Декабрь 1989 г. *Том 159, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.941

К МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧИХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов

(Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Харьковский физико-технический институт АН УССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. В настоящее время теоретическим фундаментом описания как равновесных, так и неравновесных состояний систем со спонтанно нарушенной симметрией в статистической механике являются концепция квазисредних Н. Н. Боголюбова [1] и метод сокращенного описания [2], развитый Н. Н. Боголюбовым для изучения динамики физических систем, основанный на уравнении Лиувилля. Этот подход позволяет получить как термодинамику, так и уравнения движения для таких макроскопических систем.

Одним из примеров систем со спонтанно нарушенной симметрией является сверхтекучая жидкость. В работах Н. Н. Боголюбова [3, 4] была установлена связь явления сверхтекучести с явлением бозе-конденсации и дан микроскопический вывод уравнений идеальной гидродинамики галилеево инвариантной сверхтекучей жидкости.

Следует отметить, что большинство физических результатов для систем со спонтанно нарушенной симметрией было получено на основе феноменологического подхода. Это в первую очередь относится к явлению сверхтекучести HeII, для описания которого эффективной оказалась двухжидкостная модель Тиссы — Ландау. Именно в рамках этой модели Л. Д. Ландау [5] построил уравнения идеальной гидродинамики сверхтекучего HeII, а в работах И. М. Халатникова были учтены процессы диссипации (см. [6]). В дальнейшем феноменологический подход был применен к другим системам, близким по своим свойствам к сверхтекучим. К таким системам, в частности относятся сверхпроводящие системы, квантовые кристаллы (см. [7—9]).

В последние годы ведутся интенсивные исследования сверхтекучего ^{3}He (см., например, [10—17]). В отличие от HeII, в котором нарушена инвариантность равновесного состояния относительно фазовых преобразований, в случае ^{3}He нарушение симметрии более сложное: кроме нарушения симметрии относительно фазовых преобразований происходит также нарушение симметрии относительно трехмерных вращений как в координатном, так и в спиновом пространстве. Следствием этого являются более сложная структура параметра порядка, вихревой характер сверхтекучего течения, появление разнообразных магнитных свойств.

В настоящем обзоре на основе метода квазисредних и метода сокращенного описания дано микроскопическое построение термодинамики и гидродинамики сверхтекучих бозе- и ферми- систем с синглетным спариванием. При этом мы не предполагали, что гамильтониан системы обладает галилеевой инвариантностью. Это позволило, в частности, получить результаты, относящиеся как к галилеево-инвариантным системам, так и рассмотреть релятивистские системы. Кроме того, исследовано влияние внешних полей и найдена низкочастотная асимптотика общих функций Грина $G^{\pm}_{ab}$ (для произвольных квазилокальных операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$) в гидродинамическом приближении. Наконец, на основе концепции квазисредних сформулированы свойства симметрии равновесного состояния, построена термодинамика и найдены потоки аддитивных интегралов движения для сверхтекучих ферми-систем с триплетным спариванием (сверхтекучие фазы ^{3}He-A и ^{3}He-B).

Настоящий обзор основан, главным образом, на результатах работ [18—26].

2. Состояние статистического равновесия.

2.1. Законы сохранения. При описании состояния статистического равновесия и неравновесной динамики конденсированных сред существенную роль играют законы сохранения. В шредингеровском представлении операторы плотностей $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})\equiv\{\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}),\ \hat{\pi}_k(\mathbf{x}),\ \hat{\zeta}_a(\mathbf{x})\}$, соответствующие аддитивные интегралам движения $\hat{\gamma}_\alpha=\int d^3x\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ $(\alpha=0,1,2,3,a)$, удовлетворяют дифференциальным законам сохранения

$$i[\mathscr{H},\ \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})]=i[\mathscr{P}_k,\ \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})]=-\frac{\partial\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \tag{2.1}$$

где $\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})\equiv\{\hat{q}_k(\mathbf{x}),\ \hat{t}_{ik}(\mathbf{x}),\ \hat{j}_{ak}(\mathbf{x})\}$ — операторы плотностей потоков аддитивных интегралов движения, $\mathscr{H}\equiv\hat{\gamma}_0$ — гамильтониан, $\mathscr{P}_k\equiv\hat{\gamma}_k$ — импульс $(k=1,2,3)$ и $\hat{\gamma}_a$ — интегралы движения, связанные с внутренними симметриями системы. Обычно операторами $\hat{\gamma}_a$ являются операторы числа частиц $\hat{N}$ и спина $\hat{\mathbf{S}}$.

Используя операторное тождество

$$i[\hat{A},\hat{b}(\mathbf{x})]=-i[\hat{B},\ \hat{a}(\mathbf{x})]-\frac{\partial\hat{b}_k(\mathbf{x})}{\partial x_k},$$

$$\hat{b}_k(\mathbf{x})=i\int d^3x'x'_k\int_0^1 d\lambda[\hat{a}(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}'),\ \hat{b}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}')],$$

справедливое для произвольных квазилокальных операторов $\hat{a}(\mathbf{x})$, $\hat{b}(\mathbf{x})$ $\left(\text{здесь } \hat{A}\equiv\int d^3x\hat{a}(\mathbf{x}),\ \hat{B}\equiv\int d^3x\hat{b}(\mathbf{x})\right)$, найдем выражения для операторов плотностей потоков $\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})$ в терминах операторов плотностей аддитивных интегралов движения $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ (см. [18, 27]):

$$\hat{q}_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\, [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}'),\, \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}')],$$

$$\hat{t}_{ik}(\mathbf{x}) = -\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})\delta_{ik} + i\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\, [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}'),\, \hat{\pi}_i(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}')], \quad (2.2)$$

$$\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) = i\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\, [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}'),\, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}')].$$

При получении этих формул учтены следующие свойства симметрии оператора плотности энергии $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})$:

$$i\,[\hat{\mathcal{P}}_k,\ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x})] = -\frac{\partial\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad [\hat{\gamma}_a,\ \hat{\varepsilon}(\mathbf{x})] = 0.$$

Исследуя явление сверхтекучести, обычно предполагают инвариантность физической системы по отношению к преобразованиям Галилея или Лоренца, что приводит к определенным трансформационным свойствам гамильтониана. Особенностью настоящего рассмотрения является тот факт, что на гамильтониан наложены лишь требования трансляционной и фазовой инвариантности. Такой подход позволяет описать более широкий класс сверхтекучих систем (будем называть их всюду далее обобщенными; примером такой обобщенной системы является электронный газ металлов), а также в качестве частных случаев позволяет единым образом рассмотреть системы с галилеевой или лоренцевой динамической симметрией.

2.2. Введение квазисредних. Для систем со спонтанно нарушенной симметрией состояние статистического равновесия обладает более низкой симметрией, чем симметрия гамильтониана. Удобной концепцией, позволяющей описывать такие системы, является концепция квазисредних.

Согласно Н. Н. Боголюбову [1] (см. также монографии [27—29]) средние значения в состоянии статистического равновесия (с нарушенной симметрией) определяются формулой

$$\langle\ldots\rangle = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} \mathrm{Sp}\, w_\nu \ldots, \quad w_\nu = \exp(\Omega_\nu - Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha - \nu Y_0\hat{f}); \qquad (2.3)$$

здесь V — объем системы, Y_α — термодинамические силы, сопряженные аддитивным интегралом движения, и Ω_ν — термодинамический потенциал, определяемый из условия $\mathrm{Sp}\, w_\nu = 1$. Оператор $\hat{f}$ обладает симметрией исследуемой фазы и снимает вырождение состояния статистического равновесия. Предел

$$\omega = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{\Omega_\nu}{V}$$

определяет плотность термодинамического потенциала. Для квазисредних (в отличие от обычных средних) всегда справедлив принцип пространственного ослабления корреляций, т. е.

$$\langle\hat{a}(\mathbf{x})\,\hat{b}(\mathbf{y})\rangle \xrightarrow[|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\to\infty]{} \langle\hat{a}(\mathbf{x})\rangle\,\langle\hat{b}(\mathbf{y})\rangle,$$

где $\hat{a}(\mathbf{x})$, $\hat{b}(\mathbf{y})$ — произвольные квазилокальные операторы (корреляция операторов $\hat{a}(\mathbf{x})$, $\hat{b}(\mathbf{y})$ может убывать степенным образом).

Из феноменологической теории известно, что для адекватного описания термодинамики и кинетики вырожденных систем необходимо ввести в теорию новые термодинамические параметры q, не связанные с законами сохранения, а обусловленные симметрией исследуемого равновесного состояния. В рамках микроскопического подхода это означает, что оператор $\hat{f}$ представляет собой некоторый линейный функционал оператора параметра порядка $\hat{\Delta}(\mathbf{x})$,

$$\hat{f} = \int_V d^3x \left(g(\mathbf{x}, t; q)\, \hat{\Delta}(\mathbf{x}) + \text{э. с.} \right), \tag{2.4}$$

где $g(\mathbf{x}, t; q)$—с-числовая функция координат и времени, определяющая равновесные значения параметра порядка $\Delta(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{\Delta}(\mathbf{x}) \rangle$ и зависящая от термодинамических параметров q, фиксирующих свойства симметрии исследуемой физической фазы.

Зависимость $g(\mathbf{x}, t; q)$ от координат $\mathbf{x}$ и времени t обусловлена тем, что введение члена $\nu Y_0 \hat{f}$ в (2.3) может нарушить инвариантность равновесного статистического оператора по отношению к трансляциям в пространстве и времени, т. е. $[w(t), \mathscr{H}] \neq 0$, $[w(t), \hat{\mathscr{P}}_k] \neq 0$, где $w(t)$ — равновесный статистический оператор

$$w(t) = \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} w_\nu(Y, q; t), \tag{2.5}$$

зависящий от термодинамических сил Y_a, а также от параметров q, определяющих симметрию исследуемой фазы. (Предельный переход в (2.5) следует понимать в смысле средних (см. (2.3)).)

Для конкретизации дальнейшего изложения рассмотрим вначале наиболее простую сверхтекучую систему — однокомпонентную бесспиновую бозе-жидкость с оператором параметра порядка $\hat{\Delta}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$ ($\psi(\mathbf{x})$ — оператор уничтожения частицы в точке $\mathbf{x}$). В соответствии с идеей бозе-конденсации состояние статистического равновесия сверхтекучей бозе-жидкости определяется условием

$$[w, \hat{\mathscr{P}}_k - p_k \hat{N}] = 0, \quad [\hat{f}, \hat{\mathscr{P}}_k - p_k \hat{N}] = 0 \tag{2.6}$$

(условие симметрии), где p_k — термодинамический параметр, имеющий смысл сверхтекучего импульса (импульса конденсатных частиц). Так как

$$e^{-i\hat{\vec{\mathscr{P}}}\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}')\, e^{i\hat{\vec{\mathscr{P}}}\mathbf{x}} = \psi(\mathbf{x} + \mathbf{x}'), \quad e^{-i\varphi\hat{N}}\psi(\mathbf{x})\, e^{i\varphi\hat{N}} = e^{i\varphi}\psi(\mathbf{x}), \tag{2.7}$$

то легко видеть, что $g(\mathbf{x}, t) = \exp[i(\mathbf{px} + \varphi(t))]$, где $\varphi(t)$ — некоторая функция времени.

Заметим, далее, что

$$[w_\nu(t), Y_0\mathscr{H} + \mathbf{Y}\hat{\vec{\mathscr{P}}} + Y_4\hat{N} + \nu Y_0\hat{f}] = 0.$$

Так как в силу канонических перестановочных соотношений оператор $[f, \hat{a}(\mathbf{x})]$ также является квазилокальным, а среднее квазилокального оператора предполагается конечным, то

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} \nu \operatorname{Sp} w_\nu(\hat{t})\, [\hat{f}, \hat{a}(\mathbf{x})] = .$$

Поэтому

$$[w(t), Y_0\mathscr{H} + \mathbf{Y}\hat{\vec{\mathscr{P}}} + Y_4\hat{N}] = 0.$$

Таким образом, с учетом (2 6) имеем

$$[w(t), \mathscr{H} + p_0\hat{N}] = 0, \quad p^0 = \frac{Y_4 + \mathbf{Yp}}{Y_0}. \tag{2 8}$$

Это соотношение будем называть условием стационарности. Статистический оператор $w(t)$ должен удовлетворять уравнению фон Неймана. Поэтому, используя (2.8), получим

$$w(t+\tau) = e^{ip_0\hat{N}\tau} w(t) e^{-ip_0\hat{N}\tau} \tag{2.9}$$

и, следовательно, согласно (2.4), (2.9) найдем

$$g(\mathbf{x}, t) = \exp(i\varphi(\mathbf{x}, t)), \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{px} + p_0 t + \chi. \tag{2.10}$$

Резюмируя, можно сказать, что в рассматриваемых сверхтекучих системах состояние термодинамического равновесия характеризуется термодинамическими силами Y_α, связанными с аддитивными интегралами движения ($Y_0 \equiv T^{-1}$ — обратная температура,— $Y_k/Y_0 \equiv v_{nk}$ — скорость нормальной компоненты,— $Y_4/Y_0 \equiv \mu$ — химический потенциал), а также сверхтекучим импульсом $\mathbf{p}$ и фазой $\chi \equiv \varphi(0, 0)$, наличие которых обусловлено нарушением симметрии состояния статистического равновесия. Подчеркнем, что зависимость от термодинамических переменных $\mathbf{p}$ и χ вводится посредством бесконечно малых источников и в состоянии с нарушенной симметрией эта зависимость сохраняется при $\nu \to 0$.

Введем унитарный оператор

$$U_\varphi(t) = \exp\left(-i\int d^3x\varphi(\mathbf{x}, t)\hat{n}(\mathbf{x})\right). \tag{2.11}$$

Выбирая в качестве $\varphi(\mathbf{x}, t)$ функцию (2.10), легко видеть, что

$$U_\varphi(t) w_\nu(t) U_\varphi^+(t) \equiv w'_\nu =$$
$$= \exp\left[\Omega_\nu - Y_0\mathcal{H}_\mathbf{p} - Y_k(\hat{\mathcal{P}}_k + p_k\hat{N}) - Y_4\hat{N} - \nu Y_0\int d^3x(\psi(\mathbf{x}) + \psi^+(\mathbf{x}))\right], \tag{2.12}$$

где

$$\mathcal{H}_\mathbf{p} = U_\mathbf{p}\mathcal{H}U_\mathbf{p}^+, \quad U_\mathbf{p} = \exp\left(-i\mathbf{p}\int d^3x\, \mathbf{x}\hat{n}(\mathbf{x})\right). \tag{2.13}$$

Так как $[\mathcal{H}_\mathbf{p}, \hat{\mathcal{P}}] = 0$, то согласно (2.11), (2.12)

$$\mathrm{Sp}\, w_\nu(t)\psi(\mathbf{x}) = e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}\,\mathrm{Sp}\, w'_\nu\psi(0) = e^{i\varphi(\mathbf{x},t)}\eta. \tag{2.14}$$

Таким образом, величина $\varphi(\mathbf{x}, t)$ представляет собой фазу равновесного параметра порядка $\mathrm{Sp}\, w_\nu(t)\psi(\mathbf{x})$ (можно показать, что $\mathrm{Sp}\, w_\nu\psi(\mathbf{x}) = \mathrm{Sp}\, w'_\nu\psi^+(\mathbf{x})$).

2.3. Термодинамика. В соответствии с определением (2.3) и (2.10) легко видеть, что плотность термодинамического потенциала ω не зависит от фазы χ и является функцией термодинамических параметров Y_0, Y_4, $\mathbf{Y}^2$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{Yp}$. Дифференцируя ω по термодинамическим силам Y_α и сверхтекучему импульсу $\mathbf{p}$, получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial Y_0} = \mathrm{Sp}\, w'\hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(0) = \mathrm{Sp}\, w\hat{\varepsilon}(0) \equiv \varepsilon,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial Y_l} = \mathrm{Sp}\, w'(\hat{\pi}_l(0) + p_l\hat{n}(0)) = \mathrm{Sp}\, w\hat{\pi}_l(0) \equiv \pi_l, \tag{2.15}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial Y_4} = \mathrm{Sp}\, w\hat{n}(0) \equiv n, \quad \frac{\partial\omega}{\partial p_l} = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\left(\frac{Y_0}{V}\mathrm{Sp}\, w'_\nu\frac{\partial\mathcal{H}_\mathbf{p}}{\partial p_l} + \frac{Y_l}{V}\mathrm{Sp}\, w'_\nu\hat{N}\right).$$

Учитывая формулы (2.13), найдем

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\mathrm{Sp}\, w'_\nu\frac{\partial\mathcal{H}_\mathbf{p}}{\partial p_l} = -i\int d^3x x_l\,\mathrm{Sp}\, w'[\hat{\varepsilon}_\mathbf{p}(\mathbf{x}), \hat{n}(0)], \quad \hat{\varepsilon}_\mathbf{p} \equiv U_\mathbf{p}\hat{\varepsilon}U_\mathbf{p}^+.$$

С другой стороны, усредняя выражение (2.2) для оператора плотности потока числа частиц $\hat{j}_l(\mathrm{x}) \equiv \hat{\zeta}_{4l}(\mathrm{x})$ со статистическим оператором w, в соответствии с (2.12) имеем

$$j_l = \mathrm{Sp}\, w \hat{j}_l(\mathrm{x}) = -i \int d^3x\, x_l\, \mathrm{Sp} w' [\hat{\varepsilon}_p(\mathrm{x}), \hat{n}(0)] \tag{2.16}$$

(мы учли, что $[w', \hat{\vec{\mathscr{P}}}]=0$). Поэтому

$$j_l = \frac{1}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial p_l} - \frac{Y_l}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial Y_4}. \tag{2.17}$$

Таким образом, мы нашли выражение для плотности потока числа частиц через термодинамический потенциал ω. Используя формулы (2.15), (2.17), найдем следующее основное термодинамическое равенство:

$$d\omega = \varepsilon d Y_0 + \pi_k dY_k + n\, d Y_4 + (Y_0 j_l + Y_l n)\, d p_l, \tag{2.18}$$

которое имеет смысл II начала термодинамики для обратимых процессов в сверхтекучей жидкости.

При построении гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости, а также при исследовании низкочастотной асимптотики функций Грина нам необходимы будут выражения для средних значений в состоянии w операторов плотностей потоков импульса $\hat{t}_{ik}$ и энергии $\hat{q}_k$ через термодинамический потенциал ω. Переходя к нахождению этих величин, заметим, что согласно (2.2), (2.12)

$$t_{ik} = \mathrm{Sp} w\, \hat{t}_{ik}(0) = -\langle \hat{\varepsilon}_p(0)\rangle_0 \delta_{ik} - i \langle [\hat{\Gamma}_{ki}, \hat{\varepsilon}_p(0)] \rangle_0 + p_i j_k, \tag{2.19}$$

где усреднение происходит по состоянию w'_ν, $\langle \ldots \rangle_0 = \mathrm{Sp}\, w'_\nu \ldots$ В этой формуле $\hat{\Gamma}_{ki} = \int d^3x x_k \hat{\pi}_i(\mathrm{x})$ — генератор группы произвольных линейных преобразований $x_i \to x'_i = a_{ik} x_k$. Последнее утверждение следует из того, что операторы $\psi(\mathrm{x})$ и $\psi'(\mathrm{x}) = \psi(a\mathrm{x})\, |\det a|^{1/2}$ удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям и, следовательно, связаны между собой унитарным преобразованием U_a:

$$U_a \psi(\mathrm{x}) U_a^+ = \psi'(\mathrm{x}) = |\det a|^{1/2} \psi(a\mathrm{x}).$$

Рассматривая бесконечно малые преобразования $a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}$, $|\xi| \ll 1$, легко найти, что $U_a = 1 - i\xi_{kl}\hat{\Gamma}_{lk}$. Генератор $\hat{\Gamma}_{ki}$ удовлетворяет следующим соотношениям коммутации:

$$i[\hat{\Gamma}_{kl}, \hat{n}(0)] = -\delta_{ik}\hat{n}(0), \quad i[\hat{\Gamma}_{kl}, \hat{\pi}_l(0)] = -\delta_{ik}\hat{\pi}_l(0) - \delta_{lk}\hat{\pi}_i(0). \tag{2.20}$$

Используя первое из этих соотношений, найдем, что

$$t_{ik} = -\langle \hat{\varepsilon}'_p(0)\rangle_0 \delta_{ik} - i \langle [\hat{\Gamma}_{ki}, \hat{\varepsilon}'_p(0)] \rangle_0 + p_i j_k, \tag{2.21}$$

где $\hat{\varepsilon}'_p(\mathrm{x}) \equiv \hat{\varepsilon}_p(\mathrm{x}) + p_0 \hat{n}(\mathrm{x}) + \nu(\psi(\mathrm{x}) + \psi^+(\mathrm{x}))$.

Из условия $\mathrm{Sp}\, w' = 1$ получим (см. (2.12))

$$e^{-\Omega} = \mathrm{Sp} \exp\left(-\int_V d^3x \hat{h}(\mathrm{x})\right), \quad \hat{h}(\mathrm{x}) = Y_0 \hat{\varepsilon}'_p(\mathrm{x}) + Y_l \hat{\pi}_l(\mathrm{x}'). \tag{2.22}$$

Определяя оператор $\hat{h}_a(\mathrm{x})$ формулой

$$U_a \hat{h}(\mathrm{x}) U_a^+ \equiv \hat{h}_a(a\mathrm{x})\, |\det a|, \tag{2.23}$$

находим, что

$$e^{-\Omega} = \mathrm{Sp}\, U_a \exp\left(-\int_V d^3x \hat{h}(\mathrm{x})\right) U_a^+ = \mathrm{Sp} \exp\left(-\int_{V_a} d^3x \hat{h}_a(\mathrm{x})\right),$$

($V_a \equiv V|\det a|$). Так как потенциал Ω пропорционален V, то

$$\exp\left(-\frac{\Omega}{|\det a|}\right) = \operatorname{Sp}\exp\left(-\int\limits_V d^3x\hat{h}_a(\mathbf{x})\right).$$

Отсюда, учитывая, что для бесконечно малых преобразований $\det a = 1 + \delta_{kl}\xi_{kl}$, получим

$$\operatorname{Sp} w\left(\frac{\partial \hat{h}_a(0)}{\partial \xi_{kl}}\right)_{\xi=0} = -\overset{\vee}{\omega}\delta_{kl}, \quad \overset{\vee}{\omega} = \lim_{V\to\infty}\frac{\Omega_\vee}{V}.$$

С другой стороны, из (2.23) следует

$$-i[\hat{\Gamma}_{lk}, \hat{h}(0)] = \left(\frac{\partial \hat{h}_a(0)}{\partial \xi_{kl}}\right)_{\xi=0} + \delta_{kl}\hat{h}(0),$$

и поэтому

$$i\langle[\hat{\Gamma}_{lk}, \hat{h}(0)]\rangle_0 + \delta_{kl}\langle\hat{h}(0)\rangle_0 = \overset{\vee}{\omega}\delta_{kl}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для $\hat{h}(\mathbf{x})$ и учитывая (2.20), из (2.21) получим выражение для плотности потока импульса в состоянии равновесия

$$t_{ik} = \frac{p_i}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial Y_i}\frac{\omega Y_k}{Y_0}. \tag{2.24}$$

Для нахождения среднего значения в состоянии равновесия плотности потока энергии воспользуемся теоремой [26]:

Теорема. *Для равновесного статистического оператора*

$$w = \exp\left(\Omega - \int\limits_V d^3x\hat{h}(\mathbf{x})\right),$$

удовлетворяющего условию пространственной однородности (2.6), *справедливо равенство*

$$Q_k \equiv \int d^3x x_k \operatorname{Sp} w[\hat{h}(\mathbf{x}), \hat{h}(0)] = 0. \tag{2.25}$$

Для доказательства этого соотношения вычислим шпур в выражении для Q_k в системе собственных векторов оператора импульса $\hat{\mathbf{P}} \equiv \hat{\vec{\mathscr{P}}} - \mathbf{p}\hat{N}$, $\hat{P}_k|\mathbf{P}, a\rangle = P_k|\mathbf{P}, a\rangle$ (индекс a нумерует остальные квантовые числа). В результате величина Q_k может быть представлена в виде

$$Q_k = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3P\frac{\partial}{\partial P_k}\operatorname{tr}\exp(\Omega - \hat{h}_{\mathbf{P}})(1 + \hat{h}_{\mathbf{P}})2,$$

где величина $\hat{h}_{\mathbf{P}}$ представляет собой оператор в подпространстве собственных векторов $|\mathbf{P}, a\rangle$ оператора $\hat{P}_k$, принадлежащих фиксированным собственным значениям P:

$$\left\langle\mathbf{P}, a\left|\int d^3x\hat{h}(\mathbf{x})\right|\mathbf{P}, b\right\rangle = \langle a|\hat{h}_{\mathbf{P}}|b\rangle;$$

tr — означает операцию взятия шпура в подпространстве векторов $|a\rangle$. Так как

$$\lim_{P\to\pm\infty}\hat{h}_{\mathbf{P}} \to \infty,$$

что необходимо для конечности среднего

$$\operatorname{Sp} w\,\hat{a}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3}\int d^3P\operatorname{tr}\exp(\Omega - \hat{h}_{\mathbf{P}})\langle\mathbf{P}|\hat{a}(0)|\mathbf{P}\rangle,$$

то $Q_k=0$. Используя явный вид оператора $\hat{h}(\mathbf{x})$ и учитывая формулы (2.2), (2.25), найдем

$$Y_\alpha(Y_k\zeta_\alpha+Y_0\zeta_{\alpha k})=0, \tag{2.26}$$

где $\zeta_\alpha=\mathrm{Sp}\, w\hat{\zeta}_\alpha$, $\zeta_{\alpha k}=\mathrm{Sp}\, w\hat{\zeta}_{\alpha k}$. Слагаемое $\nu Y_0\hat{f}(\mathbf{x})$ не дает вклад в коммутатор под интегралом в (2.25), так как операторы $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ и $\hat{f}(\mathbf{x})$ квазилокальны и предполагается, что среднее квазилокальных операторов существует при $\nu\to 0$. Исходя из формул (2.17), (2.24) и соотношения (2.26), приходим к следующему выражению равновесного среднего плотности потока энергии:

$$q_k=-\frac{\partial}{\partial Y_0}\frac{\omega Y_k}{Y_0}-\frac{p_0}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k}. \tag{2.27}$$

Формулы (2.17), (2.24), (2.27) для плотностей потоков можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$\zeta_{\alpha k}=-\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{\omega Y_k}{Y_0}+\frac{\partial\omega}{\partial p_k}\frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha}. \tag{2.28}$$

Представим теперь выражения для плотностей потоков в форме, соответствующей двухжидкостной гидродинамике. Термодинамический потенциал ω является функцией Y_0, $\mathbf{Y}^2$, Y_4, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{Yp}$. Введем величины ρ_n, ρ_s, $\overset{*}{m}$, являющиеся функциями этих термодинамических переменных:

$$\rho_n\equiv-2Y_0\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{Y}^2},\quad \rho_s\equiv\frac{2}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{p}^2}\overset{*}{m}{}^2,\quad \frac{\rho_n}{\overset{*}{m}}\equiv n-\frac{\partial\omega}{\partial(\mathbf{Yp})}. \tag{2.29}$$

Тогда с учетом (2.29) потоки j_k, t_{ik}, q_k приобретают вид

$$\begin{gathered} j_k=\frac{\rho_n}{\overset{*}{m}}v_{nk}+\frac{\rho_s p_k}{\overset{*}{m}{}^2},\quad t_{ik}=-\frac{\omega}{Y_0}\delta_{ik}+\rho_n v_{ni}v_{nk}+\rho_s\frac{p_i p_k}{\overset{*}{m}{}^2},\\ q_k=v_{nk}\left[-\frac{\omega}{Y_0}+\varepsilon+\left(n-\frac{\rho_n}{\overset{*}{m}}\right)p_0\right]-\frac{\rho_s p_k}{\overset{*}{m}{}^2}p_0. \end{gathered} \tag{2.30}$$

Отсюда видно, что ρ_n имеет смысл плотности «массы» нормальной компоненты, ρ_s — плотности «массы» сверхтекучей компоненты. Если величину $\overset{*}{m}$ интерпретировать как эффективную «массу частицы», то $\mathbf{p}/\overset{*}{m}$ нужно интерпретировать как сверхтекучую скорость. Заметим, что полная плотность $\rho\equiv\overset{*}{m}n=\overset{*}{m}\partial\omega/\partial Y_4$, вообще говоря, не совпадает с суммой нормальной ρ_n и сверхтекучей ρ_s плотностей: $\rho\neq\rho_n+\rho_s$.

В этом разделе сверхтекучая жидкость характеризовалась оператором параметра порядка — полевым бозе-оператором ψ. Заметим, что в действительности структура оператора параметра порядка, связанная со статистикой частиц (Бозе или Ферми) несущественна. Достаточно считать, что оператор параметра порядка $\hat{\Delta}(\mathbf{x})$ является трансляционно-инвариантным ($\hat{\Delta}(\mathbf{x})=\exp(-i\hat{\vec{\mathcal{P}}}\mathbf{x})\hat{\Delta}(0)\cdot\exp(i\hat{\vec{\mathcal{P}}}\mathbf{x})$) и удовлетворяет равенству

$$[\hat{n}(\mathbf{x}),\ \hat{\Delta}(\mathbf{x}')]=-\tilde{g}\hat{\Delta}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{2.31}$$

где величина $\tilde{g}$ характеризует систему и не связана с ее состоянием. В частности, для бозонов $\hat{\Delta}(\mathbf{x})=\psi(\mathbf{x})$, $\tilde{g}=1$. Для фермионов с куперовским спариванием в s-состоянии $\hat{\Delta}(\mathbf{x})=\psi_\uparrow(\mathbf{x})\psi_\downarrow(\mathbf{x})$, и равенство (2.31) выполняется при $\tilde{g}=2$.

Для релятивистских сверхтекучих ферми-систем в качестве оператора параметра порядка следует взять релятивистски-инвариантный оператор $\bar{\psi}(x)\psi^c(x)$, где $\bar{\psi}(x)$ и $\psi^c(x)$ — сопряженный и зарядово-сопряженный по отношению к $\psi(x)$ биспиноры.

Согласно формулам (2.15), (2.28) плотности ζ_α и плотности потоков $\zeta_{\alpha k}$ в состоянии термодинамического равновесия были представлены в терминах термодинамического потенциала ω, который являлся функцией переменных Y_α и $\mathbf{p}$. Такая запись формул обычно используется для галилеево-инвариантных систем. Вместе с тем заметим, что формулы (2.15), (2.28) можно переписать в эквивалентном виде, если в качестве независимых переменных выбрать величины $Y_\mu=(Y_0, Y_k)$, $p_\mu=(p_0, p_k)$ и от потенциала ω перейти к обычно используемому потенциалу Гиббса $\omega'=\omega/Y_0$:

$$j^\mu=\frac{\partial\omega'}{\partial p_\mu},\quad t^{\mu\nu}=-\frac{\partial\omega' Y^\nu}{\partial Y_\mu}+p^\mu\frac{\partial\omega'}{\partial p_\nu}. \tag{2.32}$$

Здесь введены релятивистские обозначения $j^\mu\equiv(n, j_k)$, $t^{00}\equiv\varepsilon$, $t^{0k}\equiv q_k$, $t^{ik}\equiv t_{ik}$, $t^{k0}\equiv\pi_k$, и считается, что поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ ($g_{00}=-1$, $g_{ik}=\delta_{ik}$, $g_{0k}=0$). Эти формулы будут использованы нами в следующих разделах при рассмотрении релятивистских систем.

3. Гидродинамика сверхтекучей жидкости.

3.1. Метод сокращенного описания. Для изучения эволюции пространственно-неоднородных состояний сверхтекучей жидкости на гидродинамическом этапе используем гипотезу сокращенного описания, согласно которой неравновесный статистический оператор $\rho(t)$ при временах $t\gg\tau_r$ (τ_r — время релаксации) зависит от времени и от начального статистического оператора $\rho\equiv\rho(0)$ посредством некоторого набора параметров. Для сверхтекучей жидкости такими параметрами являются плотности аддитивных интегралов движения $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и фаза $\varphi(\mathbf{x}, t)$ параметра порядка

$$\begin{gathered}\rho(t)\xrightarrow[t\gg\tau_r]{}\sigma\{\zeta(\mathbf{x}, t, \rho), \varphi(\mathbf{x}, t, \rho)\},\\ \zeta_\alpha(\mathbf{x})=\operatorname{Sp}\sigma(\zeta, \varphi)\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}),\quad \varphi(\mathbf{x})=\operatorname{Im}\ln\operatorname{Sp}\sigma(\zeta, \varphi)\,\psi(\mathbf{x}).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Так как $[\mathscr{H}, \hat{\vec{\mathscr{P}}}]=[\mathscr{H}, \hat{N}]=0$, то следствием равенств (3.1) являются формулы

$$\begin{gathered}e^{-i\mathscr{H}\tau}\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t), \varphi(\mathbf{x}', t)\}e^{i\mathscr{H}\tau}=\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t+\tau), \varphi(\mathbf{x}', t+\tau)\},\\ e^{i\hat{\vec{\mathscr{P}}}\mathbf{x}}\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t), \varphi(\mathbf{x}', t)\}e^{-i\hat{\vec{\mathscr{P}}}\mathbf{x}}=\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{x}', t), \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{x}', t)\}\\ e^{i\hat{N}\varphi'}\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t), \varphi(\mathbf{x}', t)\}e^{-i\hat{N}\varphi'}=\sigma\{\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t), \varphi(\mathbf{x}', t)+\varphi'\}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Дифференцируя первое соотношение (3.2) по τ и полагая $\tau=0$, получим функциональное уравнение для $\sigma(\zeta, \varphi)$:

$$-i[\mathscr{H}, \sigma(\zeta, \varphi)]=\int d^3x\left(\frac{\delta\sigma(\zeta, \varphi)}{\delta\zeta_\alpha(\mathbf{x})}L_\alpha(\mathbf{x})+\frac{\delta\sigma(\zeta, \varphi)}{\delta\varphi(\mathbf{x})}L_\varphi(\mathbf{x})\right). \tag{3.3}$$

Параметры сокращенного описания $\zeta_\alpha(\mathrm{x}, t)$, $\varphi(\mathrm{x}, t)$ удовлетворяют уравнениям движения

$$\begin{gathered}\dot{\zeta}_\alpha(\mathrm{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{Sp}\sigma(\zeta, \varphi)\,\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathrm{x}) \equiv L_\alpha(\mathrm{x}) \equiv L_\alpha(\mathrm{x}; \zeta(t), \varphi(t)),\\ \dot{\varphi}(\mathrm{x}, t) = \operatorname{Re}\frac{\operatorname{Sp}\sigma(\zeta, \varphi)\,[\mathscr{H}, \psi(\mathrm{x})]}{\operatorname{Sp}\sigma(\zeta, \varphi)\,\psi(\mathrm{x})} \equiv L_\varphi(\mathrm{x}) \equiv L_\varphi(\mathrm{x}; \zeta(t), \varphi(t)).\end{gathered} \tag{3.4}$$

В пространственно-неоднородном случае сверхтекучий импульс связан с фазой формулой $\mathrm{p}(\mathrm{x}) = \partial\varphi(\mathrm{x})/\partial\mathrm{x}$.

Для нахождения однозначного решения уравнений (3.3), (3.4) необходимо некоторое граничное условие, имеющее смысл эргодического соотношения. Эргодическое соотношение математически выражает факт перехода в области больших t произвольного неравновесного состояния в состояние статистического равновесия. Пусть ρ — начальный неравновесный статистический оператор, удовлетворяющий условию пространственной однородности $[\rho, \hat{\mathscr{P}}_k - p_k\hat{N}] = 0$. Тогда в процессе эволюции быстро, за время τ_r происходит переход системы в состояние статистического равновесия. Это значит, что выполняется соотношение

$$\rho(t) \equiv e^{-i\mathscr{H}t}\rho e^{i\mathscr{H}t} \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} w(t), \tag{3.5}$$

которое следует понимать в смысле средних.

Найдем зависимость термодинамических параметров Y_α, $\varphi(\mathrm{x}, t)$, входящих в $w(t)$ (см. (2.3)) от начального статистического оператора ρ. Так как $[\hat{N}, \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathrm{x})] = 0$ и статистический оператор $\rho(t)$ в (3.5) удовлетворяет условию $[\rho(t), \hat{\mathscr{P}}_k - p_k\hat{N}] = 0$, то $\operatorname{Sp}\rho(t)\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})$ не зависит от x и t. Поэтому

$$\operatorname{Sp} w(t)\,\hat{\zeta}_\alpha(0) = \operatorname{Sp}\rho(0)\,\hat{\zeta}_\alpha(0). \tag{3.6}$$

Это равенство определяет зависимость термодинамических параметров Y_α от начального статистического оператора ρ.

Вводя фазу величины $\psi(\mathrm{x})$ в состоянии $\rho(t)$: $\bar{\varphi}(\mathrm{x}, t) = \operatorname{Im}\ln\operatorname{Sp}\rho(t)\times\times\psi(\mathrm{x}) \equiv \mathrm{px} + \bar{\varphi}(t)$, $\bar{\varphi}(t) = \operatorname{Im}\ln\operatorname{Sp}\rho(t)\psi(0)$ (мы учли, что $[\rho(t), \hat{\mathscr{P}}_k - p_k\hat{N}] = 0$), нетрудно показать, используя (2.14), что величина χ в (2.10) определяется формулой

$$\chi = \bar{\varphi}(0) + \int_0^\infty d\tau\,(\dot{\bar{\varphi}}(\tau) - p_0) \tag{3.7}$$

(так как $\bar{\varphi}(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} p_0\tau + \chi$, то интеграл сходится при $\tau\to\infty$). Эта формула и решает вопрос о нахождении χ как функционала ρ. Формула (3.5), которую мы перепишем в виде

$$\rho(t) \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} w(Y_\alpha, \mathrm{p}, p_0 t + \chi) = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} w_\nu(Y_\alpha, \mathrm{p}, \mathrm{p}_0 t + \chi), \tag{3.8}$$

где

$$w_\nu(Y_\alpha, \mathrm{p}, \chi) = \exp\Big\{\Omega_\nu - Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha - \nu Y_0\int d^3x\,(\psi(\mathrm{x})\exp[-i(\mathrm{px}+\chi)] + \text{э. с.})\Big\}, \tag{3.9}$$

вместе с формулами (2.10), (3.6), (3.7) определяет эргодическое соотношение для сверхтекучих бозе-систем.

Рассмотрим среднее $a(\mathrm{x}) = \operatorname{Sp}\sigma(\zeta(\mathrm{x}'), \varphi(\mathrm{x}'))\,\hat{a}(\mathrm{x})$. В силу принципа ослабления пространственных корреляций основной вклад в это среднее будут давать те значения параметров $\zeta_\alpha(\mathrm{x}')$ и $\varphi(\mathrm{x}')$, значение аргумента x' которых близко к x. В соответствии с этим разложим $\sigma(\zeta, \varphi)$ в ряд по градиентам параметров ζ и φ. При этом следует иметь в виду, что величина $\nabla\varphi$ не является малой, однако вторая производная $\nabla\nabla\varphi$ порядка $\nabla\zeta$. В соответствии со сказанным имеем

$$\overset{(0)}{\sigma}(\mathrm{x}) = \sigma\left\{\zeta(\mathrm{x}),\ \varphi(\mathrm{x}) + (x'_k - x_k)\frac{\partial\varphi(\mathrm{x})}{\partial x_k}\right\},$$

т. е. статистический оператор $\overset{(0)}{\sigma}$ является функцией (а не функционалом) аргументов $\zeta(\mathrm{x})$, $\varphi(\mathrm{x})$, $\partial\varphi(\mathrm{x})/\partial x_k$. Следствием соотношений (3.2) является пространственная однородность этого состояния, т. е. $[\overset{(0)}{\sigma}(\mathrm{x}), \hat{\vec{\mathcal{P}}} - \hat{N}\nabla\varphi(\mathrm{x})] = 0$. Сравнивая (3.1) и (3.8), получим

$$\overset{(0)}{\sigma}\left\{\zeta(\mathrm{x}),\ \varphi(\mathrm{x}) + \frac{x'\partial\varphi(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}\right\} = w\left\{Y(\mathrm{x}),\ \frac{\partial\varphi(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}},\ \varphi(\mathrm{x})\right\}, \tag{3.10}$$

где параметры $Y_\alpha(\mathrm{x})$ как функции $\zeta(\mathrm{x})$, $\mathrm{p}(\mathrm{x})$ определяются равенством $\mathrm{Sp}\, w(Y, \mathrm{p}, \varphi)\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x}) = \zeta_\alpha(\mathrm{x})$. Подставляя найденный оператор $\overset{(0)}{\sigma}$ в уравнения (3.4) и учитывая (3.10) и свойства симметрии (2.5), (2.8), приходим к следующим уравнениям сверхтекучей гидродинамики в главном приближении по пространственным градиентам

$$\dot{\zeta}_\alpha = -\nabla_k\overset{(0)}{\zeta}_{\alpha k}, \quad \dot{\varphi} = p_0 \equiv \frac{Y_4 + \mathrm{Y}\nabla\varphi}{Y_0}, \tag{3.11}$$

где ζ_α и $\overset{(0)}{\zeta}_{\alpha k}$ связаны с термодинамическим потенциалом формулами (2.15), (2.28). Так как фаза φ входит в правые части этих уравнений только через посредство $\nabla\varphi$, но не явно, то последнее уравнение (3.11) обычно записывают в виде

$$\dot{\mathrm{p}} = \nabla p_0, \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{p} = 0. \tag{3.12}$$

Введем в рассмотрение плотность энтропии

$$s = -\lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\mathrm{Sp}\, w_\nu \ln w_\nu = -\omega + Y_\alpha\zeta_\alpha.$$

Используя уравнения (3.11), найдем

$$\dot{s} = \nabla_k\frac{sY_k}{Y_0},$$

откуда следует, что перенос энтропии осуществляется нормальной компонентой жидкости, которая движется со скоростью $v_n = -\mathrm{Y}Y_0^{-1}$.

Отметим, что эргодическое соотношение (3.8) является необходимым также и при учете следующего — диссипативного — приближения.

3.2. Галилеево- и релятивистски-инвариантные системы. Пусть уравнения квантовой механики инвариантны по отношению к преобразованию Галилея, которому соответствует унитарный оператор

$$U_\mathrm{v} = \exp\left(-im\,\mathrm{v}\int d^3x\,\mathrm{x}\,\hat{n}(\mathrm{x})\right), \tag{3.13}$$

где m — масса частицы. При унитарном преобразовании (3.13) операторы $\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})$ преобразуются по формулам

$$\begin{gathered} U_\mathrm{v}\hat{n}(\mathrm{x})U_\mathrm{v}^+ = \hat{n}(\mathrm{x}), \quad U_\mathrm{v}\hat{\pi}(\mathrm{x})U_\mathrm{v}^+ = \hat{\pi}(\mathrm{x}) + m\,\mathrm{v}\,\hat{n}(\mathrm{x}), \\ U_\mathrm{v}\hat{\varepsilon}(\mathrm{x})U_\mathrm{v}^+ = \hat{\varepsilon}(\mathrm{x}) + \mathrm{v}\hat{\pi}(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}mv^2\hat{n}(\mathrm{x}). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Таким образом, преобразованные операторы $U_\mathrm{v}\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})U_\mathrm{v}^+$ являются линейной комбинацией исходных операторов $\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})$ с коэффициентами, зависящими от параметра преобразования $\mathbf{v}$. Отметим, что из (3.14), (2.2) следует совпадение выражений для оператора плотности потока массы с оператором плотности импульса, т. е. $m\hat{j}_k(\mathbf{x}) = \hat{\pi}_k(\mathbf{x})$. Следствием формул (2.2), (3.14) являются законы преобразования для операторов плотностей потоков $\hat{t}_{ik}(\mathbf{x})$ и $\hat{q}_k(\mathbf{x})$:

$$U_{\mathbf{v}}\hat{t}_{ik}(\mathbf{x})U_{\mathbf{v}}^{+} = \hat{t}_{ik}(\mathbf{x}) + v_i\hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + v_k\hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + mv_iv_k\hat{n}(\mathbf{x}),$$

$$U_{\mathbf{v}}\hat{q}_k(\mathbf{x})U_{\mathbf{v}}^{+} = \hat{q}_k(\mathbf{x}) + v_i\hat{t}_{ik}(\mathbf{x}) + v_kv_i\hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + v_k\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \frac{v^2}{2}(\hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + mv_k\hat{n}(\mathbf{x})).$$

Используя эти формулы, легко видеть, что для термодинамического потенциала сверхтекучей жидкости справедливо соотношение

$$\omega(Y_\alpha, \mathbf{p}) = \omega(Y'_\alpha, 0) \equiv \omega(Y'_\alpha),$$
$$Y'_0 = Y_0, \quad Y'_k = Y_k + Y_0v_k, \quad Y'_4 = Y_4 + mv_kY_k + Y_0\frac{mv^2}{2}, \tag{3.15}$$

где $v_k = p_k/m$. Термодинамический потенциал ω галилеево инвариантных систем с учетом вращательной инвариантности является функцией трех независимых переменных Y'_0, $\mathbf{Y}'^2$, Y'_4. Преобразование $w \to w' = U_{\mathbf{v}}wU_{\mathbf{v}}^{+}$ (см. (2.12)) соответствует переходу в систему отсчета, где конденсат покоится, а параметр $\mathbf{v} \equiv \mathbf{p}/m \equiv \mathbf{v}_s$ имеет смысл сверхтекучей скорости. В силу (2.18), (3.15) второе начало термодинамики для галилеево-инвариантных сверхтекучих систем имеет вид

$$d\omega = \zeta'_\alpha\, dY'_\alpha,$$
$$\varepsilon' = \varepsilon - \mathbf{v}_s\pi + \frac{mv_s^2}{2}n, \quad \pi' = \pi - m\mathbf{v}_sn, \quad n' = n.$$

Следствием формул (2.29), (3.15) являются равенства

$$m = \overset{*}{m}, \quad \rho_s = \rho - \rho_n, \tag{3.16}$$

которые приводят в рассматриваемом частном случае к совпадению полученных нами уравнений (3.11) с уравнениями двухжидкостной гидродинамики Л. Д. Ландау.

Рассмотрим теперь случай, когда система инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца $x^\mu \to x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$ ($x^0 \equiv t$, $x^k \equiv x_k$). В этом случае 4-вектор $\hat{\mathscr{P}}^\mu \equiv (\mathscr{H}, \hat{\mathscr{P}}_k)$ и оператор заряда $\hat{Q}$ обладают трансформационными свойствами

$$\hat{\mathscr{P}}'^\mu = U_a\hat{\mathscr{P}}^\mu U_a^{+} = a^\mu_\nu\hat{\mathscr{P}}^\nu, \quad \hat{Q}' = U_a\hat{Q}U_a^{+} = \hat{Q} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \tag{3.17}$$

где U_a — унитарное преобразование в гильбертовом пространстве, соответствующее преобразованию Лоренца, явный вид которого мы не выписываем. Равновесный статистический оператор релятивистской сверхтекучей жидкости имеет вид

$$w(Y_\mu, p_\mu, \varphi) = \exp\Big[V\omega - Y_\mu\hat{\mathscr{P}}^\mu - Y_4\hat{Q} - \nu Y_\mu\int_\sigma d\sigma^\mu\{\psi(x)\exp[-i(p_\nu x^\nu + \varphi)] + \text{э. с.}\}\Big], \tag{3.18}$$

где $Y_\mu \equiv (Y_0, Y_k)$, $p_\mu \equiv (p_0, p_k)$, $p_0 \equiv (Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p})/Y_0$ (мы считаем для простоты, что частицам соответствует комплексное скалярное поле ψ). Из

(3.17), (3.18) следует, что

$$U_a w(Y_\mu, p_\mu, \varphi) U_a^+ = w(Y'_\mu, p'_\mu, \varphi'),$$
$$Y'_\mu = Y_\nu a^\nu_\mu, \quad p'_\mu = p_\nu a^\nu_\mu, \quad \varphi' = \varphi.$$

Таким образом, величины Y_μ и p_μ образуют 4-векторы, причем величина $Y_4 = -Y_\mu p^\mu$ представляет собой инвариант. Условие пространственной однородности (2.6) и условие стационарности (2.8) объединяются в единое релятивистски-инвариантное соотношение

$$[w, \hat{\mathcal{P}}^\mu - p^\mu \hat{Q}] = 0.$$

Так как объем V не является релятивистским инвариантом, то вместо плотности термодинамического потенциала ω целесообразно перейти к релятивистски инвариантному потенциалу $\omega' = \omega/Y_0$ (потенциал Гиббса), который имеет физический смысл давления. Потенциал ω' является функцией инвариантов Y^2, p^2, $Y_\mu p^\mu$:

$$\omega' = \omega'(Y^2, p^2, Y_\mu p^\mu), \tag{3.19}$$

и поэтому величина j^μ — представляет собой 4-вектор тока, а $t^{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса (см. (2.32)). Уравнения идеальной гидродинамики релятивистской сверхтекучей жидкости в соответствии с (3.11), (2.32) имеют вид

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad \frac{\partial p^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial p^\nu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{3.20}$$

Здесь последнее уравнение получено объединением уравнения движения для сверхтекучего импульса с условием потенциальности течения (3.12), причем 4-импульс p_ν связан с фазой φ соотношением $p_\nu = \partial\varphi/\partial x^\nu$. Плотность энтропии $s = -\omega + Y_\alpha \zeta_\alpha$, равная согласно (2.32)

$$s \equiv \overset{(0)}{s} = Y_0 Y_\mu \frac{\partial \omega'}{\partial Y_\mu},$$

и плотность потока энтропии $s^k = -\overset{(0)}{s} Y_k / Y_0$ объединяются в 4-вектор

$$\overset{(0)}{s^\mu} = -Y^\mu Y_\nu \frac{\partial \omega'}{\partial Y_\nu},$$

который представляет собой 4-ток энтропии. Следствием уравнений (3.20) является условие адиабатичности течения сверхтекучей жидкости

$$\frac{\partial \overset{(0)}{s^\mu}}{\partial x^\mu} = 0.$$

Полученная в микроскопическом подходе [22, 23] система уравнений идеальной гидродинамики (3.20) полностью эквивалентна уравнениям работы [30], в основе которой лежит феноменологический подход.

3.3. Процессы релаксации. Для учета диссипативных членов в уравнениях гидродинамики (3.11) необходимо найти статистический оператор $\sigma(\zeta, \varphi)$ в линейном приближении по градиентам ∇Y_α, ∇p_k. Эта задача решена в [19]. Не останавливаясь на методе получения этого оператора, приведем выражения для диссипативных потоков $\overset{(1)}{\zeta}_{ak}$, $\overset{(1)}{L}_\varphi$ и кинетических коэффициентов.

Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости с учетом процессов диссипации можно записать в форме

$$\dot{\zeta}_\alpha = -\nabla_k (\overset{(0)}{\zeta}_{\alpha k} + \overset{(1)}{\zeta}_{\alpha k}), \quad \dot{\varphi} = p_0 + \overset{(1)}{L}_\varphi.$$

Здесь диссипативные потоки $\overset{(1)}{\zeta}_{\alpha k}$ и $\overset{(1)}{L}_\varphi$ имеют вид

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\zeta}_{\alpha k} &= \nabla_l Y_\beta I(\hat{\zeta}'_{\beta l}, \hat{\zeta}'_{\alpha k}) + \nabla_i \frac{\partial \omega}{\partial p_i} I(\hat{h}', \hat{\zeta}'_{\alpha k}), \\ \overset{(1)}{L}_\varphi &= \nabla_l Y_\beta I(\hat{\zeta}'_{\beta l}, \hat{h}') + \nabla_i \frac{\partial \omega}{\partial p_i} I(\hat{h}', \hat{h}') \end{aligned} \tag{3.21}$$

и операторы $\hat{\zeta}'_{\alpha k}$, $\hat{h}'$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}'_{\alpha k}(\mathbf{x}) &\equiv \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \langle \hat{\zeta}_{\alpha k} \rangle}{\partial \zeta_\beta} \hat{\zeta}_\beta(\mathbf{x}), \\ \hat{h}'(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{2\,\mathrm{Re}\langle\psi\rangle} [H, \psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} - \psi^+(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}] - \frac{\partial p_0}{\partial \zeta_\beta} \hat{\zeta}_\beta(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Величины

$$I(\hat{a}, \hat{b}) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \langle e^{iH\tau} (\hat{a}(\mathbf{x}) - \langle \hat{a} \rangle) e^{-iH\tau} \hat{b}(0) \rangle \tag{3.23}$$

являются обобщенными кинетическими коэффициентами и удовлетворяют принципу Онзагера

$$I(\hat{a}, \hat{b}) = I(\hat{b}, \hat{a}).$$

Кроме того, из (3.22), (3.23) следуют свойства

$$I(\hat{a}, \hat{a}) \geqslant 0, \quad I^2(\hat{a}, \hat{b}) \leqslant I(\hat{a}, \hat{a}) I(\hat{b}, \hat{b}),$$

$$I(\hat{\zeta}'_{\alpha k}, \hat{\zeta}_\beta) = 0, \quad I(\hat{h}', \hat{\zeta}_\beta) = 0.$$

Уравнение движения для плотности энтропии в рассматриваемом приближении имеет вид

$$\dot{s} + \nabla_k (s v_{nk} + \overset{(1)}{s}_k) = \overset{(2)}{I}, \quad \overset{(1)}{s}_k = Y_\alpha \overset{(1)}{\zeta}_{\alpha k} + \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \overset{(1)}{L}_\varphi,$$

$$\overset{(2)}{I} = \nabla_k Y_\alpha \overset{(1)}{\zeta}_{\alpha k} + \nabla_k \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \overset{(1)}{L}_\varphi =$$

$$= I\left(\nabla_k Y_\alpha \cdot \hat{\zeta}'_{\alpha k} + \nabla_k \frac{\partial \omega}{\partial p_k} \cdot \hat{h}', \; \nabla_l Y_\beta \cdot \hat{\zeta}'_{\beta l} + \nabla_l \frac{\partial \omega}{\partial p_l} \cdot \hat{h}'\right) \geqslant 0,$$

где $\overset{(1)}{s}_k$ и $\overset{(2)}{I}$ — соответственно диссипативная плотность потока и производство энтропии.

Так как статистический оператор w является функцией двух векторов — нормальной скорости и сверхтекучего импульса, то кинетические коэффициенты имеют достаточно сложную тензорную структуру. Если пренебречь анизотропией, положив $\mathbf{p}=0$, $\mathbf{v}_n=0$ в (3.3), то рассматриваемая сверхтекучая жидкость характеризуется следующими кинетическими коэффициентами:

$$\varkappa=\frac{1}{3T^2}I(\hat{\mathbf{q}}'-\mu\hat{\mathbf{j}}',\ \hat{\mathbf{q}}'-\mu\hat{\mathbf{j}}')\geqslant 0,\quad D=\frac{1}{3T^2}I(\hat{\mathbf{q}}'-\mu\hat{\mathbf{j}}',\ \hat{\mathbf{j}}')\left(\mu\equiv-\frac{Y_4}{Y_0}\right),$$

$$\sigma=\frac{1}{3T}I(\hat{\mathbf{j}}',\hat{\mathbf{j}}')\geqslant 0,\quad \eta=\frac{1}{10T}I(\overset{0}{\hat{t}}{}'_{ik},\ \overset{0}{\hat{t}}{}'_{ik})\geqslant 0,$$

$$\overset{0}{\hat{t}}{}'_{ik}\equiv\hat{t}'_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\hat{t}'_{ll},\quad \zeta_1=\frac{1}{3T}I(\hat{t}'_{ii},\ \hat{h}'),$$

$$\zeta_2=\frac{1}{9T}I(\hat{t}'_{ii},\ \hat{t}'_{kk})\geqslant 0,\quad \zeta_3=\frac{1}{T}I(\hat{h}',\hat{h}')\geqslant 0;$$

здесь $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, D, σ — коэффициенты диффузии, η, ζ_1, ζ_2, ζ_3 — вязкости. Потоки $\overset{(1)}{s}_k$, $\overset{(1)}{\zeta}_{\alpha k}$ и $\overset{(1)}{L}_\varphi$ в этом случае имеют вид

$$\overset{(1)}{s}_k=-\frac{\varkappa}{T}\nabla_kT-D\nabla_k\mu,\quad \overset{(1)}{j}_{4k}=-D\nabla_kT-\sigma\nabla_k\mu,$$

$$\overset{(1)}{t}_{ik}=-\eta u_{ik}-\delta_{ik}\left[\zeta_1\nabla_l\left(\frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_l}\right)+\zeta_2\nabla_l v_{nl}\right],$$

$$\overset{(1)}{L}_\varphi=\zeta_1\nabla_l v_{nl}+\zeta_3\nabla_l\left(\frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_l}\right),$$

где $u_{ik}=\nabla_k v_{ni}+\nabla_i v_{nk}-(2/3)\delta_{ik}\nabla_l v_{nl}$. Таким образом, в пренебрежении эффектами анизотропии рассматриваемая сверхтекучая жидкость характеризуется 7 кинетическими коэффициентами.

Рассмотрим, к каким упрощениям в структуре диссипативных потоков приводит инвариантность Галилея. В этом случае кинетические коэффициенты $I(\hat{a},\hat{b})$ являются функцией разноти нормальной и сверхтекучей скоростей. Кроме того, учитывая (3.22), видим, что $\hat{\zeta}'_{4k}\equiv 0$ и, следовательно, кинетические коэффициенты $I(\hat{\zeta}'_{\alpha k},\ \hat{\zeta}'_{\beta l})$ обращаются в нуль, если один из индексов α, β равен 4. Поэтому диссипативные потоки галилеево-инвариантной сверхтекучей жидкости при $\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s\neq 0$ характеризуются 14 независимыми кинетическими коэффициентами [19]. При $\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s=0$ число кинетических коэффициентов сокращается до 5 и структура диссипативных потоков совпадает с результатами феноменологической теории [6].

Пусть теперь жидкость инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца. Уравнения гидродинамики релятивистской сверхтекучей жидкости с учетом процессов диссипации имеют вид

$$\frac{\partial(\overset{(0)}{\zeta}{}^{\alpha\mu}+\overset{(1)}{\zeta}{}^{\alpha\mu})}{\partial x^\mu}=0,\quad \frac{\partial p^\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial p^\nu}{\partial x_\mu}=\frac{\partial\overset{(1)}{L}{}^\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\overset{(1)}{L}{}^\mu}{\partial x_\nu}.$$

Диссипативные потоки $\overset{(1)}{\zeta}{}^{\alpha\mu}\equiv(\overset{(1)}{t}{}^{\nu\mu},\ \overset{(1)}{j}{}^\mu)\ (\alpha=\nu,4)$ и $\overset{(1)}{L}{}^\mu$ определяются формулами

$$\overset{(1)}{\zeta}{}^{\alpha\mu}=\frac{\partial Y_\beta}{\partial x^\nu}I(\hat{\zeta}'^{\beta\nu},\ \hat{\zeta}'^{\alpha\mu})+\frac{\partial K^\lambda_\nu}{\partial x^\lambda}I(\hat{h}'^\nu,\ \hat{\zeta}'^{\alpha\mu}),$$

$$\overset{(1)}{L}{}^\mu=\frac{\partial Y_\beta}{\partial x^\nu}I(\hat{\zeta}'^{\beta\nu},\ \hat{h}'^\mu)+\frac{\partial K^\lambda_\nu}{\partial x^\lambda}I(\hat{h}'^\nu,\ \hat{h}'^\mu),\tag{3.24}$$

$$K^{\mu\nu}=\frac{\partial\omega'}{\partial p_\lambda}\frac{\partial Y^\mu Y^\nu}{\partial Y^\lambda}=K^{\nu\mu},$$

и операторы $\hat{\zeta}'^{\alpha\mu}$ и $\hat{h}'^{\mu}$ имеют вид

$$\hat{\zeta}'^{\alpha\mu}(x) = \hat{\zeta}^{\alpha\mu}(x) - \frac{\partial \langle \hat{\zeta}^{\alpha\mu} \rangle}{\partial (\langle \hat{\zeta}^{\beta\lambda} \rangle u_\lambda)} \hat{\zeta}^{\beta\mu'}(x) u_{\mu'}, \quad u_\mu \equiv \frac{Y_\mu}{(-Y^2)^{1/2}},$$

$$\hat{h}'^{\mu}(x) = u^\mu \left\{ [H, \hat{\varphi}(x)] + \frac{\partial p^\nu u_\nu}{\partial (\langle \hat{\zeta}^{\alpha\nu'} \rangle u_{\nu'})} \hat{\zeta}^{\alpha\lambda}(x) u_\lambda \right\}$$

(здесь $H \equiv u_\mu (\hat{\mathcal{P}}^\mu - p^\mu \hat{Q})$ и $\langle \ldots \rangle \equiv \mathrm{Sp}\, w \ldots$, где w имеет вид (3.18)). Кинетические коэффициенты I можно также представить в виде средних типа (3.23).

Отметим, что представленные выражения (3.24) диссипативных потоков являются более общими по сравнению с феноменологическим подходом [30]. Количество инвариантов, определяющих кинетические коэффициенты в нашем рассмотрении — 35: 1 для $I(\hat{h}'^{\mu}, \hat{h}'^{\nu})$; 2 для $I(\hat{h}'^{\mu}, \hat{j}'^{\nu})$; по 4 для $I(\hat{h}'^{\lambda}, \hat{t}'^{\mu\nu})$, $I(\hat{j}'^{\mu}, \hat{j}'^{\nu})$; 10 для $I(\hat{t}'^{\mu\nu}, \hat{j}'^{\lambda})$ и 14 для $I(\hat{t}'^{\mu\nu}, \hat{t}'^{\lambda\rho})$. Сравнивая эти коэффициенты с результатами работы [30], видим, что в последней отсутствуют коэффициенты типа $I(\hat{h}'^{\nu}, \hat{\zeta}'^{\alpha\mu})$.

При нерелятивистском предельном переходе следует учесть, что релятивистские выражения для операторов $\hat{t}_{\mu\nu}$ и $\hat{j}_\mu$ связаны при $c \to \infty$ с нерелятивистскими операторами плотностей и плотностей потоков соотношениями

$$\hat{j}_0 \to \hat{n}, \quad \hat{j}_k \to \frac{1}{m} \hat{\pi}_k,$$

$$\hat{t}_{00} \to mc^2 \hat{n} + \hat{\varepsilon}, \quad \hat{t}_{0k} \to c\hat{\pi}_k + \hat{q}_k, \quad \hat{t}_{ik} \to \hat{t}_{ik}$$

(мы учли при этом симметричность релятивистского тензора энергии-импульса). Используя эти формулы и учитывая, что $I(\ldots, \hat{\zeta}_\beta) = 0$, можно показать, что релятивистские уравнения сверхтекучей гидродинамики переходят в уравнения гидродинамики галилеево-инвариантной теории.

3.4. Растворы квантовых жидкостей. Пусть рассматриваемый раствор квантовых жидкостей содержит $a = 1, 2, \ldots, a \equiv \{a\}$ различных компонент. Для определенности считаем, что компоненты жидкости $1, \ldots, s \equiv \{s\}$ находятся в сверхтекучем состоянии, а остальные $s+1, \ldots, a \equiv \{n\}$ — в нормальном (невырожденном) состоянии. Смесь жидкостей содержит s параметров порядка $\langle \psi_s \rangle = \eta_s \exp(i\varphi_s)$. Для простоты изложения предполагаем, что все частицы жидкости — бозоны. Равновесный статистический оператор раствора имеет вид

$$w(t) = \exp\left[\Omega_\nu - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha - \nu Y_0 \sum_s \int d^3x \left(\psi_s(\mathbf{x}) e^{-i\varphi_s(\mathbf{x},t)} + \text{э. с.}\right)\right]$$

и обладает следующей пространственной, временной и фазовой симметрией

$$\left[w, \hat{\mathcal{P}} - \sum_s{}' \mathbf{p}_s \hat{N}_s\right] = 0, \quad [w, \hat{N}_n] = 0,$$

$$\left[w, \mathcal{H} + \sum_s \overset{0}{p}_s \hat{N}_s\right] = 0, \quad \overset{0}{p}_s = (Y_s + \mathbf{Y}\mathbf{p}_s) Y_0^{-1}. \tag{3.25}$$

Из (3.25) следует структура асимптотической фазы $\varphi_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_s \mathbf{x} + \overset{0}{p}_s t + \overset{0}{\varphi}_s$. Итак, рассматриваемая смесь сверхтекучих и нормальных жидкостей характеризуется термодинамическими силами Y_α ($\alpha = 0, k, a$), сверхтекучими импульсами $\mathbf{p}_s$ и фазами φ_s.

Используя методику раздела 2.3, нетрудно показать, что равновесные средние плотностей аддитивных интегралов движения и соответствующих им плотностей потоков также можно выразить в терминах термодинамического потенциала ω:

$$\zeta_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial Y_\alpha}, \quad \zeta_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \sum_s \frac{\partial\omega}{\partial p_{sk}}\frac{\partial \overset{0}{p}_s}{\partial Y_\alpha}. \tag{3.26}$$

Отсюда получим термодинамическое равенство

$$d\omega = \zeta_\alpha d Y_\alpha + \sum_s (Y_0 j_{sk} + Y_k n_s)\, d\, p_{sk} \tag{3.27}$$

($j_{sk} \equiv \zeta_{sk}$), которое имеет смысл II начала термодинамики раствора квантовых жидкостей. Термодинамический потенциал ω содержит $2+a+s+$ $+[s(s+1)/2]$ переменных:

$$\omega(Y_\alpha, \mathbf{p}_s) = \omega(Y_0, \mathbf{Y}^2, Y_a, \mathbf{Y}\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_s\mathbf{p}_{s'}).$$

Чтобы проследить взаимосвязь формул (3.26) с выражениями для потоков физических величин, принятыми в «двухжидкостной» формулировке, введем величины

$$\rho_n \equiv -2Y_0\frac{\partial\omega}{\partial \mathbf{Y}^2}, \quad \rho_{ss'} \equiv \frac{\overset{*}{m}_s \overset{*}{m}_{s'}}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial(\mathbf{p}_s\mathbf{p}_{s'})},$$

где термодинамическая «масса» m_s определяется равенством

$$m_s\frac{\partial\omega}{\partial(\mathbf{Y}\mathbf{p}_s)} = \sum_{s'}\rho_{ss'}.$$

С учетом этих определений потоки $\zeta_{\alpha k}$ приобретут вид

$$j_{ak} \equiv \zeta_{ak} = -\frac{Y_k}{Y_0}\left(n_a - \sum_{s,s'}\delta_{as}\frac{\rho_{ss'}}{\overset{*}{m}_s}\right) + \sum_{s,s'}\delta_{as}\rho_{ss'}\frac{p_{s'k}}{\overset{*}{m}_s\overset{*}{m}_{s'}},$$

$$t_{ik} = -\frac{\omega}{Y_0}\delta_{ik} + \rho_n\frac{Y_kY_i}{Y_0^2} + \sum_{s,s'}\rho_{ss'}\frac{p_{si}p_{s'k}}{\overset{*}{m}_s\overset{*}{m}_{s'}},$$

$$q_k = -\frac{Y_k}{Y_0}\left(-\frac{\omega}{Y_0} + \varepsilon + \sum_{s,s'}\frac{\overset{0}{p}_s\rho_{ss'}}{\overset{*}{m}_s}\right) - \sum_{s,s'}\frac{\rho_{ss'}}{\overset{*}{m}_s\overset{*}{m}_{s'}}\overset{0}{p}_s p_{s'k}.$$

Видим, что ρ_n имеет смысл плотности «массы» нормальной компоненты жидкости, матрица $\rho_{ss'}$ имеет смысл сверхтекучей плотности, связанной с взаимодействием частиц компонент s и s'. Величину $\overset{*}{m}_s$ можно интерпретировать как эффективную «массу» частицы s-компоненты. Из представленных формул видно, что нормальные жидкости в растворе со сверхтекучими при любом изменении концентрации, не приводящем к фазовому переходу, участвуют только в нормальном движении. Кроме того, в рамках развитого подхода видно, что наличие недиагональных элементов $\rho_{ss'} \neq 0$ $(s \neq s')$ приводит к эффекту увлечения каждым из сверхтекучих движений других сверхтекучих компонент раствора, который был впервые отмечен в работе [31].

Если рассматриваемый раствор квантовых жидкостей обладает инвариантностью Галилея, то нетрудно показать, что термодинамический потенциал ω является функцией следующих переменных:

$$\omega(Y_0, \mathbf{Y}^2, Y_a, \mathbf{Y}\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_s\mathbf{p}_{s'}) =$$
$$= \omega\left(Y_0, 0, Y_a - \frac{m_a\mathbf{Y}^2}{2Y_0}, 0, \left(\mathbf{p}_s + \frac{\mathbf{Y}m_s}{Y_0}\right)\left(\mathbf{p}_{s'} + \frac{\mathbf{Y}m_{s'}}{Y_0}\right)\right),$$

где m_a — масса частицы a-компоненты. Это соотношение приводит к $s+1$ связи на введенные величины ρ_n, $\rho_{ss'}$, $\overset{*}{m}_s$:

$$m_s = \overset{*}{m}_s, \quad \sum_a n_a m_a = \rho_n + \sum_{s,s'} \rho_{ss'}. \tag{3.28}$$

Рассмотрим теперь системы, инвариантные по отношению к преобразованиям Лоренца. Релятивистский равновесный статистический оператор w в этом случае имеет вид

$$w = \exp\Big[VY_0\omega' - Y_\mu \hat{\mathcal{P}}^\mu - \sum_n Y_n\hat{Q}_n - \sum_s Y_s\hat{Q}_s - $$
$$- vY_\mu \int_\sigma d\sigma^\mu \sum_s \{\psi_s(x)\exp[-i(p_{s\nu}x^\nu + \varphi_s)] + \text{э. с.}\}\Big],$$

где $Y_\mu \equiv (Y_0, Y_k)$, $p_{s\mu} \equiv (p_s, p_{sk})$ — 4-векторы, причем $Y_s = -Y^\mu \overset{0}{p}_{s\mu}$. В терминах релятивистски инвариантного термодинамического потенциала $\omega' = \omega'(Y^2, p^2, Y_\mu p_s^\mu, Y_n)$, зависящего от независимых переменных Y_μ, $p_{s\mu}$, Y_n, тензор энергии импульса $t^{\mu\nu}$ и 4-ток j_a^μ; a-компоненты можно записать в форме

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu} &= -\frac{\partial Y^\nu\omega'}{\partial Y_\mu} + \sum_s p_s^\mu \frac{\partial\omega'}{\partial p_{s\nu}}, \\ j_a^\mu &= \sum_s \delta_{as}\frac{\partial\omega'}{\partial p_{s\mu}} - \sum_n \delta_{an} Y^\mu \frac{\partial\omega'}{\partial Y_n}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Введем 4-ток энтропии

$$s^\mu = -Y^\mu\left(Y_\nu\frac{\partial\omega'}{\partial Y_\nu} + \sum_n Y_n\frac{\partial\omega'}{\partial Y_n}\right). \tag{3.30}$$

Термодинамическое соотношение (3.27) с учетом формул (3.29), (3.30) для релятивистски инвариантного раствора квантовых жидкостей сводится к виду

$$\mathrm{d}s^\mu = \sum_a Y_a \,\mathrm{d} j_a^\mu + Y_\nu \,\mathrm{d} t^{\nu\mu} - \sum_s (Y^\nu j_s^\mu - Y^\mu j_s^\nu)\,\mathrm{d} p_{s\nu}.$$

Метод сокращенного описания, развитый в разделе 3, нетрудно обобщить для вывода уравнений гидродинамики рассматриваемых смесей квантовых жидкостей. Параметрами сокращенного описания являются плотности аддитивных интегралов движения ζ_α и φ_s — фаза параметра порядка s-компоненты раствора. Уравнения гидродинамики таких систем имеют вид

$$\dot{\zeta}_\alpha = -\nabla_k \overset{(0)}{\zeta}_{\alpha k}, \quad \dot{\mathrm{p}}_s = \nabla\dot{\varphi}_s = \nabla\overset{0}{p}_s. \tag{3.31}$$

Потоки $\overset{(0)}{\zeta}_{\alpha k}$ и $\overset{0}{p}_s$ определяются формулами (3.25), (3.26) и описывают приближение, соответствующее идеальной гидродинамике раствора жидкостей. Диссипативное приближение, которое мы здесь не будем рассматривать, в микроскопическом подходе изучалось в работе [20]. В случае когда раствор состоит из сверхтекучей и нормальной жидкостей, уравнения гидродинамики (3.31) с учетом (3.28) совпадают с феноменологическими уравнениями [6], а в случае раствора двух сверхтекучих жидкостей — с уравнениями работ [31, 32].

4. Функции Грина.

4.1. Определение и свойства функций Грина. Для сверхтекучих систем оператор Гиббса w (3.8) коммутирует с операторами H и $\hat{\mathbf{P}}$ (но не коммутирует с операторами $\mathscr{H}$ и $\hat{\mathscr{P}}$). Поэтому естественно дать следующее определение трансляционно-инвариантных (по координатам и времени) запаздывающих (+) и опережающих (−) функций Грина

$$G^{\pm}_{ab}(\mathbf{x},\ t) = \mp i\theta(\pm t)\,\mathrm{Sp}\,w\,[\hat{a}(\mathbf{x},\ t),\ \hat{b}(0)], \tag{4.1}$$

где

$$\hat{a}(\mathbf{x},\ t) = \exp\,[i\,(Ht - \hat{P}_k x_k)]\,\hat{a}\,(0)\exp\,[-i\,(Ht - \hat{P}_i x_i)]. \tag{4.2}$$

Введенные функции Грина определяют линейный отклик системы на внешнее возмущение. Действительно, пусть при $t\to-\infty$ система находится в состоянии статистического равновесия, которое описывается статистическим оператором w (3.8). В некоторый момент времени t_0 включается внешнее поле, так что гамильтонианом системы становится оператор $\mathscr{H}(t)=\mathscr{H}+V(t)$ и, соответственно, уравнение фон Неймана приобретает вид

$$i\,\frac{\partial\rho\,(t)}{\partial t} = [\mathscr{H} + V\,(t),\ \rho\,(t)]. \tag{4.3}$$

Вводя вместо $\rho(t)$ оператор

$$\tilde{\rho}\,(t) = e^{-ip_0\hat{N}t}\rho\,(t)\,e^{ip_0\hat{N}t}, \tag{4.4}$$

получим для него уравнение

$$i\,\frac{\partial\tilde{\rho}\,(t)}{\partial t} = [H + \tilde{V}\,(t),\ \tilde{\rho}\,(t)], \tag{4.5}$$

где

$$\tilde{V}\,(t) = e^{-ip_0\hat{N}t}V\,(t)\,e^{ip_0\hat{N}t} = \int d^3x\,\xi\,(\mathbf{x},\ t)\,\hat{b}\,(\mathbf{x}) \tag{4.6}$$

($\xi(\mathbf{x}, t)$ — c — числовое внешнее поле и $\hat{b}(\mathbf{x})$ — квазилокальный оператор, определяющий взаимодействие частиц с внешним полем). Так как при $t\to-\infty$ внешнее поле отсутствовало и система находилась в равновесии, то

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}\,(-\infty) &= e^{-ip_0\hat{N}t}w\,(t)\,e^{ip_0\hat{N}t}\big|_{t\to-\infty} = \\ &= \exp\Big[\Omega - Y_\alpha\hat{\gamma}_\alpha - \nu Y_0\int d^3x(\psi\,(\mathbf{x})\,e^{-i(\mathbf{px}+\chi)} + \text{э. с.})\Big] = w\end{aligned} \tag{4.7}$$

(подчеркнем, что в представлении $\sim$ в отличие от первоначального представления равновесный статистический оператор w не зависит от времени).

Считая взаимодействие системы с внешним полем слабым, можно разложить $\tilde{\rho}(t)$ в ряд по степеням $\tilde{V}(t)$: $\tilde{\rho}(t)=w+\rho'(t)+\ldots$ Среднее значение оператора $\hat{a}(\mathbf{x})\equiv\exp(-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x})\hat{a}(0)\exp(i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x})$ с точностью до членов линейных по взаимодействию $\tilde{V}(t)$ определим формулой

$$a\,(\mathbf{x},\ t) = \mathrm{Sp}\,\tilde{\rho}\,(t)\,\hat{a}\,(\mathbf{x}) = \mathrm{Sp}\,w\hat{a}\,(\mathbf{x}) + a_\xi\,(\mathbf{x},\ t) + \ldots, \tag{4.8}$$

где

$$a_\xi\,(\mathbf{x},\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x'\,\xi\,(\mathbf{x}',\ t')\,G^{+}_{ab}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}',\ t-t') \tag{4.9}$$

и функция Грина $G^{+}_{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t')$ определяется формулой (4.1) (среднее $a(\mathbf{x}, t)$ легко связать с обычным средним $\mathrm{Sp}\,\rho(t)\exp(-i\vec{\mathcal{P}}\mathbf{x})\,\hat{a}(0)\times\times\exp(i\vec{\mathcal{P}}\mathbf{x})$.

Инвариантность уравнений квантовой механики относительно непрерывных преобразований приводит к некоторым ограничениям на структуру функций Грина.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда уравнения квантовой механики инвариантны относительно преобразований Галилея. В этом случае согласно (3.8) имеем

$$U_{\mathbf{p}}w(Y_\alpha, \mathbf{0})\,U^{+}_{\mathbf{p}} = w(Y'_\alpha, 0),$$

где термодинамические силы Y'_α связаны с термодинамическими силами Y_α формулами (3.15). Далее, учитывая (3.14), получим

$$G^{\pm}_{ab}(\mathbf{x}, t; Y_\alpha, \mathbf{p}) = G^{\pm}_{\tilde{a}\tilde{b}}\left(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{p}}{m}t, t; Y'_\alpha, 0\right),$$

где $\tilde{\hat{a}}(0) \equiv U_{\mathbf{p}}\hat{a}(0)\,U^{+}_{\mathbf{p}}$, $\tilde{\hat{b}}(0) \equiv U_{\mathbf{p}}\hat{b}(0)\,U^{+}_{\mathbf{p}}$.

Рассмотрим теперь случай, когда система обладает свойством релятивистской инвариантности. Функции Грина по-прежнему определяются формулой (4.1)

$$G^{\pm}_{ab}(x) = \mp i\theta(\pm x^0)\,\mathrm{Sp}\,w(Y_\mu, p_\mu, \varphi)\,[\hat{a}(x), \hat{b}(0)], \tag{4.10}$$

где

$$\hat{a}(x) = \exp[-i(\mathcal{P}^\mu - p^\mu\hat{Q})\,x_\mu]\,\hat{a}(0)\exp[i(\mathcal{P}^\mu - p^\mu\hat{Q})\,x_\mu]$$

и статистический оператор $w(Y_\mu, p_\mu, \varphi)$ определяется формулой (3.18). Так как согласно (3.18) ψ — скалярное поле, то

$$U_a\psi(0)\,U^{+}_a = \psi(0).$$

Поэтому, учитывая (3.17), найдем

$$G^{\pm}_{ab}(x_\mu, Y_\mu, p_\mu) = G^{\pm}_{\tilde{a}\tilde{b}}(x'_\mu, Y'_\mu, p'_\mu),$$

где $\tilde{\hat{a}}(0) \equiv U_a\hat{a}(0)\,U^{+}_a$, $\tilde{\hat{b}}(0) = U_a\hat{b}(0)\,U^{+}_a$ и штрихованные величины связаны с нештрихованными формулами $x'_\mu = a^{\nu}_{\mu}x_\nu$, $Y'_\mu = Y_\nu a^{\nu}_{\mu}$, $p'_\mu = p_\nu a^{\nu}_{\mu}$.

4.2. Гидродинамика сверхтекучей жидкости во внешних полях. В этом разделе мы изучим влияние достаточно произвольных слабых медленно меняющихся внешних полей на эволюцию системы. Для решения этой задачи обратимся к уравнению движения (4.3) для статистического оператора $\rho(t)$. Так же как и в разделе 4.1, будем считать, что статистический оператор $\tilde{\rho}(t)$ (см. (4.4)) удовлетворяет асимптотическому соотношению (4.7). (Для простоты мы рассматриваем такие состояния равновесия, для которых $\chi=0$.) При наличии слабого внешнего поля, если только частота его мала по сравнению с τ_r^{-1}, статистический оператор $\tilde{\rho}(t)$ при $t \gg \tau_r$ будет зависеть от времени не только через посредство $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi(\mathbf{x}, t)$ (см. раздел 3.1), но и через посредство внешнего поля $\xi(\mathbf{x}, t)$ и всех его временных производных $\dot{\xi}(\mathbf{x}, t)$, $\ddot{\xi}(\mathbf{x}, t)$, ...

$$\tilde{\rho}(t) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \tilde{\rho}(\zeta_\alpha(t), \varphi(t); \xi(t), \dot{\xi}(t), \ldots) \equiv \tilde{\rho}(\zeta_\alpha(t), \varphi(t); t), \tag{4.11}$$

причем

$$\begin{gathered}\operatorname{Sp}\tilde{\rho}(\zeta_\beta(t),\ \varphi(t);\ t)\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x},\ t),\\ \operatorname{Im}\ln\operatorname{Sp}\tilde{\rho}(\zeta_\beta(t),\ \varphi(t);\ t)\,\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x},\ t)\end{gathered} \tag{4.12}$$

($\varphi(\mathbf{x},\ t)$ — фаза $\psi(\mathbf{x})$ в состоянии $\tilde{\rho}(\zeta,\ \varphi;\ t)$). Подчеркнем, что в этой формуле функциональные аргументы ζ_β, φ, ξ, $\dot{\xi}$, ..., рассматриваемые как функции $\mathbf{x}$, должны считаться независимыми.

Сравнивая формулу (4.11) с (3.1), при $\xi=\dot{\xi}=\ldots=0$ имеем

$$\tilde{\rho}(\zeta_\alpha(t),\ \varphi(t);\ 0,\ 0,\ \ldots) = \sigma(\zeta_\alpha(t),\ \varphi(t)). \tag{4.13}$$

Линеаризуем асимптотическое соотношение (4.11) около состояния (4.7), полагая $\tilde{\rho}(t)=w+\tilde{\rho}'(t)$. Учитывая (4.13), получим

$$\tilde{\rho}(t) \xrightarrow[t\gg\tau_r]{} \sigma'(\zeta'_\alpha(t),\ \varphi'(t)) + \rho(\xi(t)) + \ldots, \tag{4.14}$$

где

$$\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t)) = \int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t) + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,\varphi'(\mathbf{x},\ t)\}, \tag{4.15}$$

$$\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \left.\frac{\delta\sigma(\zeta,\ \varphi)}{\delta\zeta_\alpha(\mathbf{x})}\right|_{\zeta=\bar{\zeta},\,\varphi=\mathbf{px}},\qquad \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}) = \left.\frac{\delta\sigma(\zeta,\ \varphi)}{\delta\varphi(\mathbf{x})}\right|_{\zeta=\bar{\zeta},\,\varphi=\mathbf{px}},$$

и $\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x},\ t)$ — отклонения параметров $\zeta_\alpha(\mathbf{x},\ t)$ и $\varphi(\mathbf{x},\ t)$ от равновесных значений, т. е. от $\bar{\zeta}_\alpha=\operatorname{Sp} w\,\hat{\zeta}_\alpha$ и $\bar{\varphi}=\operatorname{Im}\ln\operatorname{Sp} w\,\psi(\mathbf{x})=\mathbf{px}$ соответственно ($\zeta'_\alpha(\mathbf{x},t)=\zeta_\alpha(\mathbf{x},t)-\bar{\zeta}_\alpha$, $\varphi'(\mathbf{x},\ t)=\varphi(\mathbf{x},\ t)-\bar{\varphi}$). В формуле (4.14) $\rho(\xi(t))\equiv\rho(\xi(t),\ \dot{\xi}(t),\ \ldots)$ представляет собой линейное по ξ отклонение статистического оператора $\tilde{\rho}(\zeta_\alpha,\ \varphi;\ t)$ от w, связанное с явной зависимостью $\tilde{\rho}(\zeta_\alpha,\ \varphi;\ t)$ от поля $\xi(\mathbf{x},\ t)$. Если единственной причиной неравновесности является внешнее поле, то величины $\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t)$, $\varphi'(\mathbf{x},\ t)$ представляют собой линейные функционалы $\xi(\mathbf{x},\ t)$, $\dot{\xi}(\mathbf{x},\ t)$, ...

Учитывая (3.2), имеем

$$e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}}\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\qquad e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}}\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

$$e^{i\hat{N}\varphi}\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\,e^{-i\hat{N}\varphi} = \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}),\qquad e^{i\hat{N}\varphi'}\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})\,e^{-i\hat{N}\varphi'} = e^{i\varphi'}\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}).$$

Эти формулы подтверждают, что при $\mathbf{p}\neq 0$ оператор $\hat{\mathbf{P}}$ (а не оператор $\vec{\mathscr{P}}$) целесообразно интерпретировать как оператор трансляций.

Так как фаза $\bar{\varphi}$ в состоянии w равна $\mathbf{px}$, то фазу в состоянии $w+$ $+\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t))$ можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{x},\ t) = \operatorname{Sp}\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t))\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{px}, \tag{4.16}$$

где

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\eta}(\psi^+(\mathbf{x})\,e^{i\mathbf{px}} - \psi(\mathbf{x})\,e^{-i\mathbf{px}}) \equiv e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}\hat{\varphi}(0)\,e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}}, \tag{4.17}$$

($\eta=|\operatorname{Sp} w\,\psi|$; см. (2.14)). Оператор $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ будем называть оператором фазы. Замечая, что согласно определению $\sigma'(\zeta',\ \varphi')$

$$\begin{gathered}\zeta'_\alpha(\mathbf{x},\ t) = \operatorname{Sp}\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t))\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}),\\ \varphi'(\mathbf{x},\ t) = \operatorname{Sp}\sigma'(\zeta'(t),\ \varphi'(t))\,\hat{\varphi}(\mathbf{x})\end{gathered} \tag{4.18}$$

и используя уравнение (4.5), находим линеаризованные уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости при наличии внешних полей

$$\dot{\zeta}'_\alpha(\mathbf{x},\ t) - L_\alpha(\mathbf{x};\ t) = \eta_\alpha(\mathbf{x},\ t),\qquad \dot{\varphi}'(\mathbf{x},\ t) - L_\varphi(\mathbf{x},\ t) = \eta_\varphi(\mathbf{x};\ t), \tag{4.19}$$

где

$$L_\alpha(\mathrm{x};t)=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t),\varphi'(t))\,[H,\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})],$$
$$L_\varphi(\mathrm{x};t)=i\,\mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t),\varphi(t))\,[H,\hat{\varphi}(\mathrm{x})] \tag{4.20}$$

и «источники» $\eta_\alpha(\mathrm{x};t)$, $\eta_\varphi(\mathrm{x};t)$ определяются формулами

$$\eta_\alpha(\mathrm{x};t)=i\,\mathrm{Sp}\,w\,[\widetilde{V}(\xi(t)),\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})]+i\,\mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,[H,\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})],$$
$$\eta_\varphi(\mathrm{x};t)=i\,\mathrm{Sp}\,w\,[\widetilde{V}(\xi(t)),\hat{\varphi}(\mathrm{x})]+i\,\mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,[H,\hat{\varphi}(\mathrm{x})], \tag{4.21}$$

($\eta_\alpha(\mathrm{x};t)\equiv\eta_\alpha(\mathrm{x};\xi(t),\dot{\xi}(t),\ldots)$, $\eta_\varphi(\mathrm{x};t)\equiv\eta_\varphi(\mathrm{x};\xi(t),\dot{\xi}(t),\ldots)$ — неизвестные линейные функционалы $\xi(t),\dot{\xi}(t),\ldots$).

Учитывая, (4.12—14), (4.18), имеем

$$\mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,\hat{\zeta}_\alpha(\mathrm{x})=0,\quad \mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,\hat{\varphi}(\mathrm{x})=0. \tag{4.22}$$

Из уравнения (4.5) с учетом (4.19) и разложения (4.14) получим

$$i\int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha(\mathrm{x})\,(L_\alpha(\mathrm{x};t)+\eta_\alpha(\mathrm{x};t))+\hat{\sigma}_\varphi(\mathrm{x})\,(L_\varphi(\mathrm{x};t)+\eta_\varphi(\mathrm{x};t))\}+$$
$$+i\frac{\partial\rho(\xi(t))}{\partial t}=[H,\sigma'(\zeta'(t),\varphi'(t))]+[H,\rho(\xi(t))]+[\widetilde{V}(\xi(t)),w]. \tag{4.23}$$

Это уравнение, используя формулу (3.3), можно переписать в виде

$$i\int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha(\mathrm{x})\,\eta_\alpha(\mathrm{x};t)+\hat{\sigma}_\varphi(\mathrm{x})\,\eta_\varphi(\mathrm{x};t)\}+i\frac{\partial\rho(\xi(t))}{\partial t}=$$
$$=[H,\rho(\xi(t))]+[\widetilde{V}(\xi(t)),w]. \tag{4.24}$$

При $\tau\to\infty$, согласно (3.1), имеет место формула

$$e^{-iH\tau}\rho(\xi(t))\,e^{iH\tau}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\sigma'(\underset{\sim}{\zeta}(\tau;t),\underset{\sim}{\varphi}(\tau;t))=e^{-iH\tau}\sigma'(\underset{\sim}{\zeta}(0;t),\underset{\sim}{\varphi}(0;t))\,e^{iH\tau},$$
$$\sigma'(\underset{\sim}{\zeta}(0;t),\underset{\sim}{\varphi}(0;t))=\int d^3x\,\{\hat{\sigma}_\alpha(\mathrm{x})\,\underset{\sim}{\zeta}_\alpha(\mathrm{x},0;t)+\hat{\sigma}_\varphi(\mathrm{x})\,\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x},0;t)\},$$

так как эволюция по τ происходит с гамильтонианом H, не содержащим внешнего поля (параметры $\underset{\sim}{\zeta}_\alpha(\mathrm{x},\tau;t)$, $\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x},\tau;t)$ удовлетворяют по переменным x, τ уравнениям линеаризованной гидродинамики с начальными условиями $\underset{\sim}{\zeta}_\alpha(\mathrm{x},0;t)\equiv\underset{\sim}{\zeta}_\alpha(\mathrm{x};t)$, $\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x},0;t)=\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x};t)$, которые являются линейными функционалами $\xi(\mathrm{x},t)$, $\dot{\xi}(\mathrm{x},t)$ $\ddot{\xi}(\mathrm{x},t),\ldots$, т. е. $\underset{\sim}{\zeta}_\alpha(\mathrm{x};t)=$ $=\underset{\sim}{\zeta}_\alpha(\mathrm{x};\xi(t),\dot{\xi}(t),\ldots)$, $\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x};t)=\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x};\xi(t),\dot{\xi}(t),\ldots)$, t — параметр). С учетом этого предельного соотношения получим из (4.24)

$$\rho(\xi(t))=\sigma'(\underset{\sim}{\zeta}(\mathrm{x}';t),\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x}';t))-\int_0^\infty d\tau\,e^{-iH\tau}\Big\{i\,[H,\sigma'(\underset{\sim}{\zeta}(\mathrm{x}';t),\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x}';t))]+$$
$$+i\,[\widetilde{V}(\xi(t)),w]+\dot{\rho}(\xi(t))+$$
$$+\int d^3x\,(\hat{\sigma}_\alpha(\mathrm{x})\,\eta_\alpha(\mathrm{x};t)+\hat{\sigma}_\varphi(\mathrm{x})\,\eta_\varphi(\mathrm{x};t))\Big\}\,e^{iH\tau}. \tag{4.25}$$

Параметры $\underset{\sim}{\zeta}_\alpha(\mathrm{x};t)$, $\underset{\sim}{\varphi}(\mathrm{x};t)$ определяются из уравнений (4.22). К уравнению (4.25) может быть применена стандартная итерационная процедура по пространственным и временным производным поля $\xi(\mathrm{x},t)$.

Для нахождения «источников» в теории возмущений по градиентам внешнего поля $\xi(\mathrm{x},t)$ нам необходимо найти статистический оператор $\rho(\xi(t))$ также в теории возмущений по неоднородностям внешнего поля. Для этого согласно уравнению (4.25) нужно знать разложение статистического оператора $\sigma'(\underset{\sim}{\zeta}(\mathbf{x};\, t),\ \underset{\sim}{\varphi}(\mathbf{x};\, t))$ в ряд по градиентам параметров сокращенного описания. В нулевом приближении имеем согласно (4.15)

$$\overset{(0)}{\sigma'}(\underset{\sim}{\zeta}(t),\ \underset{\sim}{\varphi}(t)) = \overset{(0)}{\underset{\sim}{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x},\, t)\int d^3x'\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}') + \overset{(0)}{\underset{\sim}{\varphi}}(\mathbf{x},\, t)\int d^3x'\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}'), \tag{4.26}$$

где $\overset{(0)}{\underset{\sim}{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x},\, t) \sim \xi(\mathbf{x},\, t)$, $\overset{(0)}{\underset{\sim}{\varphi}}(\mathbf{x},\, t) \sim \xi(\mathbf{x},\, t)$.

Для определения величин $\int d^3x'\hat{\sigma}_\alpha(x')$, $\int d^3x'\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}')$ нужно привлечь эргодическое соотношение (3.8). Пусть в этом соотношении статистический оператор ρ (такой, что $[\rho,\ \hat{\mathscr{P}}_k - (p_k + p_k')\hat{N}] = 0$) мало отличается от равновесного статистического оператора w, $\rho = w + \rho'$. Тогда так как $[w,\ \hat{P}_k] = 0$ (статистическому оператору w соответствует сверхтекучий импульс $\mathbf{p}$), то

$$[\rho',\ \hat{P}_k] = p_k'[w,\ \hat{N}]. \tag{4.27}$$

В нулевом приближении имеем, очевидно, $\chi = 0$ (величина $\mathbf{p}'$ первого порядка малости по отклонению от состояния равновесия), и, следовательно, соотношение (3.8) в линейном приближении приобретает вид

$$e^{-iHt}\rho' e^{iHt} \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\zeta_\alpha' + \frac{\partial w}{\partial p_k}p_k' + \frac{\partial w}{\partial \varphi}(\chi' + p_0' t), \tag{4.28}$$

где

$$\begin{gathered} \zeta_\alpha' = \operatorname{Sp}\rho'\hat{\zeta}_\alpha, \quad p_0' = \zeta_\alpha'\frac{\partial p_0}{\partial \zeta_\alpha} + \mathbf{p}'\frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{p}}, \\ \chi' = \operatorname{Sp}\rho'\hat{\varphi}(0) + \int_0^\infty d\tau\,(\operatorname{Sp}\rho'(\tau)\dot{\hat{\varphi}}(0) - p_0'). \end{gathered} \tag{4.29}$$

При варьировании соотношения (3.8) в качестве независимых переменных мы выбрали не величины Y_α, $\mathbf{p}$, χ, являющиеся функционалами ρ, а величины $\zeta_\alpha = \operatorname{Sp} w\,\hat{\zeta}_\alpha \equiv \zeta_\alpha(Y_\beta, \mathbf{p})$, $\mathbf{p}$, χ, так как $\operatorname{Sp}\rho\hat{\zeta}_\alpha = \operatorname{Sp} w\,\hat{\zeta}_\alpha$ в силу того, что ζ_α — плотности аддитивных интегралов движения. Кроме того, мы учли, что $p_0 = (Y_4 + Y\mathbf{p})/Y_0$ и использовали выражение (3.7) для фазы χ. Подчеркнем, что соотношение (4.28) справедливо для начальных статистических операторов, удовлетворяющих условию (4.27).

Обратимся теперь к формуле (4.14) при $\xi(\mathbf{x},\, t) = 0$. Выбирая начальный статистический оператор $\tilde{\rho}'(0)$ совпадающим со статистическим оператором ρ' в (4.28) и замечая, что в этом случае $\zeta_\alpha(\mathbf{x},\, t) = \zeta_\alpha'$, в силу законов сохранения, не зависят от $\mathbf{x}$ и t, а фаза $\varphi'(\mathbf{x},\, t) = \mathbf{p}'\mathbf{x} + p_0' t + \chi'$, получим

$$e^{-iHt}\rho' e^{iHt} \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \int d^3x\,[\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})\zeta_\alpha' + \hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x})(\mathbf{p}'\mathbf{x} + p_0' t + \chi')].$$

Сравнивая это выражение с (4.28), найдем, что

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha} = \int d^3x\,\sigma_\alpha(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \int d^3x\,\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial w}{\partial p_k} = \int d^3x\,x_k\hat{\sigma}_\varphi(\mathbf{x}). \tag{4.30}$$

Пусть теперь ρ' — достаточно произвольный статистический оператор. Тогда пренебрегая градиентами $\zeta_\alpha'(\mathbf{x},\, t)$, но учитывая градиенты фазы $\varphi'(\mathbf{x},\, t)$, среднее $\operatorname{Sp}\exp(-iHt)\rho'\exp(iHt)\hat{a}(\mathbf{x})$ при $t \gg \tau_r$, можно с учетом (4.30) представить в виде

$$\operatorname{Sp} e^{-iHt}\rho' e^{iHt}\hat{a}(\mathbf{x}) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \zeta_\alpha'(\mathbf{x},\, t)\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial \zeta_\alpha} + \varphi'(\mathbf{x},\, t)\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varphi'(\mathbf{x},\, t)}{\partial x_k}\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_k}, \tag{4.31}$$

$(\hat{a}(\mathbf{x}) \equiv \exp(-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x})\hat{a}(0)\exp(i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}))$. Это соотношение будет использовано в дальнейшем при нахождении низкочастотной асимптотики функций Грина.

С учетом формул (4.30) из (4.26) следует, что

$$\overset{(0)}{\sigma'}(\underset{\sim}{\zeta}(t), \underset{\sim}{\varphi}(t)) = \overset{(0)}{\underset{\sim}{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha} + \overset{(0)}{\underset{\sim}{\varphi}}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \varphi}. \tag{4.32}$$

Таким образом, учитывая (4.32), статистический оператор $\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))$ в нулевом приближении по градиентам внешнего поля имеет следующую структуру:

$$\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)) = \overset{(0)}{\underset{\sim}{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha} + \overset{(0)}{\underset{\sim}{\varphi}}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \int_0^\infty d\tau e^{-iH\tau}\left(i[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w] + \right.$$
$$\left. + i\left[H, \overset{(0)}{\underset{\sim}{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha} + \overset{(0)}{\underset{\sim}{\varphi}}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] + \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t) + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x}; t)\right)e^{iH\tau},$$

где $\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)) = \xi(\mathbf{x}, t)\int d^3x\hat{b}(\mathbf{x})$. Отсюда следует, что $[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)), \hat{P}_k] = 0$.

Тогда из соотношения (4.21), определяющего $\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t)$, $\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x}, t)$ в нулевом приближении по неоднородностям поля

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t) &= i\,\mathrm{Sp}\,w[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] + i\,\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))[H, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})], \\ \overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x}; t) &= i\,\mathrm{Sp}\,w[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), \hat{\varphi}(\mathbf{x})] + i\,\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))[H, \hat{\varphi}(\mathbf{x})], \end{aligned} \tag{4.33}$$

и того, что $[H, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = [\hat{P}_k, \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})]$, вытекает

$$\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t) = i\,\mathrm{Sp}\,w[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), \hat{\zeta}_\alpha(x)]. \tag{4.34}$$

Так как $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ являются операторами плотностей аддитивных интегралов движения и $\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = 0$, то, используя (4.34), получим $\overset{(0)}{\underset{\sim}{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\sigma'}(\underset{\sim}{\zeta}(t), \underset{\sim}{\varphi}(t))\hat{\underset{\sim}{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому $\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))$ имеет вид

$$\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)) = \overset{(0)}{\underset{\sim}{\varphi}}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \int_0^\infty d\tau e^{-iH\tau}\left(i[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t) + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x}; t)\right)e^{iH\tau}, \tag{4.35}$$

(мы учли, что $[H, \partial w/\partial\varphi] = 0$). Параметр $\overset{(0)}{\underset{\sim}{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ определяется из условия $\mathrm{Sp}\,\overset{(0)}{\rho}(\xi(t))\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$. Учитывая, что $[w, \hat{P}_k] = [w, H] = 0$, найдем согласно (4.34), (4.6)

$$\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t) = -i\xi(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{Sp}\,w[\hat{N}, \hat{b}(0)]\,Y_0\frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha}. \tag{4.36}$$

Для определения $\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x}; t)$ необходимо найти $[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)), H]$. Из (4.35) получим

$$[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)), H] = i\lim_{\tau\to\infty} e^{-iH\tau}\left(i[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w] + \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x}; t)\right)e^{iH\tau} - i\left\{i[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w] + \frac{\partial w}{\partial \zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x}; t) + \frac{\partial w}{\partial \varphi}\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x}; t)\right\}. \tag{4.37}$$

Так как $H=\mathscr{H}+p_0\hat{N}$ зависит от ζ_α, $\mathbf{p}$ и $[w, H]=0$, то

$$e^{-iH\tau}\frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}e^{iH\tau}=\frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}+\tau\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\frac{\partial w}{\partial\varphi}.$$

Поэтому, замечая, что $[H, \partial w/\partial\varphi]=0$, соотношение (4.37) перепишем в виде

$$[\overset{(0)}{\rho}(\xi(t)), H]=-\lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-iH\tau}[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w]\,e^{iH\tau}-\right.$$
$$\left.-i\tau\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t)\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)+[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w]$$

Отсюда следует, что вторая из формул (4.33) принимает вид

$$\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};t)=-i\lim_{\tau\to\infty}\left(\mathrm{Sp}\,e^{-iH\tau}[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w]\,e^{iH\tau}\hat{\varphi}(\mathbf{x})-i\tau\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t)\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\right).\tag{4.38}$$

Используя эргодическое соотношение (4.28), легко видеть, что

$$\lim_{\tau\to\infty}\left\{ie^{-iH\tau}[\overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t)), w]\,e^{iH\tau}+\tau\frac{\partial w}{\partial\varphi}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t)\frac{\partial p_0}{\partial\zeta_\alpha}\right\}=$$
$$=-\frac{\partial w}{\partial\zeta_\alpha}\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t)-\frac{\partial w}{\partial\varphi}\chi',$$

где χ' определяется формулой (4.29), в которой в качестве начального оператора ρ' выбран оператор $i[w, \overset{(0)}{\widetilde{V}}(\xi(t))]$. Таким образом, имеем

$$\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};t)=\chi'(\mathbf{x}, t).\tag{4.39}$$

Если $[\hat{N}, \hat{b}]=0$, то $\overset{(0)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t)=0$ (см. (4.36)). В этом случае выражение (4.38) для $\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};t)$ можно упростить. С этой целью снова воспользуемся эргодическим соотношением (4.28), в котором в качестве начального статистического оператора ρ' выбран $[w, \int d^3x(\psi^+(\mathbf{x})e^{i\mathbf{px}}-\psi(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{px}}]$. Так как этот оператор коммутирует с $\hat{P}_k$, то согласно (4.38), (4.29), (4.28), получим

$$\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};t)=\frac{1}{2\eta}\xi(\mathbf{x}, t)\frac{\partial\langle b\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\int d^3x'\,\mathrm{Sp}[w, \psi^+(\mathbf{x}')e^{i\mathbf{px}'}-\psi(\mathbf{x}')e^{-i\mathbf{px}'}]\,\hat{\zeta}_\alpha(0).$$

Учитывая, что $[w, H]=0$, $[w, \hat{P}_k]=0$, легко преобразовать $\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};t)$ к виду

$$\overset{(0)}{\eta}_\varphi(\mathbf{x};t)=-\xi(\mathbf{x}, t)\left(\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\zeta_\mu}p^\mu+\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\zeta_4}\right),\quad[\hat{N}, \hat{b}]=0\tag{4.40}$$

(здесь использованы релятивистские обозначения, см. (2.32)).

Так как в рассматриваемом случае ($[\hat{N}, \hat{b}]=0$) главное приближение для $\eta_\alpha(\mathbf{x};t)$ исчезает, то необходимо найти величины $\eta_\alpha(\mathbf{x};t)$ в первом приближении по градиентам внешнего поля. Используя формулы (4.6), (4.15), (4.21), (4.25), (4.30), а также эргодическое соотношение (4.28), в результате получим следующее выражение для «источников» $\overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t)$ (см. [24]):

$$\overset{(1)}{\eta}_\alpha(\mathbf{x};t)=-\frac{\partial\xi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\zeta_\beta}K_{l;\alpha\beta}+Y_0\frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_l}\bigg|_\zeta\right),\tag{4.41}$$

где

$$K_{l;\alpha\beta} \equiv -i \int d^3 x x_l \operatorname{Sp} w [\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\zeta}_\beta(0)] = K_{l;\beta\alpha}.$$

Нетрудно показать, что с учетом (2.2), (2.28) можно представить элементы матрицы $K_{l;\alpha\beta}$ в следующем компактном виде:

$$K_{l;\mu\beta} = -Y_0 \frac{\partial \zeta_{\mu l}}{\partial Y_\beta} - Y_l \frac{\partial \zeta_\mu}{\partial Y_\beta} + p^\mu \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial p_l} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{4.42}$$

$$K_{l;4\beta} = \delta_{\beta 0}\zeta_{4l} + \delta_{\beta l}\zeta_4.$$

Обратим внимание, что слагаемые в источниках $\eta_\alpha(\mathbf{x}; t)$ пропорциональные первым производным по времени от внешнего поля $\partial\xi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ обращаются в нуль.

Таким образом, формулы (4.36), (4.39)—(4.41) дают в главном приближении выражения для «источников» $\eta_\alpha(\mathbf{x}; t)$, $\eta_\varphi(\mathbf{x}; t)$ в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости в случае медленно изменяющегося в пространстве и времени внешнего поля $\xi(\mathbf{x}, t)$.

4.3. Низкочастотная асимптотика функций Грина. В этом разделе мы найдем конкретную структуру функций Грина $G^{\pm}_{ab}(\mathbf{k}, \omega)$ в области малых волновых векторов $\mathbf{k}$ ($kl \ll 1$; l — длина свободного пробега) и частот ω ($\omega\tau_r \ll 1$; τ_r — время релаксации). Будем использовать с этой целью уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости в форме (3.20). При наличии «источников» $\eta_\alpha(\mathbf{x}; t)$, $\eta_\varphi(\mathbf{x}; t)$ эти уравнения имеют вид [24]

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^\nu} = \eta^\mu(\mathbf{x}; t), \qquad \frac{\partial j^\nu(\mathbf{x}, t)}{\partial x^\nu} = \eta^4(\mathbf{x}; t),$$

$$\frac{\partial p^\mu(\mathbf{x}, t)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial p^\nu(\mathbf{x}, t)}{\partial x_\mu} = \eta^{\mu\nu}(\mathbf{x}; t). \tag{4.43}$$

Последнее уравнение в (4.43) есть следствие равенств

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}, t) + \eta_\varphi(\mathbf{x}; t), \quad p_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}.$$

Откуда видно, что

$$\eta_{\mu\nu}(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{\partial \eta_\varphi(\mathbf{x}; t)}{\partial x_\lambda}(g_{\mu 0}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu 0}) \quad (\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3). \tag{4.44}$$

Считая «источники» малыми, линеаризуем уравнения (4.43) около состояния равновесия, причем в качестве параметров, описывающих отклонение от равновесного состояния, выберем величины $\delta Y_\lambda(\mathbf{x}, t) = Y_\lambda(\mathbf{x}, t) - \overline{Y}_\lambda$ (отклонения термодинамических сил $Y_\lambda(\mathbf{x}, t)$ от равновесных значений $\overline{Y}_\lambda$), величину $\delta p_0(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}, t) - \overline{p}_0$ и фазу $\delta\varphi(\mathbf{x}, t)$ (фаза $\overline{\varphi}$ в состоянии равновесия предполагается равной нулю). Тогда линеаризованные около состояния равновесия с $\overline{\varphi} = 0$ уравнения гидродинамики (4.43) для фурье-компонент соответствующих величин имеют вид

$$ik_\nu \left(\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(k) + \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda(k) \right) = \eta^\mu(k),$$

$$ik_\nu \left(\frac{\partial j^\nu}{\partial Y_\lambda}\delta Y_\lambda(k) + \frac{\partial j^\nu}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda(k) \right) = \eta^4(k), \tag{4.45}$$

$$k_\nu \delta p_\mu(k) - k_\mu \delta p_\nu(k) = \eta_\varphi(k)(k_\nu g_{\mu 0} - k_\mu g_{\nu 0}).$$

Решение последнего уравнения запишем в виде

$$\delta p_\nu(k) = ik_\nu \delta\varphi(k) + g_{\nu 0}\eta_\varphi(k). \qquad (4.46)$$

С учетом (4.46) найдем из (4.45), что

$$\begin{aligned} \delta Y_\nu(k) &= iD^{-1}_{\nu\mu}[\bar\eta^\mu(k) - p^\mu \bar\eta^4(k) - (kY)a^\mu \delta\varphi(k)], \\ \delta\varphi(k) &= -\frac{1}{\Delta}[\bar\eta^4(k)(1 - a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}p^\mu) + a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}\bar\eta^\mu(k)], \end{aligned} \qquad (4.47)$$

где

$$\bar\eta^\mu(k) \equiv \eta^\mu(k) + ik_\nu \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial p_0}\eta_\varphi(k), \quad \bar\eta^4(k) \equiv \eta^4(k) + ik_\nu \frac{\partial j^\nu}{\partial p_0}\eta_\varphi(k), \qquad (4.48)$$

$$\Delta(k) \equiv b - (kY)a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}a^\mu, \qquad (4.49)$$

$$D^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 (kY)\omega'}{\partial Y_\mu \partial Y_\nu}, \quad a^\lambda \equiv k_\nu \frac{\partial^2\omega'}{\partial p_\nu \partial Y_\lambda}, \quad b \equiv k_\nu k_\mu \frac{\partial^2\omega'}{\partial p_\nu \partial p_\mu}. \qquad (4.50)$$

Рассмотрим теперь вопрос о конкретной структуре «источников» η^μ, η^4, $\eta^{\mu\nu}$. Их явный вид, как мы видели в разделе 4.2, существенно зависит от того, коммутирует ли оператор $\hat b(x)$, входящий в формулу (4.6), с оператором числа частиц $\hat N$ или нет. Рассмотрим сначала случай, когда $[\hat N, \hat b] \neq 0$. Фурье-компоненты «источников» $\overset{(0)}{\eta^\mu}(k)$, $\overset{(0)}{\eta^4}(k)$ определяются согласно (4.36) формулами

$$\overset{(0)}{\eta^\mu}(k) = \xi(k)\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial\varphi}p^\mu, \quad \overset{(0)}{\eta^4}(k) = \xi(k)\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial\varphi}. \qquad (4.51)$$

Так как в «источниках» $\bar\eta^\mu(k)$, $\bar\eta^4(k)$ величина $\eta_\varphi(k)$ входит вместе с множителем k_ν, то в главном приближении по k имеем

$$\overset{(0)}{\bar\eta^\mu}(k) = \overset{(0)}{\eta^\mu}(k), \quad \overset{(0)}{\bar\eta^4}(k) = \overset{(0)}{\eta^4}(k). \qquad (4.52)$$

Если $[\hat N, \hat b] = 0$, то «источники» η^μ и η^4 обращаются в нуль в главном приближении по k и мы поэтому должны найти их в следующем приближении по k. Согласно формулам (4.40), (4.41) «источники» $\overset{(1)}{\eta^\mu}(k)$, $\overset{(1)}{\eta^4}(k)$, $\overset{(0)}{\eta_\varphi}(k)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\eta^\mu}(k) &= -ik_l\xi(k)\left(\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial\zeta_\beta}K_{l;\mu\beta} + p^\mu\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial p_l}\right), \\ \overset{(1)}{\eta^4}(k) &= -ik_l\xi(k)\left(\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial\zeta_\beta}K_{l;4\beta} + \frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial p_l}\right), \\ \overset{(0)}{\eta_\varphi}(k) &= -\xi(k)\left(\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial\zeta^\nu}p^\nu + \frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial\zeta^4}\right) = -\xi(k)\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial\zeta^\alpha}p^\alpha, \end{aligned} \qquad (4.53)$$

где $p^\alpha \equiv (p^\mu, 1)$, $(\alpha = \mu, 4)$. Поэтому, используя (4.48), (4.53), (4.42) и переходя от производных $\partial\langle\hat b\rangle/\partial\zeta_\beta$, $\partial\langle\hat b\rangle/\partial\mathbf{p}$ к производным $\partial\langle\hat b\rangle/\partial Y_\mu$, $\partial\langle\hat b\rangle/\partial p_\mu$, получим следующие выражения для источников» $\overset{(1)}{\bar\eta^\mu}(k)$, $\overset{(1)}{\bar\eta^4}(k)$:

$$\overset{(1)}{\bar\eta^\mu}(k) = i\xi(k)\left(\frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial Y_\nu}A^\mu_\nu + \frac{\partial\langle\hat b\rangle}{\partial p_\nu}B^\mu_\nu\right),$$

$$\overset{(1)}{\eta}{}^4(k) = i\xi(k)\left(\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}A_\nu + \frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}B_\nu\right), \tag{4.54}$$

$$\overset{(0)}{\eta}_\varphi(k) = -\xi(k)\,p^\beta\left(\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}\frac{\partial Y_\nu}{\partial\zeta^\beta}\bigg|_{\mathrm{p}} + \delta_{\nu 0}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu}\frac{\partial Y_\alpha}{\partial\zeta^\beta}\bigg|_{\mathrm{p}}\frac{p^\alpha}{Y_0}\right),$$

где

$$A_\mu = Y_0 a^\lambda\frac{\partial Y_\lambda}{\partial\zeta^\mu}\bigg|_{\mathrm{p}}, \quad B_\mu = -k_\mu + \delta_{\mu 0}a^\lambda\frac{\partial Y_\lambda}{\partial\zeta^\alpha}\bigg|_{\mathrm{p}} p^\alpha \quad (\alpha = \nu, 4),$$

$$A^\mu_\nu = (kY)\,g^\mu_\nu + Y_0\frac{\partial Y_\lambda}{\partial\zeta^\nu}\bigg|_{\mathrm{p}}(p^\mu a^\lambda - D^{\mu\lambda}) \quad (\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3),$$

$$B^\mu_\nu = -k_\nu p^\mu + \delta_{\nu 0}\frac{\partial Y_\lambda}{\partial\zeta^\alpha}\bigg|_{\mathrm{p}} p^\alpha(p^\mu a^\lambda - D^{\mu\lambda}).$$

Опишем схему нахождения низкочастотных асимптотик функций Грина $G^+_{ab}(k)$. Согласно формуле (4.9) фурье-компонента величины $a_\xi(\mathbf{x}, t)$ связана с функцией Грина соотношением

$$a_\xi(\mathbf{k}, \omega) = \xi(\mathbf{k}, \omega)\,G^+_{ab}(\mathbf{k}, \omega). \tag{4.55}$$

С другой стороны, величину $a_\xi(\mathbf{x}, t)$ в области больших t $(t \gg \tau_r)$ можно, учитывая (4.8), (4.14), представить в виде

$$a_\xi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Sp}\,\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))\,\hat{a}(\mathbf{x}) + \mathrm{Sp}\,\rho(\xi(t))\,\hat{a}(\mathbf{x}), \tag{4.56}$$

где оператор $\sigma'(\zeta'(t), \varphi'(t))$ определяется формулой (4.15). Так как $\mathrm{Sp}\,\sigma_\alpha(\mathbf{x}')\hat{a}(\mathbf{x})$, $\mathrm{Sp}\,\sigma_\varphi(\mathbf{x}')\hat{a}(\mathbf{x})$ зависят от разности $\mathbf{x}-\mathbf{x}'$, то фурье-компонента $a_\xi(\mathbf{k}, \omega)$ величины $a_\xi(\mathbf{x}, t)$ содержит члены, происходящие из первого слагаемого в (4.56), пропорциональные $\zeta_\alpha'(\mathbf{k}, \omega) \equiv \delta\zeta_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$, $\varphi'(\mathbf{k}, \omega) \equiv \delta\varphi(\mathbf{k}, \omega)$. Из уравнений сверхтекучей гидродинамики с «источниками» $\eta(\mathbf{k}, \omega)$ (которые пропорциональны $\xi(\mathbf{k}, \omega)$) следует, что в области малых $\mathbf{k}$ и ω $(k \ll l^{-1}, \omega \ll \tau_r^{-1})$ величины $\delta\zeta_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$, $\delta\varphi(\mathbf{k}, \omega)$ сингулярны (см. (4.47)), а фурье-компонента второго слагаемого в формуле (4.56) согласно предыдущему разделу 4.2 является регулярной. Учитывая сказанное, фурье-компонента величины $a_\xi(\mathbf{x}, t)$ в области малых $\mathbf{k}$ и ω согласно (4.31) может быть представлена в главном приближении в виде

$$a_\xi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\delta\zeta_\alpha(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_l}ik_l\delta\varphi(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi}\delta\varphi(\mathbf{k}, \omega) \tag{4.57}$$

или

$$a_\xi(k) = \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}\delta Y_\mu(k) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_\mu}\delta p_\mu(k) + \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi}\delta\varphi(k). \tag{4.58}$$

Используя формулы (4.46—47), полученные из уравнений линеаризованной гидродинамики, а также выражения для «источников» (4.51), (4.52) (при $[\hat{N}, \hat{b}] \neq 0$) и (4.54) (при $[\hat{N}, \hat{b}] = 0$), найдем величины $\delta Y_\mu(k)$, $\delta p_\mu(k)$, $\delta\varphi(k)$ (они будут пропорциональны $\xi(k)$). Сравнивая затем формулы (4.58) с (4.55), получим [24] окончательное выражение для фурье-компонент функций Грина $G^+_{ab}(k)$ в области малых k

(в случае произвольных квазилокальных операторов $\hat{a}$ и $\hat{b}$):

$$G^+_{ab}(k) = \frac{1}{\Delta}\left\{\left[-\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi} - \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_\mu} ik_\mu + i\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}(kY)\,a^\lambda D^{-1}_{\lambda\mu}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\varphi} - \frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_\nu} ik_\nu + i\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}(kY)\,a^{\lambda'}D^{-1}_{\lambda'\nu}\right] - \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial Y_\mu}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial Y_\nu}\Delta(kY)\,D^{-1}_{\mu\nu}\right\}. \tag{4.59}$$

Мы при этом пренебрегли вкладом неполюсного слагаемого в $G^+_{ab}(k)$, так как слагаемыми такого типа мы уже пренебрегли, отбросив в $a_\xi(k)$ члены типа $\mathrm{Sp}\,\rho(\xi)\hat{a}$.

Если потенциал ω соответствует релятивистски инвариантной системе (см. (3.19)), то p_ν, Y_ν представляют собой 4-векторы, а $D_{\mu\nu}$ — 4-тензор. В этом случае формула (4.59) дает релятивистски ковариантное представление низкочастотной асимптотики функции Грина (см. (4.10)).

В некоторых случаях удобно низкочастотную асимптотику функций Грина представить в виде билинейной комбинации производных $\partial\langle\hat{a}\rangle/\partial\zeta_\alpha$, $\partial\langle\hat{a}\rangle/\partial p_l$, $\partial\langle\hat{a}\rangle/\partial\varphi$ и производных $\partial\langle\hat{b}\rangle/\partial\zeta_\alpha$, $\partial\langle\hat{b}\rangle/\partial p_l$, $\partial\langle\hat{b}\rangle/\partial\varphi$. Такое представление удобно для нерелятивистских обобщенных сверхтекучих систем. Исходя из формулы (4.59), представим полюсную часть низкочастотной асимптотики функции Грина $G^+_{ab}(\mathbf{k}, \omega)$ в виде [21]

$$G^+_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\zeta_\beta}G^+_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega) -$$
$$-\frac{i}{\eta}\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\zeta_\alpha}\left(\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\varphi} - ik_l\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_l}\right)G^+_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k}, \omega) -$$
$$-\frac{i}{\eta}\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\zeta_\beta}\left(\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi} + ik_l\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_l}\right)G^+_{\psi\zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega) -$$
$$-\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial\varphi} + ik_l\frac{\partial\langle\hat{a}\rangle}{\partial p_l}\right)\left(\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial\varphi} - ik_i\frac{\partial\langle\hat{b}\rangle}{\partial p_l}\right)G^+_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega). \tag{4.60}$$

Фигурирующие здесь функции Грина $G^+_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^+_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^+_{\psi\zeta_\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^+_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ определяются формулами

$$G^+_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{Z_\alpha Z_\beta}{\Delta} - (kY)\frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\mu}D^{-1}_{\mu\nu}\frac{\partial\zeta_\beta}{\partial Y_\nu},$$

$$G^+_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\eta}{\Delta}Z_\alpha, \quad G^+_{\psi\zeta_\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\eta}{\Delta}Z_\alpha,$$

$$G^+_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\eta^2}{\Delta}, \quad \eta = |\mathrm{Sp}\,w\psi|,$$

где

$$Z_\alpha = \frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial p_\lambda}k_\lambda - \frac{\partial\zeta_\alpha}{\partial Y_\lambda}(kY)\,a^\mu D^{-1}_{\mu\lambda}.$$

Величина Δ (см. (4.49)) определяет полюса функций Грина (ветви колебаний) сверхтекучей жидкости. Подчеркнем, что полюсов, связанных с $\det D = 0$, нет. Это связано с тем, что вблизи особенности $\det D = 0$ величина $1/\Delta$ ведет себя, как $\det D$, $1/\Delta \sim \det D$. Поэтому структура асимптотики функции Грина (4.59) не имеет полюсов, связанных с особенностями матрицы D. Можно показать, что особенности, связанные с обращением в нуль $\det D$, сокращаются.

Нетрудно показать, что дисперсионное уравнение $\Delta(\mathbf{k}, \omega)=0$ при $\mathbf{Y}=0$, $\mathbf{p}=0$ с учетом определений (2.28), (2.29) принимает следующий вид:

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \omega^4 - \omega^2 k^2 (B + \rho_c C) - k^4 \frac{s\rho_s}{Y_0\rho_n} \frac{A}{\overset{*}{m}{}^2} = 0, \tag{4.61}$$

где

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{\partial P}{\partial \zeta_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_4} \frac{Y_4}{Y_0} - \frac{\partial P}{\partial \zeta_4} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \frac{Y_4}{Y_0}, \\ B &\equiv \frac{1}{\overset{*}{m}} \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta_4} - \frac{Y_4}{Y_0} \frac{\partial P}{\partial \zeta_0} \right) + \frac{s}{Y_0\rho_n} \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta_0} + \frac{\rho_s}{\overset{*}{m}} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \frac{Y_4}{Y_0} \right), \\ C &\equiv \frac{1}{\overset{*}{m}{}^2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_4} \frac{Y_4}{Y_0} - \frac{Y_4}{Y_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \frac{Y_4}{Y_0} + \overset{*}{m} \frac{s}{Y_0\rho_n} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \frac{Y_4}{Y_0} \right) \end{aligned} \tag{4.62}$$

(здесь $\rho_c \equiv \rho - \rho_n - \rho_s$).

Для галилеево инвариантных систем согласно (3.16) $\rho_c=0$, $\overset{*}{m} = m$, а величины A, B принимают вид

$$A = -m^2 \frac{\sigma}{\rho c_V} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T, \quad B = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_\sigma + \frac{\rho_s T \sigma^2}{\rho_n c_V} \tag{4.63}$$

($P=-\omega/Y_0 \equiv -\omega'$ — давление; $\sigma = s/\rho = Y_0[(P+\varepsilon+(\rho Y_4/Y_0))]/\rho$ — энтропия единицы массы; c_V — теплоемкость единицы массы при постоянном объеме; $Y_0^{-1} \equiv T$ — температура). В этом случае дисперсионное уравнение (4.61) приводит к хорошо известным выражениям для скоростей $u_{1,2}$ первого и второго звука:

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_\sigma + \frac{T\sigma^2 \rho_s}{c_V \rho_n} \right] \pm \\ \pm \left\{ \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_\sigma + \frac{T\sigma^2 \rho_s}{c_V \rho_n} \right]^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \frac{T\sigma^2 \rho_s}{c_V \rho_n} \right\}^{1/2}$$

(индексу 1 соответствует знак «+», а индексу 2—знак «—»).

В заключение этого раздела выпишем асимптотику функции Грина $G^{\pm}_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ при $\omega\tau_r \ll 1$, $kl \ll 1$ (асимптотики функций Грина $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ приведены в работе [24]) в случае, когда $\mathbf{Y}=0$, $\mathbf{p}=0$ (мы при этом не будем предполагать, что сверхтекучая система обладает свойством галилеевой или релятивистской инвариантности):

$$G^{\pm}_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\eta^2}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)} \left[\omega^2 \left(\frac{Y_4}{Y_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \frac{Y_4}{Y_0} - \frac{\partial}{\partial \zeta_4} \frac{Y_4}{Y_0} \right) + k^2 \frac{s}{Y_0 \rho_n} A \right]$$

(величины A, $\Delta(\mathbf{k}, \omega)$ определяются формулами (4.62), (4.61)).

Если сверхтекучая система обладает свойством галилеевой инвариантности, то найденные нами асимптотики функций Грина $G^{\pm}_{\psi\psi}(\mathbf{k}, \omega)$, $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ с учетом (4.63) переходят при $\mathbf{Y}=0$, $\mathbf{p}=0$ соответственно в результаты Н. Н. Боголюбова [4] и Галасевича [33], а $G^{\pm}_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ в результаты Хоэнберга и Мартина [34].

5. Термодинамика и гидродинамика сверхтекучих фаз ^{3}He. В этом разделе мы кратко рассмотрим сверхтекучие системы, в которых наряду с нарушением фазовой инвариантности также нарушена вращательная симметрия в координатном и спиновом пространствах (примерами таких систем являются A и B фазы сверхтекучего ^{3}He). В случае ферми-систем оператор $\hat{f}$ в гиббсовской экспоненте имеет структуру (см. (2.4))

$$\hat{f} = \int d^3x \, (\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})\, g_{\alpha k}(\mathbf{x}, t) + \text{э. с.}) \quad (\alpha, k = 1, 2, 3),$$
$$\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})\, \sigma_2\sigma_\alpha \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_k}\, \sigma_2\sigma_\alpha\psi(\mathbf{x}); \tag{5.1}$$

здесь $\hat{\Delta}_{\alpha k}$ — оператор параметра порядка (спиновый индекс оператора $\hat{\Delta}$ будем обозначать греческими буквами, а орбитальный — латинскими), σ_α — матрицы Паули, $g_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)$ — некоторая функция координат и времени, которая характеризует равновесное состояние системы. Коммутационные соотношения оператора параметра порядка с интегралами движения $\hat{N}$, $\hat{\mathscr{P}}_i$, а также с операторами спина $\hat{S}_\beta$ и орбитального момента системы $\hat{\mathscr{L}}_i = \int d^3x\varepsilon_{ikl}x_k\hat{\pi}_l(\mathbf{x})$ имеют вид

$$[\hat{N}, \hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})] = -2\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x}), \quad [\hat{\mathscr{P}}_i, \hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})] = i\frac{\partial\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$
$$[\hat{S}_\beta, \hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}\hat{\Delta}_{\gamma k}(\mathbf{x}), \tag{5.2}$$
$$[\hat{\mathscr{L}}_i, \hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})] = i\varepsilon_{ijl}x_j\frac{\partial\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + i\varepsilon_{ikj}\hat{\Delta}_{\alpha j}(\mathbf{x}).$$

Для установления в явном виде зависимости функции $g_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)$ от $\mathbf{x}$ и t по-прежнему считаем, что состояние статистического равновесия является пространственно-однородным в смысле (2.6). Ввиду наличия слабых релятивистских взаимодействий частиц рассматриваемой системы (которыми мы пренебрегаем в гиббсовской экспоненте), оператор спина не является интегралом движения и, следовательно, в распределении Гиббса (2.3) отсутствует термодинамическая сила, сопряженная этому оператору. Поэтому условие стационарности в рассматриваемом случае по-прежнему имеет вид (2.8). Из соотношений (2.6), (2.8), (5.1) следует, что

$$g_{\alpha k}(\mathbf{x}, t) = e^{-i2\varphi(\mathbf{x},t)}g_{\alpha k}, \tag{5.3}$$

где $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}\mathbf{x} + p_0 t$, $p_0 = (Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p})Y_0^{-1}$, $g_{\alpha k} \equiv \text{const}$.

Дальнейшая конкретизация сверхтекучего состояния (нахождение структуры величины $g_{\alpha k}$) связана с формулировкой свойств симметрии оператора $\hat{f}$ по отношению к вращениям в координатном и спиновом пространствах. Так как оператор $\hat{f}$ явно содержит сверхтекучий импульс $\mathbf{p}$, то, как мы видели, удобно рассматривать оператор $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\vec{\mathscr{P}}} - \mathbf{p}\hat{N}$ как оператор трансляций. По аналогичным соображениям в качестве оператора поворотов удобно рассматривать не оператор углового момента $\hat{\mathscr{L}}_i$, а оператор $\hat{L}_i \equiv \hat{\mathscr{L}}_i - i\varepsilon_{ikl}p_k\partial/\partial p_l$, действующий как в гильбертовом пространстве, так и в пространстве функций сверхтекучего импульса $\mathbf{p}$. Операторы $\hat{P}_i$ и $\hat{L}_i$ удовлетворяют соотношениям коммутации характерным для генераторов групп трансляций и трехмерных вращений координатного пространства:

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_k] = 0, \quad [\hat{L}_i, \hat{P}_k] = i\varepsilon_{ikl}\hat{P}_l, \quad [\hat{L}_i, \hat{L}_k] = i\varepsilon_{ikl}\hat{L}_l. \tag{5.4}$$

В случае A-фазы сверхтекучего ^{3}He условия симметрии оператора $\hat{f}$ (а следовательно, и распределения Гиббса), определяются коммутационными соотношениями типа

$$\left[\hat{f}, \mathbf{l}\hat{\mathbf{L}} - \frac{1}{2}m_l\hat{N}\right] = 0, \quad \left[\hat{f}, \mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}m_s\hat{N}\right] = 0, \tag{5.5}$$

где $\mathbf{l}$ и $\mathbf{d}$ — единичные векторы, характеризующие состояние равновесия (для ^{3}He=A: $m_l=1$, $m_s=0$). Разъясним физический смысл этих условий симметрии. С этой целью введем «волновую функцию» куперовской пары частиц системы:

$$\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \operatorname{Sp} w \psi_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1)\psi_{\alpha_2}(\mathbf{x}_2).$$

Предположим, что $\mathbf{p}=0$, $\mathbf{Y}=0$. Тогда, замечая, что в этом случае $[w, \mathbf{l}\vec{\hat{\mathscr{L}}} - (\hat{N}m_l/2)] = [w, \mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \hat{N}m_s/2] = 0$, имеем

$$\operatorname{Sp}\left[w, \mathbf{l}\hat{\mathscr{L}} - \frac{m_l}{2}\hat{N}\right]\psi_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1)\psi_{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) = 0,$$

$$\operatorname{Sp}\left[w, \mathbf{d}\hat{\mathbf{S}} - \frac{m_s}{2}\hat{N}\right]\psi_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1)\psi_{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) = 0.$$

Так как

$$[\hat{\mathscr{L}}_i, \psi_\alpha(\mathbf{x})] = -l_i\psi_\alpha(\mathbf{x}), \quad [\hat{S}_i, \psi_\alpha(\mathbf{x})] = -\frac{1}{2}(\sigma_i)_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x}), \tag{5.6}$$

то

$$\mathbf{l}(\hat{\mathbf{l}}^{(1)} + \hat{\mathbf{l}}^{(2)})\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = m_l\Psi_{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

$$\mathbf{d}(\hat{\mathbf{s}}^{(1)} + \hat{\mathbf{s}}^{(2)})\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = m_s\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

где $\hat{l}_i^{(a)} = -i\varepsilon_{ikl}x_k^{(a)}\nabla_l^{(a)}$, $\hat{s}_i^{(a)}$ ($a=1, 2$) — операторы момента количества движения и спина, действующие соответственно на первый и второй аргументы «волновой функции». Поэтому мы будем говорить, что состояние статистического равновесия, для которого выполняются соотношения (5.5), соответствует состоянию, в котором проекция на направление $\mathbf{l}$ момента количества движения куперовской пары равна m_l, а проекция спина куперовской пары на направление $\mathbf{d}$ равна m_s. Выбор оператора параметра порядка в виде вектора по спиновому и орбитальному индексам (см. (5.1)) соответствует тому, что спин и момент количества движения куперовской пары предполагаются равными 1.

Из соотношений (5.5), (5.1) следует, что

$$g_{\alpha k} = d_\alpha(m_s)\xi_k(m_l),$$

где

$$\begin{aligned} d_\alpha(m_s) &= d_\alpha^+, \quad m_s = -1, & \xi_k(m_l) &= \xi_k^+, \quad m_l = -1,\\ &= d_\alpha^-, \quad m_s = 1, & &= \xi_k^-, \quad m_l = 1,\\ &= d_\alpha, \quad m_s = 0, & &= l_k, \quad m_l = 0; \end{aligned}$$

здесь

$$\mathbf{d}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_1^s \pm i\Delta_2^s), \quad \xi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_1 \pm i\Delta_2)$$

и Δ_1, Δ_2 (Δ_1^s, Δ_2^s) — единичные вещественные взаимно ортогональные векторы, ортогональные вектору $\mathbf{l}(\mathbf{d})$. В случае ^{3}He-A: $g_{\alpha k} = d_\alpha\xi_k^-$.

Состояние равновесия ^{3}He-A описывается статистическим оператором $w(t)$ вида (2.3), в котором под $\hat{f}$ следует понимать следующее выражение:

$$\hat{f} = \int d^3x\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})\exp[-i2(\mathbf{px} + p_0t)]d_\alpha\xi_k^- + \text{э. с.} \equiv$$

$$\equiv \int d^3x\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})d_\alpha\xi_k^-(\mathbf{x}, t) + \text{э. с.}, \tag{5.7}$$

где $\xi_k^-(\mathbf{x}, t) = \xi_k^- \exp[-i2(\mathbf{px}+p_0 t)]$. Из явного вида оператора $w(t)$ и перестановочных соотношений (5.2) следует, что

$$e^{-i\hat{N}\varphi} w(Y_\alpha, \mathbf{p}, \xi^-, \xi^+, \mathbf{d}) e^{i\hat{N}\varphi} = w(Y_\alpha, \mathbf{p}, \xi^+ e^{-i2\varphi}, \xi^- e^{i2\varphi}, \mathbf{d}),$$

$$e^{-i\omega\hat{\mathbf{S}}} w(Y_\alpha, \mathbf{p}, \xi^+, \xi^-, \mathbf{d}) e^{i\omega\hat{\mathbf{S}}} = w(Y_\alpha, \mathbf{p}, \xi^+, \xi^-, \mathbf{d}(\omega))$$

(здесь $\mathbf{d}(\omega) = \mathbf{d}\exp\hat{\omega}$, $\omega_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_\gamma$) и поэтому потенциал ω и средние значения операторов $\hat{Q}$ инвариантных относительно спиновых вращений и фазовых преобразований ($[\hat{Q}, \hat{S}_i] = 0$, $[\hat{Q}, \hat{N}] = 0$) не зависят от φ и $\mathbf{d}$ и, следовательно, являются функциями Y_α, $\mathbf{p}$, l.

Симметрия ^{3}He-B определяется коммутационным соотношением

$$[\hat{f}, \hat{L}_i + R_{i\alpha}\hat{S}_\alpha] = 0,$$

где $R_{i\alpha}$ — матрица поворота ($R\tilde{R} = 1$), определяемая тремя параметрами, которые характеризуют состояние статистического равновесия ^{3}He-B. Поэтому, замечая, что

$$\left[\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}, \int d^3x\,(\hat{\Delta}_{ii}(\mathbf{x})\, e^{-i2(\mathbf{px}+p_0 t)} + \text{э. с.})\right] = 0,$$

и производя над этим соотношением унитарное преобразование, соответствующее повороту R в спиновом пространстве, легко найти, что $g_{\alpha k} = R_{\alpha k}\exp(i\overset{*}{\varphi})$, $(\overset{*}{\varphi} = \varphi)$. Таким образом, состояние равновесия ^{3}He-B описывается статистическим оператором $w(t)$ (2.3), в котором оператор $\hat{f}$ имеет вид

$$\hat{f} = \int d^3x\,(\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x})\, e^{-i2\varphi(\mathbf{x},t)} R_{\alpha k} + \text{э. с.}), \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{px} + p_0 t + \varphi$$

и потенциал ω, очевидно, не зависит от φ.

Остановимся теперь на нахождении равновесных средних операторов плотностей потоков $\langle\hat{\zeta}_{ak}\rangle$ в ^{3}He-A. Поступая так же, как и в разделе 2.3, легко видеть, что плотность тока $\zeta_{4k} \equiv j_k$ имеет вид (2.17)

$$j_k = \frac{1}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} - \frac{Y_k}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial Y_4}. \tag{5.8}$$

В разделе 2.3 мы видели, что при нахождении выражения для плотности потока импульса t_{ik} важную роль играют унитарные преобразования U_a, соответствующие группе произвольных аффинных преобразований $x_i \to x_i' = a_{ik}x_k$. Причина возможности выразить t_{ik} в случае сверхтекучего ^{4}He через термодинамический потенциал заключалась в том, что оператор $\hat{f}(V, \mathbf{p})$ при унитарных преобразованиях U_a преобразовывался сам через себя, а именно $U_a\hat{f}(V, \mathbf{p})U_a^+ = \hat{f}(V|\det a|, \mathbf{p}a^{-1}) \cdot |\det a|^{-1/2}$ В случае ^{3}He-A ситуация меняется и оператор $\hat{f}$ в гиббсовской экспоненте при унитарных преобразованиях U_a преобразуется сам через себя только при определенных ограничениях на матрицу аффинного преобразования a_{ik}. Выясним эти ограничения. Согласно (5.7)

$$U_a\hat{f}(V, \mathbf{p}, \xi^-)U_a^+ =$$
$$= \int\limits_{V|\det a|} d^3x\,(\hat{\Delta}_{\beta k}(\mathbf{x})\exp[-i2(p_l a_{lj}^{-1}x_j + p_0 t)]\, a_{ki}\xi_i^- d_\beta + \text{э. с.}).$$

Правую сторону этого равенства можно выразить в терминах $\hat{f}$ только в том случае, если

$$a_{ki}\xi_i^- = \alpha c_{ki}\xi_i^-, \tag{5.9}$$

где α — произвольный скалярный параметр и c — произвольная матрица пространственных вращений ($c\tilde{c}=1$). В этом случае

$$U_a\hat{f}(V, \mathbf{p}, \xi^-)U_a^+ = \alpha\hat{f}(V|\det a|, \tilde{a}^{-1}\mathbf{p}, c\xi^-). \tag{5.10}$$

Из соотношения (5.9) найдем, что наиболее общая структура матрицы a_{ki} имеет вид

$$a_{ki} = c_{kl}b_{li},$$

где $b_{li}\xi_i^- = \alpha\xi_l^-$. Отсюда получим, что $b_{ik}=\alpha\delta_{ik}+\beta l_i l_k$ (α, β — произвольные параметры). Таким образом, в отличие от полной группы однородных аффинных преобразований, которая характеризуется 9 вещественными параметрами, группа преобразований, оставляющих инвариантной структуру оператора $\hat{f}(V, \mathbf{p}, \xi^-)$ в смысле (5.10) характеризуется пятью произвольными параметрами. Поэтому, в отличие от случая сверхтекучего ^{4}He, информация, получаемая о плотности потока импульса t_{ik} исходя из свойств симметрии оператора $\hat{f}$, будет в случае ^{3}He-A более бедной. Повторяя выкладки раздела 2.3, получим следующее выражение для тензора натяжений t_{ik}:

$$t_{ik} = \frac{p_i}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial Y_i}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{1}{2Y_0}\left(\eta_i\frac{\partial\omega}{\partial\eta_k} - \eta_k\frac{\partial\omega}{\partial\eta_i}\right) + t'_{ik}, \tag{5.11}$$

(потенциал ω зависит только от отношения $\eta_i/|\eta| \equiv l_i$; вектор η_i введен для того, чтобы производные $\partial\omega/\partial\eta_i$ понимались в обычном смысле). Слагаемое t'_{ik} удовлетворяет только следующим соотношениям:

$$t'_{ik} = t'_{ki}, \quad t'_{ii} = 0, \quad l_i l_k t'_{ik} = 0 \tag{5.12}$$

(при выводе (5.11) мы учли, что оператор $\hat{f}$ определен, по существу, только с точностью до преобразования $\hat{f}\to\alpha\hat{f}$, так как согласно методу квазисредних $\nu\to 0$).

Заметим, что термодинамический потенциал ω является функцией инвариантов Y_0, Y_4, Y^2, $\mathbf{Y}^2$, $\mathbf{Yp}$, $(\mathbf{Yl})^2$, $(\mathbf{pl})^2(\mathbf{Yl})(\mathbf{pl})$, $\mathbf{p}^2$. Отсюда согласно (5.11) следует симметричность тензора натяжений $t_{ik}=t_{ki}$.

Воспользовавшись соотношением (2.26) и формулами (5.8), (5.11), легко найти выражение для плотности потока энергии. В результате получим формулу, объединяющую все потоки в состоянии статистического равновесия ^{3}He-A,

$$\begin{gathered} \zeta_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial\omega}{\partial p_k}\frac{\partial p_0}{\partial Y_\alpha} + \tilde{t}_{ik}Y_0\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\frac{Y_i}{Y_0}, \\ \tilde{t}_{ik} = -\frac{1}{2Y_0}\left(\eta_k\frac{\partial\omega}{\partial\eta_i} - \eta_i\frac{\partial\omega}{\partial\eta_k}\right) + t'_{ik}, \end{gathered} \tag{5.13}$$

где t'_{ik} удовлетворяет соотношениям (5.12). В феноменологической теории считается, что тензор t'_{ik} обращается в нуль, если потенциал ω не зависит от вектора $\mathbf{l}$ (в этом случае формула (5.13) переходит в (2.28)). В соответствии с этим тензор t'_{ik} может быть представлен в виде

$$t'_{ik} \equiv t'_{ik,l}\frac{\partial\omega}{\partial\eta_l}|\eta|, \quad t'_{ik,l} = t'_{ki,l}, \quad l_i l_k t'_{ik,l} = 0. \tag{5.14}$$

Учтем теперь инвариантность рассматриваемой системы по отношению к преобразованиям Галилея. В этом случае потенциал ω является функцией инвариантов Y'_0, Y'_4, $\mathbf{Y}'^2$, $(\mathbf{Y}'\mathbf{l})^2$ ($Y'_0 = Y_0$, $Y'_k = Y_k + (Y_0 p_k/m)$, $Y'_4 = Y_4 + \mathbf{Yp} + (Y_0\mathbf{p}^2/2m)$), (мы учли псевдовекторный характер величины

1) Вводя в рассмотрение сверхтекучую и нормальную плотности ρ_s, ρ_n, $\rho_n+\rho_s=\rho$ (см. (2.29)), а также величину ρ_0:

$$\rho_s \equiv \frac{2}{Y_0}\frac{\partial\omega}{\partial \mathbf{p}^2}m^2, \quad \rho_n \equiv -2Y_0\frac{\partial\omega}{\partial \mathbf{Y}'^2}, \quad \rho_0 = -2Y_0\frac{\partial\omega}{\partial(\mathbf{Y}'\mathbf{l})^2},$$

плотность потока числа частиц j_i и тензор натяжений t_{ik} представим в форме

$$j_i = (\rho_n)_{ik} v_{nk} + (\rho_s)_{ik} v_{sk},$$

$$(\rho_n)_{ik} \equiv \rho_n\delta_{ik} + \rho_0 l_i l_k, \quad (\rho_s)_{ik} = \rho_s\delta_{ik} - \rho_0 l_i l_k,$$

$$t_{ik} = P\delta_{ik} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \\ + \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_s)\,\mathbf{l}\,[l_i(\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_s)_k + l_k(\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_s)_i] + t'_{ik};$$

здесь $\mathbf{v}_n = -\mathbf{Y}/Y_0$, $\mathbf{v}_s = \mathbf{p}/m$.

Из формулы преобразования тензора натяжений t_{ik} при преобразованиях Галилея следует, что тензор t'_{ik} является функцией векторов Y', l. Поэтому тензор t'_{ik} строится из комбинаций δ_{ik}, $l_i l_k$, $Y'_i Y'_k$, $[\mathbf{Y}'\mathbf{l}]_i l_k + [\mathbf{Y}'\mathbf{l}]_k l_i$, $[\mathbf{Y}'\mathbf{l}]_i Y'_k + [Y'l]_k Y'_i$, $l_i Y'_k + l_k Y'_i$ и в силу (5.12) характеризуется в общем случае 4 скалярными функциями. Учитывая псевдовекторный характер величины $\mathbf{l}$ и полагая, что структура $t'_{ik}(Y'_l)$ не содержит особенностей при $\mathbf{Y}'\to 0$, а также, используя (5.14), получим в главном приближении по $\mathbf{Y}'$

$$t'_{ik} = \frac{\alpha}{2Y_0}\left(\eta_i\frac{\partial\omega}{\partial\eta_k} + \eta_k\frac{\partial\omega}{\partial\eta_i}\right),$$

где α — некоторая функция термодинамических параметров (коэффициенты при остальных трех скалярных функциях содержат более высокие степени $\mathbf{Y}'$).

Имея выражения для равновесных средних плотностей потоков $\zeta_{\alpha k}$ (5.13), можно написать уравнения баланса для ^{3}He-A в линейном по пространственным градиентам приближении (идеальная гидродинамика)

$$\dot\zeta_\alpha = -\nabla_k\zeta_{\alpha k}. \tag{5.15}$$

В этом приближении в выражениях для плотностей потоков $\zeta_{\alpha k}$, очевидно, можно пренебречь обычно выписываемыми [15] членами, которые связаны с пространственными градиентами как вектора $\mathbf{l}$, так и других термодинамических параметров; члены, содержащие градиенты этих величин, появляются в следующем приближении, которое приводит как к диссипативным членам, так и к модификации реактивных слагаемых в уравнениях гидродинамики ^{3}He-A.

Уравнения (5.15) не являются замкнутыми. Аналогично тому, как это делалось при рассмотрении сверхтекучего ^{4}He, их необходимо дополнить уравнениями движения для $\mathbf{p}$ и $\mathbf{l}$. Легко показать, что уравнение движения для сверхтекучего импульса $\mathbf{p}$ имеет в рассматриваемом приближении такой же вид, что и в случае ^{4}He (см. (3.12)):

$$\dot p_k = \nabla_k p_0, \quad p_0 = (Y_4 + \mathbf{Y}\mathbf{p})Y_0^{-1}. \tag{5.16}$$

Задачей микроскопической теории является также получение уравнения движения для вектора $\mathbf{l}$. Мы не приводим вывод этого уравнения, которое в линейном по градиентам приближении имеет вид (см. обзор [15])

$$\dot l_i = -(\mathbf{v}_n\nabla)\,l_i + (\delta_{ip} - l_i l_p)\,t'_{jk,p}\nabla_k v_{nj} - \frac{1}{2}[\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_n]_i - \frac{\eta}{Y_0}\left[\mathbf{l}\,\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{l}}\right]_i,$$

где $t'_{jk,p}$ определяется формулами (5.14) и η — некоторая функция термодинамических параметров. Это уравнение легко может быть получено из уравнений (5.15), (5.16), если потребовать адиабатичность течения сверхтекучей жидкости, т. е.

$$\dot{s} = -\nabla(s\mathbf{v}_n),$$

где плотность энтропии определяется формулой $s=-\omega+Y_\alpha\zeta_\alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики.— Препринт ОИЯИ Д-781.— Дубна, 1961; см.: Избранные труды по статистической физике.— М.: МГУ, 1979.— С. 193.
2. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.: Гостехиздат, 1946; то же: Избранные труды по статистической физике.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.— С. 5.
3. Боголюбов Н. Н.//Изв. АН СССР. Сер. физ., **1947**. Т. 11. С. 77.
4. Боголюбов Н. Н. К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости.— Препринт ОИЯИ Р-1395.— Дубна, 1963.
5. Ландау Л. Д.//ЖЭТФ. **1941**. Т. 11. С. 592.
6. Халатников И. М. Теория сверхтекучести.— М.: Наука, 1971.
7. Enz C. P.//Rev. Mod. Phys. **1974**. V. 46. P. 705.
8. Андреев А. Ф., Лифшиц И. М.//ЖЭТФ. **1969**. Т. 56. С. 2057.
9. Saslow W. M.//Phys. Rev. Ser. B. **1977**. V. 15. P. 173.
10. Leggett A. J. Rev. Mod. Phys. **1975**. V. 47. P. 331.
11] Сверхтекучесть гелия — 3: Сб. статей/Под ред. И. М. Халатникова.— М.: Мир, 1977.
12. Квантовые жидкости и кристаллы: Сб. статей/Под ред. А. С. Боровика-Романова.— М.: Мир, 1979.
13. Brinkman W. F., Cross M. C.//Progress in Low Temperature Physics/Ed. D. F. Brewer.— Amsterdam: North Holland, 1978.— V. VIIa. P. 105.
14. Минеев В. П.//УФН. **1983**. Т. 139. С. 303.
15. Воловик Г. Е.//УФН. **1984**. Т. 143. С. 73.
16. Hall H. E., Hook J. R.//Progress in Low Temperature Physics/Ed. D. F. Brewer.— Amsterdam: North Holland, 1986.— V. IX. P. 143.
17. Брусов П. Н., Попов В. Н. Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей.— М.: Наука, 1988.
18. Пелетминский С. В., Соколовский А. И.//ТМФ. **1974**. Т. 18. С. 121.
19. Ковалевский М. Ю., Лавриненко Н. М., Пелетминский С. В., Соколовский А. И.//ТМФ. **1982**. Т. 50. С. 450.
20. Ковалевский М. Ю., Лавриненко Н. М.//ФНТ. **1982**. Т. 8. С. 341.
[21] Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В., Тарасов А. Н. Низкочастотная асимптотика функций Грина сверхтекучих бозе-систем.— Препринт ХФТИ 83-18.— Харьков, 1983.
22. Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В., Тарасов А. Н., Фомин П. И. Метод квазисредних и релятивистская гидродинамика сверхтекучей жидкости.— Препринт ИТФ-83-151Р.— Киев, 1983.
23. Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В., Тарасов А. Н./Исследования по физике кинетических явлений.— Свердловск: УНЦ АН СССР, **1984**.— С. 102.
24. Боголюбов Н. Н. (мл.), Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В., Тарасов А. Н., Курбатов А. М.//Физ. ЭЧАЯ. **1985**. Т. 16. С. 875.
25. Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.//Проблемы теоретической физики.— Киев: Наукова думка, 1986.— С. 114.
26. Ковалевский М. Ю., Красников В. А., Пелетминский С. В.//ДАН СССР. **1988**. Т. 303. С. 337.
27. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики.— М.: Наука, 1977.
28. Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику.— М.: Наука, 1984.
29. Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И. Некоторые вопросы статистической механики.— М.: Высшая школа, 1975.
30. Лебедев В. В., Халатников И. М.//ЖЭТФ. **1982**. Т. 83. С. 1601.
[31] Андреев А. Ф., Башкин Е. П.//ЖЭТФ. **1975**. Т. 69. С. 319.
32. Минеев В. П.//ЖЭТФ. **1974**. Т. 67. С. 683.
33. Galasiewicz Z.//Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. math., astron. et phys. **1967**. T. 15. P. 191.
34. Hohenberg P. C. Martin P. C.//Ann. of Phys. **1965**. V. 34. P. 291.