования для трехмерной модели Гейзенберга со взаимодействием ближайших соседей

Выход из этого противоречия был предложен в работах^{210,223}. В них обращено внимание на особую роль случайной анизотропии в спиновых стеклах, которая может привести к тому, что переход становится изингоподобным, а температура перехода в спиновых стеклах с короткодействием равна

$$T_g \sim J \left(\frac{D}{J} \right)^{1/4}. \quad (10.10)$$

Спиновые стекла с взаимодействием РККИ, согласно²²⁴, принадлежат к другому классу универсальности, с $d_c = 3$, см. также²²⁵; случайная анизотро-

тия в них изингонизует переход при температуре

$$T_g \sim J \left(\ln \frac{J}{D} \right)^{-1/2}, \quad (10.11)$$

которая, как и T_g в случае короткодействия при реальных значениях параметра D/J , не сильно отличается от J .

Эта картина, однако, тоже сталкивается с трудностями. Во-первых, результаты монте-карловских расчетов для стекол со взаимодействием РККИ, проведенные в ²¹¹, указывают на то, что и в этих системах $d_c > 3$. Во-вторых, как отмечено в ²¹², если соотношения типа (10.10) и (10.11) имеют место, то в стеклах с очень малой анизотропией должен наблюдаться с понижением температуры переход от гейзенберговского поведения к изинговскому фазовому переходу. Однако на эксперименте такой переход никогда не наблюдается.

11. Спин-стекольные модели в проблемах комбинаторной оптимизации и биологии. Идеи и методы, развитые в теории спиновых стекол, оказали сильное влияние на очень далекие от них на первый взгляд проблемы комбинаторной оптимизации, в которых в той или иной форме имеются фрустрации ^{14, 226–230}. Речь идет о так называемых задачах с экспоненциально большим перебором, т.е. о задачах, для которых, по-видимому, невозможно построить алгоритм решения за время, степенным образом зависящее от числа объектов перебора N .

При изучении задач комбинаторной оптимизации обычно интересуются набором N параметров, позволяющих получить абсолютный экстремум, в то время как в статистической физике изучаются макроскопические свойства системы. Но применение методов статистической физики позволяет, во-первых, дать достаточно хорошую аналитическую оценку величины, для которой ищется оптимум, а, во-вторых, введя естественным образом функцию «стоимости» (аналог свободной энергии) и параметр, аналогичной температуре, можно, моделируя охлаждение системы по методу Монте-Карло, получить распределение «микроскопических» параметров для решения, близкого к оптимальному.

В качестве примера рассмотрим задачу о делении плоского графа, в котором вершины связаны случайным образом, на две подсистемы с одинаковым числом вершин так, чтобы число связей, соединяющих вершины из разных подсистем, было минимально. Такого сорта проблемы возникают, например, при конструировании сложных электронных систем, когда надо минимизировать число связей между блоками ²²⁶.

Введем в каждой вершине i переменную σ_i , принимающую значения ± 1 в зависимости от того, в какой подсистеме оказалась вершина. Каждые две вершины будем считать связанными с вероятностью $\alpha = p/N$, поставим связи в соответствие энергию $J_{ij} = J > 0$. Тогда, как легко видеть, изинговский гамильтониан

$$\mathcal{H} = - \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (11.1)$$

простым образом связан с числом связей $C(\alpha)$ между вершинами, принадлежащими разным подсистемам ²²⁷:

$$\mathcal{H} = - \frac{J}{2} N(N-1) p + 2C(\alpha). \quad (11.2)$$

и задача комбинаторной оптимизации сводится к нахождению минимума \mathcal{H} при условии равенства нулю полного момента $\sum_i \sigma_i = 0$, что обеспечивает

равенство числа вершин в подсистемах. Фрустрации возникают вследствие конкуренции между ферромагнитным взаимодействием J_{ij} и условием равен-

ства нулю полного момента. Отметим, что эта модель идентична модели разбавленного спинового стекла¹⁸⁶.

Реплично-симметричный анализ, проведенный Фу и Андерсоном, позволил дать оценку $C(\alpha)$ лучше, чем удавалось известными ранее методами оптимизации.

Таким же образом были сформулированы статфизические модели для классической задачи коммивояжера^{226, 228}, задачи о раскраске плоских графов²²⁹ и др.

Кроме реплично-симметричного анализа и машинного моделирования процесса «охлаждения» системы делались попытки исследовать свойства фазы с нарушенной симметрией²³⁰.

Спин-стекольные методы неожиданно оказались плодотворными в биологии, в первую очередь как модели ассоциативной памяти^{14, 231–239}. Модели основаны на представлении о памяти как о кооперативном свойстве нейронных сетей. Возбужденному и невозбужденному состоянию нейрона i соответствует изинговская переменная $\sigma_i = \pm 1$. Потенциал на нейроне V_i возникает вследствие его взаимодействия с другими нейронами сети и равен

$$\sum_{j} J_{ij} \sigma_j.$$

Величины J_{ij} характеризуют силу взаимодействия и могут иметь разные знаки. Считая, что порог возбуждения нейрона U_i равен

$$U_i = \sum_j J_{ij}$$

и предполагая взаимодействие симметричным, видим, что стационарное состояние системы совпадает с условием минимума гамильтониана (11.1).

Для того чтобы система могла запомнить образы и узнавать их ассоциативно, устойчивые конфигурации должны коррелировать с образами, которые надо запомнить. Это достигается выбором взаимодействий в виде

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^l \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \quad (i \neq j),$$

где ξ_i^{μ} — случайные переменные, равные ± 1 . Наборы $\{\xi_i^{\mu}\}$ соответствуют образам, хранящимся в памяти. Если отношение $\alpha = l/N$ не превышает критическое значение $\alpha_0 = 0,138$, то оказывается, что в системе имеется l стационарных состояний, каждое из которых близко к одному из наборов $\{\xi_i^{\mu}\}$. Если начальное состояние $\{\sigma_i\}$ мало отличается от некоторого образа $\{\xi_i^{\mu}\}$, то в результате динамики, обеспечивающей понижение энергии, система перейдет именно в этот, близкий к начальному состоянию образ, т. е. система «узнаёт» по ассоциации.

12. Заключение. Интенсивные исследования в области стекол продолжают. Низшая критическая размерность для векторных стекол, по-видимому, равна трем или выше, так что результаты теории молекулярного поля не могут буквально описывать реальные спиновые стекла. Это стимулирует попытки построить теорию спиновых стекол, которая не исходила бы из теории молекулярного поля как нулевого приближения. Возникли и развиваются идеи рассмотрения спинового стекла как хаотической фазы, неустойчивой относительно малых изменений граничных условий и температуры, делаются попытки найти модели, в которых реплично-симметричное решение устойчиво вплоть до $T = 0$.

Однако не надо думать, что теория молекулярного поля оказалась бесполезной. Вследствие очень медленного спада в во времени корреляций, обусловленных пространственной дисперсией, параметр порядка отличен

от нуля при реально достижимых временах, и потому теория молекулярного поля хорошо описывает статические свойства спиновых стекол.

Параллельно с новыми теоретическими поисками появляются экспериментальные работы, посвященные всестороннему изучению различных свойств спиновых стекол. Совсем недавно появились работы, в которых изучались температурные зависимости термостатической и изотермической восприимчивостей при $T \ll T_g^{240}$, поглощение ультразвука в диэлектрических спиновых стеклах¹²⁴, проведены прецизионные измерения зависимостей остаточных намагниченностей и процесса старения от магнитного поля²⁴², проведены новые исследования свойств смешанного состояния в неупорядоченных ферро- и антиферромагнетиках²⁴³⁻²⁴⁶, проанализирована проблема фазового перехода в состояние спинового стекла²⁴⁷ и др.²⁴⁸⁻²⁵³.

Капельная модель спинового стекла получила дальнейшее развитие в работах²⁵⁴. Неэргодическое состояние на решетке Бете исследовалось в²⁵⁵.

Появились и новые работы, посвященные изучению проблемы оптимизации с помощью метода реплик²⁵⁶⁻²⁶¹. В настоящее время список работ, несомненно, увеличился.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- ¹ Fischer K.//Phys. Stat. Sol. 1983. V. 116. P. 357; 1985. V. 130. P. 13.
- ² Коренблит И. Я., Шендер Е. Ф. //Изв. вузов СССР. Сер. «Физика». 1984. № 10. С. 23.
- ³ Huang C. Y.//JMMM. 1985. V. 51. P. 1.
- ⁴ Binder K., Young A. P.//Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 801.
- ⁵ Бургмейстер Б. Е., Глинчук М. Д.//УФН. 1985. Т. 146. С. 493.
- ⁶ Takashige M., Terauchi H., Miura Y., Hoshino S.//J. Phys. Japan. 1985. V. 54. P. 3250.
- ⁷ Rowe J. M., Rush J. J., Hinks D. G., Susman S.//Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 1158.
- ⁸ Lütty F.//Defects in Insulating Crystals.— Berlin; Heidelberg; New York; Springer-Verlag, 1981.
- ⁹ Reich D. H., Rosenbaum T. F., Aepli G., Guggenheim H. J.//Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 34. P. 4956.
- ¹⁰ John S., Lubensky T. C.//Ibidem. P. 4815.
- ¹¹ Винокур В. М., Иоффе Л. Б., Ларкин А. И., Фейгельман М. В.//ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 366.
- ¹² Edwards S. F., Anderson P. W.//J. Phys. Ser. F. 1975. V. 35. P. 1792.
- ¹³ Cannella V., Mydosh J. A.//Phys. Rev. Ser. B. 1972. V. 6. P. 4220.
- ¹⁴ Rammal R., Toulouse G., Virasoro M. A.//Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 765.
- ¹⁵ Chamberlin R. V., Hardiman M., Turkevich L. A., Orbach R.//Phys. Rev. Ser. B. 1982. V. 25. P. 6720.
- ¹⁶ Suzuki M.//Progr. Theor. Phys. 1977. V. 58. P. 1151.
- ¹⁷ Chalupa J.//Sol. State Commun. 1977. V. 24. P. 429.
- ¹⁸ Miyako Y., Chikazawa S., Soito T., Yuochunas Y. G.//J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 46. P. 1951.
- ¹⁹ Barbara B., Malozemoff A. P., Imry Y.//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1852.
- ²⁰ Monod P., Boichiat H.//J. de Phys. Lett. 1982. T. 43. P. 45.
- ²¹ Omari R., Prejean J. J., Souletie J.//J. de Phys. 1983. V. 44. P. 25.
- ²² Beauvilloin P., Chappert C., Renard J. R.//J. de Phys. Lett. 1984. T. 45. P. L665.
- ²³ Levy L. P., Ogielski A. T.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 3288.
- ²⁴ Deryabin A. V., Tkov A. V., Kazantsev V. K., Chirkov Yu. A., Zakharov I. V.//Phys. Stat. Sol. Ser. a. 1986. V. 75. P. 229.
- ²⁵ Дерябин А. В., Казанцев В. К., Захаров И. В., Тьков А. В.//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 607.
- ²⁶ Benzakka F., Bertrand D., Fert A. R., Redoules J. P.//J. Phys. Ser. C. 1986. V. 19. P. 4741.
- ²⁷ Taniguchi T., Miyako Y., Tholence J. L.//J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. P. 220.
- ²⁸ Svedlindh P., Lundgren L., Nordblad P., Chen H. S.//Europhys. Lett. 1986. V. 2. P. 805.

- ²⁹ Bouchiat H.//J. de Phys. 1986. T. 47. P. 71.
- ³⁰ Yeshurun Y., Sompolsky H.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 984.
- ³¹ De Courtenay N., Bouchiat H., Hurdequint H., Fert A.//J. de Phys. 1986. T. 47. P. 1507.
- ³² Kotliar G., Sompolsky H.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1751, 1982.
- ³³ Wenger L. E., Keesom P. H.//Phys. Rev. Ser. B. 1976. V. 13. P. 4053.
- ³⁴ Löhneysen H., van den Berg R., Lecomte G. V., Zinn W.//Ibidem. 1985. V. 31. P. 2920.
- ³⁵ Fogle W. E., Boyer J. D., Fisher R. A., Phillips N. E.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1815.
- ³⁶ Wosnitza J., Löhneysen H., von, Zinn W., Krey U.//Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 33. P. 3436.
- ³⁷ Svendlindh P., Granberg P., Nordblad P., Lundgren L., Chen H. S.//Ibidem. 1987. V. 35. P. 268.
- ³⁸ Müser D., Wenger L. E., van Duynveldt A. J., Mydosh J. A.//Ibidem. 1983. V. 27. P. 3100.
- ³⁹ Reim W., Koch R. H., Malozemoff A. P., Ketchen M. B.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 905.
- ⁴⁰ Ocio M., Bouchiat H., Monod P.//J. de Phys. Lett. 1985. T. 46. P. L647.
- ⁴¹ Ocio M., Bouchiat H., Monod P.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 185.
- ⁴² Refregier P., Ocio M., Bouchiat H.//Europhys. Lett. 1987. V. 3. P. 503.
- ⁴³ Lundgren O. L., Svendlindh P., Beckman O.//JMMM. 1981. V. 25. P. 33.
- ⁴⁴ Van Duynveldt A. J., Mulder C. A. M.//Physica. 1982. V. 82. P. 1148.
- ⁴⁵ Paulsen C. C., Williamson S. J., Maletta H.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 209.
- ⁴⁶ Pytte E., Imry Y.//Phys. Rev. Ser. B. 1987. V. 35. P. 1465.
- ⁴⁷ De Mayo B.//J. Phys. and Chem. Sol. 1974. V. 35. P. 1525.
- ⁴⁸ Guy C. N.//J. Phys. Ser. F. 1975. V. 5. P. L242.
- ⁴⁹ Lundgren L., Nordblad P., Svendlindh P.//Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 34. P. 8164.
- ⁵⁰ Chamberlin R. V., Mozurkevich G., Orbach R.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 867.
- ⁵¹ Chamberlin R. V.//J. Appl. Phys. 1985. V. 57. P. 3377.
- ⁵² Jonscher A. K.//Nature. 1977. V. 267. P. 673.
- ⁵³ Ngai K. L.//Comm. Sol. State Phys. 1979. V. 9. P. 127.
- ⁵⁴ Palmer R. G., Stein D. L., Abrahams E., Anderson P. W.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 958.
- ⁵⁵ Lundgren L., Svendlindh P., Nordblad P., Beckman O.//Ibidem. 1983. V. 51. P. 911.
- ⁵⁶ Nordblad P., Svendlindh P., Lundgren L., Sandlund L.//Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 33. P. 645; Phys. Lett. Ser. A. 1987. V. 120. P. 475.
- ⁵⁷ Nordblad P., Lundgren L., Sandlund K.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 185.
- ⁵⁸ Alba M., Ocio M., Hammann J.//Europhys. Lett. 1986. V. 2. P. 45.
- ⁵⁹ Lundgren L., Nordblad P., Sandlund L.//Ibidem. V. 1. P. 529.
- ⁶⁰ Lundgren L., Nordblad P., Svendlindh P., Beckman O.//J. App. Phys. 1985. V. 57. P. 3371.
- ⁶¹ Alba M., Hammann J.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 213.
- ⁶² Maletta H., Felsch W.//Zs. Phys. Kl. B. 1980. Bd 37. S. 55.
- ⁶³ Maletta H.//J. App. Phys. 1982. V. 53. P. 2185.
- ⁶⁴ Yeshurun Y., Salamon M. B., Rao K. V., Chen H. S.//Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 1366.
- ⁶⁵ Berton A., Chaussy J., Odin J., Rammal R., Souletie J., Tholence J. L., Tournier R.//J. App. Phys. 1981. V. 52. P. 1763.
- ⁶⁶ Goldfarb R. B., Fickett F. R., Rao L. V., Chen H. S.//J. App. Phys. 1982. V. 53. P. 7687.
- ⁶⁷ Bertrand D., Fert A. R., Schmidt M. S., Bensamka F., Legrand S.//J. Phys. Ser. C. 1982. V. 15. P. L883.
- ⁶⁸ Gelard J., Bensamka F., Bertrand D., Fert A. R., Redouless J. R., Legrand S.//Ibidem. 1983. V. 16. P. L939; 1984. V. 17. P. 1725.
- ⁶⁹ Lecomte G. V., Löhneysen H. von, Bauhofer W., Güntherodt G.//Sol. State. Commun. 1984. V. 52. P. 535.
- ⁷⁰ Lecomte G. V., Löhneysen H. von, Schröder A., Bauhofer W., Güntherodt G.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 59.
- ⁷¹ Wong P., v. Molnar S., Palstra T. T. M., Mydosh J. A., Yoshizawa H., Shapiro S. M., Ito A.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2043.

- 72 Такзей Г. А., Костышин А. М.//Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 40. С. 308.
- 73 Такзей Г. А., Костышин А. М., Сыч И. И.//ФТТ. 1987. Т. 29. С. 2434.
- 74 Geschwindt S., Delvin G., McCall S. L.//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1595.
- 75 Hauser J. J.//Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 34. P. 3453.
- 76 Abdul-Razzaq W., Kouvel J. S.//Phys. Rev. Ser. B. 1987. V. 35. P. 1764.
- 77 Kouvel S., Abdul-Razzaq W., Ziq Kh.//Ibidem. P. 1768.
- 78 Nigam A. K., Girish Chandra, Ramakrishnan S.//J. Phys. Ser. F. 1986. V. 16. P. 1235.
- 79 Ranganathan R., Tholence J. L., Krishnan R., Dancygier M.//J. Phys. Ser. C. 1985. V. 18. P. L1057.
- 80 Senoussi S., Öner Y.//J. de Phys. 1985. T. 46. P. 1435.
- 81 Senoussi S., Elkhathouri D.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 153.
- 82 Goldfarb R. B., Rao K. V., Chen H. S.//Sol. State Commun. 1985. V. 54. P. 799.
- 83 Меньшиков А. З., Такзей Г. А., Теплых А. Е.//ФММ. 1982. Т. 54. С. 465.
- 84 Такзей Г. А., Сыч И. И., Меньшиков А. З., Теплых А. Е.//ФММ. 1981. Т. 52. С. 960.
- 85 Дерябин А. В., Казанцев В. К., Тьков А. В., Захаров И. В.//ЖЭТФ. 1988. Т. 92. С. 1761.
- 86 Kadomatsu H., Tsuraoka T., Fujiwara H.//J. Phys. Soc. Japan. 1984. V. 53. P. 3153.
- 87 Dublin G., Yeshurun Y.//Phys. Rev. Ser. B. 1982. V. 25. P. 4899.
- 88 Manheim M. A., Bhagat S. M., Chen H. S.//JMMM. 1983. V. 38. P. 147.
- 89 Erwin P. V., Lynn J. W., Phyne J. J., Chen H. S.//J. App. Phys. 1985. V. 57. P. 3473.
- 90 Aepli G., Shapiro S. M., Birnencau R. J., Chen H. S.//Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 29. P. 2589.
- 91 Maletta H., Aepli G., Shapiro S. M.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1490.
- 92 Murani A. P.//Sol. State Commun. 1980. V. 34. P. 705.
- 93 Mirebeau I., Jehanno G., Campbell I. A., Hippert F., Hennion B., Hennion M.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 99.
- 94 Katsumara K., Tanimoto M., Mitsuda S., Eudoh Y.//J. Phys. Soc. Japan. 1984. V. 53. P. 3315.
- 95 Miyako Y., Nishioka T., Sato T., Takeda Y., Marimoto S., Ito A. //JMMM. 1986. V. 54—57. P. 149.
- 96 Roy S. B., Majumdar A. K., Mishra N. C., Raychaudhary A. R., Srinivasan R.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 7458.
- 97 Sakakibara T., Goto T., Miyako Y.//Sol. State. Commun. 1986. V. 58. P. 563.
- 98 Campbell I. A., Hurdequint H., Hippert F.//Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 33. P. 3540.
- 99 Sherrington D., Kirkpatrick S.//Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 1792.
- 100 Kirkpatrick S., Sherrington D.//Phys. Rev. Ser. B. 1978. V. 17. P. 4384.
- 101 De Almeida J. R. L., Thouless D. J.//J. Phys. Ser. A. 1978. V. 11. P. 983.
- 102 Bray A. J., Moore M. A.//Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 1068.
- 103 Thouless D. J., Anderson P. W., Palmer R. G.//Phil. Mag. 1977. V. 35. P. 593.
- 104 Bray A. J., Moore M. A.//J. Phys. Ser. C. 1980. V. 13. P. L469.
- 105 Tanaka F., Edwards S. F.//Ibidem. Ser. F. 1980. V. 10. P. 2769.
- 106 De Dominicis C., Gabay M., Garel T., Orland H.//J. de Phys. 1980. T. 41. P. 923.
- 107 Parisi G.//J. Phys. Ser. A. 1980. V. 13. P. 1101, 1887.
- 108 Parisi G.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1946.
- 109 Duplantier B.//J. Phys. Ser. A. 1981. V. 14. P. 283.
- 110 Sommers H. J., Dupont W.//Ibidem. Ser. C. 1984. V. 17. P. 5785.
- 111 Parisi G.//Ibidem. Ser. A. 1980. V. 13. P. L115.
- 112 De Almeida J. R. L., Lage E. J. S.//Ibidem. Ser. C. 1983. V. 16. P. 939.
- 113 Goltsev A. V.//Ibidem. Ser. A. 1983. V. 16. P. L339.
- 114 Goltsev A. V.//Ibidem. P. 1337.
- 115 De Dominicis C., Kondor I.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 27. P. 606.
- 116 Kondor I., De Dominicis C.//J. Phys. Ser. A. 1983. V. 16. P. 3931.
- 117 Bray A. J., Moore M. A.//Ibidem. Ser. C. 1980. V. 13. P. 419.
- 118 De Dominicis C., Gabay M., Duplantier B.//Ibidem. Ser. A. 1982. V. 15. P. L47.]

- ¹¹⁹ Sompolinsky H.//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 935.
- ¹²⁰ Sompolinsky H., Zippelius A.//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 359; Phys. Rev. Ser. B. 1982. V. 25. P. 6860.
- ¹²¹ Gabay M., Toulouse G.//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 201.
- ¹²² Toulouse G., Gabay M., Lubensky T. C., Vannimenus J.//J. de Phys. Lett. 1982. T. 43. P. 109.
- ¹²³ Moore M. A., Bray A. J.//J. Phys. Ser. C. 1982. V. 15. P. L301.
- ¹²⁴ Cragg D. M., Sherrington D., Gabay M.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 158.
- ¹²⁵ Гинзбург С. Л.//ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 388.
- ¹²⁶ Gabay M., Garel T., De Dominicis C.//J. Phys. Ser. C. 1982. V. 15. P. 7165.
- ¹²⁷ Cragg D. M., Sherrington D.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1190.
- ¹²⁸ Roberts S. A., Bray A. J.//J. Phys. Ser. C. 1982. V. 15. P. L527.
- ¹²⁹ Elderfield D., Sherrington D.//Ibidem. 1983. V. 16. P. 4865.
- ¹³⁰ Babereschke K., Pureur P., Fert A., Wendler R., Senousi S.//Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 29. P. 4999.
- ¹³¹ Murayama S., Yokosawa K., Miyako Y., Wasseeman E. F.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1785.
- ¹³² Ильин Н. П., Коренблит И. Я.//ЖЭТФ. 1981. Т. 46. С. 1173.
- ¹³³ Fert A., Levy P. M.//Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 1538.
- ¹³⁴ Levy P. M., Fert A.//Phys. Rev. Ser. B. 1981. V. 23. P. 4667.
- ¹³⁵ Спивак Б. З., Зюзин А.//Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 185.
- ¹³⁶ Prejean J. J., Joliclerc M. J., Monod P.//J. de Phys. 1980. T. 41. P. 427.
- ¹³⁷ Fert A., Hippert F.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1508.
- ¹³⁸ Morgan-Pond C. G.//J. Phys. Ser. B. 1985. V. 32. P. 305.
- ¹³⁹ Sherrington D.//Phys. Rev. Ser. C. 1984. V. 17. P. L823.
- ¹⁴⁰ Костышин А. М., Такзей Г. А.//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1938.
- ¹⁴¹ Дерябин А. В., Казанцев В. К., Захаров И. В.//ФТТ. 1987. Т. 29. С. 635.
- ¹⁴² Мягков А. В., Минаков А. А., Веселаго В. Г.//ЖЭТФ. 1987. Т. 92. С. 1754.
- ¹⁴³ Ketelsen L. J. P., Salamon M. B.//Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 30. P. 2718; 1986. V. 33. P. 3610.
- ¹⁴⁴ Bray A. J., Moore M. A.//J. Phys. Ser. C. 1980. V. 13. P. L655.
- ¹⁴⁵ Sommers H. J., Usadel H. D.//Zs. Phys. Kl. B. 1982. Bd 47. S. 63.
- ¹⁴⁶ Федоров Я. В., Шендер Е. Ф.//Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 526.
- ¹⁴⁷ Usadel H. D.//Sol. State Commun. 1986. V. 58. P. 629.
- ¹⁴⁸ Коренблит И. Я., Шендер Е. Ф.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 1785.
- ¹⁴⁹ Коренблит И. Я., Федоров Я. В., Шендер Е. Ф.//ЖЭТФ. 1987. Т. 92. С. 710.
- ¹⁵⁰ Коренблит И. Я., Федоров Я. В., Шендер Е. Ф. Препринт ЛИЯФ-1278.— Ленинград, 1987.
- ¹⁵¹ Fedorov Ya. V., Korenblit I. Ya., Shender E. F.//Europhys. Lett. 1987. V. 4. P. 827.
- ¹⁵² Коренблит И. Я., Шендер Е. Ф.//ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1060.
- ¹⁵³ Коренблит И. Я., Шендер Е. Ф.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 370.
- ¹⁵⁴ Такзей Г. А., Костышин А. М., Сыч И. И.//Ibidem. 1986. Т. 43. С. 425.
- ¹⁵⁵ Mezard M., Parisi G., Sourlas N., Toulouse G., Virasoro M. A.//J. de Phys. 1984. T. 45. P. 843.
- ¹⁵⁶ Mezard M., Virasoro A.//Ibidem. 1985. T. 46. P. 1293.
- ¹⁵⁷ Bray A. J., Moore M. A., Young A. P.//J. Phys. C. 1984. V. 17. P. L155.
- ¹⁵⁸ Mezard M., Parisi G., Virasoro M. A.//J. de Phys. Lett. 1985. T. 46. P. L217.
- ¹⁵⁹ Mezard M., Parisi G., Virasoro M.//Europhys. Lett. 1986. V. 1. P. 77.
- ¹⁶⁰ Young A., Bray A. J., Moore M. A.//J. Phys. Ser. C. 1984. V. 17. P. L149.
- ¹⁶¹ Parga N., Parisi G., Virasoro M. A.//J. de Phys. Lett. 1984. T. 45. P. L1.
- ¹⁶² Bhatt R. N., Young A. P.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 191.
- ¹⁶³ Derriada B., Toulouse G.//J. de Phys. Lett. 1985. T. 46. P. L223.
- ¹⁶⁴ De Dominicis C., Orland H., Lainee F.//Ibidem. P. L469.
- ¹⁶⁵ Ogielski A. T., Stein D. L.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1634.
- ¹⁶⁶ Paladin G., Mezard M., De Dominicis C.//J. de Phys. 1985. T. 46. P. L985.
- ¹⁶⁷ Grossman S., Wegner F., Hoffmann K. H.//Ibidem. P. L575.
- ¹⁶⁸ Huberman B. A., Kerzberg M.//J. Phys. Ser. A. 1985. V. 18. P. L331.
- ¹⁶⁹ De Dominicis C.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 17.
- ¹⁷⁰ Гольцев А. В.//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1725.

- 171 Kutasow D., Aharony A., Domany E., Kinzel W.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 2229.
- 172 Гинзбург С. Л.//Использование ядерных реакторов и ускорителей в физике конденсированного состояния.— Л., 1986.— С. 3.
- 173 Sompolinsky H., Zippelius A.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1297.
- 174 De Dominicis C., Kondor I.//J. de Phys. Lett. 1984. T. 45. P. L205.
- 175 De Dominicis C., Kondor I.//Ibidem. 1985. T. 46. P. L1037.
- 176 Goltsev A. V.//J. Phys. Ser. C. 1984. V. 17. P. L241.
- 177 Goltsev A. V.//Ibidem. 1986. V. 19. P. L219.
- 178 Kondor I., De Dominicis C.//Europhys. Lett. 1986. V. 2. P. 617.
- 179 Bray A. J., Moore M. A.//J. Phys. Ser. C. 1979. V. 12. P. 79.
- 180 Fisher D. S., Sompolinsky H.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1063.
- 181 Иоффе Л. Б., Феигельман М. В.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 654.
- 182 Bowman D., Levin K.//Phys. Rev. Ser. B. 1982. V. 25. P. 3438.
- 183 Thouless D. J.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1082.
- 184 Федоров Я. В.//Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 46. С. 270.
- 185 Коренблит И. Я., Шендер Е. Ф.//УФН. 1978. Т. 126. С. 233.
- 186 Viana L., Bray A. J.//J. Phys. Ser. C. 1985. V. 18. P. 3037.
- 187 Kanter I., Sompolinsky H.//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 164.
- 188 De Dominicis C., Mottishaw P.//Europhys. Lett. 1987. V. 3. P. 87.
- 189 Mottishaw P., De Dominicis C.//J. Phys. Ser. A. 1987. V. 20. P. L375.
- 190 Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1982.
- 191 Ogielski A. T.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 32. P. 7384.
- 192 Morgenstern I., Binder K.//Ibidem. 1980. V. 22. P. 288.
- 193 Reed P., Bray A. J., Moore M. A.//J. Phys. Ser. F. 1978. V. 11. P. L139.
- 194 Young A. P.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 917.
- 195 Fish R., Harris A. B.//Ibidem. 1977. V. 38. P. 785.
- 196 Bray A. J., Moore M. A.//J. Phys. Ser. C. 1984. V. 17. P. L463, L613.
- 197 Bray A. J., Moore M. A.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 631.
- 198 McMillan W. L.//Ibidem. 1984. V. 30. P. 476.
- 199 McMillan W. L.//Ibidem. 1985. V. 31. P. 340.
- 200 Singh R. R. P., Chakravarty S.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 245.
- 201 Bhatt R. N., Young A. P.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 924.
- 202 Young A. P., Bhatt R. N.//JMMM. 1986. V. 54—57. P. 6.
- 203 Sourlas N.//J. de Phys. 1984. T. 45. P. L969.
- 204 Sourlas N.//Europhys. Lett. 1986. V. 1. P. 189.
- 205 Fisher D. S., Huse D. A.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1601.
- 206 Bray A. J., Moore M. A.//Ibidem. 1987. V. 58. P. 57.
- 207 Villain J.//Europhys. Lett. 1986. V. 2. P. 871.
- 208 Banavar J. R., Cieplak M.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 832.
- 209 McMillan W. L.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 342.
- 210 Morris B. W., Colborne S. G., Moore M. A., Bray A. J., Conisius J.//J. Phys. Ser. C. 1986. V. 19. P. 1157.
- 211 Chakrabarti A., Dasgupta C.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1404.
- 212 Olive J. A., Young A. P., Sherrington D.//Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 34. P. 6341.
- 213 McMillan W. L.//Ibidem. 1983. V. 28. P. 5216.
- 214 Young A. P.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 917.
- 215 Reger J. D., Zippelius A.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 5900.
- 216 Murani A. P.//JMMM. 1981. V. 25. P. 68.
- 217 Souletie J., Tholence J. L.//Phys. Rev. B. 1985. V. 32. P. 516.
- 218 Binder K., Young A. P.//Ibidem. P. 516.
- 219 Bontemps N., Rajchenbach J., Chamberlin R. V., Orbach R.//Ibidem. 1984. V. 30. P. 6514; JMMM. 1986. V. 54—57. P. 1.
- 220 Svendlich P., Lundgren L., Nordblad P., Chen H. S.//Europhys. Lett. 1987. V. 3. P. 243.
- 221 Saint-Paul M., Tholence J. L., Giriat W.//Sol. State Commun. 1986. V. 60. P. 621.
- 222 Meyer C., Hartman-Boutron F., Gross Y.//J. de Phys. 1986. T. 47. P. 1395.
- 223 Beauvillain P., Renard J. P., Malecki M., Prejean J. J.//Europhys. Lett. 1986. V. 2. P. 23.
- 224 Bray A. J., Moore M. A., Young A. P.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 2641.
- 225 Dzyaloshinskii I. E., Volovik G. E.//J. de Phys. 1978. T. 39. P. 693.
- 226 Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Jr., Vecchi M. P.//Science. 1983. V. 220. P. 671.

- 227 Fu Y., Anderson P. W.//J. Phys. Ser. A. 1986. V. 19. P. 1605.
- 228 Mezard M., Parisi G.//J. de Phys. 1986. V. 47. P. 1285.
- 229 Bouchaud J. P., Le Doussal P.//Europhys. Lett. 1986. V. 1. P. 91.
- 230 Kirkpartick S., Toulouse G.//J. de Phys. 1985. T. 46. P. 1277.
- 231 Hopfield J. J.//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1982. V. 79. P. 2554.
- 232 Hopfield J. J., Feinstein D. I., Palmer R. G.//Nature. 1983. V. 304. P. 18.
- 233 Amit D. J., Gutfreund H., Sompolinsky H.//Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 32. P. 1007.
- 234 van Hemmen J. L., Kühn R.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 913.
- 235 Dotsenko Vik. S.//J. Phys. Ser. C. 1985. V. 18. P. L1017.
- 236 Иоффе Л. Б., Фейгельман М. В.//УФН, 1986. Т. 160. С. 323.
- 237 Nadal J. P., Toulouse G., Changeux J. P., Dehaene S.//Europhys. Lett. 1986. V. 1. P. 535.
- 238 Domanov E., Meir R., Kinzel W.//Ibidem. V. 2. P. 175.
- 239 Crisanti A., Amit D. J., Gutfreund H.//Ibidem. P. 337.
- 240 Mendels P., Alloul H., Ribault M.//Ibidem. 1987. V. 3. P. 113.
- 241 Doussineau P., Levelut A., Matecki M., Renard J. P., Schön W.//Ibidem. P. 251.
- 242 Nordblad P., Lundgreen L., Sandlund L.//Ibidem. P. 243.
- 243 Yoshizawa H., Mitsuda S., Aruga H., Ito A.//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 2364.
- 244 Aerpli G., Maletta H., Shapiro S. M., Abernathy D.//Phys. Rev. Ser. B. 1987. V. 36. P. 3956.
- 245 Барсов С. Г., Геталов А. Л., Гинзбург С. Л. и др. Препринт ЛИЯФ-1332.— Ленинград, 1987.
- 246 Рунов В. В., Гинзбург С. Л., Топерверг Б. П., Третьяков А. Д., Окороков А. И., Мальцев Е. И.//ЖЭТФ, 1988. Т. 94. С. 325.
- 247 Salamon M. B.//J. Appl. Phys. 1987. V. 61. P. 4228.
- 248 Pinkvos H., Schwink Ch.//Phys. Stat. Sol. Ser. b. 1987. V. 144. P. 351.
- 249 Koch R. H., Rein W., Malozemoff A. P., Ketchen M. B.//J. Appl. Phys. 1987. V. 61. P. 3678.
- 250 Alba M., Hamman J., Ocio M., Reffregier Ph.//Ibidem. P. 3683.
- 251 Bontemps N., Hoogerbeets R., Loo Wei-li, Orbach R.//Ibidem. P. 4089.
- 252 Datta T., Barrientos A., Amirzadeh J., Jones E. R.//Sol. State Commun. 1987. V. 62. P. 571.
- 253 Mazumdar P., Bhagat S. M.//J. Appl. Phys. 1987. V. 61. P. 3633.
- 254 Fisher D. S., Huse D. A.//J. Phys. Ser. A. 1987. V. 20. P. L997; L1005.
- 255 Mottishaw P.//Europhys. Lett. 1987. V. 4. P. 333.
- 256 Sherrington D., Wong K. Y. M.//J. Phys. Ser. A. 1987. V. 20. P. L785.
- 257 Wong K. Y. M., Sherrington D.//Ibidem. P. L793.
- 258 Wong K. Y. M., Sherrington D., Mottishaw P., Dewar R., De Dominicis C. Preprint of Imperial College SW7. 2B7. —London, 1987.
- 259 Mezard M., Parisi G.//J. de Phys. 1987. T. 48. P. 1451.
- 260 Morgenstern I., Würtz D.//Zs. Phys. Kl. B. 1987. Bd. 67. S. 397.
- 261 De Dominicis C., Mottishaw P.//J. Phys. Ser. A. 1987. V. 20. P. L841.