

530 182

**АВТОСОЛИТОНЫ***В. С. Кернер, В. В. Осипов*

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	201
1 Автосолитоны (АС) в некоторых системах	203
1 1 Термодиффузионные АС в системах с «положительной» термодиффузией	
1 2 Термодиффузионные АС в системах с «отрицательной» термодиффузией	
1 3 Статические, пульсирующие и бегущие АС в системах с однородно генерируемым «веществом горения»	
1 4 Автосолитоны в системах с локальным самопроизводством вещества	
2 Активные системы с диффузией	112
2 1 Определение и примеры систем	
2 2 Классификация моностабильных систем и свойства реализующихся в них АС	
3 Статические автосолитоны (КИ- и КN-системы)	214
3 1 Структуры в системах малого размера	
3 2 Метод построения автосолитона	
3 3 Асимптотическая теория	
3 4 Радиально-симметричные автосолитоны	
3 5 «Локальный пробы» и деление АС	
4 Устойчивость и эволюция статических АС (KN- и КИ-системы)	170
4 1 Устойчивость и эволюция структур в системах малого размера	
4 2 Устойчивость АС в одномерных системах	
4 3 Эволюция автосолитонов	
4 4 Автосолитоны в дву- и трехмерных системах	
5 Пычковые статические автосолитоны (KA, KV-системы)	240
5 1 Структуры в системах малого размера	
5 2 Узкие пычковые автосолитоны	
5 3 Широкие пычковые автосолитоны	
5 4 Сильно неравновесные области в слабонеравновесных системах	
6 Пульсирующие автосолитоны (KQ-системы)	247
6 1 Пульсирующие структуры в системах малого размера	
6 2 Условия возникновения и вид пульсирующих АС	
7 Бегущие автосолитоны (KQ- и Q-системы)	251
7 1 Форма и скорость бегущих АС	
7 2 О более сложных автосолитонах	
8 Особенности автосолитонов в бистабильных (триггерных) системах	255
8 1 Системы с диффузией	
8 2 Системы с дальнодействующими связями	
Заключение	260
Список литературы	261

**Введение** Одно из ярких явлений нелинейной физики состоит в образовании солитонов и автосолитонов — локализованных стационарных состояний в различных физических, химических и биологических системах. Солитонами называют уединенные волны, формирующиеся в нелинейных средах с дисперсией, которые по своим свойствам во многом напоминают частицы. Солитонам посвящена обширная литература (см., например, <sup>1-7</sup>). Автосолитоны (АС) — уединенные стационарные состояния иного типа, которые по своим свойствам могут принципиально отличаться от частиц. В общем смысле АС отличаются от солитонов так же, как автоколебания от колебаний <sup>8-11</sup>, а автоволны от волн <sup>12-18</sup>.

АС — стационарное уединенное собственное состояние (автосоостояние) системы. Параметры АС (форма, амплитуда, скорость, частота пульсации и др.) полностью определяются параметрами системы и не зависят от вида возмущения, вызывающего образование данного типа АС.

АС реализуются в устойчивых системах, малые возмущения в которых затухают. АС представляет собой устойчивое локализованное состояние, которое на периферии переходит в одно и то же устойчивое однородное состояние системы \*). Для возбуждения АС на систему надо подать локализованное возмущение достаточно большой амплитуды и длительности. После прекращения действия этого дополнительного возмущения в системе может самопроизвольно сформироваться один из возможных типов АС. В этом смысле образование АС можно рассматривать как одно из явлений самоорганизации \*\*).

Подчеркнем, что АС могут возникать в моностабильных неравновесных системах, которые при любом уровне неравновесности имеют *единственное однородное состояние*. Нетривиальность образования таких АС связана с тем, что диффузия не только не приводит к их рассасыванию, а, напротив, именно *благодаря диффузионным процессам и существует АС* (п. 1)

С формальной точки зрения образом как автоколебаний, так и АС являются аттракторы, характеризующиеся определенной областью притяжения. Периодическим автоколебаниям отвечает простейший аттрактор — устойчивый предельный цикл в фазовом пространстве динамических переменных <sup>8,11</sup>. АС отвечает аттрактор в конфигурационном пространстве, т. е. пространстве, каждая точка которого соответствует определенному распределению параметров системы по координатам. Система может характеризоваться несколькими аттракторами в таком конфигурационном пространстве, т. е. в ней могут образовываться АС различного вида и формы. Для того чтобы возбудить АС, возбуждающее его локальное кратковременное возмущение должно переводить систему в состояние, отвечающее области притяжения (по начальным условиям) аттрактора, соответствующего данному типу АС. В этом случае после выключения возмущения в системе будет происходить самопроизвольное формирование АС.

В зависимости от вида возмущения и параметров систем в них можно возбудить: *статические АС*, скорость которых равна нулю, а форма не меняется во времени <sup>25-30</sup> (п. 3—5); *пульсирующие АС*, скорость которых равна нулю, а форма периодически меняется со временем <sup>29-34</sup> (п. 6); *бегущие АС* \*\*\*) , движущиеся с определенной конечной скоростью без затухания <sup>1,12-16,27-30,35</sup>, а также АС в виде других, более сложных уединенных автосостояний (п. 2) и автоволн (см. п. 7 и 8).

Еще раз подчеркнем, что скорость и форма бегущего АС, в отличие от солитона, однозначно определяется параметрами системы, а не энергией начального возмущения <sup>1,12-16</sup>. При столкновении двух бегущих АС в зависимости от параметров системы они могут аннигилировать <sup>12-16</sup> либо превращаться в АС другого типа (например, в статические или пульсирующие) <sup>32,35-37</sup>.

Природа АС чрезвычайно разнообразна (п. 1, 2 и заключение). Так, в нервном волокне <sup>1,12,38,39</sup> или его электронном аналоге (нейристор) <sup>1,40-42</sup> можно возбудить АС в виде бегущего без затухания электрического импульса. В высокочастотном газовом разряде кроме периодических страт <sup>43</sup> можно возбудить АС в виде статической уединенной страты <sup>44</sup>. В полупроводниках и полупроводниковых структурах АС наблюдаются в виде светящихся областей, где высока температура горячих носителей <sup>45,46</sup> или их концентрация <sup>47</sup>. В средах, где протекают автокаталитические реакции типа Белоусова — Жаботинского, образуются и ярко проявляются различные бегущие АС и

\*) В этом смысле неоднородные состояния в виде доменных стенок, возникающие в бистабильных неравновесных системах <sup>19-22</sup>, не являются АС.

\*\*) Под самоорганизацией обычно понимают спонтанное образование и последующую эволюцию структур в неравновесных системах <sup>23,24</sup> — «к упорядоченности через флуктуации» <sup>23</sup> (см п. 2.1).

\*\*\*) Хорошо известная <sup>1,12-16</sup> автоволна в виде бегущего импульса представляет собой простейший одномерный бегущий АС. После его прохождения система возвращается в исходное устойчивое однородное состояние.

другие, более сложного вида автоволны <sup>1,12,13,15,48,49</sup>. В газовой и полупроводниковой плазме <sup>50-51</sup>, а также в нейтральных газах <sup>52</sup>, слабо отклоненных от состояния термодинамического равновесия, могут образовываться АС в виде сильно неравновесных областей \*) (п. 5).

Свойства бегущих АС (импульсов) и некоторых других автоволн еще в 1946 г. на основе аксиоматической дискретной модели качественно проанализировали Винер и Розенблют <sup>54</sup>. В 1952 г. Ходжкин и Хаксли предложили и исследовали модель распространения импульсов в первом волокне <sup>55</sup>. Наиболее детально форма и скорость бегущих АС (импульсов) были проанализированы в простейших двухпараметрических моделях нервного волокна — моделях типа Фитц-Хью — Нагумо (ФХН) <sup>56-60,112-116</sup> \*\*). Теория статических и пульсирующих АС развита в <sup>25-28,31</sup>.

В дальнейшем стало ясно, что большинство изученных статических пульсирующих и бегущих АС реализуются в едином (с точки зрения математического описания) классе активных систем с диффузией, свойства которых определяются системой двух нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа \*\*\* (п. 1 и 2). Эти уравнения в одном из предельных случаев (п. 2.2) соответствуют моделям типа ФХН и допускают решения лишь в виде бегущих АС и других автоволн (п. 7), а в другом — в виде простейших статических автоструктур (п. 3.4). Бегущие АС (импульсы) и другие автоволны весьма полно изучены в моделях типа ФХН. Им посвящена обширная литература <sup>12-16,18,39,49,63-66,68,69</sup>. Поэтому в данном обзоре основное внимание уделено статическим и пульсирующим АС; бегущие АС затрагиваются лишь в той мере, которая необходима для изложения общей картины свойств АС.

В обзоре обсуждаются свойства и излагаются основные результаты теории АС, возникающих в широком классе активных распределенных систем \*\*\*\*). Вначале на конкретных примерах рассматривается физика АС в основных типах моностабильных активных систем с диффузией (п. 1), затем дается классификация таких систем и обсуждаются основные свойства реализующихся АС (п. 2). Далее излагаются теория и свойства статических (п. 3—5), пульсирующих (п. 6) и бегущих АС (п. 7) в активных системах с диффузией. В последней гл. 8 рассматриваются особенности АС в триггерных системах и активных средах с дальнедействующими связями.

## 1. Автосолитоны в некоторых системах.

### 1.1. Термодиффузионные АС в системах с «положительной» термодиффузией.

Термодиффузионные АС образуются в результате конкуренции диффузионных и термодиффузионных пото-

\*) Однородное состояние системы, отклоненной от термодинамического равновесия не далее пределов справедливости соотношения Онзагера, устойчиво <sup>53</sup>. Поэтому утверждение о существовании АС означает, что однородное состояние не является единственным устойчивым состоянием даже таких слабонеравновесных систем.

\*\*\*) В моделях типа ФХН были изучены и другие, более сложные автоволны <sup>12,15,16,18,39,49,61-69</sup>, в том числе спиральные (ревербераторы) и ведущий центр (п. 7), а также различные автоволновые вихри <sup>64-66</sup>.

\*\*\*\*) В однопараметрических однородных системах, свойства которых описываются одним диффузионным уравнением, АС не образуются. В таких бистабильных системах реализуется единственный стационарный процесс в виде автоволны переброса из одного устойчивого однородного состояния в другое <sup>70,12,15</sup>. Такая автоволна подробно изучена применительно к задачам теории горения <sup>71-73</sup>. В однопараметрических системах с одним устойчивым однородным состоянием могут возникать нестационарные локализованные области с неограниченно нарастающим во времени значением параметра системы <sup>73-75</sup>, применительно к задачам горения и взрыва <sup>72,73</sup> — температуры. Теория такого нестационарного процесса (режима с обострением) изложена в <sup>75</sup>.

\*\*\*\*\*) АС могут образовываться и в других системах, например в гидродинамических при наличии в них течения, т. е. конвективных потоков, вызванных внешними воздействиями <sup>76-82</sup> (см. заключение).

ков<sup>25,26,51</sup>. В данном разделе рассматриваются АС в системах с «положительной» термодиффузией, т. е. в системах, в которых термодиффузионный поток частиц направлен из горячей области в холодную.

Для определенности рассмотрим формирование АС в электронно-дырочной плазме (ЭДП), разогретой в процессе фотогенерации носителей<sup>25,26</sup>. Пусть энергия возбуждающих фотонов  $\hbar\omega$  превышает ширину запрещенной зоны полупроводника  $E_g$  на величину  $2\Delta = \hbar\omega - E_g$ . Тогда при поглощении фотона образуются горячие носители, которые за счет межэлектронных соударений разогревают ЭДП. Когда эффективные массы электронов и дырок различаются не очень сильно, а их концентрация ( $n = p$ ) достаточно высока, носители разогреваются как единая система до некоторой эффективной температуры  $T$ . Значение  $T$  определяется из уравнения локального баланса энергии носителей

$$2G\Delta = 2n(T - T_l)\tau_e^{-1}, \quad (1.1)$$

где  $G$  — скорость генерации носителей,  $\tau_e$  — характерное время релаксации их энергии,  $T_l$  — температура решетки полупроводника. Если время жизни

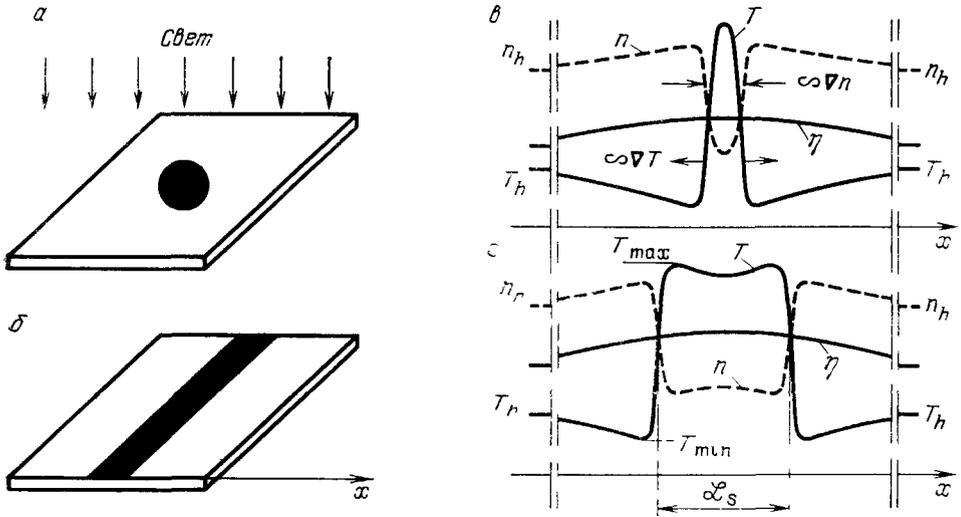


Рис 1 Автосолитоны (АС) в системах с «положительной» термодиффузией: схематическое изображение радиально-симметричного (а) и одномерного АС (б) в полупроводниковой пленке, распределение концентрации  $n(x)$  и температуры  $T(x)$  горячей электронно-дырочной плазмы (ЭДП) в узком пиковом (в) и широком АС (з)

носителей  $\tau_r \approx \text{const}$ , то заданным значениям  $G$  и  $\Delta$  отвечает единственное однородное состояние ЭДП:  $n = n_h = G\tau_r$  и  $T = T_h = T_l + \Delta \cdot \tau_e / \tau_l$ . Несмотря на это, в такой устойчивой ЭДП можно возбудить горячий АС в виде самоподдерживающейся области высокой температуры и низкой концентрации носителей (рис. 1)<sup>25,26</sup>.

Для возбуждения АС необходимо дополнительно кратковременно разогреть ЭДП в некоторой области светом, поглощающимся на свободных носителях. После прекращения этого импульса света в месте освещения формируется АС (рис. 2), форма которого определяется лишь параметрами ЭДП и не зависит от параметров возбуждающегося АС импульса.

Существование горячего АС определяется тем, что благодаря термодиффузии происходит интенсивный выброс горячих носителей из области высокой температуры (см. рис. 1, в). В результате в ней уменьшается концентрация носителей, а следовательно и плотность мощности, отводимой от системы горячих носителей в решетку  $P = 2n(T - T_l)/\tau_e$ . Это согласно (1.1) поддерживает высокое значение температуры носителей в центре АС, так как

поступающая к носителям мощность  $W = 2\Delta \cdot G = \text{const}$ , т. е. не зависит от  $n$  и  $T$ . Область низкой концентрации носителей в центре АС не расплывается вследствие того, что диффузионный поток носителей в центр АС практически уравнивается термодиффузионным, направленным в противоположную сторону (рис. 1, в).

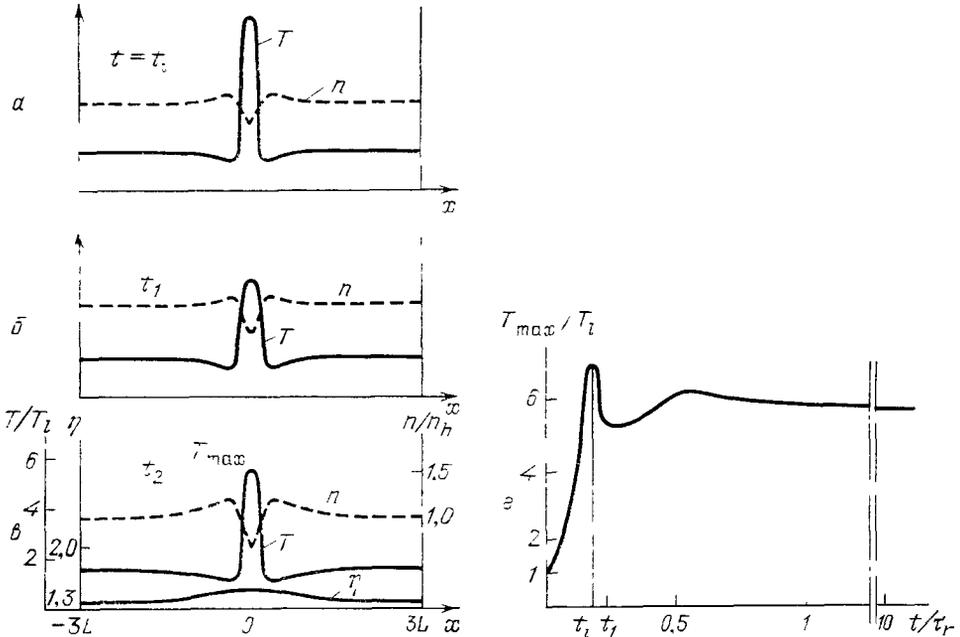


Рис. 2. Кинетика формирования горячего АС в устойчивой разогретой ЭДП<sup>88</sup> при кратковременном локальном воздействии импульса излучения (разогревающего носители) длительностью  $t_1 = \tau_r/6$ . а, б — Распределение температуры  $T$  и концентрации носителей  $n$  в промежуточные моменты времени  $t = t_1$ (а) и  $t_1 = 2\tau_r/9$  (б). в — Установившаяся форма АС ( $t_2 = 10\tau_r$ ). г — Зависимость от времени максимальной температуры в образующемся АС

Распределения концентрации и температуры носителей в квазинейтральной ЭДП ( $n = p$ ) описываются уравнениями баланса числа частиц и их средней энергии  $\bar{\epsilon}$ <sup>83-85</sup>:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}_e + G - R, \tag{1.2}$$

$$2 \frac{\partial n \bar{\epsilon}}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}_e + W - P, \tag{1.3}$$

где  $\mathbf{j}_e$  и  $\mathbf{j}_e$  — плотности потоков электронов и энергии носителей;  $R = n/\tau_r$  — скорость их рекомбинации. В невырожденной ЭДП<sup>20, 83-85</sup>  $\bar{\epsilon} = (3/2) T$ , а

$$\mathbf{j}_e = -\nabla(nD(T)) = -D\nabla n - (1 + \alpha) DT^{-1}n\nabla T, \tag{1.4}$$

где  $D$  — коэффициент биполярной диффузии;  $1 + \alpha = \partial \ln D / \partial \ln T$ . Из (1.2) и (1.4) следует, что

$$\tau_r \frac{\partial n}{\partial t} = L^2 \Delta n + 1 - n, \tag{1.5}$$

где концентрация носителей измеряется в единицах  $n_h = G\tau_r$ ,  $\eta = nD(T) \times (D^0 n_h)^{-1}$ ;  $D^0 = D(T_l)$ ,  $L = (D^0 \tau_r)^{1/2}$  — длина биполярной диффузии.

Из уравнения (1.5) видно, что в горячей ЭДП величина  $L$  характеризует пространственный масштаб изменения не концентрации носителей  $n$ , а

величины  $\eta \propto nD(T)$ , т. е. потока  $j_e$  (1.4). Поэтому чем больше величина  $L$ , тем меньше величина  $j_e$  в АС, т. е. тем точнее диффузионный поток компенсируется термодиффузионным (рис. 1, в). Отсюда вытекает, что размер горячей области АС  $\mathcal{L}_s$  ограничен сверху величиной  $\sim L$ . С другой стороны, для того чтобы горячая область АС не расплылась из-за теплопроводности носителей, величина  $\mathcal{L}_s$  должна быть больше характерной длины изменения температуры носителей —  $l \approx (D\tau_e)^{1/2}$ . Отсюда следует необходимое условие существования АС:  $L \gg l$ . В АС размера  $l \ll \mathcal{L}_s \ll L$  можно считать, что величина  $\eta = nD(T)/D^0 n_h = \text{const}$  и выполнено уравнение (1.1). Подставляя в (1.1)  $n = n_h \eta D^0/D(T)$ , получим уравнение локального баланса энергии в АС

$$W = \frac{2\eta(T-T_i)D^0 n_h}{D(T)\tau_e(T)}, \quad (1.6)$$

учитывающее при  $\eta = \text{const}$  компенсацию диффузионного и термодиффузионного потоков носителей, т. е. малость величины  $j_e$  (1.4) в АС.

Из теории АС следует (см. п. 3.2), что корни уравнения (1.6) при  $W = \text{const}$  и  $\eta = \eta_s$  определяют значения максимальной  $T_{\max}$  и минимальной  $T_{\min}$  температуры в широком АС<sup>26</sup> (рис. 1, г). Уравнение (1.6) имеет несколько корней, когда в некотором диапазоне температур носителей  $\alpha + s > 0$ , где  $s = \partial \ln \tau_e / \partial \ln T$ . Таким образом, неравенства  $L \gg l$  и  $\alpha + s > 0$  являются условиями существования АС в фотогенерируемой слабо-разогретой ЭДП<sup>25,26</sup>.

Эти условия могут выполняться также в сильно асимметричной ( $m_h^* \gg m_e^*$ ) ЭДП<sup>85</sup>, в газовой плазме (F-слое ионосферы)<sup>86</sup> и в идеальном газе разогретых экситонов в полупроводниках<sup>87</sup>, поэтому и в этих системах согласно<sup>25,26</sup> можно возбудить АС.

Рассмотренный термодиффузионный АС (рис. 1 и 2) можно возбудить в симметричной ЭДП, разогретой постоянным<sup>50,88,89</sup> или высокочастотным электрическим полем<sup>51</sup>. При разогреве ЭДП в постоянном поле появляется выделенное направление, поэтому в ней образуется одномерный АС<sup>88,50</sup> в виде горячего слоя (рис. 1, б), перпендикулярного линиям тока  $j = \sigma E$ . Для такого АС ток  $j = \text{const}$ , а разогревающая ЭДП мощность  $W = j^2/\sigma \propto T/\eta$ . Подставляя  $W \propto T/\eta$  в (1.6), получим<sup>50,88</sup>, что условия существования такого поперечного АС сводятся к  $L \gg l$  и  $\alpha + s > -1$ . В зависимости от механизмов рассеяния энергии и импульса носителей, т. е. вида функций  $D(T)$  и  $\tau_s(T)$ , в ЭДП, разогретой постоянным полем, можно возбудить широкие АС размера  $\mathcal{L}_s \gg l$  (см. рис. 1, г) или пиковые АС большой амплитуды<sup>25,89</sup> (п. 5).

В «плотной» ЭДП, разогретой электрическим полем, можно возбудить продольный АС в виде шнура или слоя, направленного вдоль линий тока<sup>90,91</sup>. Это связано с тем, что подвижность носителей  $\mu$  в «плотной» ЭДП определяется электронно-дырочным рассеянием, т. е.  $\mu \propto T^{3/2} n^{-1}$ . В «плотной» ЭДП электронный ток  $j_e \propto \partial P / \partial x$ , т. е.  $\eta \equiv P = nT$  есть давление электронного газа, а условия существования АС сводятся к<sup>90,91</sup>  $L \gg l$  и  $s > -3/2$ .

При этих же условиях продольный термодиффузионный АС (рис. 1, б) можно возбудить в газовой плазме, разогретой постоянным или высокочастотным полем<sup>90,51</sup>. В газовой плазме роль величины  $\eta$ , плавно меняющейся с изменением длины биполярной диффузией  $L$  (рис. 1, в), играет давление электронов и ионов:  $\eta \equiv P = n(T + T_i)$ , где  $T_i$  — температура ионов.

При численных исследованиях кинетики формирования термодиффузионного АС (рис. 2) установлено<sup>89</sup>, что для его возбуждения импульс света, дополнительно разогревающий носители, должен иметь параметры: длительность  $t_u \gg \tau_r$  и размер пятна  $(d_0) l \leq d_0 \leq L$ . Эти условия вытекают<sup>89</sup> из физики термодиффузионного АС<sup>25,50</sup>.

1.2. Термодиффузионные АС в системах с «отрицательной» термодиффузией. В ряде систем за счет того, что сечение рассеяния частиц возрастает с увеличением их скорости, термодиффузионный поток частиц направлен из холодной области в горячую. Такая «отрицательная» термодиффузия может наблюдаться в смеси нейтральных газов<sup>92</sup>, в химических реакциях<sup>93</sup> и в полупроводниках<sup>25,51</sup>. В таких системах могут возникать термодиффузионные АС, представляющие собой области высокой температуры и концентрации частиц<sup>25,52</sup> (рис. 3).

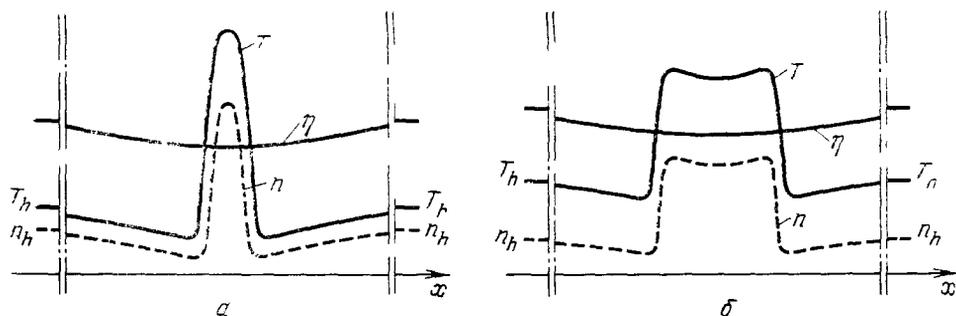


Рис. 3. Автосолитоны в системах с «отрицательной» термодиффузией: распределения концентрации  $n(x)$  и температуры  $T(x)$  термализованной с решеткой ЭДП в узком пиковом (а) и широком (б) АС

Проиллюстрируем физику образования такого АС на примере неравновесной ЭДП, термализованной с решеткой полупроводника<sup>25</sup>.

При достаточно высоких температурах и концентрациях носителей ЭДП, фотогенерируемая в тонкой пленке полупроводника, успевает термализоваться с решеткой. Распределение концентрации носителей и температуры описываются усредненными по толщине пленки уравнениями (1.2) и теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla_{\perp} (\kappa(T) \nabla_{\perp} T) + W - (T - T_t) \kappa(T) l_T^{-2}, \quad (1.7)$$

где  $c$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  — удельные теплоемкость, плотность и теплопроводность решетки,  $l_T$  — характерная длина изменения температуры,  $T_t$  — температура подложки (термостата). Решетка разогревается при рекомбинации носителей<sup>25</sup> и при их разогреве излучением<sup>94</sup>, т. е.  $W = n(E_g/\tau_r + \sigma_{\Phi}\Phi)$ , где  $\sigma_{\Phi}$  и  $\Phi$  — сечение поглощения и плотность фотонов.

Для термализованных с решеткой носителей<sup>51</sup>

$$\mathbf{j}_e = -D\nabla n + (\delta - \alpha - 1) nDT^{-1}\nabla T, \quad (1.8)$$

где  $\delta = \partial \ln \tau_p(\varepsilon, T)/\partial \ln T$ ,  $\tau_p$  — время рассеяния импульса носителя с энергией  $\varepsilon$ . В некоторых полупроводниках  $\delta - \alpha - 1 > 0$ , т. е. для термализованных с решеткой носителей может осуществляться «отрицательная» термодиффузия.

Существование АС связано с тем<sup>25</sup>, что при  $L \gg \mathcal{L}_s \gg l_T$  термодиффузия приводит к потоку носителей из холодных периферийных областей в горячую центральную область АС (рис. 3). Скапливающиеся в АС носители в результате их рекомбинации и поглощения излучения увеличивают поступающую от носителей к решетке мощность  $W$  и тем самым поддерживают в центре АС высокую температуру<sup>51</sup>.

Термодиффузионный АС (рис. 3) можно возбудить и в смеси реагирующих легкого и тяжелого газов, разогреваемой излучением, селективно поглощающимся легкой компонентой газа<sup>52</sup>. Существование АС в такой смеси определяется тем, что в области, где высока концентрация легких частиц газа  $n$  (рис. 3), происходит наибольшее поглощение электромагнитного излучения, т. е. осуществляется наибольший разогрев. Диффузионному расплы-

ванию легкого газа препятствует термодиффузионный поток частиц легкого газа, направленный от периферии к центру горячей области. В рассматриваемом случае образуются узкие пичковые АС высокой температуры<sup>52</sup> (рис. 3, а). При этом чем меньше величина отношения  $l_T/L$ , тем выше температура и концентрация легкого газа в центре АС и тем при меньшем  $W$ , т. е. уровне неравновесности смеси, в ней можно возбудить АС<sup>52</sup> (п. 5.4).

1.3. Статические, пульсирующие и бегущие АС в системах с однородно генерируемым «веществом горения». Горение вещества с концентрацией  $n$  описывается уравнениями<sup>72,73</sup>

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (k\nabla T) + E\Phi(n, T) - P, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n + G - \Phi(n, T), \quad (1.10)$$

в которых  $G$  и  $P = 0$ ;  $\Phi$  и  $E$  — скорость и теплота реакции. Скорость многих реакций  $\Phi \propto n \exp(-\Delta/T)$ , т. е. имеет термоактивационный характер<sup>72,73</sup>. Уравнения (1.9), (1.10) при  $G = 0$  описывают распространение фронта горения, т. е. волны переключения из одного устойчивого стационарного состояния в другое<sup>12,15,72,73</sup>.

Более сложные явления могут наблюдаться в системах, в которых происходит однородная генерация вещества горения, т. е.  $G \neq 0$ . В таких системах могут возникать АС в виде статических, пульсирующих и бегущих областей горения, вне которых концентрация вещества горения и температура всюду постоянны и ниже порога самовоспламенения. Наглядным примером бегущего АС является горение травы в степи с последующей ее регенерацией за счет роста.

Статический АС может представлять собой стационарно горящий шар. Такой шар может возникать в смеси газов (не исключено, что и в атмосфере), в которой под действием электромагнитного излучения (или другого источника) происходит диссоциация молекул  $H_2O$ ,  $O_2$  или  $CO_2$ . В результате такой диссоциации однородно генерируется вещество горения — водород, озон или окись углерода. Пусть устанавливающаяся концентрация вещества горения и температура смеси много ниже порога ее самовоспламенения. Если теперь некоторую малую область смеси поджечь, т. е. разогреть за счет дополнительного источника (например, в виде раскаленной металлической нити) выше температуры воспламенения, то после выключения этого источника разогрева в смеси может возникнуть стационарно горящий шар.

В таком шаре вследствие высокой температуры высока скорость горения  $\Phi \propto \exp(-\Delta/T)$ . Стационарное горение в шаре поддерживается благодаря постоянному диффузионному притоку однородно генерируемого вещества горения из периферийных областей шара в его центр<sup>95</sup>. Такой приток вещества горения тем больше, чем больше его диффузионная длина  $L$  по сравнению с размером шара. Последний определяется характерной длиной изменения температуры ( $l$ ). Отсюда вытекает, что стационарно горящий шар может существовать только при выполнении условия  $L \gg l$ , которое является необходимым условием существования статических АС<sup>25-29</sup>.

Химические реакции, определяющие процессы горения, весьма сложны и, как правило, слабо изучены<sup>72</sup>. Вместе с тем существуют простые физические системы, свойства которых описываются уравнениями типа (1.9), (1.10) с  $G \neq 0$ . К таким системам с однородно генерируемым «веществом горения» относятся неравновесная газовая или полупроводниковая плазма, скорость рекомбинации электронов в которой резко возрастает с ростом температуры, например как  $\exp(-\Delta/T)$ <sup>32,96</sup>.

Для определенности рассмотрим полупроводник, в котором однородно генерируется ЭДП такой высокой плотности, что электроны и дырки в ней

вырождены, а скорость их рекомбинации  $R$  определяется оже-процессами <sup>32</sup>. Возникающие в процессе оже-рекомбинации носители с энергией порядка ширины запрещенной зоны полупроводника  $E_g$  в результате электрон-электронных соударений разогревают ЭДП <sup>97,98</sup>. Поэтому рекомбинацию носителей здесь можно рассматривать как экзотермическую реакцию их горения, при которой выделяется теплота  $E = E_g$ .

В вырожденной ЭДП термоток подавлен по сравнению с диффузионным <sup>83</sup>, т. е.  $j_e = -D\nabla n$ . При этом уравнения (1.2), (1.3) фактически сводятся к (1.9), (1.10), в которых  $\Phi = R(n, T)$ ,  $E = E_g$ ,  $c\sigma = n \partial \epsilon / \partial T$ ;  $G$  — скорость генерации электронов и дырок, а  $P = P(n, T)$  — мощность, отводимая от горячей ЭДП в решетку полупроводника <sup>83,99</sup>.

Если слабо разогретую в процессе оже-рекомбинации ЭДП дополнительно осветить в области размера  $d_0 < L$  импульсом света длительностью порядка  $\tau_r$ , то в ней может возникнуть АС в виде статической (рис. 4, а) или пульсирующей (рис. 4, б) области «горения» — (высокой температуры носителей) <sup>32,100</sup>. Возникновение таких АС связано с тем <sup>32</sup>, что в полупроводниках, как правило, скорость оже-рекомбинации  $R \propto \exp(-\Delta/T)^{101-103}$ , а  $\tau_e \ll \tau_r$ , т. е.  $L \approx (D\tau_r)^{1/2} \gg l \approx (\kappa\tau_e/n)^{1/2}$ .

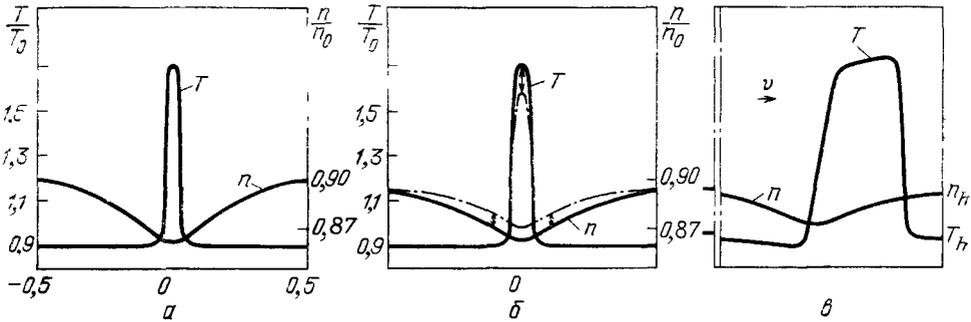


Рис. 4. Статический (а), пульсирующий (б) и бегущий (в) АС в устойчивой вырожденной ЭДП, разогретой в процессе оже-рекомбинации <sup>32</sup>. Результаты численного расчета из <sup>100</sup>

Статический АС существует благодаря тому <sup>32</sup>, что в его центре вследствие роста скорости оже-рекомбинации  $R$  с увеличением  $T$  происходит сильная рекомбинация носителей. Однако их концентрация из-за сильного диффузионного притока носителей из периферийных областей в АС понижается в значительно меньшей степени, чем увеличивается  $R$ , т. е. чем это происходило бы в однородной ЭДП. Поступающие в АС за счет диффузии с периферии носители интенсивно рекомбинируют в нем, рождая в процессе оже-рекомбинации носители с энергией порядка  $E_g$ , которые, в свою очередь, поддерживают в АС высокую температуру.

Устойчивость статического АС (п. 4) связана с тем, что нарастание температуры в АС демпфируется соответствующим уменьшением концентрации носителей. Такое демпфирование реализуется лишь в некотором диапазоне изменения  $G$ , на границах которого статический АС спонтанно превращается в пульсирующий <sup>32</sup> (п. 6). Пульсирующий АС возникает в результате нарастания флуктуаций температуры, изменяющихся с некоторой частотой  $\omega = \omega_c$  ( $\omega_c \tau_r > 1$ , но  $\omega_c \tau_e \ll 1$ ). Нарастание этих флуктуаций связано с тем, что за такими быстрыми изменениями температуры концентрация носителей из-за большого времени их жизни ( $\tau_r \gg \tau_e$ ) следить не успевает, т. е. уменьшается ее демпфирующее воздействие.

В рассматриваемой ЭДП выполнены условия:  $L \gg l$  и  $\tau_r \gg \tau_e$ , при которых кроме статических (рис. 4, а) и пульсирующих АС (рис. 4, б) можно возбудить бегущий в любом из направлений АС <sup>32</sup> (рис. 4, в). При этом в зависимости от параметров ЭДП АС могут иметь различную форму (сплошные кривые на рис. 5;  $\theta = T/T_h$ ,  $\eta = n/n_h$ ).

Возникновение бегущего АС можно пояснить следующим образом. Из уравнения локального баланса энергии носителей  $E_g R(n, T) = P(n, T)$  следует, что значению концентрации носителей в однородной ЭДП  $n = n_h$  могут отвечать два состояния плазмы:  $T = T_h$  и  $T = T_{max}$ . При  $\tau_r \gg \tau_e$  локальный кратковременный разогрев ЭДП излучением, поглощающимся на свободных носителях, может перевести плазму в месте освещения из состояния с  $T = T_h$  в состояние с  $T = T_{max}$ . Вследствие теплопроводности возникающие горячие носители будут разогревать соседние области ЭДП,

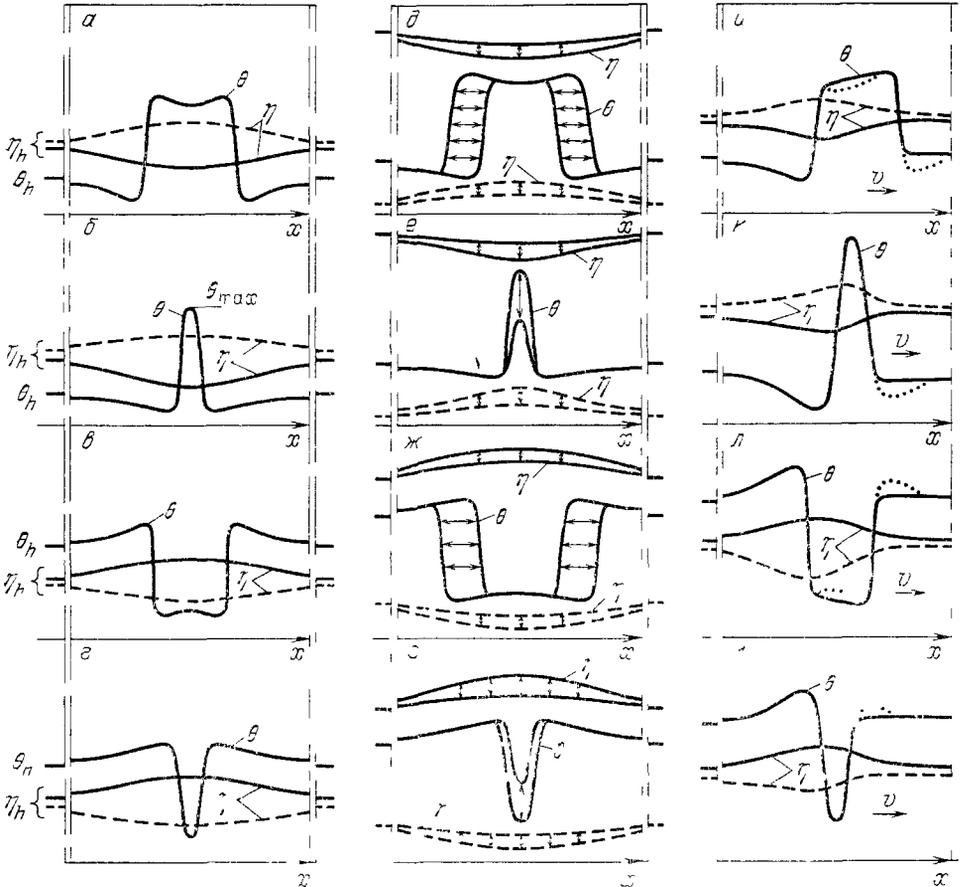
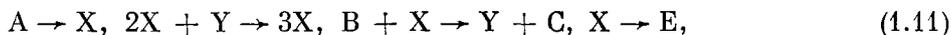


Рис. 5. Основные типы статических (а — с), пульсирующих (d — з) и бегущих (u — м) автосолионов. Штриховыми кривыми показано распределение  $\eta(x)$  в N- и  $\Lambda$ -системах, а сплошными — в I- и V-системах, стрелками на рис. d — з изображен процесс колебания активатора и ингибитора между двумя крайними положениями пульсирующего АС, точками на рис. u — м показано возможное отличие в распределении активатора в  $K\Omega$ -системах по сравнению с  $\Omega$ -системами

переводя их последовательно в состояние  $T = T_{max}$ , т. е. возникает волна переброса из состояния  $T = T_h$  в  $T = T_{max}$ . За время  $\tau = \tau_e T/F$  ( $F$  — энергия Ферми электронов) поток тепла носителей распространится на расстояние  $\sim l$ , поэтому скорость такой волны  $v \sim l/\tau$ . За этой волной переброса (передней стенки бегущего АС, рис. 4, в) температура, а следовательно, и скорость оже-рекомбинации высоки, поэтому концентрация носителей будет уменьшаться со временем  $\sim \tau_r$ , т. е. спадать на дрейфовой длине  $\tilde{L} = v\tau_r$ . Такое выгорание концентрации ограничено значением  $n = n_{min}$  (рис. 4, в), при котором скорость задней стенки равна скорости передней. За задней стенкой происходит восстановление концентрации до значения  $n = n_h$  в области размера  $\sim \tilde{L}$  (рис. 4, в).

Возникновение пульсирующих АС, а также бегущих АС в виде волны горения с последующим восстановлением температуры и концентрации вещества горения характерно для рассматриваемого здесь класса систем типа горения.

1.4. Автосолитоны в системах с локальным самопроизводством вещества. В ряде химических и биологических реакций в результате автокатализа, кросскатализа, ферментативных процессов или репликации происходит самопроизводство одного из химических веществ<sup>15,16,18,23,104-113</sup>. Реальные реакции такого типа весьма сложны<sup>48,104,23,111-113</sup>. Поэтому для наглядности рассмотрим предложенную Пригожиным с сотр.<sup>23</sup> гипотетическую реакцию, схема которой восходит к классической работе Тьюринга<sup>110</sup> и имеет вид



где  $A, B$  — начальные,  $C, E$  — конечные, а  $X$  и  $Y$  — промежуточные продукты реакций. Вторая из этих реакций является автокаталитической. Она описывает самопроизводство вещества  $X$ , которое контролируется химическим веществом  $Y$ . Принято называть  $X$  активатором, а  $Y$  — ингибитором<sup>16,107,109</sup>. Из (1.11) следуют уравнения химической кинетики (модель Брюсселятора)<sup>23,104</sup>

$$\begin{aligned} \tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} &= l^2 \Delta \theta + B + \theta^2 \eta - \theta(1 + A), \\ \tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} &= L^2 \Delta \eta - \theta^2 \eta + A\theta, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\theta$  и  $\eta$  — концентрации активатора  $X$  и ингибитора  $Y$ ;  $\tau_\theta, \tau_\eta$  и  $l, L$  — характерные времена и длины изменения  $\theta$  и  $\eta$ ;  $A$  и  $B$  — постоянные коэффициенты. В такой устойчивой однородно протекающей химической реакции при  $L \gg l$  можно возбудить АС в виде области размера  $\sim l$  высокого значения активатора  $\theta$  и несколько пониженного значения ингибитора  $\eta$  (сплошные кривые на рис. 5, б)<sup>25,37,114</sup>. Это связано с тем, что в малой области размера  $\sim l \ll L$  самопроизводство активатора, которое описывается второй из реакций (1.11), не может быть подавлено соответствующим локальным изменением концентрации ингибитора  $\eta$  за счет его сильного диффузионного притока из периферийных областей в центр АС (рис. 5, б).

Бегущие АС (импульсы), а также другие автоволны экспериментально наиболее детально изучены при исследовании реакций типа Белоусова — Жаботинского<sup>48,62-64,66,68,69,111</sup>. Примерами таких автокаталитических реакций являются окислительно-восстановительные реакции ионов церия, марганца или железа в присутствии ионов брома, бромата калия, сульфата церия и органических восстановителей — таких, как малоновая, броммалоновая, ацетоуксусная, яблочная, лимонная и другие кислоты<sup>48,111</sup>. Эти многостадийные реакции описываются системой многих дифференциальных уравнений химической кинетики.

Однако если в реакции удастся выделить стадии, описывающие процессы активации и ингибирования, то можно, используя общие математические методы<sup>115,116</sup>, свести описание АС и автоволн в них к системе двух или трех диффузионных уравнений<sup>15,16</sup>. Так, для описания автоволн в реакции Белоусова — Жаботинского используют трехкомпонентную модель Филда — Короша — Нойеса («орегонатор»)<sup>12,15,23,106</sup>, а также двухкомпонентные модели<sup>15,111</sup>, в том числе и описываемые уравнениями типа<sup>48,117,118</sup>

$$\begin{aligned} \tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} &= l^2 \Delta \theta + \theta \{1 - \eta [2 + (\theta - 1)^2]\} + B, \\ \tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} &= L^2 \Delta \eta - A\eta - \theta(\eta - 1). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Численные исследования уравнений (1.13) показали, что в рассматриваемой модели при  $L \gg l$  и  $\tau_\eta \gg \tau_\theta$  в соответствии с результатами общей теории<sup>25, 29, 30</sup> кроме бегущих и статических АС<sup>117, 118</sup> можно возбудить пульсирующие АС<sup>33, 34</sup> (п. 6).

С самопроизводством вещества в биохимических реакциях связывают процессы формообразования (морфогенеза) и др.<sup>110, 16, 23, 106-109</sup>.

Так, Гирер и Майнхардт показали<sup>119-122</sup>, что экспериментальные данные по развитию гидры<sup>109</sup> можно объяснить в рамках модели

$$\begin{aligned} \tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} &= l^2 \Delta \theta + \frac{A\theta^2}{\eta} + B - \theta, \\ \tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} &= L^2 \Delta \eta + C\theta^2 - \eta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В (1.14)  $\theta$  — короткодействующий активатор, а  $\eta$  — дальнедействующий ингибитор<sup>109</sup>, т. е.  $L \gg l^*$ . Здесь АС (рис. 5, б; штриховая кривая для  $\eta$ )<sup>114</sup> описывает распределения  $\theta$  и  $\eta$  в «голове» гидры. Рост такой «головы» (возбуждение АС) в морфологически однородном фрагменте гидры можно спровоцировать трансплантацией соответствующих клеток, взятых из тела взрослой гидры<sup>109</sup>. Свойства АС (п. 5) позволяют объяснить<sup>37, 114</sup> некоторые результаты экспериментов с гидрой<sup>109</sup> и численных исследований модели (1.14)<sup>119-122</sup>. В частности, установленная в теории<sup>25</sup> неустойчивость двух близко расположенных АС относительно эффекта «перекачки» (п. 4.3) объясняет<sup>114</sup>, почему в экспериментальных и численных исследованиях<sup>109, 119-122</sup> не удается возбудить в теле гидры две близко расположенные «головы».

Локальное самопроизводство частиц может происходить также в полупроводниках и газах. В самостоятельном газовом разряде, а также при межзонном или примесном пробое полупроводника такой процесс обусловлен возрастанием скорости ионизации электронов  $v_i$  с ростом их концентрации. Рост  $v_i$  с увеличением  $n$  связан с возрастанием роли возбужденных центров и электрон-электронных соударений в процессе ионизации<sup>123, 124</sup>. В таких системах АС представляет собой область высокой концентрации электронов и несколько пониженной их эффективной температуры<sup>44</sup> (рис. 5, б, где  $\theta \equiv n$ ,  $\eta \equiv T$  — сплошная кривая). Иными словами, здесь роль активатора играет концентрация электронов ( $\theta \equiv n$ ), а роль ингибитора — их эффективная температура ( $\eta \equiv T$ )<sup>44, 125</sup>. Поэтому АС существует, когда характерная длина изменения концентрации электронов много меньше длины изменения их температуры. В газовом разряде это условие выполняется благодаря тому, что длина биполярной диффузии электронов и ионов мала за счет большой массы ионов. При примесном пробое полупроводника оно выполняется, когда длина экранирования Дебая  $r_d \ll l_e$  — характерной длины остывания горячих электронов<sup>125</sup>.

## 2. Активные системы с диффузией.

2.1. **О п р е д е л е н и е и п р и м е р ы с и с т е м.** В последние годы, прежде всего благодаря работам Гленсдорфа и Пригожина<sup>104</sup>, Николиса и Пригожина<sup>23</sup>, Хакена<sup>107, 24</sup>, Эбелинга<sup>106</sup>, а также Васильева, Романовского и Яхво<sup>12</sup>, стало особенно ясно, что свойства многих физических, химических

ся, что действие нейронных цепи, например, в коре головного является взаимодействием между короткодействующей активацией и торможением (п. 8.2).

и биологических систем (в том числе и рассмотренных в п. 1) описываются системой нелинейных уравнений диффузионного типа \*)

$$\tau_i \frac{\partial X_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \nabla (L_{ij} \nabla X_j) - g_i(X_1, \dots, X_i, \dots, X_N, A). \quad (2.1)$$

Обратим внимание на фундаментальный характер этих уравнений. Они представляют собой уравнения макроскопической кинетики и описывают, в частности, химические и биохимические реакции<sup>12-16,104-113</sup>. В последнем случае  $X_i$  — концентрации промежуточных продуктов, а  $A$  — постоянные химических реакций (п. 1.4). В физической кинетике уравнения (2.1) в гидродинамическом приближении вытекают из первых моментов кинетического уравнения Больцмана<sup>2</sup> и описывают, например, свойства горячих носителей в полупроводниках<sup>20,83,85</sup> и газовой плазмы<sup>84,86,124,127</sup>. Для физических систем —  $X_i$  — температура, концентрация носителей, потенциал, плотность тока и т. д.,  $A$  — э. д. с. источника питания, мощность электромагнитного излучения и т. п. (п. 1).

Все возрастающий интерес к этому классу распределенных систем с диффузией обусловлен тем, что в них реализуются яркие нелинейные явления. Однородное состояние таких систем при некотором (бифуркационном) значении параметра  $A = A_c$  может стать неустойчивым<sup>12-16,23,24,106-110</sup>, и в них спонтанно возникают автоколебания<sup>11,17,23</sup> или автоструктуры (диссипативные структуры)<sup>12,16,23,24,29,106-109</sup>. При  $A < A_c$ , т. е. в области устойчивости однородного состояния, в системах внешним кратковременным локальным возмущением можно возбудить различного вида статические и пульсирующие АС<sup>29,30</sup> и автоволны<sup>12-16</sup>. Таким образом, в рассматриваемом классе систем реализуются два типа нелинейных явлений: 1) спонтанное образование автоструктур и их последующая эволюция \*\*); 2) вынужденное образование в устойчивых системах различного типа АС и сложных автоволн.

Системы, свойства которых описываются уравнениями (2.1) и в которых реализуются эти нелинейные явления, сейчас принято называть *активными системами с диффузией*. Активными их называют в том смысле, что по крайней мере по одному параметру  $X_1 \equiv \theta$  — *активатору* — осуществляется положительная обратная связь, которая приводит к самопроизводству активатора и является причиной образования автоструктур. Процесс воспроизводства активатора находится под контролем некоторого другого параметра  $X_2 \equiv \eta$  — *ингибитора*, подавляющего процесс нарастания активатора. Поэтому в простейшем, но достаточно общем случае активные системы с диффузией описываются двумя уравнениями типа

$$\tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = I^2 \Delta \theta - q(\theta, \eta, A), \quad (2.2)$$

$$\tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = J^2 \Delta \eta - Q(\theta, \eta, A), \quad (2.3)$$

где  $A$  — бифуркационный параметр.

Уравнения (2.2), (2.3) являются базовыми в теории автоволн и автоструктур (диссипативных структур) в биологических системах<sup>12,14,16,23,104</sup>.

\*) Формально (2.1) — система автономных квазилинейных уравнений параболического типа<sup>120</sup>: в них «источники»  $g_i$  являются сильно нелинейными функциями величин  $X_i$  и  $A$ , но явным образом не зависят от пространственных координат и времени.

\*\*\*) Известно, что в зависимости от параметров системы в ней может реализовываться мягкий или жесткий режим возбуждения автоструктур. В случае мягкого режима образуются автоструктуры малой амплитуды, величина которой равна нулю при  $A = A_c$  и возрастает с ростом надкритичности (значения  $A - A_c$ ). Образование и эволюция автоструктур при мягком режиме их возбуждения подробно проанализированы в монографиях Николиса, Пригожина<sup>23</sup> и Хагена<sup>24,107</sup>. В случае жесткого режима возбуждения происходит скачкообразное возникновение автоструктур большой амплитуды. Свойства и эволюция таких автоструктур проанализированы в<sup>25-29</sup>. В данном обзоре эти вопросы, относящиеся к проблеме самоорганизации, не рассматриваются.

<sup>106-109</sup>. К ним, в частности, сводится модель Гирера — Майнхардта (1.14) и упрощенная модель морфогенеза Жакоба — Моно <sup>12, 16, 128</sup>; модели типа ФХН, описывающие распространение импульсов (бегущих АС) в первом волокне <sup>1, 12 15, 16, 39</sup>, по миокарду сердца <sup>18, 63, 66, 67</sup> и в электронных нейристорных схемах <sup>1, 40-42</sup>. Анализ некоторых экологических систем, а также популяционной генетики сводится к исследованию уравнений типа (2.2), (2.3) <sup>129-131</sup>. Анализ других систем с самопроизводством вещества (п. 1.4), в том числе простейшие модели химических реакций — (1.12) и (1.13), также сводится к анализу уравнений типа (2.2), (2.3). Они, в частности, описывают АС и страты в высокочастотном газовом разряде <sup>44, 123, 124</sup> и при ударной ионизации в полупроводниках <sup>125</sup> (п.1.4).

Уравнения (1.10), (1.11), описывающие процессы типа «горения» (п.1.3), являются частным случаем уравнений (2.2), (2.3). В таких системах роль активатора играет температура ( $\theta \equiv T$ ), а ингибитора — концентрация «вещества горения» ( $\eta \equiv n$ ).

В системах с термодиффузией (п. 1.1 и 1.2) роль активатора также играет температура ( $\theta \equiv T$ ), а ингибитора — некоторая функция концентрации носителей и их температуры (конкретный вид  $\eta$  для некоторых систем приведен в п. 1.1 и 1.2). Легко убедиться, что если в уравнениях (1.2), (1.3) перейти к переменным  $\theta$  и  $\eta$ , то они сведутся к уравнениям (2.2), (2.3) с несколько более сложной левой частью. Аналогичным образом можно преобразовать уравнения, описывающие расслоение однородного состояния систем с «взаимной диффузией» двух компонент <sup>132, 133</sup>. Иными словами, статические АС в системах с термодиффузией (п. 1.1 и 1.2) описываются уравнениями (2.2), (2.3) для стационарного случая <sup>25, 26</sup>.

Уравнения типа (2.2), (2.3) описывают и многие другие явления <sup>12, 16</sup>, в том числе образование автоструктур в сегнетоэлектриках — фотопроводниках <sup>134</sup>, в горячей плазме полупроводников <sup>32, 135</sup>, в неравновесных сверхпроводниках <sup>22, 136</sup>, в материалах с фазовыми переходами <sup>137, 138</sup> и в магнитных фотопроводниках <sup>139</sup>; распространение волны реакции по поверхности катализатора <sup>15, 140</sup>, светового импульса в активном световодке <sup>141</sup>, фотоиндуцированные автоволны в полупроводниках <sup>142-145</sup> и в магнетиках <sup>146, 147</sup>; расслоение температуры решетки в полупроводниках <sup>25, 94, 96, 148-150</sup> и в полупроводниковых структурах <sup>151-157</sup>, а также возникновение областей локальной ионизации в однородных полупроводниках <sup>125, 158</sup> и в p — n-переходах <sup>47, 159</sup>.

2.2. Классификация моностабильных систем и свойства реализующихся в них АС. В теории АС (п. 3—7) существенной характеристикой, определяющей их форму, является зависимость  $\eta(\theta)$ , которая дается уравнением

$$q(\theta, \eta, A) = 0 \text{ при } A = \text{const.} \quad (2.4)$$

Эта зависимость определяет связь между  $\eta$  и  $\theta$  в областях АС, где  $\nu(\mathbf{r})$  меняется плавно (п.3), поэтому будем называть ее *локальной связью* (ЛС). Однородное состояние системы  $\theta = \theta_h$  и  $\eta = \eta_h$  согласно (2.2) и (2.3) удовлетворяет уравнениям

$$q(\theta_h, \eta_h, A) = 0, \quad Q(\theta_h, \eta_h, A) = 0, \quad (2.5)$$

т. е. отвечает точке пересечения кривой ЛС с кривой уравнения состояний (УС). Кривая УС соответствует зависимости  $\eta(\theta)$ , следующей из уравнения

$$Q(\theta, \eta, A) = 0 \text{ при } A = \text{const.} \quad (2.6)$$

Качественный вид кривых ЛС и УС (рис. 6) для моностабильных систем, в которых образуются АС, можно установить из общих соображений <sup>27, 28 \*</sup>.

\* Формально кривые ЛС и УС, определяемые (2.4) и (2.6), есть нуль-изоклины <sup>8</sup>, отвечающие точечным уравнениям (2.2) и (2.3).

Наличие отрицательной обратной связи по ингибитору и положительной по активатору означает, что в некотором диапазоне изменения параметров  $\theta$ ,  $\eta$  и  $A$

$$Q'_\eta \equiv \frac{\partial Q}{\partial \eta} > 0, \text{ а } q'_\theta \equiv \frac{\partial q}{\partial \theta} < 0. \tag{2.7}$$

При всех  $A$  рассматриваемые моностабильные системы имеют единственное однородное состояние, т. е. зависимости  $\eta_h(A)$  и  $\theta_h(A)$  являются однозначными. Последнее согласно (2.5) справедливо, когда

$$q'_\theta Q'_\eta - q'_\eta Q'_\theta > 0. \tag{2.8}$$

При выполнении условий (2.7) это неравенство удовлетворяется только при  $q'_\eta Q'_\theta < 0$ , т. е. когда

$$Q'_\theta > 0, \quad q'_\eta < 0 \tag{2.9}$$

или

$$Q'_\theta < 0, \quad q'_\eta > 0. \tag{2.10}$$

Пусть неравенства (2.7) выполняются в диапазоне  $\theta_0 < \theta < \theta'_0$ . Тогда при выполнении (2.9) для обеих кривых ЛС и УС производная  $d\eta/d\theta < 0$  (рис. 6, а), так как

$$\frac{d\eta}{d\theta} = -\frac{q'_\theta}{q'_\eta} \text{ на кривой ЛС: } q(\theta, \eta) = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = -\frac{Q'_\theta}{Q'_\eta} \text{ на кривой УС: } Q(\theta, \eta) = 0. \tag{2.12}$$

В точках  $\theta = \theta_0$  и  $\theta'_0$  производная  $q'_\theta = 0$  (наличие точки  $\theta = \theta'_0$  не обязательно, но характерно для многих реальных систем). Согласно (2.11) производная  $d\eta/d\theta$  в точках  $\theta = \theta_0$  и  $\theta'_0$  меняет знак, т. е. при выполнении (2.9)

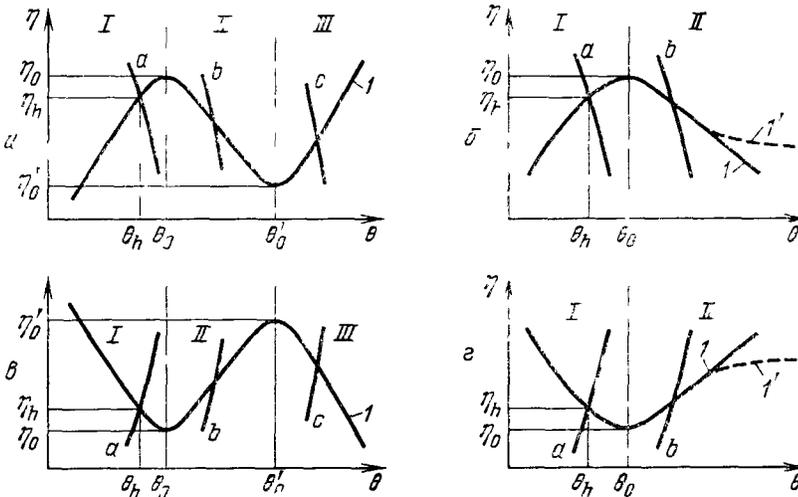


Рис. 6. С основные типы кривых локальной связи (ЛС) (кривые 1) и уравнения состояния (УС) (кривые 2, b, c). Кривые УС a, b и c отвечают соответственно холодной ( $A < A_0, \theta_h < \theta_0$ ), разогретой ( $A_0 < A < A_0, \theta_0 < \theta_h < \theta'_0$ ) и горячей ( $A > A'_0, \theta_h > \theta'_0$ ) системам

кривая ЛС имеет N-образный вид (рис. 6, а), а в случае, когда точка  $\theta'_0$  отсутствует, — Λ-образный (рис. 6, б). В общем случае знак  $Q'_\eta$  (или  $Q'_\theta$ ) не связан со знаком  $q'_\theta$ , поэтому для кривой УС условие  $d\eta/d\theta < 0$  может сохраняться и вне области  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta'_0$  (рис. 6, а и б, кривые a — c).

Аналогичные рассуждения для случая, когда выполнены условия (2.10), приводят к И- или V-образному виду кривой ЛС (рис. 6, *в* и *г*).

В зависимости от вида кривой ЛС систему будем называть N-, И-, Λ- и V-системой. Во многих физических системах параметр  $\theta$  характеризует температуру (п. 1) и увеличивается с ростом уровня неравновесности системы (бифуркационного параметра  $A$ ). Поэтому область I, где  $\theta \leq \theta_0$ , будем называть *холодной*; II, где  $\theta_0 < \theta < \theta'_0$ , — *разогретой*, а область III, где  $\theta \geq \theta'_0$ , — *горячей* (см. рис. 6). По аналогии систему будем называть холодной, разогретой или горячей в зависимости от того, какой области значений отвечает ее однородное состояние, т. е. величина  $\theta = \theta_n$  (рис. 6). Однородное состояние холодной и горячей систем устойчиво и отвечает значениям  $\theta$  и  $\eta$ , для которых  $q'_0 \geq 0$ ; разогретой — неустойчиво, и ей отвечает  $q'_0 < 0$ .

АС различного типа (рис. 5) образуются в системах<sup>29,30</sup>, в которых диффузионная ( $L$ ) или дрейфовая длина ( $\tilde{L}$ ) изменения ингибитора  $\eta$  намного больше характерной диффузионной длины ( $l$ ) изменения активатора  $\theta$  (п. 1), т. е. при  $L \gg l$  или  $\tilde{L} = v\tau_\eta \gg l$ , где  $v$  — скорость бегущего АС.

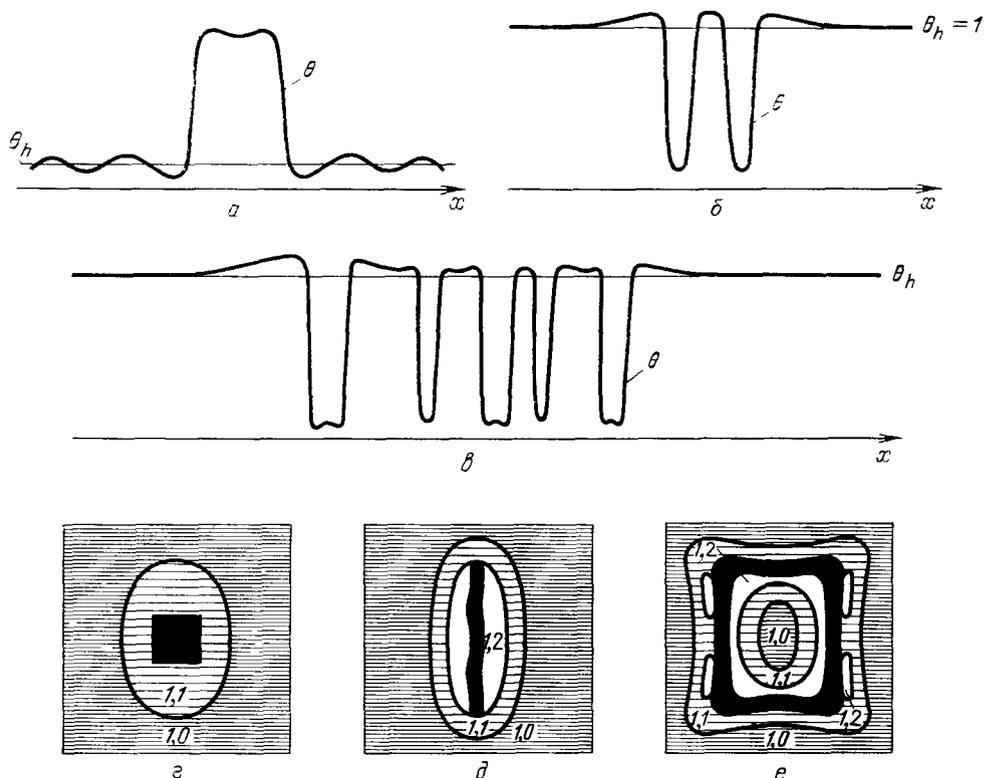


Рис. 7. Распределение активатора в некоторых статических АС сложного вида: *а* — *б* — одномерные, *в* — *е* — двумерные. Рис. *б*, *в* — *е* — результаты численных исследований модели (1.13)<sup>117, 118</sup> (на рис. *в* — *е* в темных областях  $\theta \approx 0,1$ , однородному состоянию отвечает  $\theta_n = 1,0$ )

В АС (рис. 1—5 и 7) активатор  $\theta$  в некоторых областях малого размера (порядка  $l$ ) — стенках АС — меняется резко от  $\theta_{\max} > \theta_n$  до  $\theta_{\min} < \theta_n < \theta_0$ . Вне этих областей  $\theta(\mathbf{r})$  меняется плавно с той же характерной длиной, что и  $\eta(\mathbf{r})$ . Ингибитор  $\eta(\mathbf{r})$  всюду меняется плавно в статическом АС (рис. 1—3, 4, *а* и 5, *а* — *в*) с характерной длиной порядка  $L$  (п. 3 и 5), а в бегущем АС —  $\tilde{L}$  (рис. 4, *в* и 5, *и* — *м*; п. 7). На периферии АС функции  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\eta(\mathbf{r})$  стремятся к своим значениям для однородного состояния  $\theta = \theta_n$  и

$\eta = \eta_h$  (рис. 1—5, 7). В N- и  $\Lambda$ -системах  $\eta$  ( $r$ ) вне стенок АС меняется в фазе с  $\theta$  ( $r$ ) (рис. 5, сплошные кривые для  $\eta$  ( $x$ )), а в И- и V-системах — в противофазе (рис. 5, штриховые кривые; п. 3 и 5) <sup>29,30</sup>.

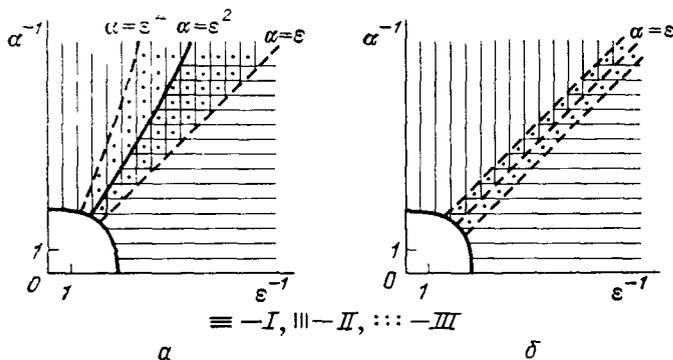


Рис 8 Области существования по  $\alpha = \tau_\theta/\tau_\eta$  и  $\epsilon = l/L$  в N- и И-системах (а) и  $\Lambda$ - и V-системах (б) АС — статических (I), бегущих (и других автоволн) (II) и пульсирующих (III)

Тип АС прежде всего определяется величинами  $\epsilon = l/L$  и  $\alpha = \tau_\theta/\tau_\eta$  (рис. 8). Поэтому разобьем системы на три качественно различных класса <sup>29,30</sup>:

K-системы, для которых  $\epsilon \ll 1, \alpha > 1$  (п. 3—5), (2.13а)

$\Omega$ -системы,  $\epsilon \geq 1, \alpha \ll 1$  (п. 7), (2.13б)

K $\Omega$ -системы,  $\epsilon \ll 1, \alpha \ll 1$  (п. 6, 7). (2.13в)

Согласно (2.2), (2.3) и (2.13) ингибитор  $\eta$  по сравнению с активатором  $\theta$  в K-системах является гораздо более дальнедействующим, но менее инерционным; в  $\Omega$ -системах — сильно инерционным, но более короткодействующим; в K $\Omega$ -системах — более дальнедействующим и сильно инерционным.

Однородное состояние разогретых (рис. 6, кривые в) K-систем при некотором  $A = A_c$ , когда  $\theta_h$  становится больше  $\theta_0$ , расслаивается\*), т. е. теряет устойчивость (неустойчивость Тьюринга <sup>110</sup>) относительно аperiодического (с частотой  $\omega = 0$ ) нарастания флуктуаций с выделенным волновым числом  $k = k_0$  <sup>12,16,23,106-109</sup>. Значение  $k_0$  для уравнений (2.2), (2.3) удобно записать в виде <sup>28,153</sup>

$$k_0 = (lL)^{-1/2} (q'_\theta Q'_\eta - q'_\eta Q'_\theta)^{1/4} \approx (lL)^{-1/2} \tag{2.14}$$

В результате расслоения в K-системах скачкообразно образуются автоструктуры (диссипативные структуры) большой амплитуды <sup>25-29</sup>. Однородные колебания, пульсирующие и бегущие автоструктуры в них не реализуются. В некоторых областях устойчивости однородного состояния в K-системах (рис. 6, кривые а и с) можно возбудить статические АС <sup>25-30</sup> (рис. 5, а—г; п. 3—5). Свойства и параметры АС существенным образом зависят от вида кривой ЛС (рис.6).

В K $\Lambda$ - и K $V$ -системах (п. 5) могут возникать лишь горячие статические АС пикового типа <sup>25,30</sup> (рис. 5, б) с амплитудой  $\theta_{max} \gg \theta_0 > \theta_h$ , значение которой возрастает с ростом  $A$  и тем больше, чем меньше величина  $\epsilon$ . В зависимости от нелинейности системы в них могут образовываться узкие (размера  $\sim l$ ) и широкие (размера  $\sim L$ ) пиковые АС. Минимальный уровень возбуждения  $A = A_b$ , при котором еще существуют узкие пиковые АС, пропорционален  $\epsilon^n$  ( $n > 0$ ). Иными словами, АС можно возбудить при  $A_b \ll A_c$ , т. е. в системах, слабо отклоненных от состояния термодинамического равновесия (п. 5.4). В дву- и трехмерных системах одномерные узкие пико-

\*) Однородное состояние KN- и KI-систем расслаивается в некотором диапазоне  $A_c \leq A \leq A'_c$ . С точностью до величин  $\sim \epsilon \ll 1$  значения  $A_c = A_0, A'_c = A'_0$ , где  $A = A_0$  и  $A = A'_0$  отвечают, соответственно,  $\theta_h = \theta_0$  и  $\theta'_h = \theta'_0$ .

вые АС неустойчивы; в них могут существовать радиально-симметричные пичковые АС.

В КН- и КИ-системах (п. 3 и 4) минимальный уровень возбуждения  $A = A_b$ , при котором еще существуют АС, определяется нелинейностями системы и практически не зависит от величины  $\epsilon$  (п. 4.3). В холодных системах (при  $A_b < A < A_c$ ) образуются горячие широкие (размера  $\mathcal{L}_s > l$ ) АС с  $\theta_{\max} > \theta'_0$  (рис. 1, з и 5, а), а в горячих (при  $A'_c < A < A'_b$ ) — холодные широкие АС с  $\theta_{\min} < \theta_0$  (рис. 5, в). При  $A \rightarrow A_b$  ( $A'_b$ ) размер горячего (холодного) АС уменьшается и достигает величины  $\mathcal{L}_s \sim l \ln \epsilon^{-1}$  в точке  $A = A_b$  ( $A'_b$ ), где АС скачкообразно исчезает (п. 4.2). При  $A \rightarrow A_c$  ( $A'_c$ ) размер АС увеличивается, а монотонный спад  $\eta$  и  $\theta$  на периферии АС может смениться на осциллирующий (рис. 7, а). В некоторых системах, не доходя до точки  $A = A_c$  ( $A'_c$ ), ширина АС достигает критического размера  $\sim L$ , при котором происходит деление АС (п. 3.5).

В дву- и трехмерных системах одномерные и радиально-симметричные АС устойчивы в широком диапазоне изменения  $A$ . На границе этих диапазонов происходит спонтанное образование АС с гофрированными (ячеистыми) стенками или же их дробление (п. 4.4).

Кроме таких АС в системе может образовываться множество других сложных АС, как одномерных (рис. 7, б, в), так и дву(трех)мерных (рис. 7, з—е). Распределения  $\eta$  и  $\theta$  в сечении сложного двумерного АС по виду напоминает распределения  $\eta$  и  $\theta$  в одномерных АС. При изменении  $A$  может осуществляться спонтанный переход из одного вида сложного АС в другой в результате эффектов «локального пробоя» (п. 3.5), расслоения стенок (п. 4.4) или «перекачки» (п. 4.3).

В К-системах при  $A$ , близких к  $A_c$  ( $A'_c$ ), малая локальная неоднородность может приводить к скачкообразному спонтанному возникновению статического АС; параметры образующегося АС определяются характеристиками системы и практически не зависят от параметров неоднородности \*).

Под действием внешнего поля статические АС в идеально однородных системах приходят в движение. Дрейфующие АС могут зацепляться у малой неоднородности (эффект пиннинга). При достаточно большом внешнем поле АС, спонтанно генерируемые у малой неоднородности или вблизи границы образца, могут отрываться от нее и приводить к возникновению периодической или стохастической последовательности движущихся АС <sup>51</sup>.

Однородное состояние разогретых  $\Omega$ -систем неустойчиво относительно однородных (с  $k = 0$ ) флуктуаций с выделенной частотой  $\omega = \omega_0$  <sup>104,23</sup>, значение которой удобно записать в виде <sup>28,153</sup>

$$\omega_0 = \alpha^{1/2} \tau_\theta^{-1} (q'_\theta Q'_\eta - q'_\eta Q'_\theta)^{1/2} \sim (\tau_\theta \tau_\eta)^{-1/2}. \quad (2.15)$$

В результате такой неустойчивости в  $\Omega$ -системах скачкообразно возникают релаксационные колебания <sup>104,23</sup>. Поэтому такие системы иногда называют автоколебательными. Статические и пульсирующие АС в  $\Omega$ -системах не образуются (рис. 8). В устойчивых  $\Omega$ -системах можно возбудить бегущие АС и другие более сложного вида автоволны <sup>12-16,54-69,111</sup> (п. 7) \*\*). В холодных  $\Omega$ N- и  $\Omega$ I-системах образуются горячие бегущие АС (рис. 5, и, к), а в горячих — холодные (рис. 5, л, м); они имеют размер  $\sim \tilde{L} = v \tau_\eta$  и скорость, которая зависит от величины  $A$  и меняется от  $v \sim l/\tau_\theta$  при  $A \rightarrow A_c$  до  $v \sim \alpha^{1/2} l/\tau_\theta$  при  $A \rightarrow A_b < A_c$  (при  $A < A_b$  бегущие АС не образуются). В  $\Omega$ -системах бегущие АС при столкновении аннигилируют, что определяет многие свойства и взаимодействие сложных автоволн <sup>12-16,54-69,111</sup>.

\*) Этот эффект напоминает образование зародышей второй фазы при фазовом переходе I рода.

\*\*) Системы, в которых можно возбудить автоволны, также называют возбудимыми средами <sup>39,111</sup>.

В К $\Omega$ -системах могут реализовываться все типы АС<sup>29-32,35</sup>: в них могут образовываться простые (рис. 5) и сложные статические (рис. 7), пульсирующие и бегущие АС, а также различные автоволны (п. 7). Пульсирующий АС большого размера упрощенно можно представить в виде горячего или холодного статического АС, у которого ширина<sup>33</sup> или радиус<sup>34</sup> периодически меняются во времени (рис. 5,  $\partial$ — $з$ ). Пульсирующий пиковый АС напоминает статический пиковый АС с осциллирующей амплитудой (рис. 5,  $е$ ; п. 6).

Основные свойства и параметры статических АС в К $\Omega$ -системах аналогичны изложенным выше для К-систем. Однако при изменении уровня возбуждения статические АС в К $\Omega$ -системах могут спонтанно превращаться в пульсирующие или в бегущие АС (п. 6.2). Чем больше отношение  $\alpha/\epsilon$ , тем меньше диапазон  $A$  существования бегущих АС и тем выше их минимальная скорость<sup>35</sup> (п. 7.1).

В отличие от  $\Omega$ -систем, в К $\Omega$ -системах (п. 7) перед передней стенкой (фронтом) бегущего АС распространяется диффузионный предвестник, представляющий собой «рефракторную зону» (точки на рис. 5,  $и$ — $м$ ). Поэтому при столкновении бегущие АС могут не аннигилировать, а отталкиваться друг от друга или же образовывать АС другого вида (статический или пульсирующий). Неупруго сталкиваются также бегущий АС со статическим или пульсирующим.

В зависимости от параметров системы (прежде всего величин  $\alpha$  и  $\epsilon$ ) малая неоднородность может приводить к спонтанному образованию статического, пульсирующего или бегущего АС.

В соответствии с приведенной классификацией к КН- и КЛ-системам относятся газовый разряд<sup>44</sup> и полупроводник в условиях ударной ионизации<sup>125</sup>, а также системы с «отрицательной» термодиффузией (п. 1.2). Модель «брюсселятора» (1.12) при  $\tau_\theta > \tau_\eta$  относится к КЛ-системам, а при  $\tau_\theta < \tau_\eta$  — к К $\Omega$ Л-системам. Системы с «положительной» термодиффузией (п. 1.1) относятся к КИ- и КV-системам; для них вид кривой ЛС определяется уравнением (1.6). КV-системой является модель Гирера и Майнхардта (1.14) при  $\tau_\theta > \tau_\eta$ . Модели типа «орегонатор» (1.13) относятся к К $\Omega$ И- или  $\Omega$ И-системам. Системы с однородно генерируемым «веществом горения» (п. 1.3), в том числе ЭДП, разогретая в процессе оже-рекомбинации<sup>32</sup>, как правило, являются К $\Omega$ Н- или К $\Omega$ Л-системами. В моделях типа ФХН<sup>12-16</sup> (см. введение)  $L = 0$ , а  $\tau_\theta \ll \tau_\eta$ , т. е. они являются предельным случаем  $\Omega$ Н- или  $\Omega$ И-систем при  $\epsilon \rightarrow \infty$  (п. 7). Во многих полупроводниковых приборах  $L$  много больше размера образца  $\mathcal{L}$ <sup>154,157</sup>. Поэтому их можно рассматривать как предельный случай ( $L \rightarrow \infty$ ) К- или К $\Omega$ -систем<sup>28</sup> (п. 3.1, 4.1, 5.1 и 6.1).

В реальных системах кривая ЛС может иметь не ярко выраженный N-, И- или  $\Lambda$ -, V-образный вид. В  $\Lambda$ - и V-системах с «вырожденными» кривыми ЛС (штриховые кривые  $I'$  на рис. 6, б,  $з$ ) могут образовываться широкие АС (рис. 5, а) большой амплитуды. Напротив, N- и И-системы с  $\theta'_0 \gg \theta_0$  по своим свойствам ближе к  $\Lambda$ - и V-системам, т. е. в них в большом диапазоне изменения  $A$  реализуются пиковые АС большой амплитуды (п. 5). Иными словами, более строго, к N- и И-системам (п. 3 и 4) следует отнести системы, для которых  $\theta'_0 \sim \theta_0$  (рис. 6, а, в).

**3. Статические автосолитоны (КИ- и КН-системы).** Прежде чем перейти к изложению теории АС, методически удобно рассмотреть простейшие структуры, реализующиеся в системах малого размера  $\mathcal{L} \ll L$ .

**3.1. Структуры в системах малого размера**<sup>25,28,157</sup>. В системах размера  $\mathcal{L} \ll L$ , но  $\mathcal{L} \gg l$  ингибитор  $\eta$ , в отличие от активатора  $\theta$ , по пространству фактически не меняется. Его значение при циклических

или же нейтральных условиях на границах системы  $S$ :

$$\mathbf{S}\nabla\eta|_S = \mathbf{S}\nabla\theta|_S = 0, \quad (3.1)$$

можно найти, усреднив уравнение (2.3) по объему ( $V$ ) системы:

$$\tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -V^{-1} \int_V Q(\theta(\mathbf{r}), \eta, A) d\mathbf{r} \equiv -\langle Q(\theta, \eta, A) \rangle. \quad (3.2)$$

Для стационарного одномерного случая уравнение (2.2) при  $\eta(x) = \text{const}$  можно записать как

$$l^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{dU_\theta}{d\theta} = 0, \quad U_\theta = - \int^\theta q(\theta, \eta, A) d\theta. \quad (3.3)$$

Формально (3.3) совпадает с уравнением консервативного движения «частицы» с координатой  $\theta$  и временем  $x$  в потенциале  $U_\theta$ . Вид последнего при заданном значении  $A$  определяется величиной  $\eta$ , в свою очередь, зависящей от решения  $\theta(x)$ . Эта функциональная связь для стационарного случая согласно (3.2) имеет вид

$$\langle Q(\theta(x), \eta, A) \rangle = 0. \quad (3.4)$$

Экстремумы потенциала  $U_\theta$  (3.3) при заданном  $A$  отвечают условию  $dU_\theta/d\theta = -q(\theta, \eta, A) = 0$ , т.е. согласно (2.4) определяются точками пересечения кривой ЛС с прямой  $\eta = \text{const}$  (рис. 9, а, б). Это позволяет по виду кривой ЛС восстановить вид потенциала  $U_\theta$  при различных значениях  $\eta$  (рис. 9, в). Действительно, в экстремальных точках  $U_\theta$  в соответствии с (3.3)  $d^2U_\theta/d\theta^2 = -q'_\theta$ . Поэтому точка пересечения прямой  $\eta = \text{const}$  с ветвью II кривой ЛС ( $\theta_0 < \theta < \theta'_0$ , рис. 9, а, б), где  $q'_\theta < 0$  (п. 2.2), отвечает минимуму  $U_\theta$ , а с I ( $\theta < \theta_0$ ) и III ( $\theta > \theta'_0$ ), где  $q'_\theta > 0$ , — максимуму (рис. 9, в). Отсюда вытекает, что в диапазоне значений  $\eta$  от  $\eta'_0$  до  $\eta_0$  (где  $\eta_0 = \eta(\theta_0)$ ,  $\eta'_0 = \eta(\theta'_0)$  экстремальные точки ЛС (рис. 9, а, б)),  $U_\theta$  имеет форму потенциальной ямы (рис. 9, в). Поэтому  $\theta(x)$  может иметь периодические решения с характерной длиной порядка  $l$ . Однако такие распределения активатора неустойчивы (п. 4.1).

Особый вид (рис. 9, г—ж) имеют решения  $\theta(x)$ , соответствующие траекториям «частицы», проходящим через седловую точку уравнения (3.3), отвечающую максимуму потенциала  $U_\theta$  (рис. 9, в). Это связано с тем, что при приближении к седловой точке изменение  $\theta(x)$  становится все более плавным<sup>8</sup>. Когда кривая ЛС имеет  $N$  (или  $И$ )-образный вид (рис. 9, а, б), то интервалу  $(\eta_0, \eta'_0)$  значений  $\eta$  соответствуют две седловые точки (рис. 9, в). Значения  $U_\theta$  в этих точках  $\theta = \theta_{s1}$  и  $\theta_{s3}$  совпадают при некотором  $\eta = \eta_s$ , удовлетворяющем согласно (3.3) уравнениям

$$\int_{\theta_{s1}}^{\theta_{s3}} q(\theta, \eta_s, A) d\theta = 0, \quad q(\theta_{si}, \eta_s, A) = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.5)$$

При  $\eta = \eta_s$  траектория движения частицы ( $s$  на рис. 9, в) из одной седловой точки  $\theta_{s1}$  в другую  $\theta_{s3}$  с экспоненциальной точностью описывает распределение  $\theta(x)$  в виде широкой страты размера  $\mathcal{L}_s \gg l$  у одной из границ системы (рис. 9, г), а близкая к этой седловой траектории — широкую страту в центре системы (рис. 9, ж).

Из рис. 9, а видно, что в КN-системах при  $\eta > \eta_s$  распределение  $\theta(x)$  имеет вид узкой горячей страты (рис. 9, д), а при  $\eta < \eta_s$  — узкой холодной страты (рис. 9, е). В КИ-системах (рис. 9, б) узкие горячие страты реализуются при  $\eta < \eta_s$ , а узкие холодные — при  $\eta > \eta_s$ . Значение  $\eta$ , а следовательно, и вид  $\theta(x)$  согласно (3.4) зависят от размера системы  $\mathcal{L}$  и величины  $A$ , т.е. от значений  $\eta = \eta_h$  и  $\theta = \theta_h$  для однородного состояния системы

(рис. 9, а). Заменяя широкую страту ступенькой, из (3.4) с точностью до  $l/L \ll 1$  получим уравнение, определяющее ее размер

$$\mathcal{L}_s Q(\theta_{s3}, \eta_s, A) = -(\mathcal{L} - \mathcal{L}_s) Q(\theta_{s1}, \eta_s, A). \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) при различных значениях  $A$  удовлетворяется благодаря

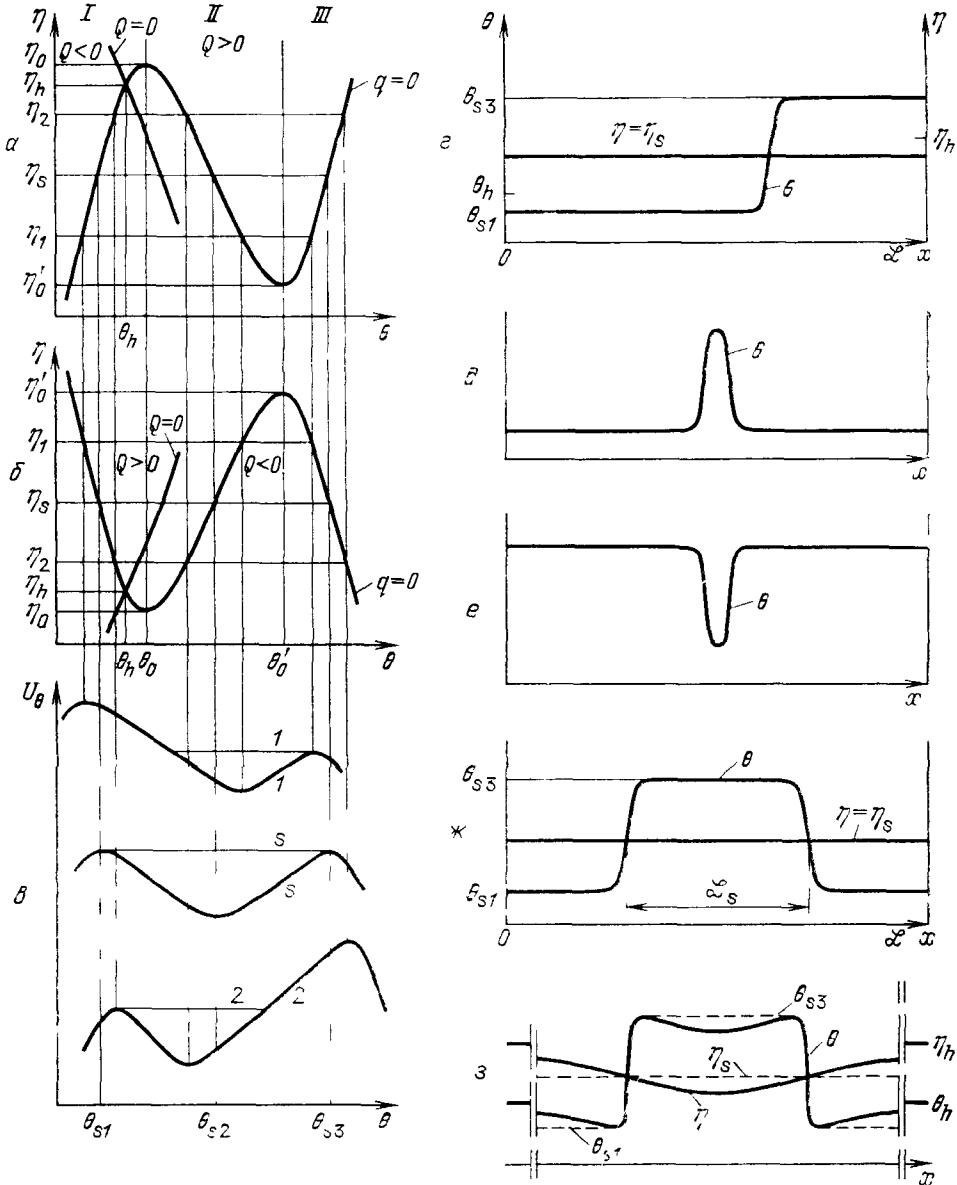


Рис 9. К построению состояний в системах малого размера а, б — Вид кривой ЛС для N- и И-систем. в — Вид потенциалов  $U_\theta$ , наивысшие траектории движения частицы в которых 3, 2 и 1 отвечают решениям  $\theta(x)$  на рис г, д и е соответственно ж — Широкая страта з — Вид широкого АС в системах большого размера

тому, что величина  $Q$  справа и слева от кривой УС ( $Q = 0$ ; п. 2.2) имеет разный знак (рис. 9, а, б). Из (3.6) следует, что при уменьшении  $A$  ширина страты  $\mathcal{L}_s$  (рис. 9, ж) уменьшается. Это связано с тем, что по мере уменьшения  $A$ , точнее величины  $\theta_h$ , значение  $\eta_h$  все более приближается к величине  $\eta_s$ ,

а  $\theta_h$  — к  $\theta_{s1}$ , т. е. величина  $Q(\theta_{s1}, \eta_s, A) \rightarrow Q(\theta_h, \eta_h, A) = 0$  (рис. 9, а). Поэтому уравнение (3.6) при  $\eta_h \rightarrow \eta_s$  может выполняться лишь при  $\mathcal{L}_s \rightarrow 0$ . Отсюда также следует, что при  $\theta_h < \theta_{s1}$  (или  $\theta_h > \theta_{s3}$ ) условие (3.6) заведомо не выполняется, поскольку при этом знак  $Q(\theta_{s3}, \eta_s, A)$  совпадает со знаком  $Q(\theta_{s1}, \eta_s, A)$ . Иными словами, при  $A < A_s$  и  $A > A'_s$  ( $A = A_s$  отвечает  $\eta_h = \eta_s$  и  $\theta_h = \theta_{s1}$ ;  $A = A'_s$  —  $\eta_h = \eta_s$  и  $\theta_h = \theta_{s3}$ ) решение в виде страты не реализуется, т. е. оно существует лишь при  $A_s < A < A'_s$ . Отсюда вытекает принципиальное отличие состояний в рассматриваемых двухпараметрических системах (рис. 9, г—ж) от аналогичных по виду состояний, реализующихся в бистабильных (или триггерных) однопараметрических системах с двумя устойчивыми состояниями  $\theta = \theta_{h1}$  и  $\theta = \theta_{h3}$  (например, в веществах со структурным фазовым переходом, в полупроводниках с S- или N-образной вольт-амперной характеристикой (ВАХ)<sup>19,20</sup> и в других бистабильных системах<sup>21,22</sup>). В последних решение  $\theta(x)$  в виде ступеньки (рис. 9, г) описывает доменную стенку между двумя устойчивыми состояниями системы  $\theta = \theta_{h1}$  и  $\theta = \theta_{h3}$ .

Рассматриваемые системы при всех значениях  $A$  имеют лишь одно однородное состояние  $\theta = \theta_h$  ( $\eta = \eta_h$ ), которое, как видно из формулы (3.6), ни при каких значениях  $A$  не совпадает с величинами  $\theta_{s1}$  и  $\theta_{s3}$  для широкой страты (рис. 9, г). Возникновение вне стенки страты (домена) практически однородных состояний  $\theta(x) \approx \theta_{s1}$  и  $\theta(x) \approx \theta_{s3}$  связано с сильным диффузионным расплыванием ингибитора вдоль системы размера  $\mathcal{L} \ll L$ , которое учитывается уравнением (3.4) или (3.6). Диффузионные потоки ингибитора приводят к сильному отклонению системы от однородного состояния и образованию неоднородных состояний с  $\eta \neq \eta_h$  типа изображенных на рис. 9, г—ж.

Таким образом, в системах с  $\mathcal{L} \ll L$  (точнее, с  $L = \infty$ ) в большом диапазоне значений  $A$  существует решение в виде широкой страты, для которой  $\eta = \eta_s \neq \eta_h$  (рис. 9, ж). Естественно, что в системах с  $\mathcal{L} \gg L$  на периферии страты значение  $\eta$  должно плавню с характерной длиной порядка  $L$  переходить к значению  $\eta = \eta_h$ , а значение  $\theta$  — к  $\theta_h$ . Уже из одних этих соображений легко восстановить качественный вид горячего широкого АС (рис. 9, з).

3.2. Метод построения автосолитона<sup>26-28</sup>. Уравнения (2.2), (2.3) для одномерного стационарного случая удобно записать в виде

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{dU_\theta}{d\theta} = 0, \quad U_\theta = - \int_0^\theta q(\theta, \eta(\theta), A) d\theta, \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{dU_\eta}{d\eta} = 0, \quad U_\eta = - \int_0^\eta Q(\theta(\eta), \eta, A) d\eta, \quad (3.8)$$

где  $x$  измеряется в единицах  $L$ . Из (3.7), (3.8) следует, что распределения  $\theta(x)$ ,  $\eta(x)$ , описывающие уединенное симметричное относительно точки  $x = 0$  состояние, должны удовлетворять интегральным условиям

$$\int_0^\infty q(\theta(x), \eta(x)) dx = \int_{\theta_m}^{\theta_h} q(\theta, \eta(\theta)) d\theta = 0, \quad (3.9)$$

$$\int_0^\infty Q(\theta(x), \eta(x)) dx = \int_{\eta_m}^{\eta_h} Q(\theta(\eta), \eta) d\eta = 0, \quad (3.10)$$

где  $\theta_m = \theta(0)$ ,  $\eta_m = \eta(0)$ . Наличие в (3.7) малого параметра  $\varepsilon = l/L$  позволяет при изучении стационарных состояний воспользоваться методом качественного анализа, основанного на понятии медленных и быстрых движений<sup>8,9</sup> — в нашем случае плавных и резких распределений.

Решения уравнений (3.7) и (3.8) можно исследовать как фазовые траектории в четырехмерном фазовом пространстве переменных  $X_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ):

$$X_1 \equiv \theta, \quad X_2 \equiv \varepsilon \frac{d\theta}{dx}, \quad X_3 \equiv \eta, \quad X_4 \equiv \frac{d\eta}{dx}, \quad (3.11)$$

удовлетворяющих согласно (3.7), (3.8) системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dX_j}{dx} &= f_j(X_i), \quad j = 1, 2, \\ \frac{dX_j}{dx} &= f_j(X_i) \quad (j = 3, 4; i = 1, \dots, 4), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$f_1 = X_2, \quad f_2 = q(X_1, X_3, A), \quad f_3 = X_4, \quad f_4 = Q(X_1, X_3, A). \quad (3.13)$$

Согласно качественной теории дифференциальных уравнений<sup>8</sup> при  $\varepsilon \ll 1$  все фазовые траектории системы уравнений (3.12) проходят вблизи траекторий, отвечающих плавным или резким распределениям, а также их сочетаниям (см., однако, п. 5.3).

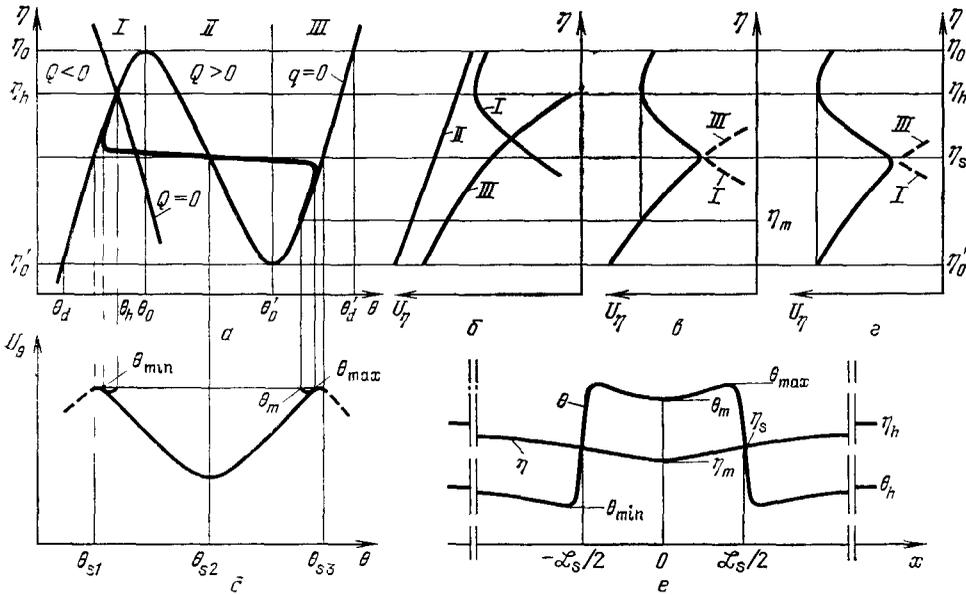


Рис. 10. К построению горячего широкого АС (е) в N-системах: вид кривых ЛС ( $q = 0$ ) и УС ( $Q = 0$ ) (а), ветвей I—III потенциала  $U_\eta$  для плавных распределений (б), истинного потенциала  $U_\eta$  и траектории движения «частицы» в нем (в), отвечающей распределению  $\eta(x)$  в АС (е), истинного потенциала  $U_\eta$  при  $A = A_d$  (д), истинного потенциала  $U_\theta$  (сплошные кривые) (е), наивысшая траектория движения частицы в котором отвечает распределению  $\theta(x)$  в АС (е)

Плавные распределения соответствуют решениям системы (3.12) при  $\varepsilon = U/L = 0$ , точнее  $l = 0$ . Характерной длиной таких распределений является  $L$ . Из (3.7), (3.8) видно, что при  $\varepsilon = 0$  величины  $\eta$  и  $\theta$  связаны между собой локально в соответствии с уравнением (2.4), а распределение  $\eta(x)$  описывается уравнением

$$L^2 \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{dU_\eta}{d\eta} = 0, \quad U_\eta = - \int^\eta Q(\theta(\eta), \eta, A) d\eta. \quad (3.14)$$

По этой причине зависимость  $\eta(\theta)$ , даваемая (2.4), названа локальной связью (ЛС).

Резкие распределения отвечают решениям системы уравнений (3.7), (3.8) при  $L = \infty$ , т. е. удовлетворяют уравнению (3.3) при  $\eta(x) = \text{const}$ . Таким образом, изученные в п. 3.1 решения  $\theta(x)$  представляют собой резкие распределения.

В КН- и КИ-системах кривая ЛС (рис. 9, а и б) имеет три участка I, II и III однозначной зависимости  $\theta(\eta)$  (рис. 10, а). Поэтому потенциал  $U_\eta$  в (3.14) состоит из трех независимых ветвей I, II и III, которым соответственно отвечают  $\theta \leq \theta_0$ ,  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta'_0$  и  $\theta \geq \theta'_0$  (рис. 10, б). Согласно (3.14)

$$\frac{dU_\eta}{d\eta} = -Q(\theta(\eta), \eta, A). \quad (3.15)$$

Из (2.4) — (2.6) и (3.15) следует, что потенциал  $U_\eta$  имеет экстремум в точке  $\eta = \eta_h$  и  $\theta = \theta_h$ , отвечающей однородному состоянию системы. Вид экстремума определяется знаком производной

$$\frac{d^2U_\eta}{d\eta^2} = -\frac{q'_\theta Q'_\eta - q'_\eta Q'_\theta}{q'_\theta}, \quad (3.16)$$

т. е. согласно (2.8) знаком величины  $q'_\theta$ . В холодной системе  $\theta_h < \theta_0$  и однородному состоянию отвечает значение  $q'_\theta > 0$  (п. 2.2). Поэтому ветвь I потенциала  $U_\eta$  имеет вид потенциального горба (рис. 10, б). Ветви II и III потенциала  $U_\eta$  имеют вид потенциальных стенок (рис. 10, б), наклон которых согласно (3.15) определяется знаком величины  $Q$  (рис. 10, а).

Из вида  $U_\eta$  вытекает, что движение «частицы» в каждой из ветвей потенциала  $U_\eta$  (рис. 10, б) инфинитно, т. е. не может описывать распределение  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в виде АС. Таким образом, в классе только плавных или только резких распределений нельзя построить уединенное состояние — АС. Распределения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в виде АС представляют собой сочетание отрезков плавных и резких распределений.

Для определенности рассмотрим построение формы горячего широкого АС (рис. 9, з), реализующегося в холодной КН-системе (рис. 10). Стенка такого АС описывается решением, отвечающим сепаратрисе уравнения (3.3) при  $\eta = \eta_s$ , замыкающейся в двух седловых точках  $\theta = \theta_{s1}$  и  $\theta_{s3}$ , значения которых отвечают участкам I и III кривой ЛС (рис. 10, а). Для построения  $\eta(x)$  разместим ветви I и III потенциала  $U_\eta$  (рис. 10, б) так, чтобы они пересекались в точке  $\eta = \eta_s$  (рис. 10, в). При этом потенциал  $U_\eta$  в (3.8) примет вид потенциальной ямы (рис. 10, в), наивысшая траектория движения частицы в которой описывает распределение  $\eta(x)$  в АС (рис. 10, е). Действительно, однородное состояние  $\eta = \eta_h$  ( $\theta = \theta_h$ ) отвечает, как уже отмечалось, точке максимума потенциала  $U_\eta$ , где  $dU_\eta/d\eta = 0$  (рис. 10, в). Эта точка является седловой точкой уравнения (3.14) и траектория, замыкающаяся в ней, описывает плавное распределение  $\eta(x)$ , асимптотически переходящее на периферии к значению  $\eta = \eta_h$  (рис. 10, е).

В плавных распределениях  $\theta(x)$  локально связано с  $\eta(x)$  уравнением (2.4). При этом значения  $\theta$  вне стенок АС в КН-системах отвечают ветви I кривой ЛС для значений  $\eta(x) > \eta_s$  или ветви III — для значений  $\eta(x) < \eta_s$  (рис. 10, а). Сшивая в точках  $\eta = \eta_s$ ,  $\theta = \theta_{s1}$  и  $\eta = \eta_s$ ,  $\theta = \theta_{s3}$  участки плавных распределений  $\theta(x)$  с резкими решениями в виде стенок (рис. 9, з), получим распределение  $\theta(x)$  в виде широкого горячего АС (рис. 10, е). Таким образом, с точностью до  $\varepsilon \ll 1$  распределения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в широком АС ( $\mathcal{L}_s \gg l$ ), учитывая его симметрию относительно точки  $x = 0$  (рис. 10, е),

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta_{sh}(x) + \theta_{III} - \theta_{s3}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\mathcal{L}_s}{2}, \\ &= \theta_{sh}(x) + \theta_I - \theta_{s1}, \quad \frac{\mathcal{L}_s}{2} \leq x < \infty, \\ \eta(x) &= \eta_{III}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\mathcal{L}_s}{2}, \\ &= \eta_I, \quad \frac{\mathcal{L}_s}{2} \leq x < \infty; \end{aligned} \tag{3.17}$$

здесь  $\theta_{sh}(x)$  — резкое распределение, описывающее стенку АС; оно отвечает при  $\eta = \eta_s$  сепаратрисе уравнения (3.3), идущей из одной седловой точки  $\theta_{s3}$  в другую  $\theta_{s1}$ ;  $\eta_{I,III}(x)$ ,  $\theta_{I,III}(x)$  — плавные распределения, которые описывают  $\eta(x)$  и  $\theta(x)$  вне стенок АС. Последние, как следует из (3.14) и (2.4), являются решениями уравнений <sup>32</sup>

$$L^2 \frac{d^2 \eta_j}{dx^2} = Q_j \equiv Q(\theta_j(\eta), \eta, A), \quad q(\theta_j, \eta, A) = 0, \quad (j = I, III), \tag{3.18}$$

которые удовлетворяют граничным условиям

$$\eta_I(\infty) = \eta_h, \quad \eta_I\left(\frac{\mathcal{L}_s}{2}\right) = \eta_{III}\left(\frac{\mathcal{L}_s}{2}\right) = \eta_s, \quad \left. \frac{d\eta_{III}}{dx} \right|_{x=0} = 0. \tag{3.19}$$

Значение ингибитора в стенке широкого АС  $\eta = \eta_s$ , а также экстремальные значения активатора  $\theta_{max} = \theta_{s3}$  и  $\theta_{min} = \theta_{s1}$  находятся из простых, как правило, алгебраических уравнений (3.5). Последние определяют также значение  $\theta$  в точке  $x = \mathcal{L}_s/2$ :  $\theta_{sh}(\mathcal{L}_s/2) = \theta_{s2}$  (рис. 10, e). Интегрируя уравнения (3.18) с учетом гладкости ингибитора в точке  $x = \mathcal{L}_s/2$  (т. е. условия  $d\eta_I/dx = d\eta_{III}/dx$  при  $x = \mathcal{L}_s/2$ ), получим уравнения для определения  $\mathcal{L}_s$ , а также значений  $\eta(0) = \eta_m$  и  $\theta(0) = \theta_m$  в центре АС (в точке  $x = 0$ ; рис. 10, e) <sup>32,29,30</sup>

$$\begin{aligned} \int_{\eta_s}^{\eta_h} Q_I d\eta + \int_{\eta_m}^{\eta_s} Q_{III} d\eta &= 0, \\ \mathcal{L}_s &= V \sqrt{2} L \int_{\eta_m}^{\eta_s} \left( \int_{\eta_m}^{\eta} Q_{III} d\eta \right)^{-1/2} d\eta, \\ q(\theta_m, \eta_m, A) &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Заметим, что уравнения (3.5) и (3.20), определяющие основные параметры АС, с точностью до  $\epsilon$  удовлетворяют соответственно (3.9) и (3.10).

Для наглядности изложения выше были опущены многие детали, которые можно установить <sup>27</sup> из анализа истинной зависимости  $\eta(\theta)$  в АС (жирная кривая на рис. 10, a). Изучая ее поведение, можно уточнить вид  $\eta(x)$  и  $\theta(x)$  и самосогласованным образом <sup>27</sup> достроить с учетом (3.9), (3.10) потенциалы  $U_\eta$  в (3.8) и  $U_\theta$  в (3.7). В частности, можно показать, что потенциал  $U_\theta$  в (3.7) представляет собой потенциальную яму, с точностью до  $\epsilon$  близкую к потенциалу  $U_\theta$  в (3.3), изображенному на рис. 9, e (кривая s). Вблизи экстремальных точек  $\theta_{min} \approx \theta_{s1}$  и  $\theta_{max} \approx \theta_{s3}$  (рис. 10, a) этого потенциала (рис. 10, d) он ветвится с двумя мелкими потенциальными ямами (глубиной порядка  $\epsilon$ ). Области плавных распределений отвечают высшей траектории движения в этих мелких ямах, а области резкого распределения (стенки АС) — высшей траектории в глубокой яме (рис. 10, d).

Из изложенной процедуры построения формы АС следует, что в КН-системах (рис. 10, a) функции  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  вне стенок АС меняются в фазе (рис. 10, e), а в КИ-системах (рис. 9, б) — в противофазе (рис. 5, штриховые кривые). Это по существу единственное, чем качественно различаются АС в КН- и КИ-системах.

В горячих системах с  $\theta_h > \theta'_0$ , т. е. при  $A > A'_0$  (рис. 6, а, в, кривые с), существуют холодные АС <sup>26-30</sup> (рис. 5, в, з), процедура построения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в которых аналогична изложенной выше для горячего АС. Максимальное  $\theta_{\max} = \theta_{s3}$  и минимальное  $\theta_{\min} = \theta_{s1}$  значения  $\theta$ , а также значения  $\eta = \eta_s$  в стенке холодного АС с точностью до  $\varepsilon$  также определяются из уравнений (3.5), а его ширина, а также распределения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  из уравнений (3.3) и (3.20), (3.17) — (3.19), в которых индексы I и III, а также 1 и 3 следует поменять местами <sup>29,32</sup>.

Заметим, что уравнения (3.3), (3.5), (3.17) — (3.20) определяют параметры и форму АС при  $l \ll L$  и в системах, свойства которых описываются уравнениями более сложными, чем (2.2), (2.3), содержащими, например, перекрестные члены  $\propto \nabla\eta \cdot \nabla\theta$ . Этот и другие выводы можно строго обосновать <sup>32</sup>, используя излагаемую ниже асимптотическую теорию АС.

Из изложенной выше качественной процедуры также следует <sup>25,27</sup>, что кроме простейших статических АС (рис. 5, а—з) в системе можно возбудить АС сложного вида, как зеркально-симметричные (рис. 7, б), так и несимметричные (рис. 7, в). Последние содержат несколько областей — страт — высокого (низкого) значения активатора, имеющих разную ширину и находящихся на различных расстояниях друг от друга. О возможности возбуждения сложных АС свидетельствуют численные расчеты <sup>117,118\*</sup>.

**3.3. Асимптотическая теория.** Стенки АС, в которых активатор резко меняется на малой длине  $\sim l \ll L$ , можно рассматривать как пограничные слои. Наличие таких погранслоев позволяет использовать для анализа АС идеи теории сингулярных возмущений, развитые для других задач с погранслоями <sup>116,160-162</sup>. Так, можно убедиться, что с точностью до  $\varepsilon = l/L \ll 1$  уравнения (2.2), (2.3) для стационарных состояний в соответствии с общей теорией <sup>8</sup> сводятся <sup>59,60,163</sup> к уравнениям для резких (3.3) и плавных (3.14) распределений. Для построения АС из множества резких и плавных распределений нужно составить такое решение, которое удовлетворяет интегральным (3.9), (3.10) и соответствующим граничным условиям <sup>27</sup>.

Используя идеи теории сингулярных возмущений <sup>116</sup>, можно показать <sup>29,32</sup>, что решением, описывающим форму АС (рис. 10, е), с точностью до  $\varepsilon \ll 1$  являются функции  $\theta(x)$ ,  $\eta(x)$ , удовлетворяющие (3.17) — (3.20). Действительно, учитывая симметрию АС относительно точки  $x = 0$  (рис. 10, е), рассмотрим два участка:  $m = 1$ ,  $0 \leq x \leq x_0 \equiv L_s/2$  и  $m = 2$ , где  $x_0 \leq x < \infty$ . Граничные условия для функций  $X_i^{(m)}(x)$  в уравнениях (3.12) на каждом из участков  $m = 1, 2$  имеют вид

$$\begin{aligned} X_2^{(1)}(0) = X_4^{(1)}(0) = 0, \quad X_1^{(2)}(\infty) = \theta_h, \quad X_3^{(2)}(\infty) = \eta_h, \\ X_i^{(1)}(x_0) = X_i^{(2)}(x_0) \quad (i = 1, \dots, 4). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Согласно теории сингулярных возмущений <sup>116</sup>, запишем решения системы (3.12) в виде

$$X_i^{(m)} = \tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon) + X_i^{(m)}(\xi, \varepsilon) \quad (i = 1, \dots, 4; m = 1, 2), \quad (3.22)$$

где  $\zeta = x - x_0$ ,  $\xi = (x - x_0)/\varepsilon$ ; так называемые <sup>116</sup> внешнее  $\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon)$  и внутреннее (пограничное)  $X_i^{(m)}(\xi, \varepsilon)$  решения будем искать в виде рядов по  $\varepsilon$ :

$$\tilde{X}_i(\zeta, \varepsilon) = \tilde{X}_{i,0}(\zeta) + \varepsilon X_{i,1}(\zeta) + \dots + \varepsilon^k \tilde{X}_{i,k}(\zeta) + \dots, \quad (3.23)$$

$$\bar{X}_i(\xi, \varepsilon) = \bar{X}_{i,0}(\xi) + \varepsilon \bar{X}_{i,1}(\xi) + \dots + \varepsilon^k \bar{X}_{i,k}(\xi) + \dots \quad (3.24)$$

\*) Существование в системе различных сложных АС означает, что в четырехмерном фазовом пространстве переменных  $\theta$ ,  $d\theta/dx$ ,  $\eta$ ,  $d\eta/dx$  реализуется множество двояко-асимптотических траекторий, замыкающихся при  $x \rightarrow \pm\infty$  в особой точке  $\theta = \theta_h$ ,  $\eta = \eta_h$ . Последняя согласно теории динамических систем <sup>9</sup> есть седловая точка типа  $O^{2,2}$ , и ей отвечает множество различных замыкающихся в ней траекторий.

Подставим (3.22) — (3.24) в (3.12), (3.13). Разлагая далее функции  $f_j(X_i)$  в ряды по степеням  $\varepsilon$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  (отдельно зависящие от  $\xi$  и отдельно зависящие от  $\xi$  <sup>116</sup>), получим в нулевом по  $\varepsilon$  приближении систему уравнений

$$\tilde{X}_{2,0}^{(m)} = 0, \quad f_2(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)) = 0, \quad \frac{d\tilde{X}_{3,0}^{(m)}}{d\xi} = \tilde{X}_{4,0}^{(m)}(\xi), \quad (3.25)$$

$$\frac{d\tilde{X}_{4,0}^{(m)}}{d\xi} = f_4(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)), \quad (3.26)$$

$$\frac{d\bar{X}_{1,0}^{(m)}}{d\xi} = \bar{X}_{2,0}^{(m)}(\xi), \quad \frac{d\bar{X}_{2,0}^{(m)}}{d\xi} = \bar{f}_{2,0}, \quad \frac{d\bar{X}_{3,0}^{(m)}}{d\xi} = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{d\bar{X}_{4,0}^{(m)}}{d\xi} = 0 \quad (i = 1, \dots, 4; m = 1, 2), \quad (3.28)$$

где

$$\bar{f}_{j,0} = f_j(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0) + \bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)) - f_j(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0)), \quad (3.29)$$

и граничные условия

$$\tilde{X}_{4,0}^{(1)}(-x_0) = 0; \quad \tilde{X}_{i,0}^{(1)}(0) = \tilde{X}_{i,0}^{(2)}(0) \quad (i = 3, 4), \quad (3.30)$$

$$\tilde{X}_{1,0}^{(2)}(\infty) = \theta_h, \quad \tilde{X}_{3,0}^{(2)}(\infty) = \eta_h,$$

$$\tilde{X}_{1,0}^{(1)}(0) + \bar{X}_{1,0}^{(1)}(0) = \tilde{X}_{1,0}^{(2)}(0) + \bar{X}_{1,0}^{(2)}(0), \quad (3.31)$$

$$\bar{X}_{2,0}^{(1)}(0) = \bar{X}_{2,0}^{(2)}(0), \quad (3.32)$$

в которых использовано, что <sup>116</sup>

$$\bar{X}_{i,0}^{(1)}(-\infty) = \bar{X}_{i,0}^{(2)}(\infty) = 0 \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (3.33)$$

Из (3.27), (3.28) и (3.33) следует, что

$$\bar{X}_{3,0}^{(m)}(\xi) = \bar{X}_{4,0}^{(m)}(\xi) = 0 \quad (m = 1, 2). \quad (3.34)$$

Для совместного выполнения условий (3.32) — (3.34) необходимо, чтобы решения  $\bar{X}_{1,0}^{(m)}(\xi)$ ,  $\bar{X}_{2,0}^{(m)}(\xi)$  двух первых уравнений (3.27) отвечали сепаратрисе, идущей из одной седловой точки в другую. Такая ситуация реализуется лишь при условии  $\tilde{X}_{3,0}^{(m)}(0) = \eta_s$  ( $m = 1, 2$ ), где  $\eta_s$  удовлетворяет (3.5). Полагая, что  $\bar{X}_{1,0}^{(1)}(0) = \theta_{s2} - \theta_{s3}$ ,  $\bar{X}_{1,0}^{(2)}(0) = \theta_{s2} - \theta_{s1}$ , из (3.25) — (3.34) получим (3.17) — (3.20).

Вид статических АС в КН- и КИ-системах (рис. 5, а, в), установленный в изложенной теории <sup>26-28</sup>, детально подтвержден численными и аналитическими исследованиями различных моделей <sup>16,33,100,117,118,128,164-167</sup> (см., например, рисунки в п. 1).

**3.4. Радиально-симметричные автосолитоны** <sup>27,28</sup>. Радиально-симметричные статические АС, как следует из (2.2), (2.3), описываются следующей системой уравнений:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \varepsilon^2 2^s \rho^{-1} \frac{d\theta}{d\rho} + \frac{dU_\theta}{d\theta} = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\rho^2} + 2^s \rho^{-1} \frac{d\eta}{d\rho} + \frac{dU_\eta}{d\eta} = 0, \quad (3.36)$$

где радиус  $\rho$  измеряется в единицах  $L$ , а  $U_\theta$  и  $U_\eta$  определены в (3.7), (3.8);  $s = 0$  (или 1) в случае цилиндрической (или сферической) симметрии. Решения (3.35), (3.36) формально можно рассматривать как траектории движения двух взаимодействующих «частиц», движущихся со временем  $\rho$  вдоль осей  $\theta$

и  $\eta$  в потенциалах  $U_\theta$  и  $U_\eta$ , но в отличие от уравнений (3.7), (3.8) при наличии сил трения, убывающих по мере роста  $\rho$ . При возрастании  $\rho$  «работа сил трения» уменьшается, а уравнения (3.35), (3.36) все менее отличаются от уравнений (3.7), (3.8) для одномерного АС. Отсюда следует, что распределения  $\theta(\rho)$  и  $\eta(\rho)$  в АС большого радиуса  $\rho_0 \sim L$  (рис. 11, а) качественно совпадают с  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в одномерном широком АС (рис. 5, а). При этом в стенке АС радиуса  $\rho_0 \gg L$  с точностью до  $\varepsilon = l/L \ll 1$  значение  $\eta = \eta_s$  (3.5), а распределение  $\theta(\rho)$  совпадает с  $\theta(x)$  для одномерного АС (п.3.2). Эти результаты на основе теории сингулярных возмущений обоснованы в <sup>29,32</sup>, где также получены простые уравнения, описывающие  $\theta(\rho)$  и  $\eta(\rho)$  в АС большого радиуса.

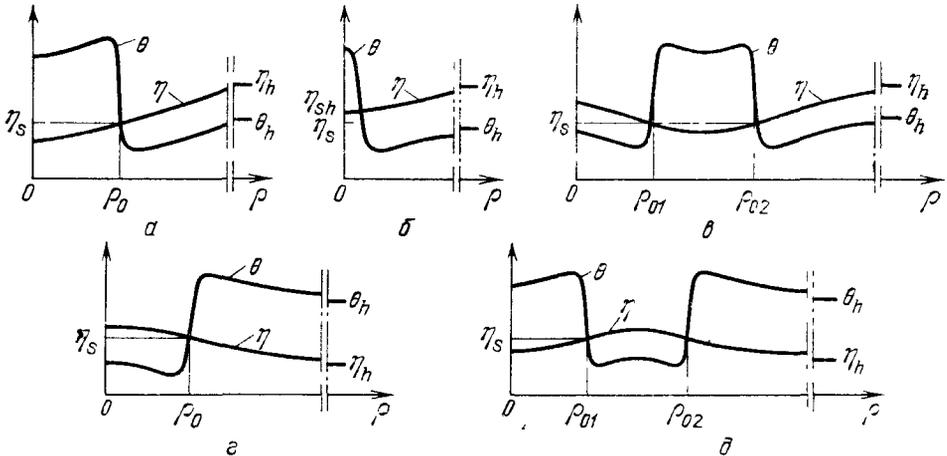


Рис. 11. Радиально-симметричные АС в виде горячего шара или пятна большого (а) и малого (б) радиусов, полого горячего шара или кольца (в), холодного шара или пятна (г), полого холодного шара или пятна (д)

Для описания АС радиуса  $\rho_0 < L$  (рис. 11, б) следует учесть, что за счет работы «сил трения» при движении «энергии частиц» убывают, т. е. «частицы» движутся в потенциалах  $U_\theta$  и  $U_\eta$  по наклонным вниз траекториям. Отсюда вытекает, что в стенке АС радиуса  $\rho_0 < L$  величина  $\eta = \eta_{sh} \neq \eta_s$ , причем для горячего АС в КН-системах  $\eta_{sh} > \eta_s$  (рис. 11, б), а в КИ-системах  $\eta_{sh} < \eta_s$ . Кроме рассмотренных АС в виде горячего сгустка или пятна (рис. 11, а, б) в холодных системах ( $A < A_c$ , рис. 6, кривые а) существуют АС в виде полого шара или цилиндра (рис. 11, в). Такие состояния с большим внутренним радиусом  $\rho_{01}$  (рис. 11, в) в сечении имеют распределения  $\theta(\rho)$  и  $\eta(\rho)$ , близкие к  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в одномерном АС (рис. 5, а).

В горячих системах (при  $A > A'_c$ , рис. 6, а, б, кривые с) можно возбудить радиально-симметричные АС в виде холодного сгустка или пятна (рис. 11, г), а также в виде холодного сферического или цилиндрического слоя (рис. 11, д).

3.5. «Локальный пробой» и деление АС. Из анализа (3.20) или (3.10) вытекает, что при увеличении уровня неравновесности системы (бифуркационного параметра  $A$ ) размер горячего АС  $\mathcal{L}_s$  (рис. 10, е) возрастает <sup>26,28</sup>. Вместе с тем из физики существования АС следует, что размер  $\mathcal{L}_s$  ограничен сверху величиной  $\sim L$  (п. 1). Этот же вывод следует и из процедуры построения АС (п. 3.2) <sup>26,168</sup>. Действительно, распределению  $\eta(x)$  в АС отвечает наивысшая траектория движения «частицы» с координатой  $\eta$  в потенциале  $U_\eta$  (рис. 10, в). Координата  $\eta$  снизу ограничена величиной  $\eta'_0$ . Поэтому наивысшая траектория движения «частицы», проходящая через точку  $\eta = \eta'_0$ , в принципе ограничивает ширину АС.

Такая предельно высокая траектория (рис. 10, з) реализуется в случае, когда при некотором  $A = A_d < A_c$  (значение  $A = A_c$  определяет точку расщепления однородного состояния системы, см. п. 2.2) выполняется условие  $U_\eta(\theta'_0, \eta'_0, A_d) = U_\eta(\theta_h, \eta_h, A_d)$ . Это условие, определяющее критическую

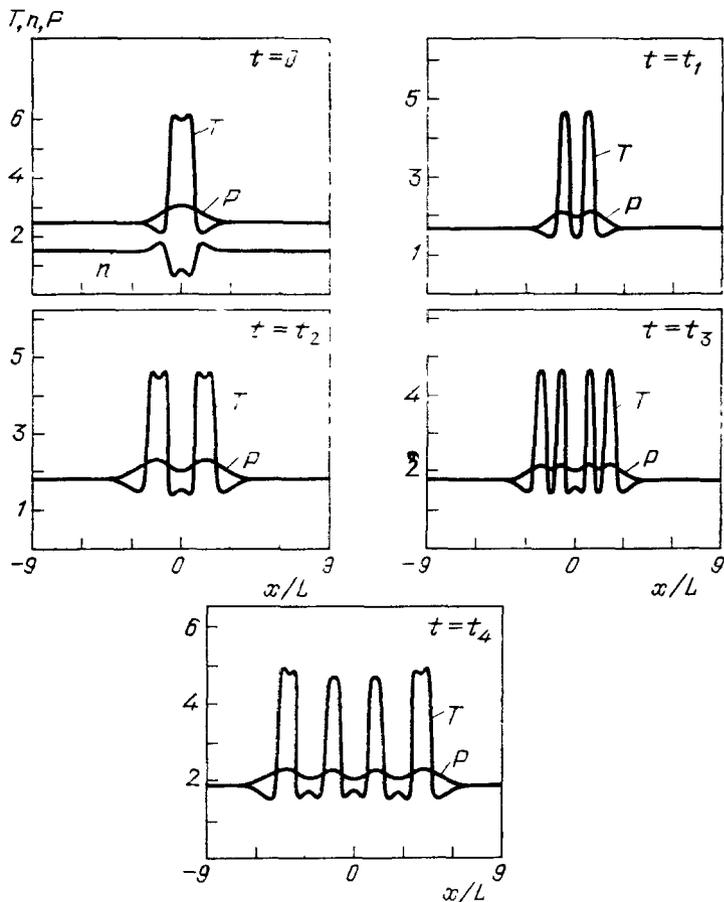


Рис. 12. Кинематика деления АС в «плотной» ЭДП <sup>91</sup> — распределение температуры  $\theta = T/T_l$ , концентрации  $n/n_h$  и давления носителей  $\eta \equiv P/n_h T_l$  в различные моменты времени:  $t_1 = 2\tau_r$ ,  $t_2 = 15\tau_r$ ,  $t_3 = 25\tau_r$ ,  $t_4 = 180\tau_r$

величину  $A = A_d$ , учитывая результаты п. 3.2, с точностью до  $\epsilon \ll 1$  можно записать в виде

$$\int_{\eta_s}^{\eta_h} Q(\theta_I(\eta), \eta, A_d) d\eta = \int_{\eta'_0}^{\eta'_s} Q(\theta_{III}, \eta, A_d) d\eta. \quad (3.37)$$

При этом из (3.20) вытекает, что максимально возможный размер АС равен

$$\mathcal{L}_{\max} = \mathcal{L}_s(A_d) = \sqrt{2}L \int_{\eta'_0}^{\eta_s} \left( \int_{\eta'_0}^{\eta} Q(\theta_{III}(\eta), \eta, A_d) d\eta \right)^{-1/2} d\eta. \quad (3.38)$$

Поскольку при  $A > A_d$  решение в виде горячего АС не существует, то исходное состояние в виде АС должно динамически перестроиться. Такая перестройка будет происходить в результате эффекта «локального пробоя»<sup>29,168</sup>,

т. е. скачкообразного уменьшения значения активатора в центре АС. Последнее определяется тем, что при  $A = A_d$  значение  $\eta$  в центре АС достигает величины  $\eta'_0$ , поэтому при  $A > A_d$  активатор, как видно из рис. 10, а, должен скачком уменьшиться от величины  $\theta_m \approx \theta'_0$  до  $\theta_d$ .

Обусловленное «локальным пробоем» последовательное деление АС наблюдалось при численных исследованиях АС в «плотной» ЭДП (рис. 12) <sup>91</sup>. По-видимому, «локальным пробоем» объясняется и деление АС (в виде доменов), наблюдаемое при численных исследованиях композитных сверхпроводников <sup>169,167,22</sup>.

Последовательное деление АС, обусловленное «локальным пробоем», является одним из сценариев динамической перестройки автоструктур <sup>168</sup>, в результате которой происходит самоорганизация без участия флуктуаций. Эффект «локального пробоя» может определять не только самоорганизацию, происходящую при квазистационарном изменении бифуркационного параметра  $A$ , но и кинетику формирования автоструктур. Так, например, в результате «локального пробоя» при возбуждении системы кратковременным, но достаточно широким импульсом образуются две страты <sup>170,117</sup>, которые могут разбегаться, и в системе при  $A < A_d$  образуется два АС <sup>171</sup>.

В результате эффекта «локального пробоя» в системе могут спонтанно образовываться АС сложного вида. Так, например, АС в виде горячего шара (или пятна) (рис. 11, а) при  $A > A_d$  может превратиться в АС в виде полого горячего шара (или кольца) (рис. 11, в).

Из процедуры построения (п. 3.2) холодного широкого АС (рис. 5, в) в горячей системе следует <sup>168,29</sup>, что при некотором  $A = A'_d$  может возникать эффект «локального пробоя» в центре такого АС, т. е. лавинообразное увеличение значения активатора от величины  $\theta_m \approx \theta_0$  до  $\theta = \theta'_d$  (рис. 10, а). Значение  $A'_d$  и  $\mathcal{L}_{\max} = \mathcal{L}_s(A'_d)$  для холодного АС определяются из условий

$$\int_{\eta_s}^{\eta_h} Q(\theta_{III}(\eta), \eta, A'_d) d\eta = \int_{\eta_s}^{\eta_0} Q(\theta_I(\eta), \eta, A'_d) d\eta, \quad (3.39)$$

$$\mathcal{L}_{\max} = V \sqrt{2} L \int_{\eta_0}^{\eta_s} \left( \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\theta_I(\eta), \eta, A'_d) d\eta \right)^{-1/2} d\eta.$$

#### 4. Устойчивость и эволюция статических АС (KN- и КИ-системы).

4.1. Устойчивость и эволюция структур в системах малого размера <sup>28,31,157</sup>. Для исследования устойчивости состояний в одномерных системах размера  $\mathcal{L} \ll L$  линеаризуем уравнения (2.2), (3.2) и циклические граничные условия вблизи рассматриваемого стационарного распределения  $\theta(x)$  относительно возмущений вида

$$\delta\theta(x, t) = \delta\theta(x) e^{-\gamma t}, \quad \delta\eta(t) = \delta\eta e^{-\gamma t}, \quad \delta A(t) = \delta A e^{-\gamma t}. \quad (4.1)$$

В результате получим

$$(\hat{H}_\theta - \gamma) \delta\theta = -q'_\eta \delta\eta - q'_A \delta A, \quad (4.2)$$

$$\hat{H}_\theta = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\theta, \quad V_\theta = q_\theta(\theta(x), \eta, A),$$

$$\delta\eta = -[\langle Q'_\theta \delta\theta \rangle + \langle Q'_A \delta A \rangle] (\mu_0 - \gamma \alpha^{-1})^{-1}, \quad (4.3)$$

$$\delta\theta(0) = \delta\theta(\mathcal{L}), \quad \left. \frac{d\delta\theta}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\delta\theta}{dx} \right|_{x=\mathcal{L}}, \quad (4.4)$$

где  $\mu_0 = \langle O'_\eta \rangle$ ;  $x$  измеряется в единицах  $l$ , а время —  $\tau_\theta$ . Из (4.1) видно, что распределение  $\theta(x)$  неустойчиво, если  $\text{Re } \gamma < 0$ .

Заметим, что в однопараметрических однородных системах <sup>\*</sup>), в которых ингибитор отсутствует ( $\delta\eta = 0$ ), используя только свойства трансляционной симметрии задачи, можно сделать вывод о том, что все неоднородные распределения  $\theta(x)$  неустойчивы. Действительно, из (4.2) следует, что задача об устойчивости распределений  $\theta(x)$  при  $\delta\eta = 0$  и заданном значении  $A$  сводится к анализу собственных значений самосопряженной задачи

$$\hat{H}_\theta \delta\theta_n = \lambda_n \delta\theta_n \quad (4.5)$$

и (4.4) с нормированными собственными функциями  $\delta\theta_n$ . Следуя <sup>21</sup>, для нахождения спектра  $\lambda_n$  продифференцируем уравнение (3.3) по  $x$ :

$$\hat{H}_\theta \frac{d\theta}{dx} = 0. \quad (4.6)$$

Из (4.6) и (4.5) видно, что  $\delta\theta_m \propto d\theta/dx$  является  $m$ -собственной функцией оператора  $\hat{H}_\theta$ , отвечающей  $\lambda_m = 0$ , где  $m$  — число узлов функции  $d\theta/dx$  в интервале  $(0, \mathcal{L})$ . При рассматриваемых циклических граничных условиях (4.4) функция  $\theta(x)$  имеет хотя бы один экстремум. В результате  $\delta\theta \propto d\theta/dx$  имеет хотя бы один нуль, т. е. согласно осцилляционной теореме <sup>172,173</sup> не является функцией основного состояния задачи (4.5), (4.4), поэтому  $\gamma = \lambda_0 < 0$ .

В двухпараметрических системах малого размера распределения  $\theta(x)$ , имеющие несколько экстремумов (п. 3.1), также неустойчивы. Для того чтобы убедиться в этом, разложим функции  $\delta\theta(x)$  в (4.2) — (4.4) по собственным функциям  $\delta\theta_n$  задачи (4.5), (4.4) и подставим их в (4.2) и (4.3). Подставляя (4.3) в (4.2) при  $\delta A = 0$ , после соответствующих преобразований, получим

$$\left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_0 (\lambda_n - \gamma)^{-1} (\mu_0 - \alpha^{-1} \gamma)^{-1} \right] \prod_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \gamma) = 0, \quad (4.7)$$

где коэффициенты

$$a_n = - \langle q'_\eta \delta\theta_n \rangle \langle Q'_\theta \delta\theta_n \rangle \mu_0^{-1} \geq 0 \quad (4.8)$$

в соответствии с условиями (2.7), (2.9) и (2.10). Используя свойства трансляционной симметрии решений  $\theta(x)$ , задачу (4.2) — (4.4) можно свести к рассмотрению устойчивости распределений  $\theta(x)$ , симметричных относительно центра страты — точки  $x = \mathcal{L}/2$  на рис. 13, а. Относительно этой точки  $q'_\eta(\theta(x))$  и  $Q'_\theta(\theta(x))$  являются четными функциями; функции  $\delta\theta_n(x)$  с четными значениями  $n$  — четные функции  $x$  (рис. 13, з), а с нечетными  $n$  — нечетные (рис. 13, е) <sup>172,173</sup>. Поэтому при нечетных  $n$  коэффициенты  $a_n = 0$ , а согласно (4.7) значения  $\gamma = \lambda_n$ . Отсюда вытекает, что если распределение  $\theta(x)$  имеет больше чем один экстремум, т. е.  $n > 1$ , то оно неустойчиво <sup>\*\*</sup>), поскольку для него по крайней мере  $\gamma = \lambda_1 < 0$ .

Распределение  $\theta(x)$  в виде одной страты (рис. 9, ж и 13), благодаря демпфирующему действию однородно меняющегося ингибитора, оказывается

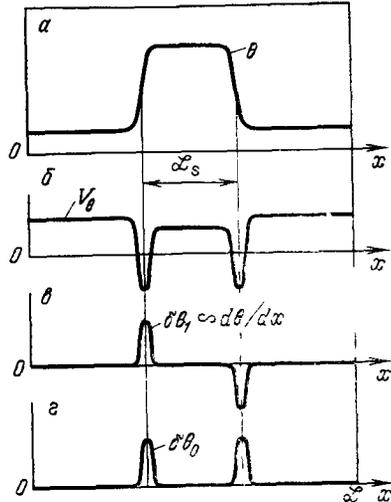


Рис 13. К анализу устойчивости широкой страты (а): вид «потенциала»  $V_\theta$  (б) и соответствующих ему функций первого «возбужденного»  $\delta\theta_1$  (в), и «основного» состояния  $\delta\theta_0$  (г)

<sup>\*</sup>) О влиянии неоднородности в однопараметрических системах см. в <sup>21</sup>.  
<sup>\*\*</sup>) Этот вывод по существу заимствован из теории устойчивости доменов в бистабильных полупроводниках <sup>19,20</sup>. Он справедлив и при нейтральных граничных условиях (3.1) <sup>28</sup>.

устойчивым в широком диапазоне изменений  $A$ . Такое распределение имеет один экстремум, поэтому функция  $d\theta/dx$  (рис. 13,  $a$ ) имеет один узел, и ей согласно (4.5), (4.6) отвечает функция  $\delta\theta_1$  с  $\lambda_1 = 0$ . Отсюда следует, что для всех нечетных значений  $n > 1$  величина  $\gamma = \lambda_n > 0$ . Для четных значений  $n$  только  $\lambda_0 < 0$ , а все остальные  $\lambda_n > 0$ . Согласно (4.7), одиночная страта (рис. 13) неустойчива, если функция

$$D(\gamma \equiv i\omega) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n [(\lambda_n - \alpha^{-1}\mu_0^{-1}\omega^2) + i\omega(1 + \alpha^{-1}\mu_0^{-1}\lambda_n)]}{(\lambda_n^2 + \omega^2)(1 + \alpha^{-2}\mu_0^{-2}\omega^2)} \quad (4.9)$$

имеет хотя бы один нуль в верхней полуплоскости комплексной частоты  $\omega$ . В (4.9)  $n$  — четные числа. Число таких нулей ( $N$ ) согласно принципу аргумента <sup>126</sup>

$$N = P + (2\pi)^{-1} \Delta \arg D(\omega), \quad (4.10)$$

где  $P$  — число полюсов функции  $D(\omega)$  в верхней полуплоскости  $\omega$ . Согласно (2.7)  $\mu_0 > 0$ , поэтому, учитывая, что для страты только  $\lambda_0 < 0$ , из (4.9)

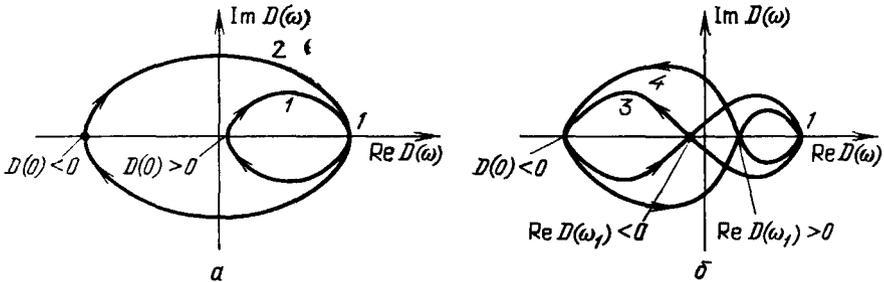


Рис. 14. Качественное поведение комплексной функции  $D(\omega)$  при обходе верхней полуплоскости  $\omega$  при  $K(\omega) > 0$  (а)  $K(\omega) < 0$  (б)

вытекает, что  $P = 1$ . Из (4.9) видно, что  $\text{Re } D(\omega)$  — четная функция  $\omega$ , а  $\text{Im } D(\omega)$  — нечетная, причем  $D(\pm\infty) = 1$  (рис. 14). Поэтому когда  $D(0) > 0$  (кривая 1 на рис. 14, а), то  $N = 1$ , а следовательно, страта неустойчива.

При  $D(0) < 0$  величина  $\Delta \arg D(\omega)$  зависит от поведения функции

$$K(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha\mu_0 + \lambda_n) (\lambda_n^2 + \omega^2)^{-1} \propto \omega^{-1} \text{Im } D(\omega). \quad (4.11)$$

В КН- и КИ-системах благодаря  $\alpha > 1$  (п. 2.2) обычно выполняется условие

$$\alpha\mu_0 + \lambda_0 > 0, \quad (4.12)$$

при котором величина  $K(\omega)$  при всех конечных  $\omega$  заведомо больше нуля, так как все  $a_n \geq 0$  (4.8). В этом случае  $\Delta \arg D(\omega) = -2\pi$  (кривая 2 на рис. 14, а), т. е.  $N = 0$ , а следовательно, при  $D(0) < 0$  страта устойчива. Таким образом, при изменении уровня неравновесности системы в точке  $A = A_b$ , где величина  $D(0)$  меняет знак, у функции  $D(\omega)$  (4.9) в верхней полуплоскости появляется один нуль с  $\text{Im } \gamma = 0$ . Отсюда следует, что при выполнении условия (4.12) неустойчивость страты носит аперриодический характер, а граница ее устойчивости определяется условием

$$D(0) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} = 0. \quad (4.13)$$

Покажем, что условие (4.13) определяет точку  $A = A_b$ , где  $d\eta/dA = \infty$ . Для этого разложим функции  $\delta\theta$  в (4.2) и (4.3) в ряд по  $\delta\theta_n$ . Домножим (4.2)

слева на  $\delta\theta_n$  и усредним по объему системы. В результате, учитывая (4.3) и полагая  $\gamma = i\omega$ , после соответствующих преобразований получим

$$\frac{d\eta}{dA} = (D(\omega))^{-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \langle Q'_0 \delta\theta_n \rangle \langle q'_A \delta\theta_n \rangle (\lambda_n - i\omega)^{-1} - \langle Q'_A \rangle \right] (\mu_0 - i\omega\alpha^{-1})^{-1}. \quad (4.14)$$

Из сравнения (4.14) с (4.13) следует, что в К-системах страта теряет устойчивость в точках, где  $d\eta/dA = \infty$  на частоте  $\omega = 0$ .

Из условия (4.13) можно оценить критическую ширину страты в точке потери ее устойчивости. Для этого заметим, что функция  $\delta\theta_1 \propto d\theta/dx$  локализована в областях стенок широкой страты (рис. 13, *в*) и экспоненциально спадает вне их. Последнее следует из того, что экстремальные точки  $\theta_{\max}$  и  $\theta_{\min}$  распределения  $\theta(x)$  в виде широкой страты экспоненциально близки к седловым точкам  $\theta = \theta_{s3}$  и  $\theta_{s1}$  уравнения (3.3). При приближении к ним<sup>8</sup>

$$\theta(x) - \theta_{s1,3} \propto e^{-\tilde{x}/l_{1,3}}, \quad l_{1,3} = l(V_\theta(\theta_{s1,3}))^{-1/2} \approx l, \quad (4.15)$$

где  $\tilde{x}$  — расстояние от стенки страты. Эти же выводы можно получить и из квантовомеханической аналогии, на основе которой можно восстановить также вид  $\delta\theta_0(x)$  и оценить величину  $\lambda_0$ . Действительно, из построения (п. 3.1) широкой страты (рис. 9) следует: при  $\theta = \theta_{\min} = \theta_{s1}$  и  $\theta = \theta_{\max} = \theta_{s3}$  производная  $q'_\theta > 0$ . Величина  $q'_\theta < 0$  только при значениях  $\theta$ , близких к точкам пересечения ветви II кривой ЛС (п. 2.2) с прямой  $\eta = \eta_s$  (рис. 9, *а, б*). Отсюда вытекает, что в «гамильтониане»  $\hat{H}_\theta$  «потенциал»  $V_\theta = q'_\theta$  в (4.2) для широкой страты имеет вид двух узких (размера  $\sim l$ ) потенциальных ям, локализованных в стенках страты (рис. 13, *б*) и разделенных потенциальными барьерами высотой  $V_\theta = q'_\theta(\theta_{s1,3}) \sim 1$ . Таким образом, значение  $\lambda_1 = 0$  расположено глубоко в этих ямах. Поэтому функция  $\delta\theta_1$  должна представлять собой асимметричную комбинацию функций  $\delta\theta_0^{(0)}$  основного состояния каждой из изолированных ям потенциала  $V_\theta$  (рис. 13, *б*). Вне этих потенциальных ям локализованные функции  $\delta\theta_0^{(0)}$  экспоненциально затухают, причем по тому же закону<sup>172</sup>, что и (4.15). Функция основного состояния  $\delta\theta_0$  (рис. 13, *з*) потенциала  $V_\theta$  (рис. 13, *б*) есть симметричная комбинация<sup>172</sup> функций  $\delta\theta_0^{(0)}$  основного состояния каждой из изолированных ям. Благодаря экспоненциально малому перекрытию функций  $\delta\theta_0^{(0)}$  функции  $\delta\theta_0$  отвечает<sup>172</sup> собственное значение  $\lambda_0 \sim -\exp(-\mathcal{L}_s/l)$ , где  $\mathcal{L}_s$  — размер горячей страты (рис. 13, *а*). Поскольку  $|\lambda_0| \ll 1$ , то в суммах (4.7) и (4.13) можно ограничиться лишь первым членом и при  $\alpha > 1$  и  $\gamma \rightarrow 0$  найти, что

$$\gamma = \lambda_0 + a_0, \quad D(0) = 1 + \frac{a_0}{\lambda_0} = 0. \quad (4.16)$$

Выражения (4.16) наглядно иллюстрируют приведенный выше вывод о том, что условие (4.13) отвечает точке, где  $\gamma = 0$ . Напомним, что критическая флуктуация  $\delta\theta_0$  при  $\delta\eta = 0$  имеет инкремент  $-\lambda_0$ . Ее нарастание демпфируется соответствующим изменением ингибитора, что описывается коэффициентом  $a_0 > 0$  в выражении (4.16) для  $\gamma$ . Учитывая условия (2.9) и (2.10), а также локализованный характер нормированной функции  $\delta\theta_0$  (рис. 13, *з*), из (4.8) получим, что

$$a_0 \approx \frac{l}{\mathcal{L}} |\langle q'_\eta \rangle_{sh} \langle Q'_\theta \rangle_{sh}| \mu_0^{-1} \sim \frac{l}{\mathcal{L}}, \quad (4.17)$$

где символ  $\langle \dots \rangle_{sh}$  означает усреднение функции по области стенки страты, точнее области локализации функции  $\delta\theta_0$  (рис. 13, *з*). Подставляя в (4.16) оценки для  $\lambda_0$  и  $a_0$ , из условия  $\gamma = 0$  найдем, что критический размер

страты примерно равен

$$\mathcal{L}_s(A_b) = \mathcal{L}_b \sim l \ln \frac{\mathcal{L}}{l}. \quad (4.18)$$

Заметим, что (4.18) получено из условия порога устойчивости страты (4.13), которое определяет точку  $A = A_b$ , где  $d\eta/dA = \infty$ . При уменьшении  $A$  ширина страты уменьшается (п. 3.1), поэтому в точке  $A = A_b$  страта, имея ширину  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_b$  (4.18), скачкообразно исчезнет. Более подробно эволюция страты при  $\mathcal{L} \ll L$  проанализирована в <sup>28</sup>, а радиально-симметричных состояний — в <sup>31</sup>.

В дву- и трехмерном случае при исследовании устойчивости страты следует учитывать флуктуации  $\delta\theta \propto \delta\theta(x) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \gamma t)$  с  $k_\perp \neq 0$  ( $k_\perp^2 = (2\pi l \cdot n_1 / \mathcal{L}_y)^2 + (2\pi l \cdot n_2 / \mathcal{L}_z)^2$ ;  $n_{1,2} = 1, \dots$ ). Для таких неоднородных вдоль стенок страты флуктуаций в (4.7) все коэффициенты  $a_n = 0$ , а  $\lambda_n$  меняются на  $\lambda_n + k_\perp^2$ . Поэтому из (4.7) следует, что

$$\gamma_{\min} = \lambda_0 + \left( \frac{2\pi l}{\mathcal{L}} \right)^2, \quad \bar{\mathcal{L}} = \max\{\mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z\}. \quad (4.19)$$

Подставляя в (4.19)  $\lambda_0 \sim -\exp(-\mathcal{L}_s/l)$ , получим критическую ширину страты, при которой она расслаивается в плоскости своих стенок:  $\mathcal{L}_s \sim \sim l \cdot \ln(\bar{\mathcal{L}}/l)^2$ .

4.2. Устойчивость АС в одномерных системах <sup>25-28</sup>. Линеаризуем уравнения (2.2), (2.3) вблизи решения в виде одномерного АС относительно флуктуаций вида

$$\delta\theta(r, t) = \delta\theta(x) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \gamma t), \quad \delta\eta(r, t) = \delta\eta(x) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \gamma t). \quad (4.20)$$

В результате для одномерного случая ( $k_\perp = 0$ ) приходим к системе уравнений

$$(\hat{H}_\theta - \gamma) \delta\theta = -g'_\theta \delta\eta, \quad \hat{H}_\theta = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\theta, \quad V_\theta = g'_\theta(\theta(x), \eta(x), A), \quad (4.21)$$

$$(\hat{H}_\eta - \alpha^{-1}\gamma) \delta\eta = -Q'_\theta \delta\theta, \quad (4.22)$$

$$\hat{H}_\eta = -\varepsilon^{-2} \frac{d^2}{dx^2} + V_\eta, \quad V_\eta = Q'_\eta(\theta(x), \eta(x), A),$$

в которых длина и время изменяются, соответственно, в единицах  $l$  и  $\tau_\theta$ .

Дифференцируя уравнения (3.7), (3.8) по  $x$ , легко убедиться, что  $\delta\theta \propto \propto d\theta/dx$  и  $\delta\eta \propto \propto d\eta/dx$  есть собственные функции задачи (4.21), (4.22) при циклических граничных условиях, отвечающие собственному значению  $\gamma = 0$ . Этот результат является следствием трансляционной симметрии задачи. Из него для систем с  $\eta(x) = \text{const}$  однозначно следует, что любое решение  $\theta(x)$ , для которого функция  $d\theta/dx$  имеет более одного узла, неустойчиво (п. 4.1).

Для рассматриваемой сложной задачи (система уравнений (4.21), (4.22) четвертого порядка), в отличие от задачи (4.5), (4.4), осцилляционной теоремы не существует. Устойчивыми оказываются состояния не только в виде широкого АС, для которого  $d\theta/dx$  имеет пять узлов (рис. 10, е), но и более сложные состояния <sup>27,166</sup>.

Устойчивость и эволюцию АС при изменении неравновесности системы удобно анализировать (п. 4.3), используя бифуркационную характеристику системы — зависимость от  $A$  (рис. 15) значения  $\eta = \eta_s$  в стенке АС (рис. 10, е). В К-системах порогу устойчивости АС на этой характеристике отвечает точка

$A = A_b$ , где  $d\eta_s/dA = \infty$  (рис. 15). Это утверждение представляет собой обобщение результата, приведенного в п. 4.1 для систем с  $\mathcal{L} \ll L$ , для которых  $\eta(x) = \eta_s$ . Его можно установить из следующих простых соображений.

Малые изменения  $d\theta$  и  $d\eta$  исходных распределений  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$ , вызванные малым изменением параметра  $A$ , согласно (3.7), (3.8) определяются из уравнений

$$\hat{H}_\theta d\theta = -q'_\eta d\eta - q'_A dA, \quad \hat{H}_\eta d\eta = -Q'_\theta d\theta - Q'_A dA. \quad (4.23)$$

Наличие точки, где  $d\eta_s/dA = \infty$ , означает, что в ней при  $dA = 0$  приращения  $d\eta(x)$  и  $d\theta(x)$  не равны нулю и не отвечают функциям  $\delta\eta \propto d\eta/dx$  и  $\delta\theta \propto d\theta/dx$ , описывающим малый сдвиг АС. Из (4.23) при  $dA = 0$  видно, что

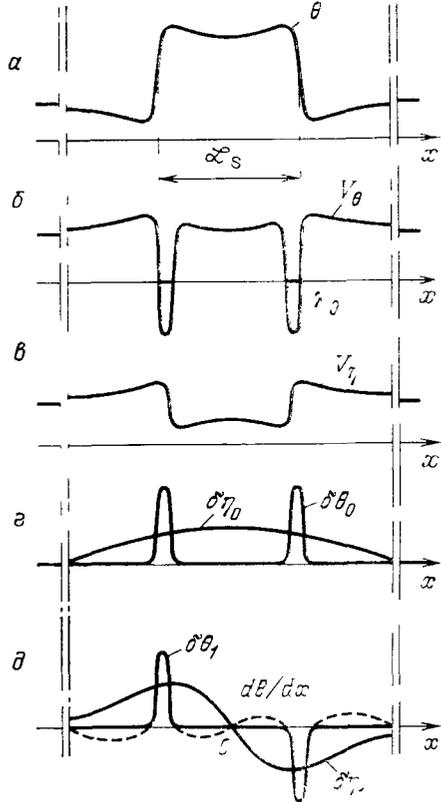
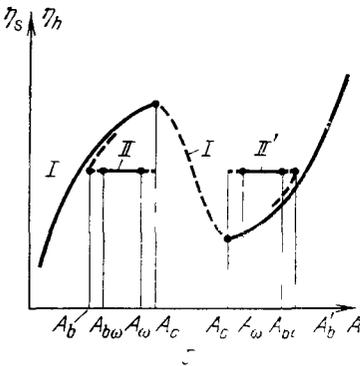
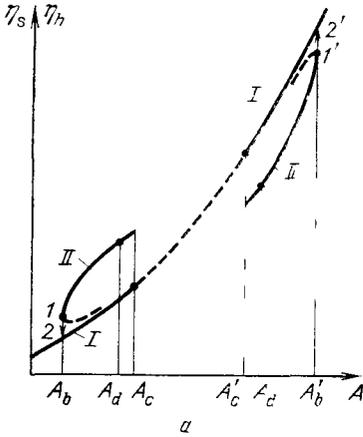


Рис. 15. Вид бифуркационных характеристик для разогретой излучением или электрическим полем ЭДП (п. 1.1) <sup>24,25</sup> (а), для разогретой в процессе оже-рекомбинации вырожденной ЭДП (п. 1.3) <sup>22</sup> (б). Кривые I, II, I', II' отвечают соответственно однородному состоянию ЭДП, горячему и холодному АС; штриховые участки кривых соответствуют неустойчивым состояниям

Рис. 16. К исследованию устойчивости статического АС а — Распределение активатора в широком АС б, в — Вид «потенциалов»  $V_\theta$  (б) и  $V_\eta$  (в) для флуктуаций  $\xi, \theta$  — Вид критических (г) и «сдвиговых» (д) флуктуаций активатора  $\delta\theta_{0,1}$  и соответствующих демпфирующих их возмущении  $\delta\eta_{0,1}$

такие приращения  $d\eta(x)$  и  $d\theta(x)$  отвечают нетривиальному решению системы уравнений (4.21), (4.22) при  $\gamma = 0$ . Отсюда вытекает, что порог устойчивости АС в К-системах ( $\gamma = 0$ ) коррелирует с точкой  $A = A_b$  (рис. 15), где производные по  $A$  характерных для АС величин ( $\eta_s, \mathcal{L}_s$  и др.) обращаются

в бесконечность \*). Из этого утверждения однозначно не следует, что в принципе не может существовать других значений  $A \neq A_b$ , в которых  $\text{Re } \gamma$  меняет знак. Например, АС сложного вида (рис. 7, б, в) могут терять устойчивость, не доходя до точки  $A = A_b$  (см. последний абзац п. 4.3).

Устойчивость широкого АС при  $A > A_b$  связана с тем, что «опасные» флуктуации активатора демпфируются соответствующим неоднородным изменением ингибитора (рис. 16). Для того чтобы убедиться в этом и провести оценку величины критического размера АС в точке  $A = A_b$ , рассмотрим собственные функции и значения задач

$$\hat{H}_\theta \delta\theta_n = \lambda_n \delta\theta_n, \quad \hat{H}_\eta \delta\eta_k = \mu_k \delta\eta_k, \quad (4.24)$$

для которых функции  $\delta\theta_n$  и  $\delta\eta_k$  нормированы и удовлетворяют циклическим граничным условиям. Из (4.21), (4.22) видно, что собственные функции  $\delta\theta_n$  и значения  $\lambda_n$  описывают флуктуации активатора при  $\delta\eta = 0$ , а  $\delta\eta_k$  и  $\mu_k$  — флуктуации ингибитора при  $\delta\theta = 0$ .

Согласно (4.22) и (2.7) в «гамильтониане»  $\hat{H}_\eta$  «потенциал»  $V_\eta = Q'_\eta > 0$ . Отсюда вытекает<sup>172</sup>, что все  $\mu_k > 0$ , причем согласно осцилляционной теореме<sup>172,173</sup> чем больше индекс  $k$ , тем больше значение  $\mu_k$ . Это отражает тот факт, что благодаря  $Q'_\eta > 0$  (п. 2.2) все флуктуации ингибитора при  $\delta\theta = 0$  являются затухающими.

«Потенциал»  $V_\theta = q'_\theta$  в «гамильтониане»  $\hat{H}_\theta$  (4.21), так же как и в случае системы малого размера (рис. 13, б), представляет собой две узкие (размера порядка  $l$ ) потенциальные ямы (рис. 16), локализованные в стенках АС, т. е. расположенные на расстоянии  $\mathcal{L}_s$  друг от друга. Действительно, в КН- и КИ-системах (п. 2.2) производная  $q'_\theta < 0$  для ветви II кривой ЛС и  $q'_\theta > 0$  для ветвей I и III кривой ЛС (рис. 10, а). Поэтому из процедуры построения АС (п. 3.2) следует, что в областях плавных изменений  $\theta(x)$  (вне стенок АС на рис. 10) величина  $V_\theta = q'_\theta > 0$  и лишь в некоторых областях резких изменений  $\theta(x)$ , т. е. стенок АС, величина  $V_\theta < 0$ . Вне стенок АС величина  $V_\theta = q'_\theta \sim 1$ , поэтому основные функции  $\delta\theta_n^{(0)}$  каждой уединенной потенциальной ямы (рис. 16, б) сильно локализованы.

Для нахождения соответствующего этим функциям собственного значения  $\lambda_0^{(0)}$  продифференцируем уравнение (3.7) по  $x$ , домножим его слева на  $\delta\theta_0^{(0)}$  и усредним по  $x$ . Домножим затем первое из уравнений (4.24) для  $n = 0$  слева на  $d\theta/dx$  и усредним его по  $x$ . Вычитая полученные таким образом уравнения друг из друга и учитывая эрмитовость оператора  $\hat{H}_\theta$ , найдем, что

$$\lambda_0^{(0)} = - \left\langle \frac{d\theta}{dx} q'_\theta \left( \frac{d\eta}{d\theta} \right) \delta\theta_0^{(0)} \right\rangle \left\langle \delta\theta_0^{(0)} \frac{d\theta}{dx} \right\rangle^{-1} \sim - \frac{\varepsilon \mathcal{L}_s}{L}. \quad (4.25)$$

При оценке  $\lambda_0^{(0)}$  в (4.25) было использовано, что собственная функция  $\delta\theta_0^{(0)}$  локализована в области ямы размером  $\sim 1$  ( $l$ ), где  $\theta$  изменяется на величину  $\sim 1$ , а  $\eta$  — на величину  $\sim \varepsilon \mathcal{L}_s / L$ . Поскольку глубина и ширина ямы  $\sim 1$ , то  $\lambda_1^{(0)} - \lambda_0^{(0)} \sim 1$ <sup>172</sup>, т. е. первому «возбужденному» состоянию в яме отвечает значение  $\lambda_1^{(0)} \sim 1$ .

«Потенциал»  $V_\theta$  представляет собой две одинаковые ямы, разделенные горбом величиной  $\sim 1$  (рис. 16, б), поэтому благодаря экспоненциально слабому перекрытию основного состояния каждой из «изолированных» ям уровень  $\lambda_0^{(0)}$  расщепится на два экспоненциально близких уровня<sup>172</sup>:  $\lambda_1 \sim -\varepsilon \mathcal{L}_s / L$  и

$$\lambda_0 \sim -\varepsilon \frac{\mathcal{L}_s}{L} - e^{-\mathcal{L}_s/l}. \quad (4.26)$$

\*) Это утверждение справедливо в том случае, когда на пороге устойчивости  $\text{Im } \gamma = 0$ . Иная ситуация реализуется в КΩ-системах (п. 6.2).

При этом собственным значениям  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  оператора  $\hat{H}_\eta$  отвечают функции  $\delta\theta_0$  и  $\delta\theta_1$ , которые есть связывающая и антисвязывающая комбинации функций основного состояния  $\delta\theta_0^{(0)}$  каждой из «изолированных» ям (рис. 16,  $\varepsilon$  и  $\delta$ )<sup>172</sup>. Учитывая, что  $\lambda_1^{(0)} \sim 1$ , можно сделать вывод, что в спектре  $\lambda_n$  имеются только два отрицательных значения. Отвечающие им функции  $\delta\theta_0$  и  $\delta\theta_1$  являются единственными нарастающими (с инкрементами  $-\lambda_0$  и  $-\lambda_1$ ) флуктуациями активатора при  $\delta\eta = 0$ . Демпфирующее воздействие на нарастание этих функций ингибитора описывается членом  $-q_\eta\delta\eta$  в (4.21). Учитывая, что  $\delta\theta_0(x)$  — четная, а  $\delta\theta_1(x)$  — нечетная функции  $x$  относительно центра АС (рис. 16), легко убедиться, что так же, как и в системах малого размера (п. 4.1), нарастание этих функций происходит независимо.

Функция  $\delta\theta_1$  с точностью до  $\varepsilon \ll 1$  близка к истинной флуктуации активатора  $\delta\theta \propto d\theta/dx$  (рис. 16,  $\delta$ ), которая описывает малый трансляционный сдвиг АС. Поэтому соответствующее функции  $\delta\theta \approx \delta\theta_1$  собственное значение задачи (4.21), (4.22)  $\gamma_1 = 0$ . Таким образом, среди флуктуаций активатора  $\delta\theta$  в задаче (4.21), (4.22) единственно «опасной» оказывается флуктуация  $\delta\theta \approx \delta\theta_0$  (рис. 16,  $\varepsilon$ ). Ее нарастание может подавляться соответствующим изменением ингибитора, которое согласно (4.22) равно

$$\delta\eta = -\langle GQ_\theta\delta\theta_0 \rangle = -\sum_{k=0}^{\infty} \delta\eta_k \langle \delta\eta_k^* Q_\theta \delta\theta_0 \rangle (\mu_k - \alpha^{-1}\gamma)^{-1}, \quad (4.27)$$

где  $\Gamma(x, x', \gamma)$  — функция Грина однородной задачи (4.22); символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение функции по объему системы, а  $k$  — четные числа, поскольку для нечетных  $k$  интегралы в (4.27) равны нулю из-за разной симметрии функций  $\delta\eta_k$  и  $\delta\theta_0$ .

Подставим (4.27) в (4.21) с функцией  $\delta\theta = \delta\theta_0$ , домножим полученное уравнение слева на  $\delta\theta_0$  и усредним его по объему системы. В результате получим уравнение для определения критического значения  $\gamma$ :

$$\Phi(\gamma) = \lambda_0 - \gamma + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k (\mu_k - \alpha^{-1}\gamma)^{-1} = 0, \quad (4.28)$$

где все коэффициенты

$$a_k = -\langle \delta\eta_k^* Q_\theta \delta\theta_0 \rangle \langle \delta\eta_k q_\eta \delta\theta_0 \rangle \mu_k^{-1} \geq 0 \quad (4.29)$$

в соответствии с условиями (2.7), (2.9) и (2.10). Из (4.28) следует, что АС устойчив, когда функция  $\Phi(\gamma = i\omega)$  не имеет нулей в верхней полуплоскости комплексной частоты  $\omega$ . Из анализа этой функции (см. п. 6.2) следует, что в К-системах, в которых выполнено условие (4.12), величина  $\gamma$  вблизи порога устойчивости АС равна

$$\gamma = \lambda_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad (4.30)$$

где  $k$  — четные числа. Так же как и в (4.16), второе слагаемое в (4.30) описывает демпфирующее воздействие ингибитора на нарастание критической флуктуации  $\delta\theta \approx \delta\theta_0$ . С ростом индекса  $k$  величина  $\mu_k$  увеличивается, а число узлов у функции  $\delta\eta_k$  растет. Поэтому в сумме (4.30) можно сохранить лишь первый член. Полагая в (4.30) величину  $\gamma = 0$  и учитывая (4.26), найдем оценку для критической ширины АС (в точке  $A = A_b$ ):

$$\mathcal{L}_s(A_b) = \mathcal{L}_b \sim l \ln \frac{L}{l}. \quad (4.31)$$

При выводе (4.31) было учтено, что  $a_0 \sim l/L$ . Эта оценка следует из формулы (4.29), если в ней учесть условия нормировки функций  $\delta\theta_0$  и  $\delta\eta_0$  и то, что  $\delta\theta_0$  локализована в стенках АС размера  $\sim l$ , а плавно меняющаяся функция  $\delta\eta_0$  — в областях размера  $\sim L$  (рис. 16,  $\varepsilon$ ).

Заметим, что (4.31) совпадает с (4.18), если в последней заменить  $\mathcal{L}$  на  $L$  — характерный размер области локализации АС (рис. 10, е).

4.3. Эволюция автосолитонов<sup>25,26,29</sup>. При  $A < A_c$  в устойчивой системе можно возбудить горячий АС (рис. 5, а), для которого значение  $\eta = \eta_s$  в стенке АС (п. 3.2) существенно отличается от  $\eta = \eta_h$  (рис. 15). При уменьшении  $A$  (уровня возбуждения системы) АС сужается (п. 3.2) и в точке  $A = A_b$ , где его размер  $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_b$  (4.31), АС скачкообразно исчезает (скачок  $1 \rightarrow 2$  на рис. 15, а). Значение  $A = A_b$  отвечает точке, где  $d\eta_s/dA = \infty$  (п. 4.2). Поскольку согласно (4.31) при  $L \gg l$  величина  $\mathcal{L}_b \gg l$ , то практически во всей области существования АС его основные параметры и зависимость  $\eta_s(A)$ , т. е. бифуркационная характеристика системы, определяются из простых уравнений (3.5) и (3.20). При этом с точностью до  $\varepsilon \ll 1$  величина  $A_b = A_s$ . (Величина  $A = A_s$  определяется из уравнений (3.5) и (2.5), в которых  $\eta_h = \eta_s$ , а  $\theta_h = \theta_{s1}$  (п. 3.1)).

При увеличении  $A$  размер АС увеличивается, и при  $A > A_c$  в результате неустойчивости однородного состояния вне области локализации АС в системе возникают страты. Однако возможен и другой сценарий перестройки АС. При  $A = A_d < A_c$  ширина АС может достигнуть критического размера, при котором в центре АС произойдет «локальный пробой», приводящий к делению АС (п. 3.5). В результате последовательного деления образующихся АС вся система заполнится стратами (рис. 12)<sup>91</sup>.

При  $A > A_c$  в горячей устойчивой системе можно возбудить холодный АС (рис. 5, в), который при увеличении  $A$  сужается и скачкообразно исчезает в точке  $A = A'_b$ , где  $d\eta_s/dA = \infty$  (скачок  $1' \rightarrow 2'$  на рис. 15). Для критического размера АС при  $A = A'_b$  справедлива формула (4.31). Таким образом, основные параметры холодного АС, так же как и горячего, практически во всей области его существования с точностью до  $\varepsilon \ll 1$  определяются из простых уравнений (3.5) и типа (3.20) (см. п. 3.2), причем величина  $A'_b = A'_s$ . (Величина  $A = A'_s$  определяется из уравнений (3.5) и (2.5) при  $\eta_h = \eta_s$  и  $\theta_h = \theta_{s3}$  (п. 3.1).) При уменьшении  $A$  ширина холодного АС увеличивается и в точке  $A = A_c$  или  $A'_d > A'_c$  (рис. 15, а) вся система в результате флуктуационной или динамической перестройки заполняется стратами (п. 3.5).

АС могут образовываться в системе и спонтанно. В однородных системах при  $A = A_c$  в результате неустойчивости однородного состояния скачкообразно образуются страты (п. 2.2). При уменьшении  $A$  число страт вследствие неустойчивости (типа «перекачки») \*)<sup>25,26</sup> скачкообразно спонтанно уменьшается, и при  $A \rightarrow A_b$  в ней образуется АС<sup>25,26,29</sup>. В реальной системе АС может спонтанно скачкообразно образовываться у малой неоднородности<sup>29</sup> при  $A$ , близких к  $A_c$  (или  $A'_c$ ).

Изложенная картина эволюции АС объясняет результаты численных исследований моделей композитных сверхпроводников<sup>22,167,169</sup> и электронно-дырочной плазмы (рис. 15)<sup>91,100,171</sup>.

Отметим особенности перестройки формы сложных АС при изменении  $A$ . В сложном АС (п. 3.2) «локальный пробой» может произойти лишь в наиболее широкой страте (области высокого или низкого значения активатора). Это может привести не к заполнению стратами всего образца (п. 3.5), а к возникновению более сложного АС, содержащего большее количество страт. В сложном АС неустойчивость типа «перекачки», возникающая в окрестно-

\*) Неустойчивость двух близко расположенных страт связана с тем, что из-за сильного диффузионного расплывания ингибитора его изменения не могут локально отслеживать нарастания антисимметричных флуктуаций активатора<sup>25,29</sup>. Такая «перекачка» активатора между стратами приводит к нарастанию амплитуды или ширины страты за счет «съедания» соседней. Эффект «перекачки» определяет минимально возможное расстояние  $\mathcal{L}_{min}$  между стратами. Величина  $\mathcal{L}_{min}$  зависит от  $A$ <sup>31</sup>. Из-за эффекта «перекачки» нельзя возбудить два АС на расстоянии  $\mathcal{L} < \mathcal{L}_{min}$ , что подтверждают и численные исследования<sup>117</sup>.

сти двух наиболее близко расположенных страт, может привести к образованию АС, содержащему меньшее количество страт. Такая неустойчивость возникает, не доходя до точек  $A_b$  или  $A'_b$ , которые определяют границы устойчивости простого АС (рис. 15, а).

4.4. Автосолитоны в двух- и трехмерных системах  $\alpha x$  <sup>27-29</sup>. Горячий широкий одномерный АС (рис. 16, а) в двух- и трехмерных системах устойчив, но в меньшем диапазоне изменений  $A$ , чем в одномерных. На границах этого диапазона [ $A_{b1}$ ,  $A_{c1}$ ] одномерный АС теряет устойчивость относительно флуктуаций вида (4.20) с  $k_{\perp} \neq 0$ , неоднородных в области стенок АС, т. е. приводящих в двумерной системе к гофрировке поверхности его стенок, а в трехмерной — к появлению на них ячеистой структуры или же стремящихся разбить АС на более мелкие области. Для того чтобы убедиться в этом, учтем в (4.20)  $k_{\perp} \neq 0$  и после соответствующих преобразований придем к уравнениям (4.28), (4.29), в которых следует заменить  $\lambda_0$  на  $\lambda_0 + k_{\perp}^2$ , а  $\mu_k$  на  $\mu_k + \varepsilon^{-2}k_{\perp}^2$ . В результате вместо (4.30) получим

$$\gamma = \lambda_0 + k_{\perp}^2 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k (\mu_k + \varepsilon^{-2}k_{\perp}^2)^{-1}, \quad (4.32)$$

где  $a_k$  дается (4.29). Ограничиваясь в сумме (4.32) лишь первым членом и учитывая оценку для  $a_0 \sim \varepsilon$  и локализованный характер функций  $\delta\theta_0$  (рис. 16, з), получим, что стенки АС расслаиваются относительно критических флуктуаций  $\delta\theta \approx \delta\theta_0(x) \exp(ik_{\perp}r_{\perp})$  с  $k_{\perp} \sim (l/L)^{1/4} (lL)^{-1/2}$ , а ширина АС в точках  $A = A_{b1}$  и  $A = A_{c1}$  соответственно равна

$$\mathcal{L}_{b1} \equiv \mathcal{L}_s(A_{b1}) \sim l \ln \left( \frac{L}{l} \right)^{3/2}, \quad \mathcal{L}_{c1} \equiv \mathcal{L}_s(A_{c1}) \sim (lL)^{1/2}. \quad (4.33)$$

Более строгий результат, учитывающий всю сумму в (4.32), можно получить в случае, когда  $Q'_n \equiv B = \text{const}$ . Для таких систем функция Грина в (4.27) равна

$$\begin{aligned} \Gamma(x, x', \gamma) &= \frac{\varepsilon}{2w} \exp[-\varepsilon w(x - x')] \quad \text{при } x \geq x', \\ &= \frac{\varepsilon}{2w} \exp[\varepsilon w(x - x')] \quad \text{при } x \leq x', \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $w = (B + \varepsilon^{-2}k_{\perp}^2 - \gamma\alpha^{-1})^{1/2}$ . Используя (4.34), получим выражение для  $\gamma$ , из анализа которого следует, что  $k_{\perp} \sim (l/L)^{1/6} (lL)^{-1/2}$ , а

$$\mathcal{L}_{b1} \sim l \ln \left( \frac{L}{l} \right)^{4/3}, \quad \mathcal{L}_{c1} \sim (lL)^{1/2} \left( \frac{l}{L} \right)^{-1/6}. \quad (4.35)$$

Из сравнения (4.33), (4.35) с (4.31) видно, что  $\mathcal{L}_b < \mathcal{L}_{b1}$ , т. е. при уменьшении  $A$  автосолитон расслаивается в точке  $A_{b1} > A_b$  (рис. 15). Этот результат более строго можно получить из анализа (4.32) и (4.30).

С другой стороны, поскольку  $\mathcal{L}_{c1} \ll L$ , то при увеличении  $A$  расширяющийся АС может расслаиваться вдоль стенок при  $A = A_{c1}$ , не доходя до точки  $A = A_d$  или  $A = A_e$  (п. 4.3).

Аналогичные выводы можно сделать и о расслоении устойчивого одномерного холодного АС (рис. 5, в, з) при изменении уровня неравновесности горячей системы. Об устойчивости широких одномерных АС в двумерных системах свидетельствуют и численные расчеты <sup>118</sup>.

В трехмерных системах можно возбудить радиально-симметричный АС (п. 3.4) в виде сгустка (рис. 11, а, б, з) или полого шара (рис. 11, в, д), а в двухмерных — в виде пятна или кольца. Критические флуктуации  $\delta\theta$  локализованы в поверхностном слое (толщиной  $\sim l$ ) сгустка или пятна радиуса  $\rho = \rho_0 \gg l$ . Инкремент нарастания такой радиально-симметричной флуктуации  $\delta\theta_0$  при  $\delta\eta = 0$  примерно равен <sup>35</sup>  $\lambda_0 \sim -\varepsilon\rho_0/L - (l/\rho_0)^2$ . Нарастание  $\delta\theta_0$  демпфируется соответствующим изменением ингибитора вплоть до точки

$A = A_b$ , где  $d\eta_s/dA = \infty$ . При  $A = A_b$  сгусток скачкообразно исчезает (рис. 15). При увеличении  $A$  радиус сгустка (пятна) увеличивается, но он может потерять устойчивость, не доходя до точек  $A = A_d$  или  $A = A_c$  (рис. 15) относительно радиально-несимметричных флуктуаций. АС в виде полого шара или кольца с внутренним радиусом  $\rho_{01} > L$  устойчив при таких значениях  $A$ , для которых его толщина  $\mathcal{L}_s = \rho_{02} - \rho_{01}$  меняется в диапазоне, границы которого  $\mathcal{L}_{b1}$  и  $\mathcal{L}_{c1}$  определяются (4.33) или (4.35). Вне этого диапазона АС теряет устойчивость относительно радиально-несимметричных флуктуаций<sup>29</sup>.

Отсюда следует, что картина эволюции радиально-симметричных АС может быть весьма сложной. При увеличении  $A$  расширяющийся АС в виде сгустка (рис. 11, а) может в результате «локального пробоя» (п. 3.5) превратиться в полный шар (рис. 11, в), который затем в результате нарастания радиально-несимметричных флуктуаций может раздробиться на более мелкие части. В результате в системе может возникнуть много АС или один АС, но весьма сложного вида.

**5. Пиковые статические автосолитоны (КЛ-, KV-системы).** В п. 3 и 4 рассмотрены АС в КН- и КИ-системах, амплитуда которых согласно (3.5) ( $\theta_{\max} - \theta_{\min} = \theta_{s3} - \theta_{s1}$ ) определяется наличием ветви III однозначной

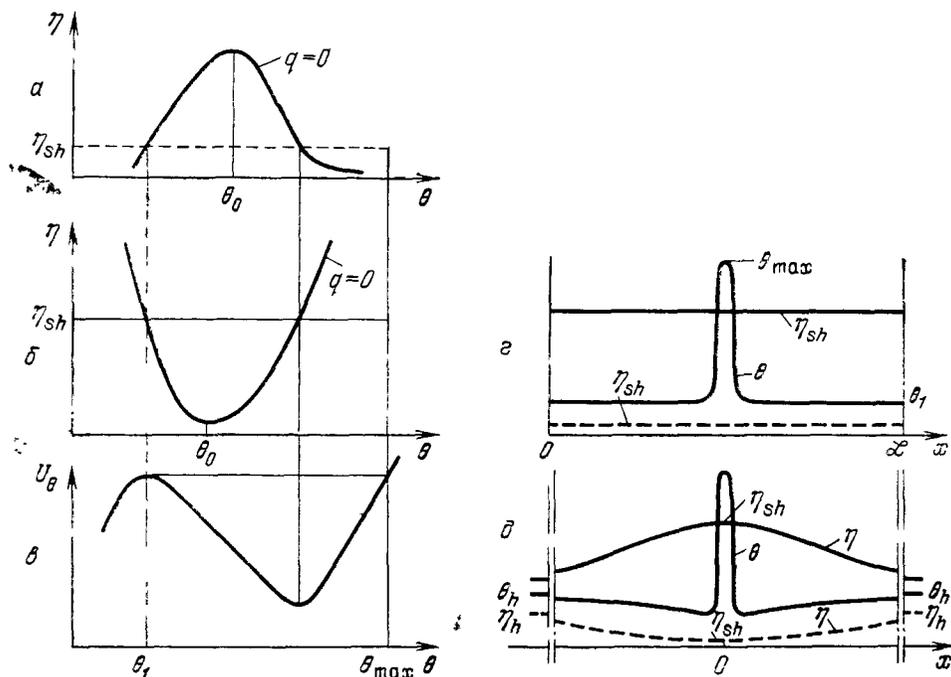


Рис. 17. к построению структур в Л- и V-системах малого размера. а, б — Кривые локальной связи для Л- (а) и V-систем (б). в — Вид потенциала  $U_\theta$ . г, д — Вид узкой пиковой страты (г) и узкого пикового АС (д). Штриховые кривые — значение ингибитора в Л-системах

зависимости  $\theta$  ( $\eta$ ) на N- или И-образной кривой ЛС (рис. 9, а, б). Значения  $\theta > \theta_0$ , отвечающие этой ветви, можно в определенном смысле рассматривать как соответствующую  $\eta = \eta_s$  «горячую устойчивую фазу» системы с «температурой»  $\theta \sim \theta_{s3}$  (рис. 10).

Иная ситуация реализуется в КЛ- и KV-системах (п. 2.2), кривая ЛС которых имеет Л- или V-образный вид (рис. 17, а, б). В таких системах при  $l \ll L$  могут существовать пиковые АС двух типов: узкие (п. 5.2)<sup>25,28</sup> и широкие (п. 5.3)<sup>89,174</sup>. Ширина пика ( $\mathcal{L}_s$ ) узкого АС независимо от малости  $\varepsilon = l/L \ll 1$  составляет величину  $\sim l$ , а широкого АС — величину  $\sim L$ .

5.1. Структуры в системах малого размера <sup>25,28,157</sup>.

Распределение  $\theta(x)$  и значение  $\eta(x) = \eta_{sh} = \text{const}$  в системах размера  $\mathcal{L} \ll L$  определяются уравнениями (3.3) и (3.4). Из вида кривой ЛС в  $\Lambda$ -и  $V$ -системах (рис. 17, а, б) следует (п. 3.1), что потенциал  $U_\theta$  в (3.3) имеет два экстремума, один из которых  $\theta = \theta_1$  отвечает максимуму  $U_\theta$  (рис. 17, в). Высшая траектория движения «частицы» в таком потенциале  $U_\theta$  отвечает сепаратрисе уравнения (3.3), замыкающей в точке  $\theta = \theta_1$ . Она описывает единственное решение  $\theta(x)$  в виде узкой страты размера  $\sim l$  (рис. 17, г), имеющей лишь один максимум. В п. 4.1 было показано, что при циклических граничных условиях среди всех возможных распределений  $\theta(x)$  (п. 3.1) только решение в виде одной страты (рис. 17, г) устойчиво вплоть до точки  $A = A_b$  на бифуркационной характеристике, где  $d\eta_{sh}/dA = \infty$  (рис. 18).

Для иллюстрации общих результатов рассмотрим распределение  $\theta(x)$  и вид бифуркационной характеристики в моделях, допускающих аналитическое решение. Для модели брюсселятора (1.12) уравнения (3.3), (3.4) имеют вид

$$l^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + B + \theta^2\eta - (1+A)\theta = 0, \quad \eta_{sh} = A \langle \theta \rangle (\langle \theta^2 \rangle)^{-1}. \quad (5.1)$$

Из них следует <sup>25,175</sup>, что при  $\mathcal{L} \gg l$  (точнее, при  $\eta_{sh} \ll (1+A)^2/4B$ )

$$\eta_{sh} = A(1+A)^2 [1 \mp \{1 - 24l[\mathcal{L}A^2(1+A)^{1/2}]^{-1}\}^{1/2}] (2\theta_h)^{-1}, \quad (5.2)$$

$$\theta(x) = \theta_1 + (\theta_{max} - \theta_1) \text{ch}^{-2} \frac{\xi x}{l}, \quad (5.3)$$

где

$$\theta_1 = \theta_h(1+A)^{-1}, \quad \theta_{max} - \theta_1 = \frac{3(1+A)}{2\eta_{sh}}, \quad (5.4)$$

$$\xi = (1+A)^{1/2}/2, \quad \theta_h = B.$$

Для модели (1.14) при  $\mathcal{L} \gg l$  ингибитор <sup>176</sup>

$$\eta_{sh} = \frac{A^2\mathcal{L}}{6Cl} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{A_b^2}{A^2} \right)^{1/2} \right], \quad A_b = \left( \frac{24l}{\mathcal{L}} \right)^{1/2} CB, \quad (5.5)$$

а распределение активатора  $\theta(x)$  определяется (5.3) <sup>114</sup>, в котором

$$\theta_1 = \eta_{sh}(2A)^{-1} - 2A^{-1}\xi^2\eta_{sh}, \quad \theta_{max} - \theta_1 = 6\eta_{sh}\xi^2A^{-1}, \quad (5.6)$$

$$\xi^2 = (4\eta_{sh})^{-1}(\eta_{sh}^2 - 4AB\eta_{sh})^{1/2}.$$

Выражения (5.2) и (5.5) определяют бифуркационные характеристики рассматриваемых моделей (рис. 18). Значения ингибитора для однородного состояния в модели (1.12)  $\eta_h = A/B$ , а в (1.14)  $\eta_h = C[(A/C) + B]^2$  и, как следует из (5.2) и (5.5), существенно отличаются от значений  $\eta_{sh}$  для страты (рис. 18). При этом верхний знак в (5.2) и (5.5) определяет значение  $\eta_{sh}$  в устойчивой страте большой амплитуды, для которой справедливы выражения (5.4) и (5.6). Из (5.2) и (5.5) следует, что предельное значение параметра  $A = A_b$ , при котором страта скачкообразно исчезает (рис. 18),  $A_b \propto \infty (l/\mathcal{L})^{1/2}$ , т. е. тем меньше, чем больше размер системы  $\mathcal{L}$ .

Подставляя (5.2) и (5.3) в выражение для «гамильтониана»  $\hat{H}_\theta$  в (4.2), получим, что входящий в него «потенциал» есть

$$V_\theta = q'_\theta(\theta(x), \eta_{sh}) = (1+A) \left[ 1 - 3 \text{ch}^{-2} \frac{(1+A)^{1/2} x}{2l} \right]. \quad (5.7)$$

В таком потенциале (задачи (4.5), (4.4)) с экспоненциальной точностью значение  $\lambda_1 = 0$ , а  $\lambda_0$  и  $\delta\theta_0$  равны <sup>172</sup>

$$\lambda_0 = -5\xi^2 = -\frac{5}{4}(1+A), \quad (5.8)$$

$$\delta\theta_0 = \left[ \frac{15}{32}(1+A)^{1/2} \frac{\mathcal{L}}{l} \right]^{1/2} \text{ch}^{-3} \frac{(1+A)^{1/2} x}{2l}.$$

Из (5.8) видно, что функция  $\delta\theta_0$  локализована в области страты размера  $\sim l$  и ей отвечает  $\lambda_0 \sim -1$ .

Вывод о том, что в спектре  $\lambda_n$  задачи (4.5), (4.4) для узкой страты  $\lambda_1 = 0$ , а  $\lambda_0 \sim -1$  носит общий характер. Действительно, строгое равенство  $\lambda_1 = 0$  следует из трансляционной симметрии задачи для страты (п. 4.1). Условие  $\lambda_1 - \lambda_0 \sim 1$  вытекает из того, что «потенциал»  $V_\theta$  для страты имеет размер и глубину  $\sim 1$ . Из (4.16) следует, что при  $\lambda_0 \sim -1$  для устойчивости страты

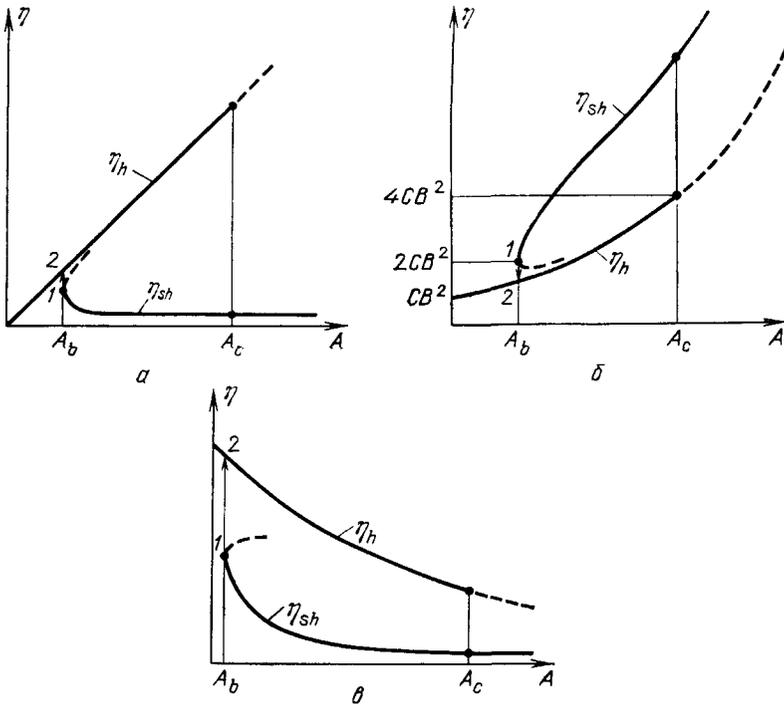


Рис. 18 Вид бифуркационных характеристик *а* — Для модели (1.12) «брюсселятор»<sup>25, 27</sup> *б* — Для модели Гирера — Майнхардта (1.14)<sup>27, 27</sup>, *в* — Для разогретой электромагнитным излучением смеси нейтральных газов<sup>32</sup> Штриховые участки кривых соответствуют неустойчивым состояниям

необходимо, чтобы  $a_0 \geq 1$ . При амплитуде страты  $\theta_{\max} - \theta_1 \leq 1$  согласно (4.17) коэффициент  $a_0 \sim l/L \ll 1$ . Поэтому условие  $a_0 \geq 1$  не может выполняться для страт малой амплитуды (рис. 18, штриховые кривые). Из процедуры построения узкой страты (рис. 17) следует, что условие (3.4) можно приближенно записать в виде

$$\mathcal{L}_s |Q(\theta_{\max}, \eta_{sh})| = (\mathcal{L} - \mathcal{L}_s) |Q(\theta_1, \eta_h)|. \quad (5.9)$$

Для узких страт большой амплитуды обычно величина  $|Q(\theta_1)| \geq 1$ , т. е. условие (5.9) при  $\mathcal{L}_s \sim l$  справедливо, когда  $|Q(\theta_{\max})| \geq \mathcal{L}/l \gg 1$ . Последнее может быть выполнено лишь в системах, для которых  $Q(\theta)$  есть возрастающая функция  $\theta$ . В  $\Lambda$ - и  $V$ -системах, для которых это не реализуется, могут образовываться широкие пиковые страты<sup>176</sup>, которые согласно (5.9) должны иметь размер  $\mathcal{L}_s \sim \mathcal{L}/2$ .

5.2. Узкие пиковые автосолитоны<sup>25, 27, 28</sup>. Качественный вид узкого пикового АС в протяженных  $\Lambda$ - и  $V$ -системах можно установить из простых соображений: при возрастании  $\mathcal{L}$  значение  $\eta = \eta_{sh} \neq \eta_h$  в центре страты (рис. 17, *з*) на ее периферии должно плавно с характерной длиной  $\sim L$  переходить к значению  $\eta = \eta_h$  ( $\theta \rightarrow \theta_h$ ) для однородного состояния (рис. 17, *д*).

Для построения узкого пикового АС воспользуемся методом, изложенным в п. 3.2. В отличие от N- и И-систем потенциал для резких распределений  $U_\theta$  в  $\Lambda$ - и V-системах (рис. 17, в) имеет лишь один максимум. Это отличие приводит к тому, что в  $\Lambda$ - и V-системах могут существовать только пиковые АС. Построение узких пиковых АС (рис. 17, д) изображено на рис. 19. Для

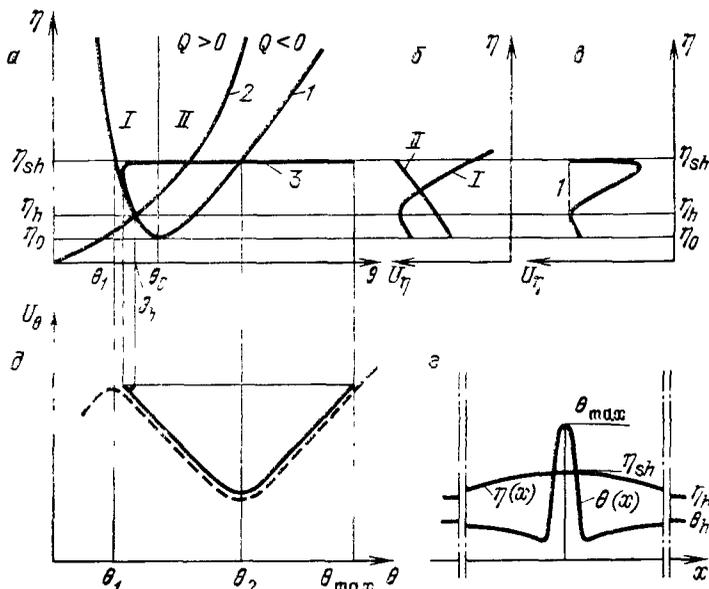


Рис. 19. К построению узкого пикового АС. а — Вид локальной связи (кривая 1), кривой УС (2) и истинной зависимости  $\eta(\theta)$  (3). б — Вид ветвей I и II потенциала  $U_\eta$  для плавных распределений. в — Вид истинного потенциала  $U_\eta$ , наивысшая траектория движения в котором (1) отвечает распределению  $\eta(x)$  в автосолитоне (г). д — Вид потенциала  $U_\theta$ ; штриховой кривой показан потенциал в приближении резких распределений, а сплошной — истинный потенциал  $U_\theta$ , наивысшая траектория движения «частицы» в котором отвечает распределению  $\theta(x)$  на рис. г

построения истинного потенциала  $U_\eta$  (рис. 19, в) в (3.8) использовано первое из условий (3.10), из которого приближенно следует, что

$$\langle Q \rangle_{sh} = -\varepsilon^{-1} \langle Q \rangle_{sm}, \tag{5.10}$$

где символы  $\langle \dots \rangle_{sh}$  и  $\langle \dots \rangle_{sm}$  означают усреднение функции  $Q(\theta, \eta)$  по области резких и плавных распределений соответственно. Обычно  $|\langle Q \rangle_{sm}| \gg 1$ , т. е. согласно (5.10) величина  $|\langle Q \rangle_{sh}| \gg \varepsilon^{-1} \gg 1$ . Производная  $dU_\eta/d\eta = -Q$ , поэтому потенциал  $U_\eta$  в (3.8) вблизи  $\eta = \eta_{sh}$  резко отходит вверх от ветви I потенциала  $U_\eta$  в (3.14) для плавных распределений (рис. 19, б), образуя крутую стенку, т. е. приобретает вид потенциальной ямы (рис. 19, в). Распределению  $\eta(x)$  (рис. 19, г) отвечает финитное движение «частицы» в такой яме (траектория 1 на рис. 19, в).

Из процедуры построения АС следует (п. 3.2), что распределения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$ , учитывая симметрию АС относительно точки  $x = 0$ , приближенно можно записать в виде

$$\theta(x) = \theta_{sh}(x) - \theta_1 + \theta_1(x) \quad (0 \leq x < \infty), \quad \eta(x) = \eta_1(x) \quad (0 \leq x < \infty), \tag{5.11}$$

где  $\theta_{sh}(x)$  — полученное в п. 5.1 резкое распределение, отвечающее сепаратрисе уравнения (3.3), замыкающейся в седловой точке  $\theta = \theta_1$  (рис. 17, г); функции  $\eta_1(x)$  и  $\theta_1(x)$  — плавные распределения ингибитора и активатора,

которые есть решения уравнения (3.18), отвечающие граничным условиям  $\eta_I(\infty) = \eta_h$ ,  $\eta_I(0) = \eta_{sh}$ ; значение  $\eta_{sh}$  можно оценить<sup>1</sup> из уравнения<sup>29,176</sup>

$$\int_0^{\infty} Q(\theta_I(x), \eta_I(x), A) dx = - \int_0^{\infty} (Q_i(\theta_{sh}(x), \eta_{sh}, A) - Q(\theta_I, \eta_{sh}, A)) dx, \quad (5.12)$$

которое по существу вытекает из (3.10). Найденная в общей теории<sup>25,27</sup> форма узкого пикового АС (рис. 19) подтверждается результатами аналитических и численных исследований различных моделей<sup>16,114,120,175-177</sup>.

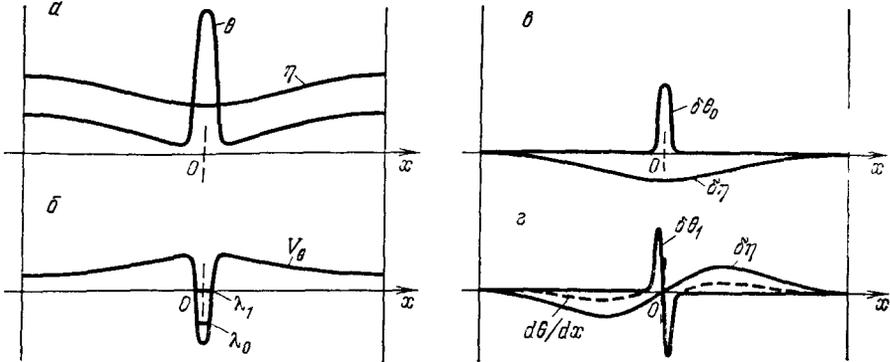


Рис 20 К анализу устойчивости узкого пикового АС (а) вид «потенциала»  $V_\theta$  (б) и соответствующих ему собственных функции  $\delta\theta_0$  (в) и  $\delta\theta_1$  (г) и возмущении  $\delta\eta$ , демпфирующих нарастание опасной флуктуации  $\delta\theta \approx \delta\theta_0$  и «сдвиговой» флуктуации  $\delta\theta \propto d\theta/dx$

Так же как и для страты (п.5.1), для узкого пикового АС (рис. 20, а) потенциал  $V_\theta$  в «гамильтониане»  $\hat{H}_\theta$  (4.21), определяющий инкремент нарастания и вид критических флуктуаций активатора  $\delta\theta_n$  при  $\delta\eta = 0$  (4.24), имеет вид узкой ямы (рис. 20, б). В спектре такой ямы только  $\lambda_0$  и  $\lambda_1 < 0$ , причем<sup>28</sup>  $\lambda_1 \ll -\varepsilon$ , а  $\lambda_0 \sim -1$ . Отвечающие  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  функции  $\delta\theta_0$  и  $\delta\theta_1$  локализованы в области пика АС (рис. 20, в, г). Функция  $\delta\theta_1$  близка к  $\delta\theta \propto d\theta/dx$  (рис. 20, г), которая описывает малый сдвиг АС, т. е. для нее  $\gamma_1 = 0$ .

АС существует в диапазоне от  $A = A_b$  до  $A_c$  (п. 4.2): при  $A < A_b$  он скачкообразно исчезает (рис. 18); при увеличении  $A$  амплитуда АС возрастает, и при  $A > A_c$  в результате неустойчивости однородного состояния (п.2.2) вне АС в системе возникает более сложная автоструктура<sup>25,29</sup>.

Выражения (5.11) для некоторого вида функций  $Q(\theta, \eta)$ ,  $q(\theta, \eta)$  можно строго обосновать<sup>176</sup> на основе идей теории сингулярных возмущений<sup>116</sup>. В отличие от процедуры построения АС в КН- и КИ-системах (п. 3.3) для узких пиковых АС в КЛ- и КВ-системах внешние  $\tilde{X}_i$  и внутренние  $\bar{X}_i$  решения будем искать в виде рядов по  $\varepsilon$ , допускающих отрицательные, в том числе дробные, степени  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i(x, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha_i + (k/m)} \tilde{X}_{i, \alpha_i + (k/m)}(x), \\ \bar{X}_i(\xi, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\beta_i + (k/m)} \bar{X}_{i, \beta_i + (k/m)}(\xi), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $\xi = x/\varepsilon$ ,  $\alpha_i = N_i/m$ ,  $\beta_i = M_i/m$ ;  $N_i$ ,  $M_i$  — любые целые числа;  $m$  — целое положительное число. Коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  определяются граничными условиями и конкретным видом функций  $Q(\theta, \eta)$  и  $q(\theta, \eta)$ .

Использование этой процедуры для модели (1.14) с  $C = B = 1$  позволяет доказать, что выражения (5.11), (5.12) справедливы с точностью до  $\varepsilon \ll 1$ , и найти, что в старшем по величине  $\varepsilon$  приближении <sup>176</sup>

$$\theta(x) = \varepsilon^{-1} \frac{A}{2} \operatorname{ch}^{-2} \frac{x}{2l} + 2 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{4A}{\eta(x)} \right)^{1/2} \right]^{-1}, \quad (5.14)$$

$$\eta(x) = \varepsilon^{-1} \frac{A^2}{3} e^{-x/L} + \eta_h, \quad \eta_h = (1+A)^2. \quad (5.15)$$

Следующая поправка для  $\eta$  равна

$$\frac{A^2}{6} \left( 2 \frac{x}{l} + \operatorname{ch}^{-2} \frac{x}{2l} - 4 \ln \operatorname{ch} \frac{x}{2l} - 4 \ln 2 \right) \quad (5.16)$$

и обеспечивает выполнение условия  $d\eta/dx = 0$  в точке  $x = 0$ . Выражения (5.14)—(5.16) справедливы при  $A^2 > \varepsilon$ . Величину  $A = A_b$ , при которой исчезает решение в виде АС (рис. 18), можно оценить из (5.5), положив в нем  $\mathcal{L} = 2L$ . Это следует из того, что выражения (5.14) и (5.15) в окрестности пика АС (точки  $x = 0$ , рис. 17,  $\partial$ ) по существу переходят в выражения (5.5), (5.6), если в них положить  $\mathcal{L} = 2L$ .

Заметим, что в двух- и трехмерных системах одномерные узкие пиковые АС неустойчивы <sup>27</sup> относительно неоднородных вдоль плоскости АС флуктуаций вида (4.20) с  $k_{\perp} \sim (lL)^{1/2}$ . Это вытекает из (4.32), если в нем учесть, что  $\lambda_0 \sim -1$ . В таких системах устойчивыми являются пиковые радиально-симметричные АС радиусом  $\sim l$ , распределение  $\theta$  и  $\eta$  в сечении которых совпадает с изображенным на рис. 17,  $\partial$ . Эти выводы объясняют результаты численных исследований <sup>119</sup>.

**5.3. Широкие пиковые автосолитоны** <sup>89,174</sup>. В некоторых КЛ- и КV-системах с  $l \ll L$  образуются широкие пиковые АС, ширина пика которых составляет величину порядка  $L$ . Это, как уже отмечалось в п. 5.1 при обсуждении условия (5.9), может реализовываться в системах, в которых величина  $|Q|$  не возрастает при увеличении  $\theta$ , точнее условие (5.10) даже при больших значениях  $\theta_{\max}$  не выполняется. Для построения АС в таких системах нельзя пользоваться понятиями резких и плавных распределений (п.п. 3.2 и 5.2), лежащими в основе метода, развитого в <sup>25</sup>. При этом также оказываются неоправданными разложения (5.13) в виде экспоненциального пограничного слоя <sup>176</sup>.

Широкие пиковые АС реализуются, например, в невырожденной разогретой ЭДП, описываемой уравнениями (1.2)—(1.5) <sup>89,174</sup>. Из п. 1.4 (уравнения (1.5)) следует, что

$$Q = \frac{(n - G\tau_r)}{n_h} = \eta\theta^{-1-\alpha} - 1,$$

где  $\theta = T/T_l$ ,  $\eta = nD(T)/D^0n_h = n\theta^{1+\alpha}/n_h$ ,  $n_h = G\tau_r$ ,  $D \propto T^{1+\alpha}$ . В этом случае условие (3.10) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} (n - G\tau_r) n_h^{-1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta\theta^{-1-\alpha} - 1) dx = 0, \quad (5.17)$$

т. е. описывает интегральный баланс частиц в АС: носители, выброшенные благодаря термодиффузии (п.1.1) из пика АС, где высока температура носителей (рис. 21, *a*), скапливаются на его периферии (рис. 21, *б*). Поскольку в центре пика  $Q \simeq -1$  (рис. 21, *б*), то условие (5.17) может быть выполнено, лишь когда  $\mathcal{L}_s \sim L$ . Именно такой широкий АС и был обнаружен <sup>89</sup> при численном исследовании разогретой невырожденной ЭДП при  $T_l$ , больших температуры Дебая полупроводника (рис. 21).

Поразительное свойство широких пиковых АС состоит в том, что их амплитуда, т.е. величина  $\theta_{\max}$  в центре АС, может иметь гигантскую величину при не очень малых значениях  $\epsilon = U/L$ . Так, в численных исследованиях

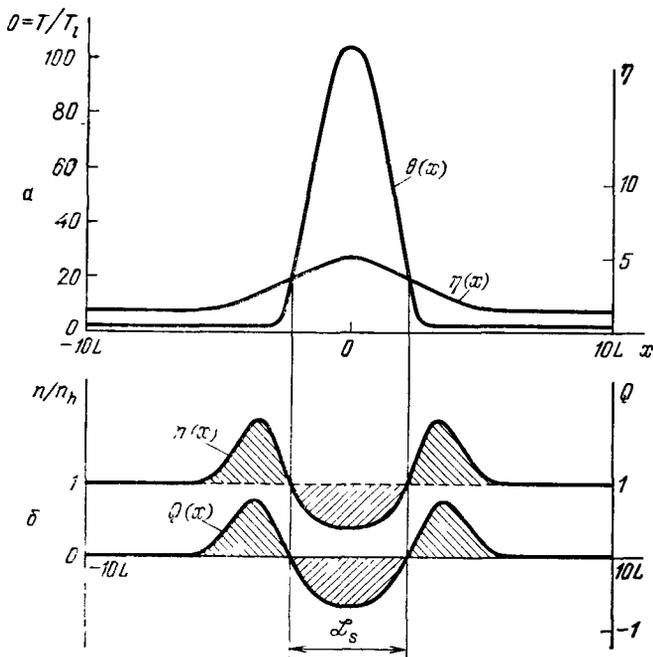


Рис. 21 Вид широкого пикового АС в разогретой невырожденной ЭДП \*\*: распределения активатора — температуры  $\theta = T/T_1$ , ингибитора  $\eta = nD(T)/n_h D(T_1)$  (а), концентрации носителей  $n$  и величины  $Q$  (б)

АС в ЭДП было установлено <sup>68</sup>, что при  $\epsilon = 1/10$  величина  $\theta_{\max} \approx 100$  (рис. 21), а уже при  $\epsilon = 1/15$  величина  $\theta_{\max} \approx 10^3$ .

5.4. Сильно неравновесные области в слабонеравновесных системах <sup>50-52</sup>. Из исследования моделей (1.12) и (1.14) следует (п. 5.1 и 5.2), что чем меньше значение  $\epsilon = U/L$ , тем больше  $\theta_{\max}$  (см. (5.14)) и тем меньше минимальное значение  $A = A_b$ , при котором существует АС (рис. 18). Это означает, что при  $\epsilon \ll 1$  в физических системах, слабо отклоненных от термодинамического равновесия, могут образовываться АС в виде сильнонеравновесных областей. Проиллюстрируем этот эффект на примере смеси легкого и тяжелого газов, слабо разогретой излучением, поглощаемым легкой компонентой газа (п. 1.2) \*).

Пусть газ заключен в трубке малого размера. Распределение температуры  $T$  в такой трубке описывается уравнением (1.7) для одномерного случая, в котором  $W = n\sigma_\Phi \Phi$ , где  $n$  — концентрация легких частиц;  $\sigma_\Phi$ ,  $\Phi$  — сечение поглощения и плотность потока фотонов. Диффузия легкого газа в тяжелом с концентрацией  $N \gg n$  описывается уравнением (1.2), в котором  $j_e = -T(\partial/\partial x)(nD(T)T^{-1})$  — поток частиц легкого газа <sup>2,178</sup>. Из анализа этих уравнений, описывающих распределение  $n$  и  $T$  вдоль трубки, аналогично проведенному в п. 5.1 и 5.2 для моделей (1.12) и (1.14), следует, что минимальная мощность излучения, при которой существует АС,  $\Phi = \Phi_b \propto (U/L)^{1/2}$ , где  $L$  равно  $\mathcal{L}$  — размеру трубки в случае не реагирующих газов ( $G = R = 0$ ) или диффузионной длине легких частиц. При  $\Phi = \Phi_b$  одно-

\*) Бистабильность, колебания и расслоение такой двухкомпонентной сильно разогретой смеси рассмотрены в <sup>93,92,178</sup>.

родный разогрев смеси  $T = T_h$  может составлять доли процента от его равновесной температуры, а температура газа и концентрация в центре АС (рис. 3, а) могут на несколько порядков превосходить равновесное значение:  $T_{\max} \approx T_h (L/l)^{1/2}$ ,  $n_{\max} \approx (L/l) n_h$ .

Области высокой температуры могут образовываться в полупроводниковых пленках, слабо разогретых излучением, поглощаемым электронами и дырками, термализованными с решеткой, распределение концентрации ( $n = p$ ) и температуры которых описываются уравнениями (1.2), (1.7) и (1.8). Области высокой температуры («горячие пятна») наиболее детально экспериментально (см., например, <sup>151,179</sup>) и теоретически <sup>157</sup> изучены в полупроводниковых структурах, поскольку возникновение таких областей определяет качество и надежность многих современных приборов электроники (этому вопросу посвящена весьма обширная литература, см. обзоры <sup>180,181</sup>).

**6. Пульсирующие автосолитоны (КΩ-системы).** Условия  $\varepsilon \ll 1$  и  $\alpha \ll 1$ , определяющие КΩ-системы (п. 2.2), выполняются для многих физических и химических систем (п. 1). В большинстве из них  $l = (D_\theta \tau_\theta)^{1/2}$  и  $L = (D_\eta \tau_\eta)^{1/2}$ , где  $D_\theta$ ,  $D_\eta$  — коэффициенты диффузии. При этом малость  $\varepsilon = (\alpha D_\theta / D_\eta)^{1/2} \ll \ll 1$ , как правило, связана с малостью  $\alpha = \tau_\theta / \tau_\eta \ll 1$ . Поэтому в зависимости от отношения  $D_\theta / D_\eta$  могут реализовываться различные соотношения между  $\varepsilon$  и  $\alpha$ .

Благодаря  $\varepsilon \ll 1$  форма статических АС в К-системах (п. 3.5) и в КΩ-системах совпадает. Однако в КΩ-системах статические АС существуют в меньшем диапазоне изменения  $A$ . На границах этого диапазона благодаря малости  $\varepsilon$  может выполняться условие <sup>31</sup>

$$\lambda_0 + \alpha \mu_0 < 0, \quad (6.1)$$

которое по существу определяет порог потери устойчивости статического АС относительно пульсаций \*), т. е. нарастания флуктуаций вида (4.20) с  $\text{Re } \gamma < 0$  и  $\text{Im } \gamma = \omega_c \neq 0$ . Это связано с тем, что благодаря большой инерционности изменения ингибитора ( $\tau_\eta \gg \tau_\theta$ ) он не успевает демпфировать критические флуктуации активатора, меняющиеся с частотой  $\omega = \omega_c$ :  $\tau_\eta^{-1} < \omega_c < \tau_\theta^{-1}$ . По этой причине в КΩ-системах кроме статических существуют пульсирующие АС (рис. 5, б—з) <sup>31-34</sup>.

**6.1. Пульсирующие структуры в системах малого размера** <sup>31</sup>. Критерий возникновения пульсаций широкой страты (рис. 13, а) при  $\alpha \ll 1$  можно найти из анализа нулей функции  $D(\gamma = i\omega)$  (4.9) в верхней полуплоскости комплексной частоты  $\omega$ . В области устойчивости страты относительно флуктуаций с  $\text{Im } \gamma = 0$  величина  $D(0) < 0$  (п. 4.1). Учитывая, что для широкой страты  $\lambda_0 < 0$  и  $|\lambda_0| \ll 1$  (п. 4.1), из выражения (4.11) следует, что при выполнении (6.1) величина  $K(0) < 0$ . Однако уже при некотором  $\omega = \omega_1 \ll 1$  величина  $K(\omega)$  меняет знак. Аналогично, при некотором  $\omega = \omega_c$  величина  $\text{Re } D(\omega_c) = 0$ , так как  $\text{Re } D(0) = D(0) < 0$ , а  $\text{Re } D(\infty) = 1$ . Из анализа  $D(\omega)$  (4.9) следует, что при  $K(0) < 0$  страта устойчива (в (4.10)  $N = P - 1 = 0$ ), если  $\text{Re } D(\omega_1) < 0$  (кривая 3 на рис. 14, б), и неустойчива ( $N = P + 1 = 2$ ), если  $\text{Re } D(\omega_1) > 0$  (кривая 4 на рис. 14, б). При некотором  $A = A_{b\omega}$  частота  $\omega_1 = \omega_c$ , а величина  $D(\omega_c) = 0$ , т. е. действительная частота  $\omega_c$  является нулем функции  $D(\omega)$  на пороге устойчивости страты. Таким образом, согласно (4.14) порог устойчивости страты относительно пульсаций совпадает с точкой  $A = A_{b\omega}$ , где «восприимчивость» системы  $dn/dA = \infty$  на частоте  $\omega = \omega_c$ .

\*) Условие возникновения пульсаций ранее было получено при анализе устойчивости «горячих пятен» в полупроводниковых структурах <sup>157</sup>. Оно переходит в (6.1), если в нем учесть, что  $\tau_\eta = C_0 T / e I_K (1 + \alpha)$ ,  $\tau_\theta = \tau_T$ ,  $\mu_0 = 1$ ;  $C_0$  — эмиттерная емкость,  $I_K$  и  $\alpha$  — коллекторный ток и коэффициент передачи по току;  $\tau_T$  — характерное время изменения температуры ( $T$ ) структуры.

Для того чтобы при  $\alpha \ll 1$  из условия  $D(\omega_c) = 0$  оценить величину  $\omega_c$  и критическую ширину страты  $\mathcal{L}_{b\omega} = \mathcal{L}_s(A_{b\omega})$  в сумме (4.9) достаточно благодаря  $|\lambda_0| \ll 1$  ограничиться лишь первым членом. В результате получим, что

$$\omega_c \approx (\alpha\mu_0)^{1/2} (a_0 + \lambda_0)^{1/2} \tau_\theta^{-1}, \quad (6.2)$$

а критерий возникновения пульсаций страты сводится к (6.1). Используя, что  $a_0 \sim l/\mathcal{L}$  (4.17), а  $\lambda_0 \sim -\exp(-\mathcal{L}_s/l)$  (п.4.1), из (6.1) и (6.2) легко найти, что

$$\mathcal{L}_{b\omega} \sim l \ln(\mu_0\alpha)^{-1}, \quad \omega_c \sim (\tau_\theta\tau_\eta)^{-1/2} \left(\frac{l}{\mathcal{L}}\right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

Из сравнения (4.18) с (6.3) видно, что в системах с  $\alpha \ll l/\mathcal{L}$  величина  $\mathcal{L}_{b\omega} > \mathcal{L}_b$ , т.е.  $A_{b\omega} > A_b$ . Таким образом, при уменьшении  $A$  сужающаяся страта (п.4.1) в системах с  $\alpha \ll l/\mathcal{L}$  теряет устойчивость в точке  $A = A_{b\omega}$  относительно пульсаций, не доходя до точки  $A = A_b$  на бифуркационной характеристике, где  $d\eta/dA = \infty$  (рис. 15, б).

Формула (6.2) и условие (6.1) определяют также частоту и критерий пульсаций радиально-симметричных структур в двух- и трехмерных системах<sup>31</sup>. При этом из оценок следует, что в точке возникновения пульсаций критический радиус и частота

$$\rho_{b\omega} = \rho_0(A_{b\omega}) \sim l(\alpha\mu_0)^{-1/2}, \quad \omega_c \sim (\tau_\theta\tau_\eta)^{-1/2} \left(\frac{l\rho_0^{1+s}}{R^{2+s}}\right)^{1/2}, \quad (6.4)$$

где  $R$  — радиус системы,  $s = 0$  (1) для цилиндрически(сферически)-симметричного состояния.

При  $A = A_{b\omega}$  неустойчивость связана с нарастанием флуктуации  $\delta\eta = \delta\eta \cos(\omega_c t)$  и  $\delta\theta \approx \delta\theta_0(\rho) \cos(\omega_c t)$ . Из вида функций  $\delta\eta = \text{const}$  и  $\delta\theta_0$  (рис. 13, з), отвечающей  $\lambda_0 < 0$  (п.4.1), можно сделать вывод, что пульсации представляют собой периодические колебания размера и амплитуды страты (пятна или капли), сопровождающиеся однородными колебаниями ингибитора.

Справедливость этих выводов подтверждают численные исследования пульсирующих состояний в модели (1.13)<sup>34</sup>. Они также показали, что в соответствии с (6.3) и (6.4) частота пульсирующих структур меньше частоты критической флуктуации  $\omega_0 \sim (\tau_\theta\tau_\eta)^{-1/2}$  на пороге неустойчивости относительно однородных колебаний (п.2.2).

Заметим, что для устойчивых состояний в  $\Lambda$ - и  $V$ -системах  $\lambda_0 \sim -1$  (п.5.1), поэтому согласно условию (6.1) пульсирующие по амплитуде пиковые структуры в них могут наблюдаться даже при  $\alpha \sim 1$ <sup>157,175</sup>.

6.2. Условия возникновения и вид пульсирующей АС<sup>31</sup>. В п. 6.1 показано, что порог пульсаций страты при  $\mathcal{L} \ll L$  определяется точкой, где «восприимчивость» системы  $d\eta/dA = \infty$  на частоте  $\omega_c \neq 0$ . Этот же критерий определяет и порог устойчивости АС. Действительно, изменение активатора  $d\theta$  и ингибитора  $d\eta$  в статическом АС, вызываемое малым изменением бифуркационного параметра  $dA(t) = dA \exp(-i\omega_c t)$ , как следует из (2.2) и (2.3), определяется уравнениями

$$\begin{aligned} (\hat{H}_\theta - i\omega_c) d\theta &= -q'_\eta d\eta - q'_A dA, \\ (\hat{H}_\eta - i\omega_c\alpha^{-1}) d\eta &= -Q'_\theta d\theta - Q'_A dA, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где, как и в (4.21), (4.22), время измеряется в единицах  $\tau_\theta$ . Наличие точек, где  $d\eta/dA = \infty$  при  $\omega_c \neq 0$ , означает, что в них при  $dA = 0$  приращения  $d\eta(x)$  и  $d\theta(x) \neq 0$ . Из (6.5) при  $dA = 0$  видно, что такие приращения  $d\eta(x)$  и  $d\theta(x)$  отвечают нетривиальному решению системы уравнений (4.21),

(4.22) при  $\text{Re } \gamma = 0$  и  $\text{Im } \gamma = \omega_c$ . Таким образом, порог устойчивости АС относительно пульсаций коррелирует с наличием точек, где производная по  $A$  характерных для АС величин ( $\eta_s, \mathcal{L}_s$  и др.) на выделенной частоте  $\omega = \omega_c$  обращается в бесконечность.

Оценить частоту пульсаций и критический размер АС можно из анализа нулей функции  $\Phi(\gamma = i\omega)$  — (4.28) в верхней полуплоскости комплексной частоты  $\omega$ . Поскольку функция  $\Phi(\omega)$  не имеет в этой полуплоскости полюсов, то число ее нулей согласно принципу аргумента <sup>126</sup> равно  $N = (2\pi)^{-1} \times \Delta \arg \Phi(\omega)$ . Изменение аргумента функции  $\Phi(\omega)$  при обходе верхней полуплоскости можно установить, используя свойства функции  $\Phi(\omega)$ . Из (4.28)

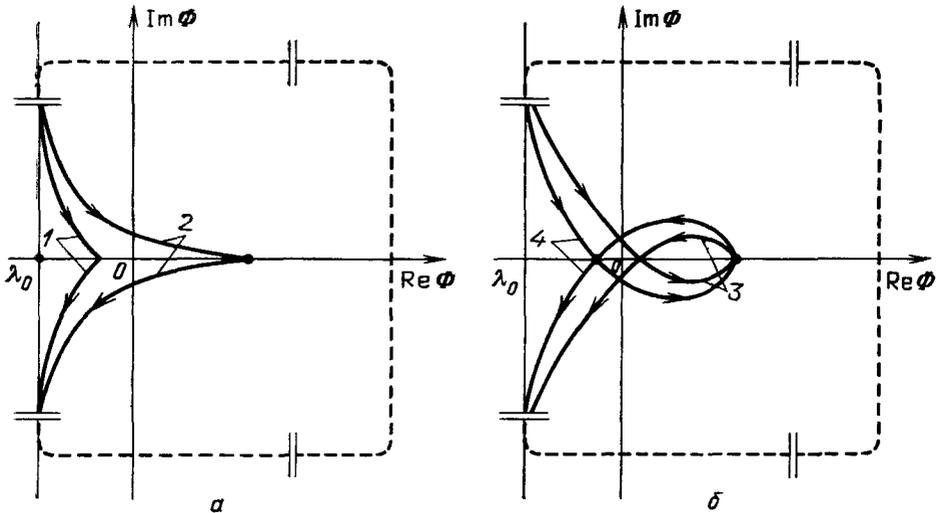


Рис. 22. Качественное поведение комплексной функции  $\Phi(\omega)$  при обходе верхней полуплоскости  $\omega$  при  $K(0) < 0$  (а) и  $K(0) > 0$  (б)

видно, что  $\text{Re}\Phi(\omega)$  — четная, а  $\text{Im}\Phi(\omega)$  — нечетная функции  $\omega$ ; при  $\text{Re } \omega = \pm \infty$  и  $\text{Im } \omega = 0$  величины  $\text{Re}\Phi = \lambda_0 < 0$ ,  $\text{Im}\Phi = -\omega = \mp \infty$ , а при  $\text{Im } \omega = \infty$  величины  $\text{Re}\Phi$  и  $\text{Im}\Phi = \infty$ . Отсюда следует, что при  $\Phi(0) < 0$  величина  $N = 1$  (кривая 1 на рис. 22), а следовательно, АС неустойчив. При  $\Phi(0) > 0$  величина  $\Delta \arg \Phi(\omega)$  зависит от знака функции  $K(\omega) = \omega^{-1} \text{Im}\Phi(\omega)$ . Когда  $K(0) < 0$ , то величина  $K(\omega)$  при всех действительных  $\omega$  заведомо меньше нуля, а  $N = 0$  (кривая 2 на рис. 22), т.е. АС устойчив.

Условие  $K(0) < 0$  выполняется в  $K$ -системах благодаря  $\alpha > 1$ , поэтому в них АС теряет устойчивость в точке, где величина  $\Phi(0)$  становится отрицательной. Знак величины  $\Phi(0)$  коррелирует со знаком величины  $\gamma$  в выражении (4.30), вытекающим из (4.28) при  $\alpha > 1$  и  $|\gamma| \ll 1$ .

В  $K\Omega$ -системах статический АС устойчив в меньшем диапазоне изменения  $A$ , чем в  $K$ -системах. Он теряет устойчивость при  $\Phi(0) > 0$ , т.е. в области устойчивости статического АС в  $K$ -системах ( $\alpha > 1$ ), за счет того, что при  $\alpha \ll 1$  величина  $K(0) > 0$ . При этом уже при некоторой действительной частоте  $\omega = \omega_1 \ll 1$  значение  $K(\omega)$  меняет знак. Аналогично, при некоторой действительной частоте  $\omega = \omega_c$  величина  $\text{Re}\Phi(\omega_c) = 0$ , так как  $\text{Re}\Phi(0) = \Phi(0) > 0$ , а  $\text{Re}\Phi(\omega) = \lambda_0 < 0$ . Из рис. 22 видно, что при  $K(0) > 0$  АС устойчив ( $N = 0$ ), если  $\text{Re}\Phi(\omega_1) > 0$  (кривая 3 на рис. 22), и неустойчив ( $N = 2$ ), если  $\text{Re}\Phi(\omega_1) < 0$  (кривая 4 на рис. 22).

Таким образом, граница устойчивости АС отвечает условию  $\omega_1 = \omega_c$ , при котором  $\Phi(\omega_c) = 0$ . Так же как и при анализе (4.30), в сумме (4.28) можно учесть лишь первый член и из условия  $\Phi(\omega_c) = 0$  получить, что частота и условие пульсаций АС определяются, соответственно, (6.2) и (6.1).

Подставляя в (6.1) оценку  $\lambda_0$  из (4.26), получим

$$\alpha\mu_0 - \varepsilon \frac{\mathcal{L}_s}{L} - e^{-\mathcal{L}_s/l} < 0. \quad (6.6)$$

Это условие при  $\alpha \ll \varepsilon^2 \ll 1$  выполняется при любых значениях  $\mathcal{L}_s$ , т.е. в таких К $\Omega$ -системах статические АС не реализуются (рис. 8). Согласно (6.6) при  $\varepsilon^2 \ll \alpha \ll \varepsilon \ll 1$  в одномерных К $\Omega$ -системах статический АС устойчив в диапазоне  $A$ , где его ширина  $\mathcal{L}_s$  меняется в пределах

$$\mathcal{L}_{b\omega} (A_{b\omega}) < \mathcal{L}_s < \mathcal{L}_\omega (A_\omega), \quad \mathcal{L}_{b\omega} \sim l \ln (\alpha\mu_0)^{-1}, \quad \mathcal{L}_\omega \sim L\mu_0 (\alpha/\varepsilon). \quad (6.7)$$

Таким образом, как при охлаждении, так и при разогреве статический АС может стать пульсирующим при  $A = A_{b\omega} > A_b$  и  $A_\omega < A_c, A_d$  (рис. 15, б), т.е. не доходя до точек, ограничивающих существование статического АС в К-системах (п.4.3). Учитывая, что для АС величина  $a_0 \sim \varepsilon$  (п.4.2), из (6.2) следует, что частоты пульсаций одномерного АС при  $A = A_{b\omega}$  и  $A_\omega$  по порядку величины совпадают и равны

$$\omega_c \sim \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} (\tau_\theta \tau_\eta)^{-1/2}. \quad (6.8)$$

Аналогично можно показать, что радиус устойчивого радиально-симметричного АС в виде пятна (цилиндра) или капли (шара) заключен в диапазоне от  $\rho_{b\omega} \sim l (\alpha\mu_0)^{-1/2}$  до  $\rho_\omega \sim L\mu_0 (\alpha/\varepsilon)$ . При этом частота пульсаций АС радиуса  $\rho_0 = \rho_\omega$  равна <sup>29</sup>

$$\omega_c \sim \alpha \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{(n-2)/2} \tau_\theta^{-1}, \quad (6.9)$$

где  $n = 1, 2, 3$  — размерность АС.

Из (6.9) следует, что при  $\alpha < \varepsilon$  частоты пульсаций на пороге неустойчивости статического АС в виде широкого слоя (рис. 5, а), цилиндра или шара большого радиуса (рис. 11, а) уменьшаются с ростом размерности АС. Численные исследования модели (1.13) показали, что этот вывод сохраняется и для частот стационарно пульсирующих АС в виде слоя, цилиндра или шара <sup>34</sup>.

Несколько иные оценки для величин  $\mathcal{L}_{b\omega}$ ,  $\mathcal{L}_\omega$  и  $\omega_c$  можно получить для одномерных систем, в которых в «гамильтониане»  $\hat{H}_\eta$  «потенциал»  $V_\eta = Q_\eta^4 = B = \text{const}$ , т.е. отвечающая ему функция  $\delta\eta_0$  (4.24) не локализована. В этом случае связь между  $\delta\eta$  и  $\delta\theta_0$  определяется формулой (4.27), в которой  $\Gamma$  дается (4.34). Подставим  $\delta\eta$  в (4.21) с  $\delta\theta = \delta\theta_0$ , умножим это выражение слева на  $\delta\theta_0$  и усредним по объему системы. Из анализа полученного таким образом уравнения для  $\gamma$  следует, что <sup>32</sup>

$$\mathcal{L}_{b\omega} \sim l \ln (\varepsilon^2 \alpha)^{-1/3}, \quad \mathcal{L}_\omega \sim L (\alpha/\varepsilon)^{1/3}, \\ \omega_c \sim \varepsilon^{1/2} (\alpha/\varepsilon)^{-1/6} (\tau_\theta \tau_\eta)^{-1/2}. \quad (6.10)$$

Строго говоря, по формулам (6.9) и (6.10) можно делать выводы о частоте пульсирующих АС в случае мягкого режима их возникновения. Вместе с тем численные исследования показали <sup>33,34</sup>, что при  $\alpha \ll 1$  может осуществляться жесткий режим возбуждения пульсирующих АС. При этом может существовать интервал  $A$ , в котором удается возбудить <sup>34, 100</sup> статический, пульсирующий и бегущий АС (п. 7). Для возбуждения каждого из них необходимо подобрать такое возмущение, которое переводит систему в область притяжения данного типа АС.

Вид пульсирующих АС можно предсказать из тех соображений, что в точке возникновения пульсаций решение  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в виде статического АС ветвится с решением  $\theta(x) \pm \delta\theta_0(x) \cos(\omega_c t)$  и  $\eta(x) \pm \delta\eta_0(x) \cos(\omega_c t)$  в виде пульсирующего АС. В широком АС вид функций  $\delta\theta_0(x)$ ,  $\delta\eta_0(x)$  изображен на рис. 16, г. Из него следует, что при  $A = A_\omega$  образуется пульсирующий АС, размер которого периодически меняется во времени, точнее,

в нем активатор описывает антифазные автоколебания стенок АС, в то время как ингибитор периодически меняется во всей области локализации АС (рис. 5, *д*).

При охлаждении И- или N-системы широкий АС сужается и все более приобретает вид пикового АС (рис. 5, *б*) с амплитудой  $\sim 1$ . Поскольку в таком АС функция  $\delta\theta_0(x)$  локализована в центре АС, то в точке  $A = A_{\text{пов}}$  (рис. 15, *б*) может возникать пульсирующий АС с колеблющейся амплитудой (рис. 5, *е*).

Такие пульсирующие пиковые АС большой амплитуды могут возникать в  $\Lambda$ - и V-системах, причем даже при  $\alpha \sim 1$ . Последнее следует из условия (6.1), если в нем учесть, что для пиковых АС величина  $\lambda_0 \sim -1$  (п.5.2).

Из анализа нарастания флуктуаций  $\delta\theta$ , близких к функциям  $\delta\theta_n$  задачи (4.24), отвечающих  $\lambda_n < 0$  с  $n \neq 0$ , можно сделать вывод о возможности существования пульсирующих АС сложного вида <sup>31</sup>. Так, при анализе устойчивости широкого АС было показано (п. 4.2), что в спектре  $\lambda_n$  кроме  $\lambda_0 < 0$  имеется значение  $\lambda_1 < 0$ , по величине экспоненциально близкое к  $\lambda_0$ . При этом нарастание флуктуаций, близких к  $\delta\theta_0$  и  $\delta\theta_1$ , происходит независимо. Из вида флуктуации  $\delta\theta \approx \delta\theta_1$  (рис. 16, *д*) следует, что в результате нарастания таких флуктуаций при  $A$ , близких к  $A_\omega$ , в К $\Omega$ N- и К $\Omega$ I-системах с  $\varepsilon^2 \ll \alpha \ll \varepsilon \ll 1$  могут возникнуть качающиеся (с синфазно колеблющимися стенками) или бегущие АС <sup>35</sup>. О возможности возбуждения качающихся АС свидетельствуют и численные исследования, в которых наблюдались качающиеся страты в образце конечного размера <sup>100</sup>.

Исследование нарастания флуктуации  $\delta\theta \approx \delta\theta_0(x) \exp(ik_\perp r_\perp - i\omega_c t)$  с  $\lambda_0 + k_\perp^2 < 0$  приводит к выводу, что в двух- и трехмерных системах можно возбудить широкие АС с извивающимися стенками <sup>31</sup>.

Итак, в двух- и трехмерных К $\Omega$ \Lambda- и К $\Omega$ V-системах можно возбудить радиально-симметричные АС с периодически меняющейся амплитудой, а в К $\Omega$ N- и К $\Omega$ I-системах, кроме таких АС, можно возбудить АС, в которых в основном колеблется их радиус, и АС в виде капли или пятна, совершающих радиально-несимметричные колебания, а также пульсирующие автоструктуры сложного вида <sup>31</sup>.

Качественно изложенные выше результаты относятся и к холодным пульсирующим АС (рис. 5, *ж, з*), которые можно возбудить в горячих устойчивых К $\Omega$ N- и К $\Omega$ I-системах. Существование пульсирующих холодных АС было установлено при численных исследованиях модели (1.13) <sup>33,34</sup>.

## 7. Бегущие автосолитоны (К $\Omega$ - и $\Omega$ -системы).

7.1. Ф о р м а и с к о р о с т ь б е г у щ и х А С. Для построения вида бегущих с постоянной скоростью  $v$  одномерных АС перейдем в уравнениях (2.2) и (2.3) к автомодельной переменной  $x \Rightarrow x - vt$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dx^2} + v \frac{d\theta}{dx} + \frac{dU_\theta}{d\theta} &= 0, \\ \varepsilon^{-2} \frac{d^2\eta}{dx^2} + \alpha^{-1}v \frac{d\eta}{dx} + \frac{dU_\eta}{d\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь и ниже скорость измеряется в единицах  $l/\tau_\theta$ , длина  $-l$ , время  $-\tau_\theta$ ; потенциалы  $U_\theta$  и  $U_\eta$  определены в (3.7) и (3.8). Уравнения (7.1) с циклическими граничными условиями представляют собой задачу на собственные значения, спектр которой определяет величины возможных скоростей, а соответствующие им собственные функции  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  — формы различных бегущих АС.

Рассматривая в качестве нулевого приближения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  для статических АС (п. 3), легко убедиться, что эта задача не допускает решений с  $v \ll \alpha$ ,  $\varepsilon^2$ , т.е. бегущие АС могут иметь лишь конечную скорость <sup>35</sup>. Из анализа (7.1) следует <sup>35</sup>, что в N- и И-системах величина минимальной скорости

$v_{\min} \sim \alpha^{1/2}$ , причем такую скорость имеют АС малого размера ( $\mathcal{L}_s \sim \sim l \ln \alpha^{-1}$ ) и только в системах с  $\alpha < \varepsilon^4$ .

Решения уравнений (7.1) при  $\alpha, \varepsilon \ll 1$  согласно общей теории <sup>8</sup> близки к решениям, отвечающим сочетаниям плавных и резких распределений (п.3.2), которые в данном случае удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + v \frac{d\theta}{dx} + \frac{dU_\theta}{d\theta} = 0, \quad \eta = \text{const}, \tag{7.2}$$

$$\varepsilon^{-2} \frac{d^2\eta}{dx^2} + \alpha^{-1} v \frac{d\eta}{dx} + \frac{dU_\eta}{d\eta} = 0, \quad q(\theta, \eta, A) = 0. \tag{7.3}$$

Решение системы (7.1) можно рассматривать как траектории движения двух «частиц», движущихся со временем  $x$  вдоль осей  $\eta$  и  $\theta$  в потенциалах  $U_\eta$  и  $U_\theta$ , но в отличие от случая статических АС (п.3.2), при наличии знакопостоянных сил трения, пропорциональных скорости  $v$  <sup>27,28,35</sup>. Формы потенциалов  $U_\theta$  и  $U_\eta$  в (7.2) и в (7.3) изучены в п. 3.2. При движении «частиц» их энергии убывают за счет работы сил трения, причем чем больше  $v$ , тем сильнее уменьшается их энергия, т. е. тем больше отличается форма бегущего АС (рис. 23) от статического (рис. 10).

Таким образом, «частицы» в потенциалах  $U_\theta$  и  $U_\eta$  движутся по наклоненным вниз траекториям (рис. 23). Домножая (7.2) на  $d\theta/dx$ , а (7.3) на

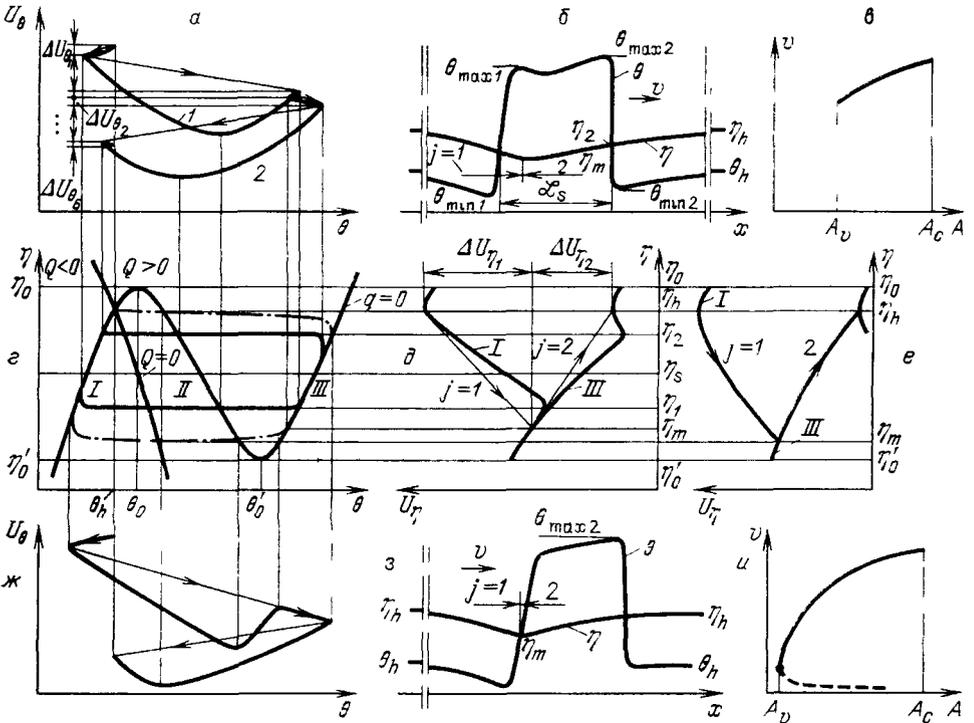


Рис. 23. К построению формы бегущих АС: распределения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$ , которые показаны на рис. б для случая  $\varepsilon^2 \ll \alpha < \varepsilon \ll 1$  и рис. з для  $\alpha \ll \varepsilon^2$  (пояснение в тексте)

$d\eta/dx$  и интегрируя по  $x$  соответственно на  $i$ -м и  $j$ -м элементарных участках  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$ , на границах которых равны нулю соответственно  $d\theta/dx$  или  $d\eta/dx$  (экстремумы  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  находятся в разных точках  $x$ ), получим

$$v = \Delta U_{\theta_i} \left[ \int_i \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \right]^{-1} = \alpha \Delta U_{\eta_j} \left[ \int_j \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx \right]^{-1}, \tag{7.4}$$

где  $\Delta U_{\theta_i}$  и  $\Delta U_{\eta_j}$  — уменьшение потенциальной энергии частиц за счет «работы сил трения» на соответствующих элементарных участках (рис. 23).

Согласно общей процедуре построения АС (п. 3.2) в И- и N-системах (рис. 23, з), резкое распределение  $\theta(x)$ , описывающее форму стенки АС (рис. 23, б), может переходить в плавное, описывающее вид  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  вне стенок и между ними, лишь вблизи точек максимума потенциала  $U_{\theta}$  (рис. 23, а), т.е. седловых точек уравнения (7.2). В случае статического АС  $\Delta U_{\theta} = 0$  и полуосцилляция резкого распределения, описывающая стенку АС, отвечает значению  $\eta = \eta_s$  (п. 3.2), которое определяется из (3.5). Вблизи  $\eta = \eta_s$  происходит сшивка ветвей I и III потенциала  $U_{\eta}$ , наивысшая траектория в котором описывает  $\eta(x)$  в статическом АС (рис. 10). Для бегущего АС  $\Delta U_{\theta} > 0$ , поэтому при переходе от I к III ветви  $U_{\eta}$  (рис. 23, д, траектория частицы с  $j = 1$ ) потенциал  $U_{\theta}$  должен иметь вид кривой 1 на рис. 23, а. Такой потенциал, как видно из рис. 9, реализуется при  $\eta_1 < \eta_s$  ( $\eta_1 > \eta_s$  — для И-систем). Иными словами, сшивка ветвей I и III потенциала  $U_{\eta}$  в (7.3) происходит при  $\eta_1 < \eta_s$  (рис. 23, д). Из рис. 9 видно, что значению  $\eta_1 < \eta_s$  отвечают  $\theta_{\min_1}$  и  $\theta_{\max_1}$  в заднем фронте (стенке) бегущего АС (рис. 23, б), меньшие, чем  $\theta_{\min} = \theta_{s1}$  и  $\theta_{\max} = \theta_{s3}$  для статического АС (п.3.2).

Точке поворота траектории движения частицы в потенциале  $U_{\eta}$  отвечает значение  $\eta = \eta_m$  (рис. 23, д). В этой точке происходит переход от траектории частицы  $j = 1$  к траектории  $j = 2$  в потенциале  $U_{\eta}$  в (7.1), минимум которого расположен при  $\eta_2 > \eta_s$  (рис. 23, д). Действительно, переход от III к I ветви потенциала  $U_{\eta}$  в (7.3) для плавных распределений может происходить, когда потенциал  $U_{\theta}$  имеет вид кривой 2 на рис. 9, в, что возможно лишь при  $\eta_2 > \eta_s$ . Отсюда следует, что  $\theta_{\max_2}$  и  $\theta_{\min_2}$  в переднем фронте (стенке) бегущего АС (рис. 23, б) больше соответствующих значений для статического АС. Последовательная сшивка отрезков плавных и резких распределений приводит к самосогласованной дорстройке потенциалов  $U_{\theta}$ ,  $U_{\eta}$  и распределений  $\theta(x)$ ,  $\eta(x)$  (рис. 23, а, б, д) <sup>35,28</sup>.

Из изложенной процедуры построения бегущего АС следует, что  $v$  ограничено сверху величиной  $\sim 1$  ( $l/\tau_{\theta}$ ). Действительно, при  $v \gg 1$  из (7.2) видно, что работа положительных сил трения намного превосходит кинетическую энергию «частицы», движущейся в потенциале  $U_{\theta}$ , т.е. она будет застревать в его минимуме (рис. 23, а), не достигая второго максимума, отвечающего точке сшивки с соответствующим плавным распределением (рис. 23). Согласно (7.4) скорость  $v \sim l/\tau_{\theta}$  реализуется, когда  $\eta_1$  и  $\eta_2$  отличаются от  $\eta_s$  на величину  $\sim 1$ . Из построения потенциала  $U_{\eta}$  (рис. 23, д) следует, что это возможно, когда кинетическая энергия «частицы», движущейся в потенциале  $U_{\eta}$ , меньше или порядка работы сил трения. Последнее согласно (7.3) реализуется, когда диффузионная длина  $L \ll v\tau_{\eta} \equiv \tilde{L}$  — дрейфовой длины. Учитывая, что  $v \ll l/\tau_{\theta}$ , из последнего равенства вытекает, что бегущий широкий АС можно возбудить в N- и И-системах только при  $\alpha \ll \varepsilon \ll 1$  (рис. 8).

При уменьшении  $A$  широкий АС сужается и трансформируется в узкий. Чем меньше размер  $\mathcal{L}_s$  бегущего АС, тем меньше изменение  $\eta(x)$  между его стенками, т.е. тем меньше отличается  $\eta_1$  от  $\eta_2$ . В свою очередь,  $\eta_1 < \eta_s$ , а  $\eta_2 > \eta_s$  (рис. 23), и их отличие от величины  $\eta_s$  определяет  $v$ . Отсюда следует, что при сужении широкого АС его скорость уменьшается и при некотором размере  $\mathcal{L}_s$  ( $A_v$ ) =  $\mathcal{L}_v$  решение в виде АС, движущегося со скоростью  $v_{\min} \gg \alpha^{1/2}$ , исчезает (рис. 23, в).

Это утверждение справедливо при  $\varepsilon^4 \ll \alpha \ll \varepsilon \ll 1$ , поскольку только в системах с  $\alpha < \varepsilon^4$  широкие АС при сужении (уменьшении  $A$ ) могут трансформироваться в медленные, движущиеся с  $v \sim \alpha^{1/2}$ . Отсюда вытекает также, что чем меньше отношение  $\alpha/\varepsilon$ , тем меньше величины  $v_{\min}$  и  $A_v$  (рис. 23, в). Отметим, что изложенные здесь результаты относятся и к периодической последовательности бегущих страт (импульсов) <sup>35,28</sup>.

Форма бегущих АС, изображенная на рис. 23, б, реализуется в КΩN (и КΩИ)-системах, для которых величина  $\alpha$  не слишком мала по сравнению с  $\varepsilon \ll 1$ . При  $\alpha \ll \varepsilon$  распределение  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  на вершине и между стенками АС становится монотонным (рис. 23, з). Действительно, при  $\alpha \ll \varepsilon$ , точнее  $\tilde{L} \gg L$ , «кинетической энергией частицы», т.е. членом  $\varepsilon^{-2} d^2\eta/dx^2$  в (7.1), можно пренебречь и считать, что изменение «потенциальной энергии»  $U_\eta$  целиком расходуется на работу «сил трения». Это означает, что траектория движения частицы соответствует скольжению по ветвям многозначного потенциала  $U_\eta$ , т.е. при  $\tilde{L} \gg L$  траектории  $j = 1, 2$  на рис. 23, б вырождаются в  $j = 1, 2$  на рис. 23, е. При этом в распределении  $\eta(x)$  минимум  $\eta = \eta_1 = \eta_m$  и расположен в заднем фронте АС (рис. 23, з); в переднем фронте значение  $\eta = \eta_h$  (рис. 23, е), а величины  $\theta_{\min} = \theta_h$  и  $\theta_{\max_2}$  есть минимальный и максимальный корни уравнения  $q(\theta, \eta_h, A) = 0$ .

Когда  $\alpha < \varepsilon^2$ , при всех возможных скоростях  $\tilde{L} > L$ , т.е. распределение  $\eta(x)$  характеризуется не диффузионной длиной  $L$ , а дрейфовой  $\tilde{L}$ . Таким образом, при  $\alpha < \varepsilon^2$  ( $\tilde{L} \gg L$ ) условие использования приближения резких и плавных распределений сводится к  $\tilde{L} \gg l$ , т.е. малым параметром задачи является не  $\varepsilon$ , а  $\alpha \ll 1$ . При этом на величину  $\varepsilon$  сверху не накладывается никаких ограничений.

Отсюда вытекает, что в ΩN (ΩИ)-системах ( $\varepsilon > 1, \alpha \ll 1$ ; п. 2.2), в которых статические и пульсирующие АС не реализуются (рис. 8; см. п. 3,6), можно возбудить бегущий со скоростью  $v \geq \alpha^{1/2}$  АС, форма которого совпадает с изображенной на рис. 23, з. Эти результаты по существу установлены из исследований моделей типа ФХН<sup>1,12,58-60</sup>, которые являются предельным случаем Ω-систем при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , т.е. описываются уравнениями (2.2), (2.3) с  $L = 0$ . Из исследования этих моделей было также выяснено<sup>1,59</sup>, что зависимость  $v$  от бифуркационного параметра  $A$  имеет вид, изображенный на рис. 23, и: большим скоростям отвечают широкие устойчивые АС, а малым — узкие неустойчивые АС (пунктирный участок кривой на рис. 23, и). Минимальное значение скорости  $v_{\min} \sim \alpha^{1/2} (l/\tau_\theta)$ , а максимальное  $v \sim l/\tau_\theta$  и достигается при  $A$ , близких к  $A_c$  (рис. 23, и)<sup>59</sup>. При  $A > A_c$  однородное состояние системы неустойчиво (п.2.2), т.е. бегущий АС возбудить нельзя.

Из построения бегущего АС в Ω-системах (рис. 23, з), которое строго обосновано<sup>59, 60</sup> с помощью теории сингулярных возмущений<sup>116</sup>, а также физики его образования (п.1.4), следует, что его передний фронт представляет собой волну переброса активатора из состояния  $\theta = \theta_h$  в  $\theta = \theta_{\max_2}$  при  $\eta \approx \eta_h = \text{const}$ . Поэтому два бегущих навстречу друг другу АС при столкновении аннигилируют<sup>12, 16</sup>.

В КΩN- и КΩИ-системах, как уже отмечалось, бегущий АС реализуется при  $\alpha < \varepsilon \ll 1$  (рис. 8)<sup>35,28</sup>. При этом чем больше величина отношения  $\alpha/\varepsilon$ , тем больше величина  $v_{\min}$  и  $A_v$  (рис. 23, в), т.е. тем в меньшем диапазоне изменения  $A$  ( $A_v < A < A_c$ ) в системе можно возбудить бегущий АС. При  $A$ , близких к  $A_c$  или  $A_d$  (п. 3.5), в КΩN (КΩИ)-системах с  $\varepsilon^2 \ll \alpha \ll \varepsilon \ll 1$ , наряду с бегущим, можно возбудить статический и пульсирующий АС (п.3 и 6)<sup>35</sup>. Отсюда вытекает, что в таких системах при столкновении двух бегущих АС может образовываться статический или пульсирующий АС. Это связано с тем, что в КΩ-системах, в отличие от Ω-систем, перед передним фронтом бегущего АС бежит «диффузионный предвестник» — область плавного изменения ингибитора от  $\eta_2$  до  $\eta_h$  (рис. 23, б).

Заметим, что все приведенные результаты относятся и к холодным бегущим АС (рис. 5, л, м), которые можно возбудить в горячих Ω- и КΩ-системах с N- или II-образной кривой ЛС.

В Ω- и КΩ-системах, в которых кривая ЛС имеет Λ- или V-образный вид (рис. 6, б, г), можно возбудить бегущие пиковые АС (рис. 5, к) большой ампли-

туды. Такие одномерные бегущие АС по той же причине, что и пиковые статические АС (п. 5.2), в дву- и трехмерных системах неустойчивы относительно их разбиения на более мелкие области, поэтому сложные автоволны (спиральные, радиально расходящиеся и др.) в них возбудить не удастся.

7.2. О более сложных автоволнах. В одномерных системах кроме бегущих АС (импульсов) можно возбудить периодическую<sup>1,12-16</sup>, а возможно, и стохастическую<sup>16,27,182</sup> последовательность импульсов, форма которых близка к одной из изображенных на рис. 5, *и-ж*.

Из анализа устойчивости, аналогичного проведенному в п. 4.2 и 4.4, можно сделать вывод<sup>29,32</sup>, что при  $\alpha \ll \epsilon$  одномерные широкие бегущие АС устойчивы относительно гофрировки их стенок в дву- и трехмерных системах. Устойчивость бегущих АС в  $\Omega$ -системах была установлена при численных исследованиях двумерных автоволн в моделях типа ФХН (см., например, <sup>18,61-69</sup>). Одномерный бегущий АС в двумерных системах, встречаясь с неоднородностью, может возбудить спиральную автоволну — ревербератор<sup>54,13,15,183-185</sup>, которая впервые наблюдалась и наиболее детально изучена в химических реакциях типа Белоусова — Жаботинского (п.1.4)<sup>48,49</sup>. В трехмерных системах можно возбудить сложные автоволны в виде свитков, колец и других вихрей<sup>49,66-69,111</sup>.

В  $K\Omega$ -системах кроме перечисленных автоволн можно возбудить пульсирующий АС (п. 6.2) и другие автоструктуры<sup>31,29</sup>. Пульсирующий с достаточно большой амплитудой АС в виде сгустка (пятна или слоя) может приводить к возбуждению сферически (цилиндрически или одномерно) расходящихся от него без затухания автоволн, которые вдали от центра в сечении близки к бегущему АС (рис. 23, *б*). Иными словами, пульсирующий АС может проявлять себя как ведущий центр (источник радиально — расходящихся автоволн), обнаруженный экспериментально в химических реакциях<sup>48,15</sup>. Стационарный ведущий центр в двухмерной  $K\Omega$ -системе был обнаружен при численных исследованиях модели (1.13)<sup>34</sup>. Образование ведущего центра в  $\Omega$ -системах может быть связано с неоднородностью, которая всюду устойчивую среду в локальной области переводит в автоколебательный режим<sup>12,15</sup>. В  $K\Omega$ -системах малая неоднородность может приводить к спонтанному возникновению ведущего центра при  $A_d < A < A_c$ : малая неоднородность будет провоцировать образование АС (п.4.3), в процессе его формирования в центре АС будет происходить «локальной пробой» (п.4.4), в результате чего могут образовываться радиально расходящиеся автоволны. Условия возбуждения ведущего центра легче выполняются в трехкомпонентных<sup>12,16</sup> и в более сложных активных системах с диффузией<sup>186</sup>.

## 8. Особенности автосолитонов в бистабильных (триггерных) системах.

8.1. Системы с диффузией. N- и И-системы, в которых кривые ЛС и УС (п. 2.2) пересекаются в трех точках, принято называть триггерными (рис. 24, *а*). Такая ситуация может реализовываться, например, в полупроводниках<sup>149,150,32</sup> и газовой плазме<sup>90</sup>, а также в химических реакциях<sup>48,111</sup>. В триггерных системах при заданном  $A$  из трех однородных состояний два устойчивы — отвечающие холодному ( $\theta_{h1}, \eta_{h1}$ ) и горячему состоянию системы ( $\theta_{h3}, \eta_{h3}$ ; рис. 24, *а*). Изложенная в п. 3, 4, 6 и 7 теория АС, реализующихся в моностабильных системах, относится и к АС в триггерных (бистабильных) системах, для которых выполнены условия (2.7), (2.9) или (2.10)<sup>29,32</sup>. Из нее следует<sup>29, 32</sup>, что в таких бистабильных K-системах, в отличие от моностабильных (п. 3 и 4), области существования горячего и холодного АС смыкаются при некотором уровне возбуждения  $A = A_k$ : в холодной системе ( $\theta_{h1} < \theta_0$ ; п. 2.2) можно возбудить горячий АС (рис. 5, *а, б*) вплоть до  $A = A_b$  (п. 4.2), а в горячей системе ( $\theta_{h3} > \theta'_0$ ) можно возбудить холодный АС (рис. 5, *в, г*) вплоть до  $A = A'_b$  (п. 4.2)<sup>32</sup>.

Это связано с тем, что бистабильные системы имеют два устойчивых однородных состояния, отвечающих ветвям I и III кривой ЛС (рис. 24, а). Эти состояния согласно п. 3.2 определяют точки максимума потенциала  $U_\eta$  в ура-

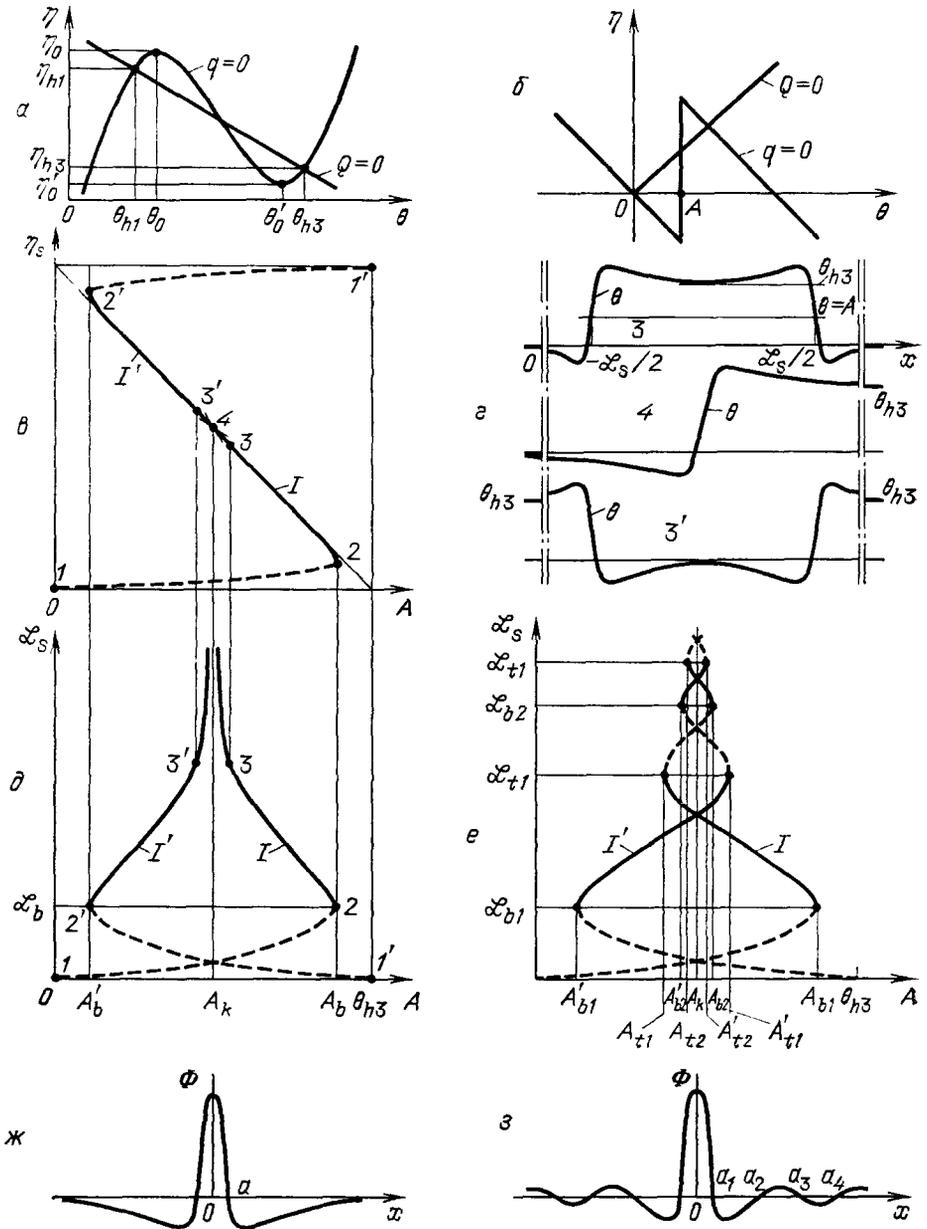


Рис. 24. К пояснению свойств АС в триггерных системах. а, б — Кривые ЛС и УС. в — Вид широких АС (3 и 3') и сложной доменной стенки (4). г, д, е — Бифуркационные характеристики. ж, з — Вид функций связи. Сплошные участки на рис. в, д, е отвечают устойчивым АС, а штриховые — неустойчивым состояниям. Номера кривых 3, 3', 4 на рис. г коррелируют с соответствующими точками на бифуркационных характеристиках рис. в, д

внении для плавных распределений (3.12), т. е. ветви I и III потенциала  $U_\eta$  имеют вид потенциальных горбов<sup>28</sup>. Для построения истинного потенциала в (3.8) эти ветви надо сплечь в точке  $\eta = \eta_s$  (п. 3.2). Согласно (3.14) значе-

ния  $U_\eta$  в точках максимумов совпадают, когда выполнено условие <sup>29,32</sup>

$$\int_{\eta_{h1}}^{\eta_s} Q(\theta_I(\eta), \eta, A_k) d\eta = \int_{\eta_{h2}}^{\eta_s} Q(\theta_{III}(\eta), \eta, A_k) d\eta, \quad (8.1)$$

$$q(\theta_I, \theta_{III}, \eta, A_k) = 0,$$

которое с точностью до  $\varepsilon \ll 1$  определяет величину  $A = A_k$ . Наивысшая траектория движения «частицы» в таком потенциале описывает переход из одного устойчивого состояния в другое. В холодной системе величина максимума  $U_\eta$ , отвечающего ветви I, меньше, чем III, а наивысшая траектория движения «частицы» в таком потенциале соответствует горячему АС (рис. 5, а). В горячей системе ситуация меняется на противоположную, т. е. в них реализуется лишь холодный АС (рис. 5, в).

При  $A \rightarrow A_k$  ширина АС стремится к бесконечности и в системе реализуется состояние в виде сложной статической доменной стенки, описывающей переход из состояния  $\eta = \eta_{h1}$ ,  $\theta = \theta_{h1}$  в состояние  $\eta = \eta_{h2}$ ,  $\theta = \theta_{h2}$  (рис. 24, в, кривая 4) <sup>32,39</sup>.

В рассматриваемых К-системах можно возбудить волны переброса сложной структуры, переводящие систему из холодного в горячее состояние или наоборот. Эти волны реализуются в различных диапазонах изменения  $A$ , смыкающихся в точке  $A = A_k$ , в которой скорость волн  $v = 0$ .

В двух- и трехмерных К-системах одномерные АС устойчивы относительно расслоения в плоскости их стенок (п. 4.4) в диапазоне изменения  $A$ , границы которого определяются значениями  $\mathcal{L}_{h1}$  и  $\mathcal{L}_{c1}$ , даваемыми (4.33) или (4.35).

В одномерных КΩ-системах с  $\varepsilon^2 \ll \alpha < \varepsilon \ll 1$  АС теряют устойчивость относительно пульсаций (п. 6.2) на границах диапазона, определяемого условиями (6.7) или (6.10) <sup>32,39</sup>.

В Ω-системах кроме бегущих АС и других автоволн (п. 7) можно возбудить автоволны переключения, переводящие систему из холодного состояния ( $\eta = \eta_{h1}$ ,  $\theta = \theta_{h1}$ ) в горячее ( $\eta_{h2}$ ,  $\theta_{h2}$ ; рис. 24, а) и наоборот — из горячего в холодное <sup>60,29</sup>. Существование в Ω-системах (в отличие от К-систем) при одном и том же значении  $A$  двух таких различных волн переключения, движущихся в одном направлении, является одним из характерных эффектов, отличающих рассматриваемые двухпараметрические системы от однопараметрических систем с диффузией, например от полупроводников с S-образной ВАХ. В последних можно возбудить лишь одну волну, переводящую систему в одно из двух устойчивых состояний <sup>19</sup>. Возможность поочередного переключения системы из холодного состояния в горячее и наоборот позволяет возбуждать в ней весьма произвольные последовательности автоволн разной ширины.

Вытекающие из общей теории особенности свойств АС в триггерных системах подтверждаются <sup>164-166</sup> результатами аналитических исследований аксиоматической кусочно-линейной модели (рис. 24, б), описываемой уравнениями (2.2), (2.3), в которых

$$q(\theta, \eta, A) = \theta + \eta - H(\theta - A), \quad Q(\theta, \eta) = \eta - B\theta, \quad (8.2)$$

где  $H = 1$  при  $\theta \geq A$  и  $H = 0$  при  $\theta < A$ , т.е.  $A$  определяет порог возбуждения среды. Модель (2.2), (2.3) с  $L = 0$ ,  $\tau_\eta \gg \tau_\theta$  ( $\alpha \ll 1$ ) и с  $q$  (8.2) широко используется для анализа автоволн <sup>15,187,188</sup>, реализующихся в Ω-системах (п.7).

Установлено <sup>188</sup>, что форма бегущего АС (импульса) имеет вид, изображенный на рис. 23, в. Заданному значению  $A$  отвечают два решения — в виде устойчивого быстрого широкого импульса и неустойчивого медленного узкого. Не доходя до точки  $A = A_v$ , где  $dv/dA = \infty$  (рис. 23, u), а  $v_{min} = \sqrt{3\alpha}^{1/2}$ , импульс скачкообразно исчезает <sup>15</sup>.

Можно убедиться, что эти результаты справедливы и при  $\varepsilon \ll 1$ , но  $\alpha < \varepsilon^4$ . С ростом отношения  $\alpha/\varepsilon$ , в соответствии с общими утверждениями (п.7.1), увеличивается минимальное значение скорости  $v_{\min}$ , при которой бегущий АС скачкообразно исчезает (рис. 23,  $\varepsilon$ ). При  $3^{-1/2}\varepsilon < \alpha \ll 1$  решение в виде бегущих АС не реализуется.

Для данной модели при  $\varepsilon \ll 1$  можно найти аналитические формулы, описывающие распределения  $\theta(x)$  и  $\eta(x)$  в статических АС <sup>164,166</sup>, вид которых совпадает с изображенным на рис. 5,  $a-z$ . По этим формулам можно восстановить вид потенциалов  $U_\theta$  и  $U_\eta$  в (3.7) и (3.8) и убедиться <sup>166</sup>, что их форма совпадает с вытекающей из общей теории (п.3.2). Из аналитического исследования также следует <sup>166</sup>, что для рассматриваемой модели  $\theta_{h1} = 0$ ,  $\theta_{h3} = (1+B)^{-1}$ ,  $A_k = 0,5\theta_{h3}$ ,  $A_b = 0,5 \{1 - \varepsilon B (1+B)^{-1/2} (1 + \ln [(\varepsilon B)^{-1} (1+B)^{1/2}])\}$ ,  $A'_b = 2A_k - A_b$ , а бифуркационные характеристики, т. е. зависимости  $\eta_s$  или  $\mathcal{L}_s$  от  $A$  имеют вид рис. 24,  $\varepsilon, \delta$ . Ветвь  $I$  отвечает горячему (рис. 5,  $a, б$ ), а  $I'$  — холодному АС (рис. 5,  $\varepsilon, \varepsilon$ ). При  $\alpha > 1$  устойчивым АС отвечают сплошные участки на бифуркационных характеристиках (рис. 24,  $\varepsilon, \delta$ ). При  $A \rightarrow A_k$  размер АС неограниченно увеличивается (рис. 24,  $\varepsilon$ , кривые  $3$  и  $3'$ ), а при  $A = A_k$  обращается в бесконечность, точнее реализуется структура в виде сложной доменной стенки (рис. 24,  $\varepsilon$ , кривая 4). При  $A \rightarrow A_b$  (или  $A'_b$ ) размер АС уменьшается, а в критических точках  $2$  и  $2'$  (рис. 24,  $\varepsilon, \delta$ ) становится равен  $\mathcal{L}_b = l \ln [\varepsilon^{-1} (1+B)^{1/2} B^{-1}]$ , что согласуется с оценкой (4.31). Для рассматриваемой модели подтверждаются также формулы (4.35) и (6.10).

8.2. Системы с дальнедействующими связями. Выше рассматривались свойства АС в двухпараметрических системах, в которых дальное действие ингибитора определяется диффузионными процессами. Аналогичными свойствами обладают АС в активных (возбудимых) системах, в которых неоднородное распределение активатора вызывает дальнедействующие «силы», приводящие к подавлению (ингибированию) процесса активации. Такая ситуация реализуется, например, в распределенных нейронных сетях, в том числе, по-видимому, в коре головного мозга <sup>189,190</sup>, так называемом TV-аналоге <sup>36</sup> и активных распределенных оптоэлектронных средах <sup>191</sup>. В физических системах дальнедействующие силы могут иметь различную природу (электрическую, деформационную, магнитную). В оптоэлектронных средах дальнедействующие «силы» определяются оптическими и электрическими связями <sup>191</sup>.

В нейристорных сетях и подобных им средах реализуются короткодействующие возбуждающие и дальнедействующие тормозящие связи <sup>189-192, 36</sup>. Благодаря первым осуществляется процесс активации, а вторым — дальнедействующее ингибирование. В простейшем одномерном случае процессы в нейристорных сетях описываются интегральным уравнением вида <sup>189</sup>

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x' - x) H(\theta(x', t) - A) dx' \quad (8.3)$$

или

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = -\tilde{\theta} + H \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x' - x) \tilde{\theta}(x', t) dx' - A \right], \quad (8.4)$$

где функция связи  $\Phi(x)$  описывает короткодействующую активацию и дальнедействующее ингибирование (рис. 24,  $\varepsilon$ ).

Решение уравнения (8.4) в стационарном случае описывает локальное состояние элементов возбудимой среды (0 или 1) и имеет вид прямоугольни-

ка:  $\tilde{\theta}(x) = H(x + \mathcal{L}_s/2) - H(x - \mathcal{L}_s/2)$ , где  $\mathcal{L}_s$  — ширина АС — определяется из уравнения <sup>192</sup>

$$\int_0^{\mathcal{L}_s} \Phi(x) dx = A. \tag{8.5}$$

Пространственное распределение порога в такой среде имеет более сложный вид, совпадающий с распределением активатора  $\theta(x)$  в модели (8.3). Действительно, простым преобразованием <sup>189,192</sup>

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x' - x) \tilde{\theta}(x') dx' \tag{8.6}$$

уравнение (8.4) сводится к (8.3).

Несмотря на качественное отличие уравнений (8.3) или (8.4) от системы (2.2), (2.3), (8.2), бифуркационная характеристика  $\mathcal{L}_s(A)$  моделей (8.3) и (8.4) <sup>192</sup>, определяемая (8.5), качественно совпадает с изображенной на рис. 24,  $\partial$  для модели (8.2) <sup>166</sup> (п. 8.1). Для модели (8.3)  $\theta_{h1} = 0$ ,  $\theta_{h3} = 2A_k$  (соответственно точки  $I$  и  $I'$  на рис. 24,  $\partial$ ) <sup>192</sup>

$$A_k = \int_0^{\infty} \Phi(x) dx, \quad A_b = \int_0^a \Phi(x) dx, \quad A'_b = 2A_k - A_b, \quad \mathcal{L}_b = a, \tag{8.7}$$

где  $a$  — положительный корень функции  $\Phi(x)$  (рис. 24,  $\kappa$ ). Ветвь  $I$  бифуркационной характеристики (рис. 24,  $\partial$ ) описывает эволюцию простейшего горячего АС, для которого <sup>192</sup>

$$\theta(x) = \int_{x - (\mathcal{L}_s/2)}^{x + (\mathcal{L}_s/2)} \Phi(x') dx' \quad \left( \theta\left(\frac{\mathcal{L}_s}{2}\right) = A \right). \tag{8.8}$$

Ветвь  $I'$  отвечает холодному АС, в котором распределение активатора равно  $2A_k - \theta(x)$ , где  $\theta(x)$  дается (8.8).

Учитывая вид функции связи  $\Phi(x)$  (рис. 24,  $\kappa$ ), из (8.8) легко сделать вывод, что распределения  $\theta(x)$  в виде горячего и холодного АС имеют вид, совпадающий с изображенным на рис. 5,  $a-g$  и 24,  $z$ . При этом эволюция и основные свойства АС в рассматриваемых моделях (8.3) и (8.4) и в одномерной модели активной среды с диффузией (2.2), (2.3), (8.2) (п.8.1) полностью совпадают.

Когда функция связи  $\Phi(x)$  имеет осциллирующий характер (рис. 24,  $z$ ), при  $A$ , близких к  $A_k$  — (8.7), может реализовываться много АС различного размера  $\mathcal{L}_{sn}$ , число которых неограниченно возрастает при  $A \rightarrow A_k$  (рис. 24,  $e$ ) <sup>192</sup>. Распределение активатора в  $n$ -м горячем АС дается формулой (8.8), в которой надо заменить  $\mathcal{L}_s$  на  $\mathcal{L}_{sn}$  <sup>192</sup>. Оно отличается от изображенного на рис. 5,  $a, б$  и 24,  $\partial$  (кривая  $3$ ) лишь тем, что на периферии АС спад  $\theta(x)$  происходит не монотонно, а носит осциллирующий характер (рис. 7,  $a$ ).

Согласно теории устойчивости АС (п. 4.2) устойчивые и неустойчивые участки существования АС на бифуркационной характеристике (рис. 24,  $e$ ) разделены точками  $A = A_{bn}$  и  $A_{tn}$ , где  $d\mathcal{L}_s/dA = \infty$ . Значения  $A_{bn}$ ,  $A_{tn}$  и соответствующие ширины горячих АС равны <sup>192</sup>

$$A_{bn} = \int_0^{\mathcal{L}_{bn}} \Phi(x) dx, \quad A_{tn} = \int_0^{\mathcal{L}_{tn}} \Phi(x) dx, \quad \mathcal{L}_{bn} = a_{2n-1}, \quad \mathcal{L}_{tn} = a_{2n} \tag{8.9}$$

( $n = 1, \dots$ ),

где  $a_n$  — положительный  $n$ -й корень функции  $\Phi(x)$  (рис. 24,  $z$ ).

Подчеркнем, что модели (8.3) и (8.4) описывают среды, в которых процесс торможения (ингибирования) является дальнедействующим, но безынерционным, т.е. они относятся к К-системам (п. 2.2).

Среды, в которых процесс торможения является не только дальнедействующим, но и более инерционным, чем процесс активации (возбуждения), по своим свойствам аналогичны КΩ-системам (п.2.2), точнее в них кроме статических АС могут реализовываться пульсирующие и бегущие АС. Перед передней стенкой бегущего АС в таких системах бежит «рефракторная зона» (здесь она связана не с диффузией, (п.2.2 и 7.1), а с дальнедействующим торможением). Это объясняет, почему при численных исследованиях одной из моделей такой среды <sup>36</sup> бегущие АС не аннигилируют, а отталкиваются или же образуют статический АС, т. е. проявляют свойства, характерные и для других КΩ-систем (п.2.2).

**Заключение.** Свойства многих реальных физических, а тем более химических <sup>49,111</sup> и биологических <sup>16</sup> систем описываются несколькими дифференциальными уравнениями. Однако если в них выделить процессы активации и ингибирования, то описание АС, как правило, удастся свести к анализу двух уравнений диффузионного типа (п. 2.1). Поэтому результаты изложенной в обзоре теории АС носят весьма общий характер.

В реальных системах процессы активации и ингибирования могут иметь совершенно различную природу и описываться не только уравнениями диффузионного типа, но и другими уравнениями, в том числе и интегральными (п. 8.2). Из изложенной в обзоре теории АС следует, что тип АС в первую очередь определяется характерными пространственными и временными масштабами изменения активатора и ингибитора. Обобщая результаты п. 2.2, к К-системам, в которых образуются статические АС, следует отнести системы, где процесс ингибирования (торможения) по сравнению с активацией (возбуждением) является менее инерционным и более дальнедействующим; к Ω-системам, в которых реализуются бегущие АС — системы, где ингибирование оказывается более инерционным, но короткодействующим; к КΩ-системам, в которых реализуются статические, пульсирующие и бегущие АС, — системы, где ингибирование является более инерционным и дальнедействующим. Естественно ожидать, что типы и основные свойства АС в каждом из этих классов систем, независимо от физической природы процессов активации и ингибирования, будут аналогичны рассмотренным для активных систем с диффузией. Этот вывод подтверждают результаты, приведенные в п. 8.2, для АС, реализующихся в активных средах, описываемых интегральными уравнениями, а также численных исследований АС в активных средах, описываемых несколькими дифференциальными уравнениями <sup>112,186</sup>, в том числе и сложного вида <sup>193, 194</sup>.

Изложенные в обзоре результаты теории АС используются для объяснения разнообразных явлений в химии и биологии <sup>12-17,37,109,114</sup>. На основе теории АС удастся объяснить образование страт в газовом разряде <sup>44</sup>, сгустков горячих носителей в газовой и полупроводниковой плазме <sup>45,46,51</sup>, светящихся точек при лавинном пробое р-п-переходов <sup>47</sup> и локальных областей проплавления на поверхности кристалла при однородном импульсном лазерном возбуждении <sup>195</sup>.

В полупроводниках и полупроводниковых структурах АС могут представлять собой сильно неравновесные области, в которых высока температура электронов или решетки <sup>25</sup>. Поэтому многие деградиационные эффекты в микроэлектронных приборах могут быть связаны со спонтанным образованием АС у малых неоднородностей.

Разнообразие свойств АС и та важная роль, которую они играют в биологии <sup>12,16</sup>, вызывает все возрастающий интерес <sup>36,117,118,191</sup> к созданию различных микроэлектронных устройств запоминания, хранения и обработки

информации на основе активных распределенных сред с диффузией или с дальнедействующими связями.

Как уже отмечалось в п.2.2, статический или пульсирующий АС под действием внешних сил может сноситься со скоростью, пропорциональной величине вызываемого ими потока. АС могут возникать и в системах, неравновесность которых определяется самой величиной потока. В таких системах АС существуют благодаря тому, что диссипативные потери в них компенсируются «подкачкой» энергии от потока (течения). Например, в вязкой жидкости, стекающей по вертикальной поверхности трубки<sup>196</sup> или плоскости<sup>76</sup>, могут возникать двумерные движущиеся АС; во вращающейся жидкости или атмосфере планет могут образовываться АС в виде вихрей<sup>80-82</sup>.

АС можно возбудить и в области неустойчивости однородного состояния системы, в которой образуется устойчивая периодическая автоструктура. АС здесь может представлять собой один из видов «дефектов»\*) периодической структуры<sup>194</sup>. АС можно возбудить и в турбулентной среде. Примером такого АС является образование тайфунов в турбулентной атмосфере<sup>197,198</sup>.

Поскольку условия образования АС несут весьма общий характер, то АС могут наблюдаться в системах самой разнообразной природы. Не исключено, что многие из загадочных явлений природы, такие как шаровая молния<sup>199</sup>, образование высокотемпературных скоплений газа в космосе<sup>200</sup>, а также северное сияние и многие другие наблюдаемые неоднородности в ионосфере<sup>201</sup>, можно объяснить на основе изложенных в данном обзоре представлений об АС.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Б.Б. Кадомцеву, Л. В. Келдышу, В. И. Крискому, А. П. Леванюку, Э. А. Манькину, С. С. Моисееву, М. В. Незлину, М. И. Рабиновичу, Д. С. Чернавскому за стимулирующие дискуссии, а также В. Г. Яхно и А. В. Мастерову, которые обратили наше внимание на вопросы, рассмотренные в п. 8.2. Особую благодарность выражаем Е. М. Кузнецовой, совместно с которой написан п. 8.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- <sup>1</sup> Скотт А. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Сов. радио, 1977.
- <sup>2</sup> Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
- <sup>3</sup> Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
- <sup>4</sup> Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983.
- <sup>5</sup> Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. — М.: Мир, 1985.
- <sup>6</sup> Филиппов А. Т. Многоликий солитон. — М.: Наука, 1986.
- <sup>7</sup> Давыдов А. С. Солитоны в биоэнергетике. — Киев: Наукова думка, 1986.
- <sup>8</sup> Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
- <sup>9</sup> Бутенин Н. В., Наймарк Ю. И., Фужаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976.
- <sup>10</sup> Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. // УФН. 1979. Т. 128. С. 579.
- <sup>11</sup> Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
- <sup>12</sup> Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. // УФН. 1979. Т. 128. С. 625; Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987.
- <sup>13</sup> Кринский В. И., Жаботинский А. М. // Автоволновые процессы в системах с диффузией/Под ред. М. Т. Греховой. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981. — С. 6.
- <sup>14</sup> Vasilev V. A., Romanovskii Yu. M., Chernavskii D. S., Yakhno V. G., Autowave Processes in Kinetic Systems. — Berlin: Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986.
- <sup>15</sup> Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. — М.: Наука, 1983.
- <sup>16</sup> Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.

\*) На это явление внимание авторов обратил М. И. Рабинович.

- 17 Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах.— М.: Наука, 1983.
- 18 Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки.— М.: Наука, 1978.
- 19 Волков А. В., Коган Ш. М.//УФН. 1968. Т. 96. С. 633.
- 20 Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Миронов А. Г. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках.— М.: Наука, 1972.
- 21 Гуревич А. Вл., Минц Р. Г.//УФН 1984. Т. 142. С. 61.
- 22 Гуревич А. Вл., Минц Р. Г. Тепловые автоволны в нормальных металлах и сверхпроводниках.— М.: ИВТ АН СССР, 1987.
- 23 Николс Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.— М.: Мир, 1979.
- 24 Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах.— М.: Мир, 1985.
- 25 Кернер Б. С., Осипов В. В.//ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 1675.
- 26 Кернер Б. С., Осипов В. В.//ФТП. 1979. Т. 13. С. 721.
- 27 Кернер Б. С., Осипов В. В.//ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 2218.
- 28 Кернер Б. С., Осипов В. В.//Микроэлектроника. 1981. Т. 10. С. 407.
- 29 Кернер Б. С., Осипов В. В.//Микроэлектроника. 1985. Т. 14. С. 389.
- 30 Kerner B. S., Osipov V. V.//Selforganization by Nonlinear Irreversible Processes/Ed. by W. Ebeling, H. Ulbricht.— New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.— P. 118.—(Springer Series in Synergetics).
- 31 Кернер Б. С., Осипов В. В.//ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 2201.
- 32 Кернер Б. С., Осипов В. В.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 589.
- 33 Гафийчук В. В., Кернер Б. С., Лазурчак И. И., Осипов В. В.//Микроэлектроника. 1986. Т. 15. С. 180.
- 34 Осипов В. В., Лазурчак И. И., Кернер Б. С., Гафийчук В. В.//Микроэлектроника. 1987. Т. 16. С. 23.
- 35 Кернер Б. С., Осипов В. В.//Микроэлектроника. 1983. Т. 12. С. 512.
- 36 а) Masterov A. V., Tolkov V. N., Yakhno V. G.//Nonlinear Waves: Dynamics and Evolution.— New York; Berlin; Heidelberg; Springer-Verlag, 1988.  
б) Мастеров А. В., Рабинович М. И., Толков В. Н., Яхно В. Г.//Коллективная динамика возбуждений и структура образований в биологических тканях.— Горький: ИПФ АН СССР, 1988.— P. 265.
- 37 Kerner B. S., Krinsky V. I., Osipov V. V.//Thermodynamics and Pattern Formation in Biology.— Berlin: de Gruyter, 1988.
- 38 Hodgkin A. L., Huxley A. F.//J. Physiol. 1952. V. 116. P. 449.
- 39 Пастушенко В. Ф., Маркин В. С., Чизмаджиев Ю. А. Теория возбудимых сред.— М.: Наука, 1981.
- 40 Крейн Г. Д.//ТИРИ. 1962. Т. 50. С. 2081.
- 41 Розенгрин А.//Электроника. 1963. Т. 36. С. 13.
- 42 Комаровский К. Ф., Стафеев В. И., Фурсин Г. И. Нейристорные схемы с объемной связью.— М.: Радио и связь, 1981.
- 43 Джерлетов Х. А., Зайцев А. А.//ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 516.
- 44 Кернер Б. С., Осипов В. В.//Радиотехн. и электрон. 1982. Т. 27. С. 2415.
- 45 Кернер Б. С., Синкевич В. Ф.//Письма ЖЭТФ. 1982. Т. 36. С. 359.
- 46 Кернер Б. С., Осипов В. В., Романко М. Т., Синкевич В. Ф.//Ibidem. 1986. Т. 44. С. 77.
- 47 Кернер Б. С., Литвин Д. П., Санкин В. И.//Письма ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 819.
- 48 Жаботинский А. М. Концентрационные колебания.— М.: Наука, 1974.
- 49 Winfree A. T.//Sci. Amer. 1974. V. 230, No. 12. P. 82.
- 50 Кернер Б. С., Осипов В. В.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 386.
- 51 Kerner B. S., Osipov V. V.//36a.
- 52 Кернер Б. С., Осипов В. В.//ДАН СССР. 1987. Т. 292. С. 82.
- 53 Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов.— М.: ИЛ, 1961.
- 54 Wiener N., Rosenblueth A.//Arch. Inct. Cardiol. Mech. 1946. V. 16. P. 205; перевод://Кибернетический сборник.— М.: ИЛ, 1961.— Вып. 3.
- 55 Hodgkin A. L., Huxley A. F.//J. Physiol. 1952. V. 116. P. 449.
- 56 Fitz-Hugh R.//Biophysical J. 1961. V. 1. P. 445; 1962. V. 2. P. 11; Biological Engineering/Ed. by H. P. Schwann.— New York; Mc Graw-Hill, 1969.— P. 1.
- 57 Nagumo I., Arimoto S., Yoshizawa S.//Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061.
- 58 Островский Л. А., Яхно В. Г.//Биофизика. 1975. Т. 20. С. 489.
- 59 Casten R. G., Cohen H., Lagerstrom P. A.//Quart. Appl. Math. 1975. V. 32. P. 365.
- 60 Ortoleva P., Ross I.//J. Chem. Phys. 1975. V. 63. P. 3398.

- <sup>61</sup> Перцов А. М., Панфилов А. В.//<sup>13</sup>.— С. 77.
- <sup>62</sup> Кринский В. И., Агладзе К. И.//ДАН СССР. 1982. Т. 263. С. 335; Nature. 1982. V. 296. P. 424.
- <sup>63</sup> Кринский В. И., Михайлов А. С. Автоволны.— М.: Знание, 1984.
- <sup>64</sup> Winfree A. T.//Science. 1972. V. 175. P. 634; 1973. V. 181. P. 937.
- <sup>65</sup> Зыков В. С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах.— М.: Наука, 1984.
- <sup>66</sup> Кринский В. И., Медвинский А. Б., Панфилов А. В. Эволюция автоволновых вихрей.— М.: Знание, 1986.
- <sup>67</sup> Mikhailov A. S., Krinsky V. I.//Physica. Ser. D. 1983. V. 9. P. 346.
- <sup>68</sup> Winfree A. T. The Geometry of Biological Time.— New York; Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 1980.
- <sup>69</sup> Winfree A. T. When Time Breaks Down.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.
- <sup>70</sup> Колмогоров А. Н., Петровский И. Е., Пискунов Н. С.//Вестн. МГУ. Сер. 1 «Математика, механика». 1937. Т. 1. Вып. 1. С. 1; Вопросы кибернетики.— М.: Изд-во АН СССР, 1975.— Вып. 12. С. 3.
- <sup>71</sup> Баренблатт Г. Н., Зельдович Я. Б.//ПММ. 1957. Т. 21. С. 856.
- <sup>72</sup> Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. Н., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
- <sup>73</sup> Мержанов А. Г., Руманов Э. Н.//УФН. 1987. Т. 151. С. 554.
- <sup>74</sup> Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Маллинецкий Г. Г. Парадоксы мира нестационарных структур.— М.: Знание, 1985.
- <sup>75</sup> Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.— М.: Наука, 1987.
- <sup>76</sup> Petviashvili V. I.//Physica. Ser. D. 1981. V. 1. P. 329.
- <sup>77</sup> Petviashvili V. I.//J. Fluide Mech. 1983. V. 185. P. 27.
- <sup>78</sup> Петвиашвили В. И.//Нелинейные волны.— М.: Наука, 1979.— С. 5.
- <sup>79</sup> Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.//Нелинейные волны: Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.
- <sup>80</sup> Антипов С. В., Незлин М. В., Трубников А. С.//Письма ЖЭТФ.. 1985. Т. 41. С. 25.
- <sup>81</sup> Антипов В. С., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 1905.
- <sup>82</sup> Незлин М. В.//УФН. 1986. Т. 150. С. 4.
- <sup>83</sup> Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда.— М.: Наука, 1975.
- <sup>84</sup> Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1973.
- <sup>85</sup> Кернер Б. С., Осипов В. В.//ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 1542.
- <sup>86</sup> Поляков С. В., Яхно В. Г.//Физ. плазмы. 1980. Т. 6. С. 383.
- <sup>87</sup> Осипов В. В.//Письма ЖЭТФ. 1976. Т. 23. С. 559.
- <sup>88</sup> Кернер Б. С., Осипов В. В.//ФТТ. 1979. Т. 21. С. 2342.
- <sup>89</sup> Дубицкий А. Л., Кернер Б. С., Осипов В. В.//ФТТ. 1986. Т. 28. С. 1290.
- <sup>90</sup> Кернер Б. С., Осипов В. В.//ФТП. 1979. Т. 13. С. 891.
- <sup>91</sup> Гафийчук В. В., Кернер Б. С., Осипов В. В., Южанин А. Г.//Письма ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 1299.
- <sup>92</sup> Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С., Морозов Ю. Ю.//КЭ. 1983. Т. 10. С. 2136.
- <sup>93</sup> Nitzan A., Ortoleva P., Ross J.//J. Chem. Phys. 1974. V. 60. P. 3134..
- <sup>94</sup> Гафийчук В. В.//ФТТ. 1984. Т. 26. С. 2230.
- <sup>95</sup> Зельдович Я. Б. Теория горения и детонации газов.— М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1944; Избранные труды: Химическая физика и гидродинамика.— М.: Наука, 1984.— С. 165.
- <sup>96</sup> Балкарей Ю. И., Никулин М. Г.//ФТП. 1976. Т. 10. С. 1455.
- <sup>97</sup> Дегтяренко Н. Н., Елесин В. Ф.//Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 456. Дегтяренко Н. Н., Елесин В. Ф., Фурманов В. А.//ФТП. 1973. Т. 7. С. 1716.
- <sup>98</sup> Лубашевский И. А., Рыжий В. И., Сурис Р. А.//Письма ЖТФ.. 1982. Т. 8. С. 36.
- <sup>99</sup> Гантмахер В. Ф., Левинсон И. Б. Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках.— М.: Наука, 1984.
- <sup>100</sup> Гафийчук В. В., Гашпар В. Э., Кернер Б. С., Осипов В. В.//ФТП. 1988. Т. 22. С. 1836.
- <sup>101</sup> Beattie A. R., Landsberg P. T.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1959. V. 249. P. 16..
- <sup>102</sup> Гельмонт Б. Л., Соколова З. Н., Яснеевич И. Н.//ФТП. 1982.. Т. 16. С. 592.

- 103 Дубашевский И. А., Рыжий В. И., Мизерина Н. Ю.//ФТП. 1983. Т. 17. С. 1631.
- 104 Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций.— М.: Мир, 1973.
- 105 Слинько М. М., Слинько М. Г.//Успехи химии. 1980. Т. 49. С. 561.
- 106 Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах.— М.: Мир, 1979.
- 107 Хакен Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980.
- 108 Волькенштейн М. В. Биофизика.— М.: Наука, 1981.
- 109 Белинцев Б. Н.//УФН. 1983. Т. 141. С. 55.
- 110 Turing A. M.//Proc. Roy. Soc. B. 1952. V. 237. P. 37.
- 111 Колебания и бегущие волны в химических системах/Под ред. Р. Филда, М. Бурге-ра.— М.: Мир, 1988.
- 112 Kawczynski A. L., Gorski J.//Pol. J. Chem. 1983. V. 57. P. 187, 523.
- 113 Gorski J., Kawczynski A. L.//Ibidem. 1985. V. 59. P. 61.
- 114 Кернер Б. С., Осипов В. В.//Биофизика. 1982. Т. 27. С. 137.
- 115 Тихонов А. Н.//Мат. сб. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575.
- 116 Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярных уравнений.— М.: Наука, 1973.
- 117 Балкарей Ю. И., Евтихов М. Г., Елинсон М. И.//Микроэлектроника. 1980. Т. 9. С. 141.
- 118 Балкарей Ю. И., Евтихов М. Г., Елинсон М. И.//Ibidem. С. 144.
- 119 Gieger A., Meinhardt H.//Kybernetik. 1972. Bd 12. S. 30.
- 120 Meinhardt H., Gieger A.//J. Cell. Sci. 1974. V. 15. P. 321.
- 121 Meinhardt H.//Ibidem. 1977. V. 23. P. 117.
- 122 Gieger A.//Naturwissenschaften. 1981. Bd. 5. S. 245.
- 123 Недоспасов А. В.//УФН. 1968. Т. 94. С. 439.  
Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы.— М.: Наука, 1979.
- 124 Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров С. А. Основы физики плазмы.— М.: Атомиздат, 1977.
- 125 Осипов В. В.//Тезисы докладов XIII Всесоюзного совещания по теории полупроводников.— Ереван, 1987.— С. 204.
- 126 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1973.
- 127 Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
- 128 Chernavskii D. S., Ruijgrok Th. W.//Biosystems. 1982. V. 15. P. 75.
- 129 Свирижев Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики.— М.: Наука, 1978.
- 130 Свирижев Ю. М., Логафет Д. О. Устойчивость биологических сообществ.— М.: Наука, 1982.  
Свирижев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии.— М.: Наука, 1987.
- 131 Розанов А. С. Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике.— Пушкино, Московская обл.: НЦБИ АН СССР, 1980.
- 132 Таланов В. И.//ДАН СССР. 1981. Т. 258. С. 604.
- 133 Таланов В. И.//Нелинейные волны. Самоорганизация.— М.: Наука, 1983.— С. 47.
- 134 Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.//ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 2345.
- 135 Борблик В. Л., Грибников З. С.//Письма ЖЭТФ. 1988. Т. 47. С. 309.
- 136 Елесин В. Ф.//ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 1490; 177. Т. 73. С. 355; 1979. Т. 76. С. 2218.
- 137 Кокин А. А., Михайлов Г. Б.//ФТТ. 1976. Т. 18. С. 3384.
- 138 Балкарей Ю. И., Елинсон М. И.//Микроэлектроника. 1979. Т. 8. С. 428.
- 139 Бару В. Г., Грехов Е. В., Суханов А. А.//ФТТ. 1975. Т. 17. С. 948.
- 140 Барелко В. В., Курочка И. И., Мержанов А. Г.//ДАН СССР. 1976. Т. 229. С. 898.
- 141 Рябоконт В. Н., Свидзинский К. К.//Радиотехн. и электрон. 1968. Т. 13. С. 1825.
- 142 Балкарей Ю. И., Ржанов Ю. А., Голик Л. Л., Елинсон М. И.//ФТП. 1982. Т. 16. С. 1558.
- 143 Ржанов Ю. А., Балкарей Ю. И., Голик Л. Л., Елинсон М. И.//ФТП. 1983. Т. 17. С. 262, 1545.
- 144 Гуляев Ю. В., Балкарей Ю. И., Ржанов Ю. А., Голик Л. Л., Елинсон М. И.//ДАН СССР. 1981. Т. 260. С. 82; 1983. Т. 268. С. 95.
- 145 Ржанов Ю. А., Балкарей Ю. И., Голик Л. Л., Елинсон М. И.//Письма ЖТФ. 1983. Т. 9. С. 197.
- 146 Звездин А. К., Мухин А. А.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 129.
- 147 Звездин А. К., Мухин А. А.//Кр. сообщ. физ. ФИАН СССР. 1988. № 5. С. 20.
- 148 Балкарей Ю. И., Сандомирский В. Б.//ФТП. 1979. Т. 13. С. 1006.
- 149 Балкарей Ю. И., Эпштейн Э. М.//ФТП. 1978. Т. 12. С. 1704.
- 150 Балкарей Ю. И., Никулин М. Г.//Ibidem. С. 347.

- 151 Scarlett R. M., Shockley W., Haitz R. H. // Physics of Failure in Electronics. I. — Baltimore, USA: Spartan Books, 1963.
- 152 Bergmann F., Gerstner D. // Arch. Electr. Übertragung. — 1963. Bd 17. P. 467.
- 153 Кернер Б. С., Осипов В. В. // Письма ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 122.
- 154 Кернер Б. С., Осипов В. В. // Микроэлектроника. 1974. Т. 3. С. 9.
- 155 Кернер Б. С., Осипов В. В. // Радиотехн. и электрон. 1975. Т. 20. С. 1694.
- 156 Кернер Б. С., Осипов В. В., Синкевич В. Ф. // Ibidem. С. 2172.
- 157 Кернер Б. С., Осипов В. В. // Микроэлектроника. 1977. Т. 6. С. 337.
- 158 Балкарей Ю. И., Евтихов М. Г., Елинсон М. И. // Микроэлектроника. 1985. Т. 14. С. 67.
- 159 Грибников З. С. // ФТП. 1977. Т. 11. С. 2111.
- 160 Марри Д. ж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях. — М.: Мир, 1982.
- 161 Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
- 162 Найфе А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
- 163 Fife P. C. // J. Chem. Phys. 1976. V. 64. P. 554.
- 164 Koga S., Kugamoto Y. // Prog. Theor. Phys. 1980. V. 63. P. 106.
- 165 Кернер Б. С., Кузнецова Е. М., Осипов В. В. // ДАН СССР. 1984. Т. 277. С. 1114.
- 166 Кернер Б. С., Кузнецова Е. М., Осипов В. В. // Микроэлектроника. 1984. Т. 13. С. 407, 456.
- 167 Гуревич А. В., Минц Р. Г., Рахманов А. Л. Физика композитных сверхпроводников. — М.: Наука, 1987.
- 168 Кернер Б. С., Осипов В. В. // ДАН СССР. 1982. Т. 264. С. 1366.
- 169 Ахметов А. А., Минц Р. Г. // Письма ЖТФ. 1983. Т. 9. С. 1306.
- 170 Балкарей Ю. И., Евтихов М. Г., Елинсон М. И. // Микроэлектроника. 1979. Т. 8. С. 493.
- 171 Гафийчук В. В., Кернер Б. С., Осипов В. В., Южанин А. Г. // ФТП. 1988. Т. 22. С. 2051; Статические автосолитоны и диссипативные структуры в разогретой электронно-дырочной плазме: Препринт ИПММ АН УССР. — Львов, 1988.
- 172 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1963.
- 173 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
- 174 Дубицкий А. Л., Кернер Б. С., Осипов В. В. // ФТП. 1986. Т. 20. С. 1195.
- 175 Кернер Б. С., Осипов В. В. // ДАН СССР. 1983. Т. 270. С. 1104.
- 176 Дубицкий А. Л., Кернер Б. С., Осипов В. В., Шильников Е. В. Пичковые автосолитоны в неравновесных системах: Препринт ИПМ АН СССР. — Москва, 1987.
- 177 Еленин Г. Г., Крылов В. В., Полежаев А. А., Чернавский Д. С. ДАН СССР. 1983. Т. 271. С. 84.
- 178 Nitzan A., Ross J. // J. Chem. Phys. 1973. V. 59. P. 241.
- 179 Schaff H. A. // Proc. IEEE. 1967. V. 55. P. 1272.
- 180 Нечаев А. М., Рубаха Е. А., Синкевич В. Ф. // Обзоры по электронной технике. Сер. 2. — М.: ЦНИИ «Электроника», 1978. — Вып. 10.
- 181 Бачурин В. В., Ежов В. С., Синкевич В. Ф. // Ibidem. Сер. 2. — 1984. — Вып. 4.
- 182 Fegoe J. A. // Math. Biosci. 1981. V. 55. P. 189.
- 183 Кринский В. И. // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1968. — Вып. 20. С. 59.
- 184 Давыдов В. А., Михайлов А. С. // Нелинейные волны: Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987. — С. 261.
- 185 Бражник П. К., Давыдов В. А., Зыков В. С., Михайлов А. С. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1725.
- 186 Балкарей Ю. И., Евтихов М. Г., Елинсон М. И. // ЖТФ. 1987. Т. 57. С. 209.
- 187 McKeon H. P. // Adv. Math. 1970. V. 4. P. 209.
- 188 Rinzel J., Keller J. V. // Biophys. 1973. V. 13. P. 1313.
- 189 Фролов А. А., Муравьев И. П. Нейронные модели ассоциативной памяти. — М.: Наука, 1987.
- 190 Веденов А. А. Моделирование элементов мышления. — М.: Наука, 1988.
- 191 Дубинин Ф. Д. Оптоэлектронные модели однородных сред. — М.: Радио и связь, 1984.
- 192 Мастеров А. В., Рабинович М. И., Яхно В. Г. // Коллективная динамика возбуждений и структура образований в биологических тканях. — Горький: ИПФ АН СССР, 1988.

- <sup>193</sup> Гапонов-Грехов А. В., Ломов А. С., Рабинович М. И. // Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 44. С. 242.
- <sup>194</sup> Гаропов-Grekhov A. V., Lomov A. S., Osipov G. V., Rabino-  
vich M. I. // <sup>36a</sup>.
- <sup>195</sup> Бончик А. Ю., Гафийчук В. В., Кияк С. Г., Савицкий Г. В. // Поверхность. Физика, химия, механика. 1986. В. 5. С. 142.
- <sup>196</sup> Капица П. Л. // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 3. С. 19.
- Капица П. Л., Капица С. П. // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. С. 105.
- <sup>197</sup> Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Холопко Г. А., Янов-  
ский В. В. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 1979.
- <sup>198</sup> Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 144.
- <sup>199</sup> Смирнов Б. С. Проблемы шаровой молнии. — М.: Наука, 1988.
- <sup>200</sup> Пикельнер С. Б. // Астрон. ж. 1967. Т. 44. С. 915.
- Зельдович Я. Б., Пикельнер С. Б. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 310.
- <sup>201</sup> Гельберг М. Г. Неоднородности высокоширотной ионосферы. — Новосибирск: Наука, 1986.