Ноябрь 1989 г. *Том 159, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539[.122+.124].17

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ И ФОТОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ С КРИСТАЛЛАМИ

В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко

(Институт ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Процесс излучения фотона заряженной частицей и рождения электрон-позитронной пары фотоном в монокристалле, когда начальная частица движется под малым углом ϑ_0 к направлению его осей или плоскостей, существенно меняется по сравнению с аморфной средой, что обусловлено коллективным взаимодействием некоторой совокупности систематически расположенных атомов кристаллической решетки с налетающей частицей.

Этот круг вопросов начал исследоваться еще в 50-е годы, когда было установлено, что возможна конструктивная интерференция вкладов в излучение (рождение пары) на различных центрах (когерентное излучение и рождение пар). При определенных углах ϑ_0 и энергиях вероятности когерентного излучения и рождения пар (см. [1, 2] и цитированную там литературу) существенно отличаются от вероятностей независимого (некогерентного) излучения и рождения пар на отдельных центрах, имеющих место в аморфной среде (механизм Бете — Гайтлера).

В 70—80-е годы было выяснено, что специфическое взаимодействие заряженных частиц и фотонов с монокристаллами отнюдь не исчерпывается когерентными процессами. Особый интерес представляет область высоких энергий (десятки ГэВ и выше). Дело в том, что вероятности процессов в электрических полях, создаваемых осями и плоскостями кристаллов, определяются величиной этих полей в системе покоя излучающей (родившейся) частицы. Последние увеличиваются пропорционально энергии, и тем самым кристалл оказывается уникальным полигоном, где может исследоваться квантовая электродинамика в интенсивном внешнем поле.

Специфической чертой электромагнитных процессов в кристаллах является их энергетическая и ориентационная зависимости. Для области умеренных энергий угловая ширина в ориентационных явлениях при уходе от оси или плоскости определяется углом Линхарда $\vartheta_c = (2V_0/\varepsilon)^{1/2}$, где ε — энергия частицы, V_0 — масштаб усредненного потенциала оси (плоскости), относительно которой определяется угол ϑ_0. С другой стороны, хорошо известно (см., например, [3], гл. 1), что характеристики процесса излучения существенно зависят от соотношения между характерным углом излучения $\vartheta_\gamma = m/\varepsilon = 1/\gamma$ (m — масса электрона) и углом отклонения частицы на траектории $\theta^2 \sim \langle (\Delta\mathbf{v})^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2$, где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по времени *). Соответствующий параметр ρ был введен в [4] (см. также [5]):

$$\rho = 2\gamma^2 \langle (\Delta\mathbf{v})^2 \rangle. \tag{1.1}$$

Напомним, что при значениях параметра $\rho \ll 1$ излучение носит дипольный характер и формируется за время порядка периода движения T, а при $\rho \gg 1$ имеет магнитотормозной характер (для частот, дающих вклад в интенсивность) и происходит с небольшого участка траектории, за время порядка. $T/\rho^{1/2}$.

Движение частицы и соответственно параметр ρ зависят от величины угла влета ϑ_0 частицы в кристалл. При углах влета $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$ падающие электроны захватываются в каналы или низкие надбарьерные состояния, а при $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ частицы движутся высоко над барьером. В последнем случае для вычисления характеристик движения можно использовать приближение прямолинейной траектории, с помощью которого из (1.1) получаем оценку

$$\rho(\vartheta_0) = \left(\frac{2V_0}{m\vartheta_0}\right)^2. \tag{1.2}$$

Для углов влета $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$ значение поперечной (к оси или плоскости) скорости частицы $v_\perp \lesssim \vartheta_c$ и параметр $\rho \lesssim \rho_c$, где

$$\rho_c = \frac{2V_0\varepsilon}{m^2}. \tag{1.3}$$

Определим теперь более конкретно область высоких энергий условием $\rho_c \gg 1$. Выражение (1.2) показывает, что в задаче существует еще один характерный угол $\vartheta_V = V_0/m$, при котором параметр $\rho \sim 1$. Из смысла параметра ρ и выражения (1.2) следует, что в области высоких энергий излучение имеет магнитотормозной характер при $\vartheta_0 \ll V_0/m$ и является дипольным при $\vartheta_0 \gg V_0/m$. Поскольку условие $\rho_c \gg 1$ означает, что $\vartheta_V \gg \vartheta_c$, то для углов влета $\vartheta_0 \gg \vartheta_V$ оказывается справедливой теория когерентного тормозного излучения — КТИ (см. [1], гл. 1—2, [2], а также [6], гл. 8; критерий применимости КТИ обсуждался в [7]), которая, по существу, является борновским приближением по потенциалу кристалла и для своей применимости требует (в наших терминах) одновременного выполнения условия дипольности и возможности использования приближения прямолинейной траектории.

Многие особенности обсуждаемых процессов — излучения заряженной частицы и рождения пар фотоном в монокристалле — схожи с излучением и рождением пар в поле плоской электромагнитной волны. Это связано с тем, что для ультрарелятивистских частиц и фотонов, движущихся вблизи осей (плоскостей), поле кристалла может быть сведено к потоку налетающих эквивалентных фотонов. Поскольку описание излучения и рождения пар в поле волны существенно проще, чем в моно-

*) В статье используется система единиц $\hbar = c = 1$.

кристалле, то упомянутая аналогия оказывается весьма полезной. Потенциал кристалла запишем в виде

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} G(\mathbf{q})\, e^{-i\mathbf{q}r}. \qquad (1.4)$$

Явный вид $G(\mathbf{q})$ зависит от типа решетки и пока нам не понадобится. В системе покоя кристалла имеется только электрическое поле E. В системе отсчета, движущейся со скоростью v вдоль направления влета заряженной частицы (фотона) $\mathbf{n}(\mathbf{v}=\mathbf{n}v)$, возникает магнитное поле $\mathbf{H}=\gamma_v[\mathbf{Ev}]\,(\gamma_v=(1-v^2)^{-1/2}\gg 1)$ и результирующее поле в этой системе, как известно, может быть с релятивистской точностью представлено в виде плоских волн с волновым вектором Q_μ, причем $Q_0=\gamma_v v|q_\parallel|$ и $\mathbf{Qn}=-\gamma_v|q_\parallel|$ $(q_\parallel=\mathbf{qn})$. Усредненный по времени и поперечной координате поток представляет собой сумму парциальных вкладов $\mathbf{J}_q$. Последний имеет вид

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}} = -\mathbf{n}\,\frac{\gamma_v \mathbf{q}_\perp^2}{4\pi\alpha\,|\mathbf{q}_\parallel|}\,|G(\mathbf{q})|^2, \qquad (1.5)$$

где $\mathbf{q}_\perp=\mathbf{q}-\mathbf{n}(\mathbf{qn})$, $e^2=\alpha=1/137$. В области взаимодействия, поперечный размер которой порядка $\lambda\!\!\!^-_c=1/m=\hbar/mc$, а продольный — длина формирования, в Ц-системе падающей частицы и эквивалентного фотона $\sim 2\pi/|q_\parallel|\gamma_v$ находится $N_q\simeq|\mathbf{J}_q|\cdot 2\pi\lambda\!\!\!^-_c{}^2/|q_\parallel|\gamma_v$ фотонов. Эффективная сила взаимодействия характеризуется параметром

$$\alpha N_{\mathrm{ph}} = \alpha\sum_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}} \approx \sum_{\mathbf{q}} |G(\mathbf{q})|^2\,\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{m^2 q_\parallel^2}\,. \qquad (1.6)$$

Этот параметр является чисто классическим (не содержит постоянной Планка $\hbar$) и всегда возникает в задачах с внешним электромагнитным лолем: такой же смысл имеет обсуждавшийся выше параметр ρ и параметр ξ^2 в теории процессов в интенсивной электромагнитной волне (см., например, [8—10]). При $\alpha N_{\mathrm{ph}}\ll 1$ внешнее поле можно учитывать по теории возмущений, а при $\alpha N_{\mathrm{ph}}\gg 1$ имеем предел постоянного поля. Для оценок можно считать, что $|G(\mathbf{q})|\sim V_0$, $q_\parallel\sim q_\perp\vartheta_0$, тогда (ср. (1.2))

$$\alpha N_{\mathrm{ph}} \sim \left(\frac{V_0}{m\vartheta_0}\right)^2. \qquad (1.7)$$

Таким образом, как в излучении, так и в рождении пар при углах влета $\vartheta_0\sim\vartheta_V$ эффективное взаимодействие имеет промежуточную силу и не описывается известными предельными выражениями. К тому же положение максимума вероятности когерентного рождения пар $\vartheta_{\max}\propto\omega^{-1}$ (ω — энергия фотона) и смещается с ростом энергии в сторону меньших углов. Когда достигается значение $\vartheta_{\max}\sim\vartheta_V$, теория когерентного рождения пар становится неприменимой в области своего максимума. В этом смысле эта теория совершенно недостаточна в области высоких энергий. В свою очередь, приближение постоянного поля описывает, строго говоря, только одну, хотя и весьма важную, точку на ориентационной кривой, а именно, $\vartheta_0=0$. Указанные трудности были преодолены в развитой в работах [11—16] теории излучения частиц высокой энергии и рождения пар фотонами, дающей единое описание этих процессов при любых углах влета ϑ_0 падающей частицы и включающей известные ранее случаи в качестве предельных для больших $(\vartheta_0\gg\vartheta_V)$ и малых $(\vartheta_0\ll\vartheta_V)$ углов. Для малых углов влета, в первом приближении, поле оси (плоскости) можно считать постоянным на длине формирования излучения (пары) $l_f\sim l_0=ma_s/V_0$, где a_s — радиус экранирования потенциала (см. [4, 5, 17]). При этом из общей теории следуют и поправки $\sim\vartheta_0^2$ к пределу постоянного поля, учитывающие изменение поля на длине формирования. В этом случае вычисление вероятностей сводится к выбору адекватного потенциала и проведению надлежащих усреднений (см. [4, 5, 11, 12, 18] для излучения и [13—17, 19—23] для рождения пар). В излучении и при высоких энергиях характерный угол ϑ_c может проявляться в ориентационной зависимости. Это происходит не из-за того, что при $\vartheta_0\lesssim\vartheta_c$ меняется механизм излучения, а вследствие перераспределения потока заряженных частиц. Напротив, в рождении пары фотоном ориентационная зависимость целиком обязана изменению механизма процесса и единственным характерным углом в ней является $\vartheta_V=V_0/m$. Отсюда ясно, почему не подтвердилось использованное в работах [24—26] предположение о существенной роли захвата частиц родившейся пары в режим каналнрования.

Важно, что в области высоких энергий характерные длины, на которых происходят процессы излучения или рождения пар, оказываются на один-два порядка более короткими, чем в соответствующем аморфном веществе. В силу этого в ориентированных кристаллах могут развиваться специфические электрон-фотонные ливни [27]. Особенно сильно эти эффекты проявляются при малых углах ϑ_0.

К настоящему времени уже выполнен обширный цикл экспериментов с использованием пучков фотонов и электронов в ЦЕРН [28—34]. Полученные экспериментальные данные вполне удовлетворительно описываются теорией [35].

При выводе основных закономерностей будем считать кристалл тонким, т. е. пренебрегать изменением функции распределения в поперечном фазовом пространстве при прохождении частиц через кристалл. Для справедливости этого приближения необходимо, чтобы (см. обсуждение в [36]) толщина кристалла была меньше характерной длины деканалирования и характерной длины потерь энергии L_{ch}:

$$L_{\text{ch}}^{-1}=\frac{I(\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad (1.8)$$

где $I(\varepsilon)$ — полная интенсивность излучения. С другой стороны, для рассматриваемой области энергий ($\rho_c\gg1$) в толстом кристалле при $\vartheta_0\lesssim\vartheta_V$ с необходимостью развивается специфический электромагнитный ливень (см. [19, 27]). Для его описания следует решать соответствующие уравнения каскадной теории, ядрами которых служат приведенные ниже выражения, описывающие излучение и рождение пар фотоном.

2. Излучение фотона заряженной частицей и рождение пары фотоном в монокристалле. Наиболее адекватным подходом к задаче об излучении релятивистских частиц и рождении пары частиц фотоном большой энергии является формализм, использующий операторный квазиклассический метод, развитый двумя из авторов (см. [3]), поскольку он применим во всех типах внешних полей, включая неоднородные и переменные. В случае больших квантовых чисел движения (в кристаллах эта ситуация реализуется начиная с $\varepsilon\sim100$ МэВ) этот метод позволяет, исходя из точных квантовых выражений, перейти после серии преобразований к величинам на классической траектории частицы, отдача при излучении фотона (закон сохранения энергии) при этом учитывается точно, как и при рождении пары фотоном. Полученные в рамках подхода формулы (см. [3, 5, 12, 37]) описывают всю совокупность спиновых и поляризационных явлений. Суммирование по переменным, характеризующим состояние конечных частиц (кроме их энергии), можно провести в общем виде. Тогда, например, спектральное распределение вероятности излучения фотона электроном (все частицы

неполяризованные) принимает вид

$$d w_\gamma = \frac{i\alpha\, d\omega}{2\pi} \int \frac{d t\, d\tau}{\tau - i0} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right) (\Delta \mathbf{v}(t_2) - \Delta \mathbf{v}(t_1))^2 \right] e^{-iA}, \quad (2.1)$$

где

$$A = \frac{\omega\varepsilon\tau}{2\varepsilon'} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} ds\, (\Delta \mathbf{v}(s))^2 - \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} d s\, \Delta \mathbf{v}(s) \right)^2 \right]; \quad (2.2)$$

здесь $\mathbf{v}(t)$ — скорость частицы, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}_0$ — средняя скорость, $t_{1,2} = t \mp \tau/2$, $\gamma = \varepsilon/m$, $\varepsilon' = \varepsilon - \omega$.

Как известно, существует связь между полностью дифференциальными вероятностями излучения фотона заряженной частицей и рождения пары фотоном. В нашем случае в силу того, что все конечные частицы летят вперед в малый телесный угол, такая связь сохраняется и после интегрирования по части переменных. В частности, распределение по энергии одной из частиц пары получается из (2.1) с помощью правил подстановки

$$\omega \to -\omega, \quad \varepsilon \to -\varepsilon, \quad d\omega \to -\left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 d\varepsilon. \quad (2.3)$$

Формула (2.1) описывает излучение на заданной траектории. Для описания излучения в кристалле необходимо провести суммирование вкладов со всех возможных траекторий. Эта крайне сложная задача радикально упрощается при $\rho_c \gg 1$, так как при этом механизм излучения в области углов влета $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$, где траектории существенно непрямолинейны, является магнитотормозным и имеет локальный характер. Тогда для суммирования достаточно знать при заданном угле влета ϑ_0 распределение по поперечной координате $\boldsymbol{\rho}$: $dN(\boldsymbol{\rho}, \vartheta_0) = NF(\mathbf{r}, \vartheta_0)\, d^3r/V$, где V — объем кристалла, N — полное число частиц. Функция $F(\mathbf{r}, \vartheta_0)$ для тонкого кристалла непосредственно определяется условиями влета; например, в осевом случае она имеет вид

$$F_{ax}(\boldsymbol{\rho}, \vartheta_0) = \int \frac{d^2\rho_0}{s(\varepsilon_\perp(\rho_0))}\, \vartheta(\varepsilon_\perp(\rho_0) - U(\rho)), \quad (2.4)$$

где $U(\rho)$ — непрерывный потенциал оси, нормированный так, что $U(\rho) = 0$ на границе ячейки; U_0 — глубина потенциальной ямы;

$$s(\varepsilon_\perp(\rho_0)) = \int d^2\rho\, \vartheta(\varepsilon_\perp(\rho_0) - U(\rho)),$$

$$\varepsilon_\perp(\rho_0) = \frac{\varepsilon\vartheta_0^2}{2} + U(\rho_0);$$

$\vartheta(x)$ — функция Хевисайда: $\vartheta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\vartheta(x) = 1$ при $x > 0$. Отметим, что распределение (2.4) при $\varepsilon_\perp(\rho_0) > U_0$ (для надбарьерных частиц) становится в осевом случае равномерным, т. е. множитель $F(\mathbf{r}, \vartheta_0)$, учитывающий перераспределение потока, обращается в единицу.

В случае $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ для нахождения $\Delta\mathbf{v}(t)$ в (2.1) можно использовать приближение прямолинейной траектории. В потенциале (1.4) получаем

$$\Delta \mathbf{v}(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\mathbf{q}}{}' G(\mathbf{q}) \frac{\mathbf{q}_\perp}{q_\parallel} \exp[-i(q_\parallel t + \mathbf{q}\mathbf{r})], \quad (2.5)$$

где $q_\parallel = \mathbf{q}\mathbf{v}$, $\mathbf{q}_\perp = \mathbf{q} - \mathbf{v}(\mathbf{q}\mathbf{v})$, причем для начального фотона $\mathbf{v} = \mathbf{k}/\omega$, $\mathbf{k}$ — импульс фотона, а для начальной частицы $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$. Важно, что при $\rho_c \gg 1$

существуют такие углы ϑ_0, для которых $\vartheta_c \ll \vartheta_0 \ll \vartheta_V$, т. е. приближение прямолинейной траектории применимо и в области, где эффективная сила взаимодействия становится большой (см. (1.2), (1.7)). Полученные для таких значений ϑ_0 формулы остаются справедливыми при уменьшении угла влета вплоть до $\vartheta_0=0$, поскольку механизм процесса излучения (рождения пары) при этом не меняется. Что же касается области $\vartheta_0 \gtrsim \vartheta_V$, то в ней при $\rho_c \gg 1$ приближение прямолинейной траектории заведомо применимо. Подставляя теперь (2.5) в (2.1), с учетом сказанного о суммировании по всем траекториям находим

$$\mathrm{d}W_\gamma = \frac{\mathrm{d}\,w_\gamma}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{i\alpha m^2}{2\pi\varepsilon^2}\,\mathrm{d}\omega \int \frac{\mathrm{d}^3 r}{V} F(\mathbf{r}, \vartheta_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - i0} B^{(-)} e^{-iA_1}, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{gathered} B^{(\pm)} = \left(\sum_{\mathbf{q}} \frac{G(\mathbf{q})\,\mathbf{q}_\perp}{mq_\parallel} e^{-i\mathbf{qr}} \sin q_\parallel \tau\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \pm 1, \\ A_1 = \frac{m^2\omega\tau}{\varepsilon\varepsilon'}\left[1 + \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \frac{\mathbf{q}_\perp \mathbf{q}'_\perp}{m^2 q_\parallel q'_\parallel} G(\mathbf{q}) G(\mathbf{q}') e^{-i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\mathbf{r}}\, \Psi(q_\parallel, q'_\parallel, \tau)\right], \\ \Psi(q_\parallel, q'_\parallel, \tau) = \frac{\sin[(q_\parallel + q'_\parallel)\tau]}{(q_\parallel + q'_\parallel)\tau} - \frac{\sin(q_\parallel \tau)}{q_\parallel \tau}\,\frac{\sin(q'_\parallel \tau)}{q'_\parallel \tau}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Мы перешли к вероятности в единицу времени, что можно сделать, если толщина кристалла L существенно больше длины формирования процесса l_f. Анализ (см. [36]) показывает, что область толщин, для которых кристалл можно считать тонким и одновременно $L \gg l_f$, существует при любых энергиях.

Формула (2.6) описывает спектральные свойства излучения при $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ для любых значений ρ_c, а при $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$ — при выполнении условия $\rho_c \gg 1$. Однако для полной интенсивности излучения

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon \omega\,\mathrm{d}W_\gamma$$

область применимости выражения, следующего из (2.6), гораздо шире и совпадает с областью применимости квазиклассического приближения. Это обусловлено тем, что при энергиях, когда $\rho_c \lesssim 1$ и перестает действовать магнитотормозное описание, для углов $\vartheta_0 \lesssim \vartheta_c$ справедлива классическая теория излучения, полная интенсивность которого также зависит только от локальных характеристик движения. Общее выражение, описывающее рождение пары фотоном в кристалле, получается из (2.6) с помощью замен (2.3), кроме того, следует опустить фактор $F(\mathbf{r}, \vartheta_0)$, поскольку перераспределения потока фотонов не происходит:

$$\mathrm{d}W_e = \frac{\mathrm{d}\,w_e}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{i\alpha m^2\,\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi\omega^2} \int \frac{\mathrm{d}^3 r}{V} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - i0} B^{(+)} e^{-iA_1}. \tag{2.8}$$

В формулах (2.6)—(2.8) величина $\varepsilon' = |\omega - \varepsilon|$, т. е. $\varepsilon' = \varepsilon - \omega$ для излучения и $\varepsilon' = \omega - \varepsilon$ для рождения пар. Выражение (2.8) описывает *)

*) Наряду с обсуждаемым в кристалле осуществляется и другой механизм излучения и рождения пар, обусловленный взаимодействием с флуктуациями потенциала. Для полного описания этот (некогерентный) вклад следует добавить к (2.6), (2.8). При высоких энергиях вклад некогерентных процессов обычно оказывается малым. Этот вопрос обсуждается ниже.

рождение пар для неполяризованных электронов и фотонов при любых энергиях и углах влета. Для рождения пар в поле плоскостей, когда в задаче имеется выделенное направление, могут проявляться эффекты поляризации фотонов. Рождение пар в этом случае рассмотрено в работе [37].

Входящие в полученные выше формулы величины $G(\mathbf{q})$ имеют вид

$$G(\mathbf{q}) = \frac{1}{l^3}\varphi(\mathbf{q})\,S_{mnk}, \tag{2.9}$$

где l — постоянная решетки: $\mathbf{q} = (2\pi/l)(m, n, k)$; m, n, k — целые числа, по которым идет суммирование в $\sum_{\mathbf{q}}$; S_{mnk} — структурный фактор. Для решетки типа алмазной fcc(d), которую имеют, в частности, кристаллы алмаза, кремния (Si) и германия (Ge),

$$S^{(d)}_{mnk} = \left\{1 + \exp\left[i\frac{\pi}{2}(m+n+k)\right]\right\}(\cos\pi k + \cos\pi m)(\cos\pi n + \cos\pi m), \tag{2.10}$$

а для решетки типа bcc(W, Fe)

$$S^{(b)}_{mnk} = 1 + \cos[\pi(m+n+k)]. \tag{2.11}$$

Величина $\varphi(\mathbf{q})$ в (2.9) — фурье-компонента потенциала отдельного атома, умноженная на возникающий при усреднении по тепловым колебаниям кристаллической решетки фактор $\exp(-u_1^2\mathbf{q}^2/2)$, где u_1 — одномерная амплитуда колебаний. Так, в случае используемого ниже приближения Мольер для потенциала отдельного атома имеем

$$\varphi(\mathbf{q}) = 4\pi Ze^2\exp\left(-\frac{u_1^2\mathbf{q}^2}{2}\right)\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_i}{\mathbf{q}^2+b_i^2}; \tag{2.12}$$

здесь α_i, b_i — параметры потенциала Мольер (см., например, [3]); Z — заряд ядра.

3. Характер процессов при малых углах влета $\vartheta_0 \ll V_0/m$. Поведение вероятностей dW_γ, dW_e ((2.6), (2.8)) при разных углах влета и энергиях частиц определяется зависимостью от них фазы A_1 (2.7). Оценим ее при $\vartheta_0 \ll V_0/m$. Для определенности рассмотрим случай, когда импульс влетающей частицы лежит вблизи кристаллической оси, направление которой выберем за ось z системы координат. Из (2.9) — (2.12) следует оценка $G(\mathbf{q}) \sim V_0$, поэтому порядок величины двойной суммы в A_1 есть $(V_0/m)^2(q_\perp/q_\parallel)^2\cdot\Psi(q_\parallel, q'_\parallel, \tau)$, где Ψ — функция, определенная в (2.7). Введем обозначение $\mathbf{q}_t$ для векторов $\mathbf{q}$, лежащих в плоскости (x, y). Для них $q_z=0$, $q_\parallel \sim \vartheta_0 q_\perp$, $q_\perp \sim q$, а для всех остальных $q_\parallel \sim q_\perp \sim q$. Тогда вклад в сумму членов с q_z, $q'_z \neq 0$ будет $\sim (V_0/m)^2\Psi \lesssim (V_0/m)^2$, поскольку $|\Psi| \lesssim 1$ при любых значениях аргументов. Так как $(V_0/m)^2 \ll 1$, то этим вкладом можно пренебречь *). Итак, сохраним в сумме только члены с $\mathbf{q}_t$, для которых ее величина $\sim (V_0/m\vartheta_0)^2 \times \Psi(q_\parallel, q'_\parallel, \tau)$. Большая величина фазы A_1 приводит к экспоненциальному подавлению вероятностей $W_{e,\gamma}$, поэтому характерные значения пе-

*) Сохранение членов с q_z, $q'_z \neq 0$ соответствует учету дискретности цепочки атомов, образующих кристаллическую ось. Вычисление этого вклада аналогично расчету при $\vartheta_0 \gg V_0/m$ (см. раздел 4).

ременной τ в интегралах (2.6), (2.8), имеющие смысл длины (времени) формирования процесса подстраиваются таким образом, чтобы величина $\Psi(q_\parallel, q'_\parallel, \tau)$ скомпенсировала большой множитель $(V_0/m\vartheta_0)^2$, т. е. вклад при малых углах влета дают $q_\parallel\tau$, $q'_\parallel\tau \ll 1$. Разлагая в соответствии с этим функцию Ψ, находим приближенное выражение для A_1 при $\vartheta_0 \ll \vartheta_V$:

$$A_1 = \frac{m^2\omega\tau}{\varepsilon\varepsilon'}\left\{1 - \frac{\tau^2}{3}\sum_{\mathbf{q}_t, \mathbf{q}'_t} \frac{G(\mathbf{q}_t)\,G(\mathbf{q}'_t)}{m^2}\mathbf{q}_t\mathbf{q}'_t \exp[-i(\mathbf{q}_t + \mathbf{q}'_t)\boldsymbol{\rho}] \times \right.$$
$$\left. \times\left[1 - \frac{\tau^2}{10}\left((\mathbf{q}_t\mathbf{v})^2 + (\mathbf{q}'_t\mathbf{v})^2 + \frac{2}{3}(\mathbf{q}_t\mathbf{v})(\mathbf{q}'_t\mathbf{v})\right)\right]\right\}; \qquad (3.1)$$

здесь $\mathbf{v}$ — направление влета начальной частицы (см. (2.5)), $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_t$, второй член в $[\ldots] \sim \vartheta_0^2$, так как $\mathbf{q}_t\mathbf{v}$, $\mathbf{q}'_t\mathbf{v} \sim \vartheta_0$. Отметим, что в задаче появился усредненный потенциал цепочек кристалла:

$$U(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{q}_t} G(\mathbf{q}_t)\,e^{-i\mathbf{q}_t\boldsymbol{\rho}}; \qquad (3.2)$$

действительно, используя (3.2), можно переписать (3.1) в виде

$$A_1 = \frac{m^2\omega\tau}{\varepsilon\varepsilon'}\left\{1 + \frac{\tau^2\mathbf{b}^2}{3} + \frac{\tau^4}{15}\left[(\mathbf{b}(\mathbf{v}\nabla)^2\mathbf{b}) + \frac{1}{3}((\mathbf{v}\nabla)\mathbf{b})^2\right]\right\}, \qquad (3.3)$$

где $\mathbf{b} = \nabla u(\boldsymbol{\rho})/m$, $\nabla = \partial/\partial\boldsymbol{\rho}$. Члены, содержащие $\mathbf{v}\nabla$, малы ($\sim\vartheta_0^2$), и в (2.6), (2.8) их можно опустить в предэкспоненту, тогда $A_1 \to A_2 = (m^2\omega\tau/\varepsilon\varepsilon')[1 + (\tau^2\mathbf{b}^2/3)]$. Выполнив аналогичные разложения величин $B^{(\pm)}$, после чего берутся интегралы по τ, представим вероятности $\mathrm{d}W_{e,\gamma}$ при $\vartheta_0 \ll V_0/m$ в виде

$$\mathrm{d}W_{e,\gamma} = \mathrm{d}W^F_{e,\gamma} + \left(\frac{m\vartheta_0}{V_0}\right)^2 \mathrm{d}W^{(1)}_{e,\gamma}, \qquad (3.4)$$

где величины $\mathrm{d}W^F_{e,\gamma}$ и $\mathrm{d}W^{(1)}_{e,\gamma}$ не зависят от ϑ_0, причем член $\mathrm{d}W^F_{e,\gamma}$ дает предел постоянного поля *), а второй член в (3.4) — поправку к нему $\sim\rho^{-1}(\vartheta_0)$ (см. (1.2)). Величины $\mathrm{d}W^F_{e,\gamma}$ записываются особенно просто:

$$dW^F_\gamma = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3}\pi}\frac{\mathrm{d}\omega}{\varepsilon^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\rho}{s}F_{ax}(\boldsymbol{\rho}, \vartheta_0)\left[\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)K_{2/3}(\lambda) - \int_\lambda^\infty \mathrm{d}y K_{1/3}(y)\right],$$
$$\qquad (3.5)$$
$$\mathrm{d}W^F_e = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3}\pi}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\omega^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\rho}{s}\left[\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)K_{2/3}(\lambda) + \int_\lambda^\infty \mathrm{d}y K_{1/3}(y)\right],$$

где $F_{ax}(\boldsymbol{\rho}, \vartheta_0)$ определена в (2.4), $K_\nu(\lambda)$ —функции Мак-Дональда, $\lambda = 2m^2\omega/3\varepsilon\varepsilon'|\mathbf{b}|$. Аналогичный, хотя и более громоздкий вид (см. [12, 14]) имеют и поправочные члены. Если взять хорошо известные (см., например, [3]) вероятности процессов в постоянном поле на заданном расстоянии от оси $\boldsymbol{\rho}$, а затем провести усреднение по поперечным координатам (с учетом перераспределения потока в задаче излучения), то получатся как раз выражения (3.5), являющиеся пределом общих формул (2.6), (2.8) при $\vartheta_0 \to 0$.

---

*) Излучение в кристаллах в магнитотормозном пределе обсуждалось в работах [4, 5, 38, 39], причем в [5] для конкретного вида поперечного движения были получены и поправки $\sim\rho^{-1}$.

Аргумент функций $K_\nu(\lambda)$ перепишем в виде $\lambda=2u/3\chi(\rho)$ для задачи излучения, $u=\omega/(\varepsilon-\omega)$ и $\lambda=2/(3y(1-y)\varkappa(\rho))$ для задачи рождения пар, $y=\varepsilon/\omega$, в котором выявляется зависимость λ от параметров $\chi(\rho)$, $\varkappa(\rho)$:

$$\chi(\rho)=\frac{\varepsilon|\nabla U(\varrho)|}{m^3}=\frac{\varepsilon}{m}\frac{E(\varrho)}{E_0},\quad \varkappa(\rho)=\frac{\omega}{m}\frac{E(\varrho)}{E_0}, \tag{3.6}$$

где $E_0=m^2/e\approx 1{,}32\cdot 10^{16}$ В/см, $E(\rho)$ локальное значение электрического поля оси. Параметры χ и $\varkappa$ являются инвариантами: $\chi(\varkappa)=|(eF_{\mu\nu}Q^\nu)^2|^{1/2}/m^3$, где Q^ν — 4-импульс частицы (фотона), $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля и играют важную роль при описании процессов в постоянном внешнем поле. Действительно, из свойств K_ν-функций ($K_\nu(z)\simeq(\pi/2z)^{1/2}e^{-z}$ при $z\gg 1$) следует, что излучение частот, для которых $u\gg\chi$, подавляется экспоненциально. Поэтому, например, при $\chi\ll 1$ излучаются только мягкие частоты с $\omega\ll\varepsilon$, тогда можно пренебречь изменением энергии частицы в акте излучения и пользоваться классическим описанием процесса. Таким образом, значение параметра χ определяет величину квантовых эффектов отдачи при излучении. Аналогично и параметр $\varkappa$ связан с величиной передачи импульса полем. Так, в системе покоя родившейся пары отношение импульса, переданного полем заряженной частице на длине $\lambda_c=1/m$, к массе оказывается $\sim\varkappa$.

Для заданной напряженности внешнего поля величина параметров χ и $\varkappa$ и с ними все характеристики процессов определяются энергией частицы. В кристалле эти параметры зависят еще и от расстояния до оси, обращаясь вместе с напряженностью поля в 0 при $\rho=0$ из-за тепловых колебаний, достигая максимума *) $\chi_1(\varkappa_1)$ при $|\rho|\approx u_1$ (u_1 — амплитуда колебаний) и затем спадая. На расстоянии от оси порядка радиуса экранирования a_s Параметр $\chi(\varkappa)\sim\chi_s=V_0\varepsilon/m^3a_s$ ($\varkappa_s=V_0\omega/m^3a_s$). Таким образом, картина процесса в кристалле для $\vartheta_0\ll V_0/m$ при фиксированной энергии начальных частиц такая же, как в однородном поле $E\approx E(u_1)$, но для существенно немонохроматического пучка, в котором присутствуют все энергии вплоть до начальной.

Ниже в конкретных расчетах, когда это специально не оговорено, распределение по поперечной координате считается равномерным и используется аксиально-симметричная аппроксимация потенциала во всей площади S, приходящейся на отдельную ось:

$$U(x)=V_0\left[\ln\left(1+\frac{1}{x+\eta}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x_0+\eta}\right)\right],\quad x=\frac{\rho^2}{a_s^2}; \tag{3.7}$$

здесь $x_0^{-1}=\pi a_s^2/S$. Для оценок можно считать, что $V_0\approx Ze^2/d$, $\eta\approx 2u_1^2/a_s^2$, d — среднее расстояние между атомами оси. Параметры потенциала (3.7) приведены в таблице. Они получены с помощью подгоночной процедуры (детали см. в [40]) исходя из модели, основанной на потенциале Мольер для отдельного атома. Иногда, например, для оси $\langle 111\rangle$ в кристаллических структурах типа *fcc*(*d*), *bcc*, истинный потенциал с хорошей точностью является аксиально-симметричным относительно выделенной оси во всей области S и, во всяком случае, обладает этим свойством на расстояниях от оси $\lesssim a_s$, где напряженность электрического поля имеет большую величину. Следует, однако, иметь в виду, что с ростом энергии становится заметным вклад все больших расстоя-

*) Максимальное электрическое поле оси $\langle 111\rangle$ в вольфраме при $T=293$ К составляет $5\cdot 10^{11}$ В/см. В кремнии и алмазе поля примерно на порядок величины слабее.

ний от оси, где аксиальная симметрия может нарушаться, тогда при усреднении в (3.5) надо использовать непосредственно выражение (3.2) для $U(\rho)$.

Изменение спектрального распределения интенсивности $\mathrm{d}I^F/\mathrm{d}\omega = \omega \mathrm{d}W_\gamma^F/\mathrm{d}\omega$ с энергией можно проследить на рис. 1. Видно, что при энергии $\varepsilon = 100$ ГэВ величина $\mathrm{d}I^F/\mathrm{d}\omega$ все еще имеет максимум при $\omega/\varepsilon \ll 1$ и быстро спадает с ростом частоты. Однако по мере роста энергии распределение становится все более равномерным по всему спектру, вплоть до $\omega \approx \varepsilon$.

Параметры потенциала и некоторые величины, характеризующие изучение и рождение пар

Кристалл	Ось	T	u_1, Å	V_0, эВ	η	a_s, Å	x_0	χ_{s_2}, $\varepsilon=10$ ГэВ	ρ_c, $\varepsilon=10$ ГэВ	$r_\gamma^{\max}$	ω_t
C(d)	111	293	0,040	29	0,025	0,326	5,5	0,13	2,22	168	30
Si	111	293	0,075	54	0,150	0,299	15,1	0,27	4,14	71	150
Si	110	293	0,075	70	1,145	0,324	15,8	0,32	5,36	81	120
Ge	111	293	0,085	91	0,130	0,300	16,3	0,45	5,97	26	100
Ge	110	280	0,083	110	0,115	0,337	15,8	0,48	8,43	30	70
Ge	110	100	0,054	114,5	0,063	0,302	19,8	0,56	8,77	30	50
W	111	293	0,050	417	0,115	0,215	39,7	2,87	31,94	11	22
W	111	77	0,030	348	0,027	0,228	35,3	2,26	26,65	11	13

T — температура в шкале Кельвина; u_1 — амплитуда тепловых колебаний; V_0, η, a_s, x_0 — параметры потенциала (3.7); χ_s — параметр, характеризующий величину квантовых эффектов отдачи; ρ_c — параметр, определяющий мультипольность излучения; $r_\gamma^{\max}$ — оценка максимальной величины эффекта для излучения, ω_t — энергия фотона, при которой вероятность процесса в поле осей сравнивается с аморфным значением

Зависимость полной (проинтегрированной по частотам) вероятности излучения от энергии легко понять, воспользовавшись справедливой в постоянном поле оценкой $W_\gamma \sim \alpha/l_t$, где l_t — длина формирования процесса. Вообще говоря, эта длина зависит от частоты излучаемого фотона (доли энергии, уносимой одной из частиц при рождении пары фотоном). Оценим ее, исходя из выражения для фазы

$$A_2 = \frac{u}{\chi(\varrho)}\left(1 + \frac{\mathbf{b}^2\tau^2}{3}\right)|\mathbf{b}|\tau.$$

Вклад всегда дают значения $|\mathbf{b}\tau| \gtrsim 1$, так как при $|\mathbf{b}\tau| \ll 1$ величина $|\mathbf{b}|$, входящая также в $\chi(\rho)$, сокращается, что соответствует выключению поля. Из условия $A_2 \sim 1$ находим $l_t \sim \tau \sim 1/|\mathbf{b}|$ для $u \sim \chi$ и $l_t \sim (\chi/u)^{1/3}/|\mathbf{b}|$ для $u \ll \chi$. В оценку полной вероятности входит значение l_f на частотах, дающих основной вклад: $u \sim \chi$ при $\chi \ll 1$ и $u \sim 1$ при $\chi \gtrsim 1$, откуда следует, что при увеличении энергии W_γ сначала остается постоянной, а затем начинает медленно ($\propto \chi^{-1/3}$) уменьшаться. В случае кристаллов, где происходит дополнительное усреднение по поперечной координате, будет входить значение $|\mathbf{b}(\rho)|$ на характерном расстоянии. В задаче излучения им является радиус экранирования a_s, тогда $l_t \sim l_0(1+\chi_s)^{1/3}$, где $l_0 = m a_s/V_0$. Кроме того, при усреднении появляется очевидный фактор a_s^2/S, т. е. в кристаллах поведение полной вероятности

$$W_\gamma^F = \int_0^\varepsilon \mathrm{d}\omega \left(\frac{\mathrm{d}W_\gamma^F}{\mathrm{d}\omega}\right);$$

можно аппроксимировать выражением

$$W_\gamma^F \approx \frac{\alpha}{l_0} \frac{c_1}{(1+\chi_s^2)^{1/3}} \frac{a_s^2}{S}; \qquad (3.8)$$

здесь c_1 — довольно большая константа, например, в потенциале (3.7) имеем *) $c_1 \approx 30$. Отметим еще, что величина l_0 больше для легких кристаллов ($V_0 \backsim Z$) и, например, для оси ⟨111⟩ меняется от $5{,}7 \cdot 10^{-5}$ см в алмазе до $2{,}6 \cdot 10^{-6}$ см з вольфраме. При энергии $\varepsilon \sim 10$ ТэВ длины формирования в различных веществах становятся одного порядка: $l_f = 10^{-3}$ см. Зависимость вероятности W_γ^F от энергии в различных кристаллах изображена рис. 2.

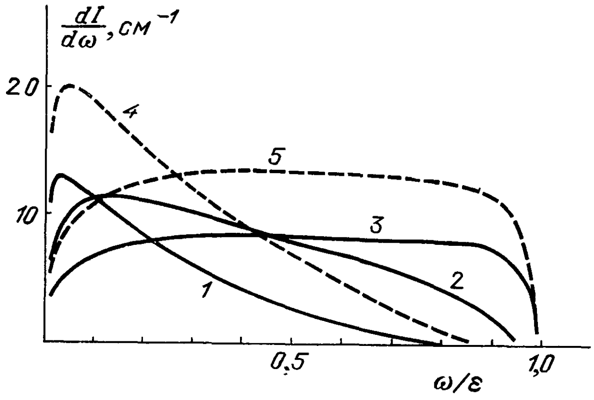

Рис. 1. Спектральная интенсивность излучения при заданной энергии в Si ⟨110⟩ ($T=293$ К; $\varepsilon=100$ ГэВ — кривая *1*, $\varepsilon=700$ ГэВ — *2*, $\varepsilon=5$ ТэВ — *3*) и в Ge ⟨110⟩ ($T=280$ К; $\varepsilon=100$ ГэВ — *4* и $\varepsilon=3$ ТэВ — *5*)

Большой интерес представляет также характерная длина, на которой частица теряет заметную долю энергии (аналог радиационной длины $L_{\rm rad}$ в аморфном веществе) $L_{\rm ch}(\varepsilon) = \varepsilon \times (I(\varepsilon))^{-1}$; $I(\varepsilon)$ — интенсивность излучения. В постоянном поле при $\chi \ll 1$, $I(\varepsilon) \backsim \varepsilon^2$, а при $\chi \gg 1$, $I(\varepsilon) \backsim \varepsilon^{2/3}$, поэтому отношение $I(\varepsilon)/\varepsilon = L_{\rm ch}^{-1}(\varepsilon)$ сначала возрастает с энергией, а затем начинает падать, т. е. имеет максимум. Так же ведет себя $L_{\rm ch}^{-1}$ и в кристаллах. Зависимость величины $I^F(\varepsilon)/\varepsilon$ от энергии представлена на рис. 3. Сравнение рис. 3 и рис. 2 показывает, что при всех энергиях $W_\gamma^F \gg L_{\rm ch}^{-1}$. Это означает, что число фотонов, уносящих заметную долю энергии и определяющих величину $L_{\rm ch}^{-1}$, значительно меньше полного числа фотонов, характеризуемого величиной W_γ^F, т. е. излучается большое число мягких фотонов. При $\chi_s \gg 1$ для $L_{\rm ch}^{-1}$ справедлива оценка типа (3.8), но с заметно меньшей константой, а для максимального значения этой величины имеем

$$(L_{\rm ch}^{-1})_{\max} = c_\gamma \frac{\alpha}{l_0} \frac{a_s^2}{S}. \qquad (3.9)$$

Расчет дает для c_γ значения, слабо зависящие от конкретного вещества (от параметра $\eta \backsim u_1^2/a_s^2$). Для кристаллов, представленных в таблице, c_γ меняется от 1,3 (Si) до 1,6 (C). Приведем еще простую оценку максимального превышения радиационной длины в соответствующем аморфном веществе над $L_{\rm ch}$:

$$r_\gamma^{\max} = \left(\frac{L_{\rm rad}}{L_{\rm ch}}\right)_{\max} \approx \frac{ma_s}{3Z\alpha \ln(183Z^{-1/3})}. \qquad (3.10)$$

Поскольку значения a_s в различных кристаллах отличаются не сильно, то наибольшее относительное превышение достигается при малых Z.

*) Из-за специфики потенциала (3.7), связанной с тем, что напряженность поля на больших расстояниях спадает $\backsim 1/\rho^3$, величина c_1 слабо меняется в области энергий, когда $1 \leqslant \chi_s \lesssim x_0^{3/2}$.

Оценка (3.10) довольно груба, в таблице приведены значения $r_\gamma^{\max}$, полученные более аккуратно.

Важным отличием процесса рождения пары от излучения является наличие своеобразного порога при малых значениях $\varkappa$. В постоянном поле при $\varkappa \ll 1$ вероятность рождения $\propto \exp(-8/3\varkappa)$. В излучении при $\chi \ll 1$ дело ограничивается подстройкой спектра (излучаются частоты $\omega \lesssim \varepsilon\chi$), тогда как в случае рождения пар аргумент функций K_ν в (3.5) $\lambda = 2/3y(1-y)\varkappa(\rho) \geqslant 8/3\varkappa$ и при $\varkappa \ll 1$ $\lambda \gg 1$ для любых $y = \varepsilon/\omega$.

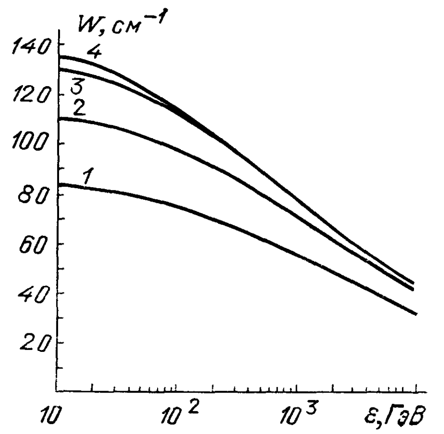

Рис. 2. Зависимость от энергии полной вероятности излучения в Si ⟨110⟩ ($T=293$ К, *1*), в алмазе ⟨111⟩ ($T=293$ К, *2*), в Ge ⟨110⟩ ($T=280$ К, *3*) и в Ge ⟨110⟩ ($T=100$ К, *4*)

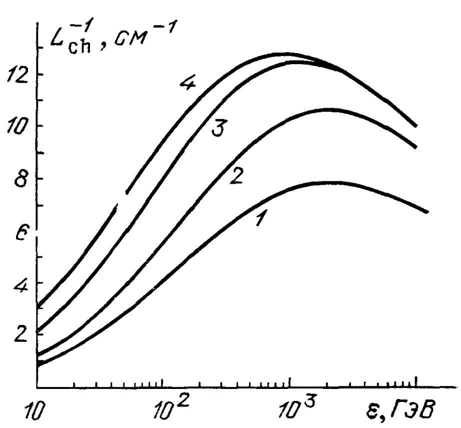

Рис. 3. Зависимость от энергии обратной характерной длины потерь энергии $L_{\rm ch}^{-1} = I(\varepsilon)/\varepsilon$ в Si ⟨110⟩ ($T=293$ К, *1*), в алмазе ⟨111⟩ ($T=293$ К, *2*), в Ge ⟨110⟩ ($T=280$ К, *3*) и Ge ⟨110⟩ ($T=100$ К, *4*)

В этом случае вклад дают значения параметров, обеспечивающие минимальную величину λ, т. е. при усреднении в (3.5) работает область $|\rho| \sim u_1$, в которой максимально электрическое поле и параметр $\varkappa(\rho) \approx \approx \varkappa_1$, и спектр родившихся частиц представляет собой узкий $(\Delta y \sim \varkappa_1^{1/2})$ пик, расположенный в $y = 1/2$, так что обе частицы уносят одинаковую $(\varepsilon = \omega/2)$ энергию. В соответствии со сказанным полная (проинтегрированная по ε) вероятность рождения пары фотоном в кристалле при $\varkappa_1 \ll 1$ имеет вид

$$W_e^F = c_2 \frac{\alpha}{l_1} \frac{u_1^2}{S} \varkappa_1^{1/2} \exp\left(-\frac{8}{3\varkappa_1}\right), \tag{3.11}$$

где фигурирует длина формирования процесса на соответствующем расстоянии от оси $l_1 = mu_1/V_0$; в потенциале (3.7) имеем $c_2 \approx 3$. Формула (3.11) неплохо описывает всю припороговую область вплоть до $\varkappa_1 \sim 1$, когда эффект рождения пары в поле оси становится заметным. Оценка пороговой энергии [17] следует из условия $\varkappa_1 \sim 1$

$$\omega_b = \frac{m^3 u_1}{V_0} \sim \frac{m^3 u_1 d}{Z\alpha}, \tag{3.12}$$

т. е. эффект раньше всего проявляется с ростом энергии фотона в веществах с большим Z и малыми u_1 и d. Из используемых кристаллов минимальное значение пороговой энергии достигается в вольфраме, для которого оценка (3.12) дает $\omega_b \sim 10$ ГэВ. Поскольку $\omega_b \propto m^3$, рождение пар более тяжелых частиц фотоном за счет рассматриваемого механизма может происходить лишь при недостижимо больших энергиях; например, для рождения $\mu^+\mu^-$-пары в вольфраме имеем $\omega_b(\mu^+\mu^-)\sim 10$ ГэВ$\cdot(m_\mu/m)^3\sim 10^8$ ГэВ. В таблице приведены значения энергии ω_t, при которой вероятность рождения e^+e^--пар в поле оси сравнивается с соответствующей величиной W_{BH} в аморфной среде: $W_e^F(\omega_t)=W_{BH}$. Вероятность $W_e^F(\omega)$ приведена на рис. 4 для ряда веществ в области энергий, где еще продолжается ее рост. При дальнейшем увеличении энергии фотона эта вероятность достигает максимума, после чего медленно спадает, так что общая форма кривой энергетической зависимости $W_e^F(\omega)$ напоминает график $L_{ch}^{-1}(\varepsilon)$ (см. рис. 3). Для максимального значения $(W_e^F)_{max}$ справедлива формула (3.9) с тем различием, что $c_\gamma\to c_e$. Постоянная c_e также слабо зависит от вещества,

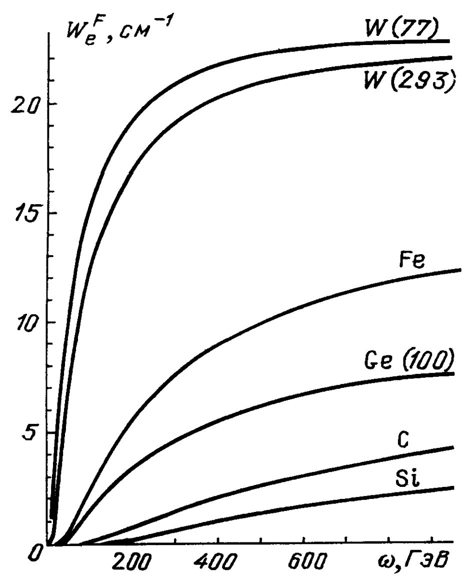

Рис 4 Вероятность рождения пары фотоном при угле влета $\vartheta_0=0$ относительно оси ⟨111⟩ (для Ge ось ⟨110⟩). Цифры в скобках означают температуру кристалла, там, где они отсутствуют, T=293 K

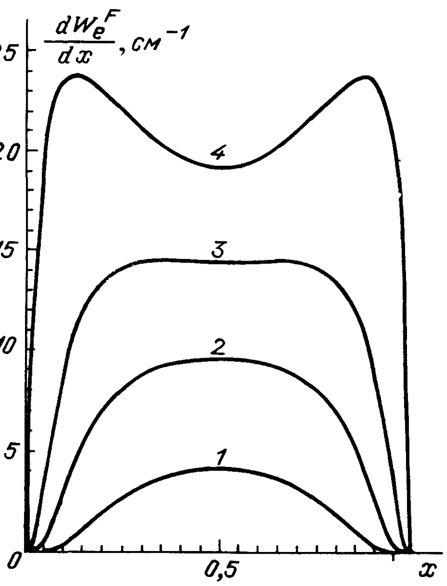

Рис. 5 Распределение по энергии ε одной из частиц родившейся пары ($x=\varepsilon/\omega$) для оси ⟨111⟩ в вольфраме T=293 K, $\vartheta_0=0$, ω (ГэВ) = =25 (*1*), 50 (*2*), 100 (*3*) и 500 (*4*)

изменяясь от 0,9 до 1,1 для обычно используемых кристаллов. Справедливой остается и оценка (3.10) для максимального усиления эффекта рождения пар в поле относительно аморфной среды $r_e^{max}=(W_e^F/W_{BH})_{max}$. Вычисленные значения r_e^{max} (см. [14]) близки к значениям r_γ^{max}, приведенным в таблице. С ростом частоты фотона изменяется и распределение родившихся частиц по энергии: имевшийся для сравнительно низких энергий пик при $\varepsilon=\omega/2$ постепенно переходит в широкое плато, в середине которого затем возникает провал, что по форме напоминает уже бете-гайтлеровский спектр. Указанные изменения можно проследить на рис. 5.

Полную вероятность рождения пары при $\vartheta_0\ll V_0/m$ можно записать согласно (3.4) в виде $W_e=F_1+(m\vartheta_0/V_0)^2F_2$. Представление о величине поправки дает рис. 6, где отношение F_2/F_1 приведено для различных веществ в зависимости от энергии. Отметим важный для понимания ориентационной (от угла ϑ_0) зависимости вероятности факт-изменение знака поправки при некоторой энергии ω_1, для которой [14] можно получить оценку: $\omega_1\approx\omega_b\cdot(7{,}2-7{,}5)$, где ω_b — пороговая энергия, определенная в (3.12). Ясно, что когда с ростом ω величина F_2 становится отрицательной, вероятность W_e оказывается (и остается & дальнейшем) максимальной при $\vartheta_0=0$.

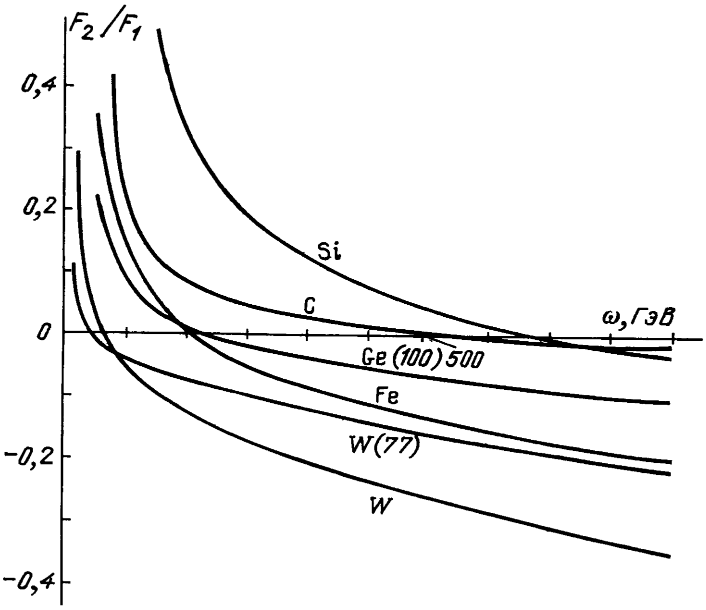

Рис. 6. Отношение $F_2/\widetilde{F}_1$, характеризующее величину поправки к пределу постоянного поля. Обозначения такие же, как на рис. 4

4. Излучение и рождение пар при $\vartheta_0 > V_0/m$. Сделанные в начале предыдущего раздела оценки фазы A_1 остаются справедливыми и при $\vartheta_0 \gtrsim \vartheta_V$, только теперь множитель в двойной сумме $(\vartheta_V/\vartheta_0)^2 \lesssim 1$, так что вклад дают значения $|q_\parallel \tau| \sim 1$. Если $\vartheta_0 \gg \vartheta_V$, то указанный множитель мал, член с двойной суммой из A_1 можно в формулах (2.6), (2.8) опустить в предэкспоненту, после чего интегралы по τ берутся элементарно и (см. [12, 14]) воспроизводятся формулы когерентной теории (КТ) излучения и рождения пар в кристаллах.

При $\chi_s(\varkappa_s) \gg 1$ можно из общих формул (2.6), (2.8) получить выражения, аналогичные формулам КТ, но имеющие более широкую область применимости по углу влета. Здесь уместно воспользоваться упомянутой выше аналогией с процессами в поле плоской электромагнитной волны, вероятности которых зависят от интенсивности волны ξ^2, характеризующей силу взаимодействия (аналог параметра ρ, см. (1.1), (1.2)) и величины $\lambda = 2Qp/m^2$, где p_μ — 4-импульс частицы, Q_μ — волны. Согласно [9] при $\lambda \gg 1$ точный (без разложения по ξ^2) результат отличается от борновского ($\xi^2 \to 0$) заменой в главных по λ членах: $\lambda \to \widetilde{\lambda} = 2Qp/m^2_{\text{eff}}$, где $m^2_{\text{eff}} = m^2(1+\xi^2)$ — эффективная масса частицы в поле волны. В кристалле величина λ при заданном значении q равняется $2\varepsilon|q_\parallel|/m^2$ и для $|q_\parallel| \sim \vartheta_0/a_s$ имеем оценку $\lambda \sim \chi_s\vartheta_0/\vartheta_V$, т. е. при $\chi_s \gg 1$ эта величина оказывается большой уже при $\vartheta_0 \sim \vartheta_V$. Из (2.6), (2.8) находим (детали вычислений см. в [14])

$$\frac{dW_\gamma^{m\,\mathrm{coh}}}{d\omega} = \frac{\alpha}{4\varepsilon^2}T^{(-)}, \qquad \frac{dW_e^{m\,\mathrm{coh}}}{d\varepsilon} = \frac{\alpha}{4\omega^2}T^{(+)}, \tag{4.1}$$

$$T^{(\pm)} = \sum_{\mathbf{q}} |G(\mathbf{q})|^2 \frac{q_\perp^2}{q_\parallel^2}\left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \pm \frac{4\beta(1-\beta)}{1+(\rho/2)}\right]\vartheta(1-\beta),$$

где

$$\beta=\frac{\omega m_*^2}{2\varepsilon\varepsilon'|q_\parallel|},\quad m_*^2=m^2\left(1+\frac{\rho}{2}\right),\quad \frac{\rho}{2}=\sum_{\mathbf{q},q_\parallel\neq 0}|G(\mathbf{q})|^2\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{m^2q_\parallel^2}. \tag{4.2}$$

Параметр ρ в форме (4.2) получается при вычислении в приближении прямолинейной траектории согласно определению (1.1). Для вольфрама (T=293 K, ось $\langle 111\rangle$) имеем из (4.2) $\rho/2\approx 1{,}04(V_0/m\vartheta_0)^2$, а для Ge ($T$=100 K, ось $\langle 110\rangle$) $\rho/2\approx 1{,}87(V_0/m\vartheta_0)^2$ (ср. оценку (1.2)). При $\vartheta_0\gg\gg\vartheta_V$ ($\rho\ll 1$) выражения модифицированной КТ (4.1) переходят в формулы стандартной КТ [1, 2, 6].

Интегрируя $\omega dW_\gamma^{\mathrm{mcoh}}/d\omega$ (4. 1) по частоте, находим для полной интенсивности излучения в этом приближении:

$$I^{\mathrm{m\,coh}}=\frac{\alpha}{4}\sum_{\mathbf{q}}|G(\mathbf{q})|^2\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{q_\parallel^2}F(\widetilde{\lambda}),\quad \widetilde{\lambda}=\frac{2\varepsilon|q_\parallel|}{m_*^2}, \tag{4.3}$$

где

$$F(x)=\left[\ln(1+x)-\frac{x(2+3x)}{2(1+x)^2}\right]\left[1-\frac{8(3+x)}{x^2(2+\rho)}\right]+$$
$$+\frac{x}{(1+x)^2}\left[\frac{8}{2+\rho}+\frac{x(3+2x)}{3(1+x)}\right].$$

Полная вероятность рождения пары имеет вид

$$W_e^{\mathrm{m\,coh}}=\frac{\alpha}{2\omega}\sum_{\mathbf{q}}|G(\mathbf{q})|^2\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{q_\parallel^2}f(z)\,\vartheta(1-z), \tag{4.4}$$

где

$$z=\frac{2m_*^2}{Qk}=\frac{2m_*^2}{\omega|q_\parallel|},$$

$$f(x)=\left(1+\frac{2x-x^2}{\rho+2}\right)\ln\frac{1+(1-x)^{1/2}}{1-(1-x)^{1/2}}-\left(1+\frac{2x}{\rho+2}\right)(1-x)^{1/2}.$$

Характер спектрального распределения определяется величиной $\lambda_m=2\varepsilon|q_\parallel|_{\min}/m_*^2$ (в случае рождения пар $\lambda_m=\omega|q_\parallel|_{\min}/2m_*^2$). Рассмотрим для определенности задачу излучения, тогда для величины β из (4.1) с учетом сходимости суммы $\sum_{\mathbf{q}}$ имеем оценку $\beta\sim u/\lambda_m$, где $u=\omega/(\varepsilon-\omega)$. Если $\lambda_m\lesssim 1$, то излучаются частоты с $u\lesssim 1$. С ростом энергии или угла ϑ_0 растет и величина λ_m, а спектр становится все более жестким. При $\lambda_m\gg 1$ для частот $u\sim 1$ имеем $(\varepsilon/\varepsilon'+\varepsilon'/\varepsilon)\sim 1$, $\beta\ll 1$, а для $u\sim\lambda_m$ $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\sim\sim u\gg 1$, $\beta\sim 1$, т. е. при $\lambda_m\gg 1$ спектральное распределение имеет резко выраженный пик вблизи кинематического предела при $\omega\approx\varepsilon\lambda_m(1+\lambda_m)^{-1}$ с относительно малой шириной $\Delta\omega\sim\varepsilon/\lambda_m$. Подчеркнем, что $\Delta\omega$ не зависит от энергии, так как $\lambda_m\propto\varepsilon$. Аналогично ведет себя и распределение по энергии одной из частиц в рождении пар. Единственное отличие связано с симметрией этого спектра относительно точки $y=\varepsilon/\omega=1/2$ $(\beta^{-1}\propto y(1-y))$, поэтому при $\lambda_m\gg 1$ имеются два пика: вблизи $y=1/\lambda_m$ и $1-y=1/\lambda_m$ с шириной $\Delta\varepsilon\sim\omega/\lambda_m$, т. е. одна из частиц пары уносит почти всю энергию начального фотона. Поскольку для всех частот (энергий) при $\lambda_m\gg 1$ выполняется соотношение $(\varepsilon/\varepsilon')+(\varepsilon'/\varepsilon)\gg\beta$, то выражение для $T^{(\pm)}$ в (4.1) упрощается:

$$T^{(\pm)} \underset{\lambda_m \gg 1}{\approx} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \sum_{\mathbf{q}} |G(\mathbf{q})|^2 \frac{q_\perp^2}{q_\parallel^2} \vartheta(1-\beta). \tag{4.5}$$

С помощью (4.1), (4.5) легко оценить высоту пика. Например, для спектра интенсивности $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\omega = \omega \mathrm{d}W_\gamma/\mathrm{d}\omega$ находим

$$\frac{\mathrm{d}\,I_{\max}}{\mathrm{d}\omega} \approx \frac{\alpha\rho}{2(2+\rho)} |q_\parallel|_{\min}; \tag{4.6}$$

это выражение, как и $\Delta\omega$, не зависит от энергии. Точно такую же оценку имеем и для $(\mathrm{d}W_e/\mathrm{d}y)_{\max}$ и $(\varepsilon \mathrm{d}W_\gamma/\mathrm{d}\omega)_{\max}$. В полную интенсивность дают вклад все частоты, а не только область пика, поэтому и при $\lambda_m \gg 1$ в ней сохраняется слабая (логарифмическая) зависимость от энергии частицы. Из (4.3) получаем:

$$I^{\mathrm{m\,coh}} \underset{\lambda_m \gg 1}{\approx} \frac{\alpha}{8} \rho m^2 \ln \lambda_m. \tag{4.7}$$

Фактор ρm^2 в (4.7) не зависит (см. (4.2)) и от массы частицы. Полная вероятность излучения при $\lambda_m \gg 1$ отличается от (4.7) очевидным множителем ε^{-1}.

Рассмотренный режим излучения при достаточно высоких энергиях может быть использован для создания источника жестких фотонов с хорошей монохроматичностью. Описанное поведение спектральной и полной интенсивности излучения типично для ондуляторного излучения в сугубо квантовом случае и согласуется с результатами работы [41] (раздел 3, формулы (34)—(38)). Указанные особенности спектра излучения связаны с доминирующим вкладом низших гармоник в спектре эквивалентных фотонов в случае $\lambda_m \gg 1$, при этом существенной становится его дискретность. Такое поведение коренным образом отличает его от спектра эквивалентных фотонов в бете-гайтлеровском случае, где он непрерывен и простирается до сколь угодно малых частот. В результате как форма спектра, так и зависимость от энергии полной интенсивности излучения в этих двух случаях существенно различны.

Расчет излучения в кристаллах в рамках КТИ ($\rho \ll 1$) проведен в работе [42] для довольно больших значений $\lambda_m \sim 10$ с учетом разбросов в падающем пучке. Полученные кривые (см. рис. 7, 8 в [42]) наглядно демонстрируют обсуждавшиеся выше особенности спектров излучения.

Отметим еще, что все формулы КГ можно легко получить, исходя из вида потока $\mathbf{J}_q$ (1.5) и известных выражений (см., например, [8]) для комптоновского рассеяния, характеризуемого сечением $\sigma_{\mathrm{com}}(\lambda)$, $\lambda = 2Qp/m^2$ и двухфотонного рождения пары ($\sigma_{\gamma\gamma}(x)$, $x = 2m^2/Qk$). Например, найденные полные вероятности когерентных процессов можно представить в виде

$$W_\gamma^{\mathrm{coh}} = \sum_{\mathbf{q}} |\mathbf{J}_q| \sigma_{\mathrm{com}}(\lambda), \quad W_e^{\mathrm{coh}} = \sum_{\mathbf{q}} |\mathbf{J}_q| \sigma_{\gamma\gamma}(x) \vartheta(1-x) \tag{4.8}$$

в полном соответствии с картиной явления в терминах эквивалентных фотонов. Пересчет вероятностей в систему покоя кристалла соответствует замене $\gamma_v \to 1$ в выражении для потока $\mathbf{J}_q$ в (1.5). Аналогично могут быть записаны и спектры, причем наличие $\vartheta(1-\beta)$ в (4.1) отражает парциальный закон сохранения: $Q+p=k+p'$ для излучения и $Q+k=p+p'$ для рождения пар.

5. Ориентационная зависимость характеристик излучения и рождения пар. Приведенные в разделах 3, 4 приближенные выражения (3.4), (4.1) для малых и больших по сравнению с ϑ_V углов влета ϑ_0 позволяют находить ориентационную зависимость процессов излучения и рождения пар в кристалле всюду, кроме промежуточной области $\vartheta_0\sim\sim\vartheta_V$. В ней следует использовать, вообще говоря, более сложные формулы (2.6), (2.8), справедливые при любых углах ϑ_0. Однако в первом приближении можно для получения хода кривых при $\vartheta_0\sim\vartheta_V$ ограничиться сформулированной ,в [15] процедурой интерполяции.

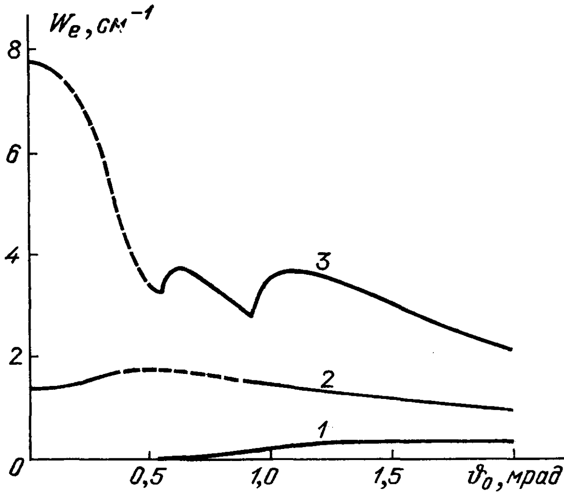

Рис. 7. Ориентационная зависимость вероятности рождения пары фотоном в Ge при $T=100$ К для $\omega=30$ (*1*), 100 (*2*) и 1000 ГэВ (*3*). Угол влета фотона ϑ_0 отсчитывается от оси $\langle 110\rangle$

Характер ориентационной зависимости меняется с энергией начальной частицы. Так, для полной вероятности рождения пары фотоном, пока $\omega\ll\omega_b$ ($\varkappa_1\ll 1$, см. (3.12)), эффекты усредненного поля оси малы (см. (3.11)) и специфика кристалла проявляется в действии механизма когерентного рождения пар, который, как это следует из (4.4), отличен от нуля при $\vartheta_0>\vartheta_V/\varkappa_1\gg\vartheta_V$, когда $\rho\ll 1$, и вероятность описывается обычными формулами КТ. На рис. 7 ситуации, когда $\varkappa_1<1$, соответствует кривая *1*. С ростом энергии включается механизм рождения пар усредненным полем оси, а максимум в ориентационной зависимости смещается в сторону меньших углов ϑ_0. Кривая *2* на рис. 7 отвечает случаю, когда $\omega_b<\omega<\omega_1$, и максимум пока расположен при $\vartheta_0\neq 0$. Наконец, для $\omega>\omega_1$ (кривая *3* на рис. 7) меняется знак поправки в (3.4), вероятность оказывается максимальной при $\vartheta_0=0$ и при дальнейшем росте энергии угловая ширина пика при $\vartheta_0=0$ сужается.

Ориентационная зависимость полной интенсивности излучения при $\vartheta_0\leqslant\vartheta_c$ в тонком кристалле связана с перераспределением потока падающих частиц, иначе говоря, с изменением функции распределения $F(\mathbf{r}, \vartheta_0)$ (см. (2.4)) в зависимости от угла ϑ_0. Это распределение оказывается разным для электронов (—) и позитронов (+), поэтому и излучение при $\vartheta_0\lesssim\vartheta_c$ зависит от знака заряда частицы. При $\vartheta_0=0$ находим из (2.4) для произвольного аксиально-симметричного потенциала (см. [40])

$$F_{\text{ax}}^{(-)}(\rho^2, 0)=\ln\frac{x_0}{x},\quad F_{\text{ax}}^{(+)}(\rho^2, 0)=\ln\frac{x_0}{|x_0-x|},\quad x=\frac{\rho^2}{a_s^2}. \tag{5.1}$$

При $\chi_s\lesssim 1$ вклад в полную интенсивность дает интервал значений $\eta\lesssim x\lesssim\lesssim 1$, для которого $F_{\text{ax}}^{(-)}\gtrsim\ln x_0$, $F_{\text{ax}}^{(+)}\sim 1/x_0$, откуда следует, что по сравнению со случаем равномерного распределения по поперечной координате интенсивность $I^{(-)}$ усилена при $\vartheta_0=0$ примерно в $\ln x_0$ раз, а интенсивность $I^{(+)}$ ослаблена примерно в x_0 раз. С ростом параметра χ вклад в интенсивность дают все большие расстояния от оси, в результате чего различие в интенсивности электронов и позитронов убывает.

При увеличении угла ϑ_0 от 0 до ϑ_c распределения $F_{\text{ax}}^{(\pm)}(\rho, \vartheta_0)$ постепенно приближаются к равномерному, причем $F^{(-)}$ изменяется быстрее. Соответственно ведет себя (см. [12, 40]) и полная интенсивность, уменьшаясь для электронов от максимального значения $I^{(-)}(0)$ и увеличиваясь для позитронов от $I^{(+)}(0)$. При $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$ интенсивность излучения электронов и позитронов одинакова, так как $F^{(\pm)}_{\text{ax}}(\rho, \vartheta_0 \gg \vartheta_c) = 1$ (см. (2.4)), а ее поведение зависит от энергии. Когда $\chi_1 \simeq \varepsilon V_0/m^3u_1 \ll 1$, в рамках классической теории (см. [40]) для интенсивности $I(\vartheta_0)$ при $\vartheta_0 > \vartheta_c$ получается плато: $I_{\text{cl}}(\vartheta_0 \gg \vartheta_c) = \text{const}$. Однако и при $\chi \ll 1$ для достаточно больших углов применимость классического описания нарушается. Это следует уже из полученной в [12] оценки характерных излучаемых частот, справедливой вплоть до значений $\chi \sim 1$: $\omega/(\varepsilon - \omega) \sim \sim (1 + \rho^{-1}(\vartheta_0))^{1/2}\chi$. Видно, что для $\vartheta_0 \gg \vartheta_V$ ($\rho(\vartheta_0) \ll 1$) излучаются частоты с $\omega \sim \varepsilon$, и процесс не может описываться классически. В то же время для $\rho(\vartheta_0) \ll 1$ справедлива уже когерентная теория и интенсивность дается формулой (4.3), если в ней положить $\rho = 0$. Формальный предел полученного так выражения при $\vartheta_0 \to 0$ ($z \ll 1$, $F(z) \propto z^2$) дает для полной интенсивности классическое выражение $I_{\text{cl}}(\vartheta_0 \gg \vartheta_c)$, поэтому при $\chi_1 \ll 1$ поведение $I(\vartheta_0)$ описывается формулами КТИ для всех углов $\vartheta_0 \gg \vartheta_c$. Следующие члены разложения по z определяют квантовые поправки, причем из-за лишней степени $|q_\parallel|$ ($z \propto |q_\parallel|$) в числителе сходимость суммы типа (4.3) будет обеспечиваться (см. (2.9), (2.12)) фактором $\exp(-q^2u_1^2)$, т. е. вклад дадут $|q_\parallel| \sim \vartheta_0/u_1$. Относительная величина поправочных членов дается характерным значением $z \sim \varepsilon|q_\parallel|/ /m^2 \sim \varepsilon\vartheta_0/u_1m^2 \approx \chi_1\vartheta_0/\vartheta_V$. Она станет большой при $\vartheta_0 \sim \vartheta_V/\chi_1$, что и определяет угловой размер плато в поведении $I(\vartheta_0)$. С ростом энергии это плато сужается и при $\chi_1 \sim 1$ полностью исчезает.

Типичный вид ориентационной зависимости интенсивности излучения электронов и позитронов при $\chi_s \sim 1$ в тонком кристалле приведен на рис. 8. Кривая *I* получена по приведенным выше формулам. Видно,

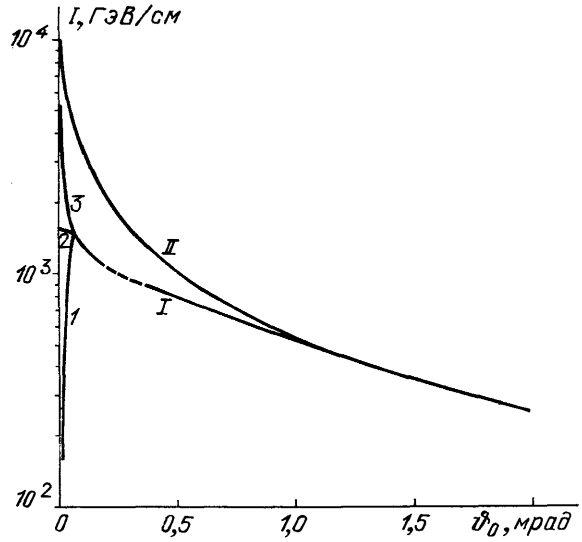

Рис. 8. Ориентационная зависимость интенсивности излучения в Ge ⟨110⟩ ($T=100$ K); $\varepsilon=150$ ГэВ. Кривая *I* получена в соответствии с формулами настоящей работы. *1* — для позитронов, *3* — для электронов, *2* — для равномерного распределения. Кривая *II* получена по формулам стандартной теории когерентного излучения

что при $\vartheta_0 < \vartheta_c$ интенсивность существенно зависит от сорта частиц и угловой ширины пучка $\Delta\vartheta_0$: кривые *1* и *3* соответственно описывают интенсивности излучения позитронов и электронов (при $\Delta\vartheta_0 = 0$). Кривая *2* описывает случай равномерного распределения по координатам, что соответствует большому угловому разбросу в падающем пучке ($\Delta\vartheta_0 \sim \sim \vartheta_c$). При $\vartheta_0 > \vartheta_c$ все три кривые сливаются в одну. Кривая *II* на рис. 8 построена по стандартной теории КТИ. Из сравнения ее с *I* можно судить об области применимости этой теории при $\chi \sim 1$. Уже при таких χ квантовые эффекты отдачи стали определяющими. На рис. 8 это выразилось в большом отличии значений интенсивности при $\vartheta_0 = 0$ на кривых *II* (совпадение в этой точке с классической величиной) и *2*.

6. Электрон-фотонные ливни в ориентированных кристаллах. Если толщина кристалла оказывается сравнимой с характерной длиной потерь энергии $L_{ch}(\varepsilon)$, определенной в (1.8), или когда начальной частицей является фотон с длиной $W_e^{-1}(\omega)$, на которой с заметной вероятностью происходит рождение пары, то в кристалле развивается электромагнитный каскад. В то же время в этом случае уже нельзя, как это делалось для тонких кристаллов, пренебречь изменением функции распределения (ФР) по мере проникновения пучка частиц вглубь кристалла. Основными процессами, определяющими изменение ФР, являются многократное рассеяние и радиационные потери энергии. Относительная роль этих процессов в кинетике, в свою очередь, зависит от энергии. Действительно, величина $L_{ch}(\varepsilon)$ падает с энергией вплоть до $\varepsilon \sim 1$ ТэВ, где она (см. рис. 3) достигает минимального значения, тогда как длина деканалирования $l_d(\varepsilon)$

$$l_d(\varepsilon) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{u_0 \varepsilon}{m^2} L_{rad} \tag{6.1}$$

— расстояние, на котором среднеквадратичный угол многократного рассеяния в соответствующей аморфной среде,— становится равным углу Линдхарда ϑ_c, растет $\propto \varepsilon$. Поэтому при некоторой энергии [36] $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ эти длины сравниваются: $l_d(\varepsilon_{cr}) = L_{ch}(\varepsilon_{cr})$. Для Ge, например, $\varepsilon_{cr} \approx 40$—$60$ ГэВ в зависимости от оси и температуры. При $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ в кинетике доминируют эффекты многократного рассеяния, а при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ — эффекты радиационных потерь. Проведенный в работе [36] анализ кинетики, обусловленной многократным рассеянием ($\varepsilon < \varepsilon_{cr}$), показал, что на больших толщинах $l \gg l_d$ распределение в поперечном фазовом пространстве оказывается равномерным. Этот результат позволил (см. [36]) решить для $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ задачу о радиационных потерях в толстом кристалле. При $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ кинетика усложняется, однако и здесь часто оправдывается предположение о равномерном распределении частиц по поперечной (к оси) координате. Так, если угловой разброс в падающем пучке $\Delta\vartheta_0 \sim \vartheta_c$, то уже при влете в кристалл подавляющее большинство электронов оказывается в надбарьерных состояниях, когда $F(\rho, \vartheta_0) = 1$ (см. (2.4)). Иногда, в кристаллах промежуточной толщины, может существенно проявляться и излучение небольшой группы электронов, захваченных в канал. К этому вопросу мы вернемся ниже, а пока будем считать распределение по поперечной координате равномерным для всех частиц.

Зависимость процессов рождения пар и излучения в кристаллах от угла влета ϑ_0 приводит к ориентационной зависимости и в развитии ливней. Для рассматриваемых энергий угол разлета частиц в элементарном процессе $\sim 1/\gamma \ll \vartheta_V$, а многократное рассеяние подавлено. Поэтому можно считать, что развитие ливня происходит в направлении импульса начальной частицы *) и определяется механизмом, присущим данному углу влета ϑ_0. Мы рассмотрим ливни в полях осей **) ($\vartheta_0 \ll \vartheta_V$), когда эффекты усиления максимальны.

*) Следует иметь в виду и оценивать в конкретных ситуациях возможность возрастания роли многократного рассеяния и изменения направления движения по сравнению с исходным на очень больших толщинах из-за значительного уменьшения средней энергии частиц.

**) Обсуждались также ливни в когерентной области; см. [43] и цитированную там литературу.

Теория каскадных ливней в аморфном веществе была сформулирована и развита в работах [44—46]. В этих работах были получены кинетические уравнения, описывающие развитие каскада, и найдено их аналитическое решение в случае, когда учитываются только процессы излучения и рождения пар [46], т. е. в качестве ядер в уравнениях использовались бете-гайтлеровские характеристики процессов. В последующие годы было опубликовано большое число работ, посвященных развитию этой теории (их обзор см., например, в [47]).

Отметим особенности развития ливня в поле осей, отличающие его от аморфного случая и обусловленные изменением в кристалле процессов излучения и рождения пар.

1) Характерные длины, на которых происходит развитие ливня, здесь могут быть значительно меньше, чем в соответствующем аморфном веществе (разориентированном кристалле). 2) Существует довольно резкая граница ω_{b} (3.12) по частотам фотона, ниже которой вероятность фоторождения пары в поле оси падает экспоненциально. В то же время если энергия частицы $\varepsilon\sim\omega_{\mathrm{b}}$, то она интенсивно излучает за счет обсуждаемого механизма. 3) Как вероятность рождения пары $W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{F}}(\omega)$, так и характерная длина потерь энергии $L_{\mathrm{ch}}(\varepsilon)$ зависят от энергии, тогда как для бета-гайтлеровского процесса соответствующие величины W_{BH} и L_{rad} — константы. 4) При $\varepsilon\lesssim\omega_{\mathrm{b}}$, как отмечалось выше, испускается большое число относительно мягких фотонов, не влияющих на энергетические потери излучающей их частицы. Тем не менее эти фотоны могут рождать пары за счет бета-гайтлеровского механизма (т. е. с относительно малой вероятностью). В результате развивается особый ливень, обусловленный смешанным механизмом, в котором большое число фотонов может родить заметное число пар, несмотря на малую вероятность процесса фоторождения. При этом, естественно, число фотонов в ливне будет заметно превышать число заряженных частиц. Следует различать жесткие ливни, когда энергия $\varepsilon\gg\omega_{\mathrm{b}}$, и мягкие ливни, когда $\varepsilon\lesssim\omega_{\mathrm{b}}$.

Анализ электрон-фотонных ливней в полях осей кристаллов в случае равномерного распределения был проведен в работе [27]. Для жесткого ливня удалось получить аналитическое решение кинетических уравнений. Как известно, число частиц в ливне с энергией выше некоторой экспоненциально нарастает вплоть до оптимальной толщины $t=t_{\mathrm{op}}$. Мы приведем здесь только явные выражения для решений вблизи t_{op}, которая дается выражением

$$t_{\mathrm{op}}=\frac{2}{5}\int_0^{\eta}\mathrm{d}y\left(\frac{1}{a(y)}+\frac{1}{b(y)}\right), \tag{6.2}$$

где введены следующие переменные и функции:

$$\eta=\ln\frac{\omega_0}{\omega},\quad \zeta=\ln\frac{\omega_0}{\varepsilon},\quad a(\zeta)=L_{\mathrm{ch}}^{-1}(\omega_0 e^{-\zeta}),$$
$$b(\eta)=W(\omega_0 e^{-\eta}),\quad N(\omega,t)=\frac{1}{\omega_0}N(\eta,t); \tag{6.3}$$

здесь ω_0 — энергия начальной частицы, например, фотона. Вблизи $t=t_{\mathrm{op}}$ число фотонов (электронов) с энергией η $N_\gamma(\eta,t)$ $(N_{\mathrm{e}}(\eta,t))$ имеет вид гауссова распределения по времени (глубине):

$$N_\gamma(\eta,t)=\frac{2e^{2\eta}}{5(2\pi d)^{1/2}b(\eta)}\exp\left[-\frac{(t-t_{\mathrm{op}})^2}{2d(\eta)}\right],$$

$$N_e(\eta, t) = \frac{b(\eta)}{a(\eta)} N_\gamma(\eta, t), \tag{6.4}$$

$$d(\eta) = \frac{4}{125} \int_0^\eta dy \left(\frac{7}{a^2(y)} - \frac{1}{a(y)\,b(y)} + \frac{17}{b^2(y)} \right).$$

При решении задачи был сделан ряд упрощающих предположений, позволивших в адиабатическом приближении учесть зависимость вероятностей от энергии. Это приводит к погрешности $\lesssim 15\%$, что было проконтролировано проведенным численным моделированием жесткого каскада. Если нижняя граница энергии регистрируемых частиц каскада $\varepsilon_t(\omega_t) \ll \omega_b$, то при достаточной толщине кристалла на некоторой глубине средняя энергия частиц оказывается $\varepsilon(\omega) \lesssim \omega_b$. Тогда действует в основном бете-гайтлеровский механизм рождения пар, однако излучение частиц в поле монокристалла все еще остается достаточно интенсивным ($b \sim W_{\text{BH}}$, $a \gg L_{\text{rad}}^{-1}$).

Ясно, что основное число фотонов излучается на характерной длине

$$l \sim \int_0^\eta \frac{dy}{a(y)} = \int_0^\eta dy L_{\text{ch}}(\varepsilon_0 e^{-y}) \ll t_{\text{op}}.$$

Затем имеется довольно широкий интервал t, на котором число фотонов остается практически постоянным (плавно падая из-за поглощения) вплоть до длины $t \sim W_{\text{BH}}^{-1}$, на которой их превращение в пары становится заметным. В рассматриваемой ситуации следует различать два существенно разных случая. В первом случае начальная энергия $\omega_0(\varepsilon_0) \gg \omega_b$ и развивается смешанный каскад. Во втором $\omega_0(\varepsilon_0) \sim \omega_b$ и развивается мягкий каскад.

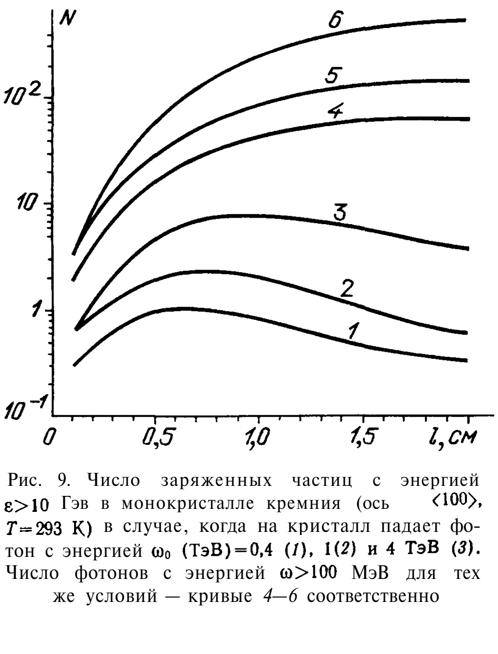

Рис. 9. Число заряженных частиц с энергией $\varepsilon > 10$ Гэв в монокристалле кремния (ось $\langle 100 \rangle$, $T = 293$ К) в случае, когда на кристалл падает фотон с энергией ω_0 (ТэВ) = 0,4 (*1*), 1(*2*) и 4 ТэВ (*3*). Число фотонов с энергией $\omega > 100$ МэВ для тех же условий — кривые *4*—*6* соответственно

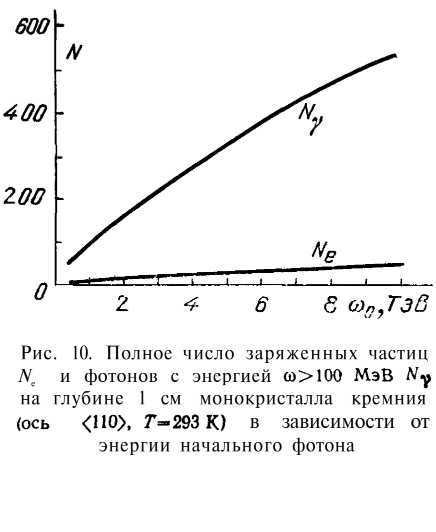

Рис. 10. Полное число заряженных частиц N_e и фотонов с энергией $\omega > 100$ МэВ N_γ на глубине 1 см монокристалла кремния (ось $\langle 110 \rangle$, $T = 293$ К) в зависимости от энергии начального фотона

Смешанный каскад изучался с помощью численного моделирования. Полученная этим методом зависимость числа заряженных частиц и фотонов от глубины развития ливня в кристалле кремния для разных энергий начального фотона приведена на рис. 9. Нижняя граница энергии фотонов в каскаде была выбрана $\omega_t = 100$ МэВ, что примерно соответствует эффективному порогу фоторождения электрон-позитронной пары в веществе. На рис. 9 видно, что ,в соответствии со сказанным выше число фотонов выходит на плато. Нижняя граница энергии заряженных частиц была взята $\varepsilon_f=10$ ГэВ. С одной стороны, этот выбор обеспечивает применимость использованного для описания излучения магнитотормозного приближения. С другой, при энергии $\varepsilon<10$ ГэВ излучаются в основном фотоны с энергий $\omega<\omega_f=$ 100 МэВ. На рис. 10 приведена зависимость числа фотонов N_γ с энергией $\omega>100$ МэВ и полного числа заряженных частиц N_e от энергии начального фотона ω_0, влетающего в монокристалл кремния толщиной $L=l$ см под малым углом $\vartheta_0\ll V_0/m$ к оси $\langle 110\rangle$. Интересно, что отношение числа фотонов N_γ к числу заряженных частиц N_e практически не зависит от начальной энергии и составляет $N_\gamma/N_e\approx 11$. Зависимости, подобные представ ленным на рис. 10, позволят при детектировании сверхжестких фотонов [48] определять их энергии с хорошей точностью.

Развитие мягкого каскада в основном сводится к последовательному излучению фотонов заряженными частицами. В области энергий, отвечающей мягкому каскаду, полная вероятность излучения $W_\gamma(\varepsilon)$ и величина $L_{ch}(\varepsilon)$ меняются очень слабо. Эти особенности магнитотор мозного механизма излучения можно использовать для приближенного вычисления некоторых характеристик каскада, что оказывается весьма полезным ввиду сложности полного расчета развития ливня. Одной из таких характеристик является средняя энергия заряженных частиц в ливне на данной глубине $\langle\varepsilon(l)\rangle$. Соответствующий подход развит в работе [18], где показано также, что учет дисперсии распределения по e слабо меняет результат для $\langle\varepsilon(l)\rangle$. Кроме того, в [18] найден и спектр излучения в пренебрежении дисперсией, но с учетом средних потерь энергии. Такое приближенное описание спектральных и полных потерь оказывается вполне удовлетворительным. Это было подтверждено в [27] численным моделированием мягкого каскада для условий эксперимента [29, 30], в котором исследовалось излучение и рождение пар в кристаллах Ge (T=100 K, ось $\langle 110\rangle$, $\varepsilon_0=150$ ГэВ, $\omega_0\leqslant 155$ ГэВ) толщиной $L=0{,}04$ и 0,14 см. В частности, найденные в [27] значения $\langle\varepsilon(0{,}04)\rangle=0{,}66\,\varepsilon_0$ и $\langle\varepsilon(0{,}14)\rangle=0{,}26\,\varepsilon_0$ практически совпадают с результатами работы [18] и эксперимента [29, 30]. Полезными оказываются также простые оценки числа вторичных частиц для $l\lesssim L_{ch}\ll L_{rad}$. Например, для начального электрона в рамках принятого подхода имеем (см. [27]) число фотонов на глубине l

$$N_\gamma(l)=\int_0^l W_\gamma(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\langle\varepsilon(l)\rangle}^{\varepsilon_0} W_\gamma(\varepsilon)\,L_{ch}(\varepsilon)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon}=\int_0^\eta \frac{W_\gamma(\varepsilon_0 e^{-y})}{a(y)}\,\mathrm{d}y\equiv\overline{W}_\gamma l, \tag{6.5}$$

$$\eta=\ln\frac{\varepsilon_0}{\langle\varepsilon(l)\rangle},$$

а для числа вторичных заряженных частиц получаем

$$N_e(l)=2\int_0^l W_e^{BH}N_\gamma(t)\,\mathrm{d}t=2W_e^{BH}\int_0^l W_\gamma(t)(l-t)\,\mathrm{d}t\approx$$
$$\approx W_e^{BH}\overline{W}_\gamma l^2\approx W_e^{BH}N_\gamma(l)\,l. \tag{6.6}$$

Например, в условиях эксперимента [29, 30] оценки (6.5), (6.5) дают *) $N_\gamma(0{,}14)\approx 16{,}8$, $N_e(0{,}14)\approx 0{,}67$ и $N_\gamma(0{,}04)\simeq 4{,}4$, $N_e(0{,}04)\approx 0{,}05$, т. е. излу-

*) Численный расчет каскада [27] дал для числа фотонов с $\omega>\omega_f=100$ МэВ, $N_\gamma(0{,}14)\approx 13{,}9$ и $N_\gamma(0{,}04)\approx 3{,}9$, а для полного числа фотонов — $N_\gamma(0{,}14)\approx 17{,}3$ и $N_\gamma(0{,}04)\approx 4{,}4$, что хорошо согласуется с приведенными оценками; такое же согласие имеется и для числа вторичных заряженных частиц.

чается много фотонов, а для L=0,14 см заметным оказывается и число вторичных заряженных частиц. Таким образом, уже при этих энергиях процесс носит каскадный характер. Когда, как в [24], начальной частицей является фотон, учет каскада приводит к разительному изменению распределения по энергии (см. рис. 6 в [27]) рожденных частиц из-за излучения ими фотонов по сравнению с тем, который наблюдался бы в тонком кристалле.

Обратимся теперь к ситуации, когда распределение по поперечной координате не может считаться одинаковым для всех частиц пучка, что существенно сказывается на форме спектра энергетических потерь. Это проявилось в эксперименте [31], в котором исследовалось излучение в кристалле Ge (ось $\langle 110\rangle$, T=100 К, ε_0=150 ГэВ) толщиной $L=1{,}85\cdot 10^{-2}$ см. Для этих условий длина деканалирования $l_d(\varepsilon_0)=0{,}51$ см, а $L_{ch}(\varepsilon_0)=0{,}1$ см. Следует, однако, иметь в виду, что эти значения l_d и L_{ch} получены, строго говоря, для надбарьерного движения, когда $\varepsilon_\perp > U_0$, т. е. любые расстояния от осей доступны, а распределение по поперечным координатам равномерное. Рассмотрим частицы в канале с $\varepsilon_\perp < U_0$, тогда их движение происходит в область $x\leqslant x_1$ (используем потенциал (3.7), причем x_0=19,8; η=0,063), где x_1 определяется равенством $U(x_1)=\varepsilon_\perp$. Предполагая распределение по x равномерным во всей доступной области движения, убеждаемся, что по мере уменьшения $\varepsilon_\perp(x_1)$ многократное рассеяние возрастает $\propto(x_0+\eta)/(x_1+\eta)$ за счет увеличения средней плотности электронов и при $x_1\sim 1$ может в десятки раз $(x_0\gg 1,\ \eta\ll 1)$ превосходить аналогичную величину для надбарьерных электронов. Увеличивается, хотя и не столь быстро, интенсивность излучения, например, при $x_1=1$ в 12,5 раза по сравнению с надбарьерным значением. Таким образом, кристалл может оказаться тонким для надбарьерных электронов и толстым для части каналированных частиц. Для позитронов при уменьшении $\varepsilon_\perp$ от значения U_0 уменьшается как многократное рассеяние на ядрах, так и интенсивность излучения, так как область координат вблизи осей становится для них все менее доступной. Итак, необходимо рассмотреть сложную кинетическую задачу, не решенную до сих пор даже без учета излучения. Здесь мы проведем качественный анализ ситуации, проследив за изменением среднего значения $z=\langle\varepsilon_\perp\rangle/U_0$, считая, что в начальный момент частицы были сосредоточены при $z=z(0)<1$. Изменение z и e описывается системой уравнений

$$\frac{dz}{dl}=\frac{1}{l_d(\varepsilon)}\frac{x_0+\eta}{x_1+\eta}-f_1(\varepsilon,z),\quad \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dl}=-f_2(\varepsilon,z), \tag{6.7}$$

где

$$f_1(\varepsilon,z)=\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{x_1}\left(z-\frac{U(x)}{U_0}\right)\frac{I(x)}{\varepsilon},\quad f_2(\varepsilon,z)=\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{x_1}\frac{I(x)}{\varepsilon}. \tag{6.8}$$

Напомним, что $I(x)$—локальное значение полной интенсивности излучения в поле оси, и удобно перейти в (6.7) к переменной x_1 согласно равенству $z=U(x_1)/U_0$. Система уравнений (6.7) решалась (см. [35]) при ряде упрощающих предположений. При $\varepsilon_0=\varepsilon(0)=150$ ГэВ первый член в (6.7), учитывающий влияние многократного рассеяния, превосходит f_1 для $x_1(0)<1{,}3(z(0)<0{,}81)$, поэтому для частиц, имеющих меньшее значение $x_1(0)$, сразу (при l=0) начинается увеличение средней поперечной энергии. Для больших значений $x_1(0)$ величина $x_1(\bar{z})$ сначала уменьшается за счет излучения, однако затем вследствие уменьшения x_1 и, главным образом, из-за потери полной энергии e на некоторой глубине l начинается возрастание $x_1(z)$. В результате решения системы уравнений (6.7) оказалось, что для частиц, теряющих заметную долю полной энергии, в относительно тонком кристалле «траектории» $x_1(l)$ проходили в области значений x, ограниченной для всех $l \leqslant L$. Например, в кристалле толщиной $L_1 = 1{,}85 \cdot 10^{-2}$ см электроны, потерявшие $\Delta\varepsilon > 0{,}6\,\varepsilon_0$, имели $x_1(l) < 4{,}2$, а для $L_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ см при таких же потерях энергии $x_1(l) < 11$.

Таким образом, существует группа электронов, которые все время находятся близко от оси, в области больших напряженностей поля E. Для них заметно усилена интенсивность излучения, например, при $x_1 = 2{,}5$ и $\varepsilon = 150$ ГэВ — в 7 раз и полная вероятность излучения — в 5 раз (при тех же значениях x и ε), поэтому интенсивнее развивается и каскад. Спектр излучения в этой группе несколько жестче, чем для надбарьерных частиц, однако большие потери обусловлены не этим, а высокой кратностью излучения. Из-за большой величины многократного рассеяния и возникающей в процессе излучения заметной дисперсии распределения по ε частицы этой группы сильно «перемешиваются», так что результативно распределение по x оказывается для них равномерным*). Хотя доля частиц, входящих в эту группу, относительно невелика, тем не менее их вклад в спектр потерь энергии оказывается весьма существенным для некоторого интервала толщин.

7. Некогерентное излучение и рождение пар в кристаллах. Кроме детерминированного движения частиц во внешнем поле ориентированного кристалла происходит их рассеяние на флуктуациях потенциала, связанных с колебаниями атомов в кристаллической решетке. Это рассеяние сопровождается излучением, которое в кристаллах принято называть некогерентным. В аморфном веществе, где среднее поле равно нулю, процессы излучения и рождения пар происходят только благодаря такому рассеянию частиц. В ориентированных монокристаллах некогерентные процессы модифицируются, по сравнению с аморфным случаем, в основном по двум причинам.

Первая (геометрические факторы) обусловлена тем, что распределение по прицельным параметрам участвующих в процессе частиц оказывается в кристалле неоднородным. Так, плотность ядер цепочки «размазывается» в поперечной плоскости только благодаря тепловым (и нулевым) колебаниям: $n_N(\rho) = \exp(-\rho^2/2u_1^2)/2\pi u_1^2$. Кроме того, в задаче излучения неоднородным может быть и распределение по поперечной координате падающих частиц (перераспределение потока). При таких условиях стандартная теория тормозных процессов, в которой состояния частиц описываются плоскими волнами, оказывается некорректной, и следует применять теорию, развитую в работе [49]. В ней используется пространственно-временной подход, в котором естественным образом может быть учтена неоднородность плотности частиц.

Второй причиной является криволинейность траектории частицы в усредненном поле оси, что, в частности, приводит к перераспределению потока заряженных частиц, а при достаточно высоких энергиях может и непосредственно влиять на тормозные процессы. Это влияние связано с уменьшением длины формирования процессов за счет относительно большого поворота скорости частицы на этой длине и соответствующего увеличения углов разлета конечных частиц. Этот круг вопросов может быть изучен с помощью подхода, развитого в работе [50] для рассмотрения тормозного излучения с учетом эффектов среды и внешнего поля.

Проведем качественный анализ влияния внешнего поля на тормозное излучение. Если фотон с частотой ω излучается электроном (пози-

*) Распределение равномерное, но не такое как для надбарьерных частиц, так как сконцентрировано в ограниченной области вокруг оси.

троном) с энергией e под углом ϑ к направлению его скорости, то длина формирования этого фотона определяется соотношением (см., например, [3])

$$l_\omega \sim \frac{(\varepsilon-\omega)\gamma^2}{\varepsilon\omega(1+\gamma^2\vartheta^2)} = \frac{\gamma \lambda_c}{u\zeta}, \tag{7.1}$$

где $u=\omega/(\varepsilon-\omega)$, $\zeta = 1+\gamma^2\vartheta^2$, $\lambda_c = 1/m$. В слабых полях характерные углы излучения $\vartheta \sim 1/\gamma\,(\zeta \sim 1)$ и влиянием внешнего поля можно пренебречь, если выполняется условие

$$w l_\omega = \frac{eE}{\varepsilon} l_\omega \ll \frac{1}{\gamma}, \tag{7.2}$$

где w — ускорение частицы. Подставляя (7.1) в (7.2), имеем критерий слабости поля

$$\gamma \frac{eE}{\varepsilon} \frac{\gamma^2}{\varepsilon u} = \frac{\chi}{u} \ll 1, \tag{7.3}$$

где параметр $\chi(\rho)$ определен в (3.6). Поскольку некогерентные процессы происходят в основном на прицельных расстояниях $\rho \lesssim u_1$, где плотность ядер заметно отлична от нуля, то в качестве $\chi(\rho)$ в оценках следует использовать значение $\chi_1 \approx \varepsilon V_0/m^3 u_1$ ($\varkappa_1 = \omega V_0/m^3 u_1$ для рождения пар).

При выполнении условия (7.3) некогерентные процессы в кристаллах изменяются за счет геометрических факторов, роль которых качественно сводится к росту минимального значения переданного импульса до $q_{\min} \approx u_1^{-1}$. В случае равномерного распределения электронов имеем для сечения тормозного (некогерентного) излучения [51]:

$$d\sigma_\gamma(\omega) = \frac{4Z^2\alpha^3}{m^2} \frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon} \frac{d\omega}{\omega} \left\{ \left(\frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon-\omega} - \frac{2}{3} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\ln(183Z^{-1/3}) - g(\delta_0) - f(Z\alpha) \right] + \frac{1}{9} \right\}, \tag{7.4}$$

где функция $f(Z_\alpha)$ определяет кулоновские поправки, а функция $g(\delta)$ учитывает неоднородность распределения атомов:

$$f(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+x^2)},$$
$$g(\delta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x\, d x e^{-\delta x}}{(1+x)^2}, \quad \delta_0 = \frac{u_1^2}{a^2} \tag{7.5}$$

в потенциале Мольер $a \approx 111 Z^{-1/3} \lambda_c$. Если распределение электронов неравномерно, но градиенты плотности существенны только при $\rho \gg u_1$, сечение (7.4) необходимо умножить на фактор $n_e(0)$ ($n_e(\rho)$ — отношение плотности электронов к плотности равномерного распределения). Дифференциальное (по ε) сечение некогерентного рождения пар фотоном в кристалле при $\varkappa_1 y(1-y) \ll 1$ $(y=\varepsilon/\omega)$ получается из (7.4) заменами (2.3).

Когда $\chi/u \gg 1$, характерные углы излучения $\vartheta \gg 1/\gamma$. Эффективный угол излучения ϑ_{eff} определяется из условия самосогласованности его определения: угол отклонения частицы в поле на длине формирования не превышает ϑ_{eff} (этот вопрос проанализирован в [50]:

$$w l_\omega(\vartheta_{eff}) \sim \vartheta_{eff}, \quad \vartheta_{eff} \sim \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\chi}{u}\right)^{1/3},$$
$$\zeta \sim \left(\frac{\chi}{u}\right)^{2/3}, \quad l_\omega(\vartheta_{eff}) \sim \frac{\gamma \lambda_c}{u}\left(\frac{u}{\chi}\right)^{2/3}. \tag{7.6}$$

Отметим, что при $\chi|u \gg 1$ ни характерный угол излучения, ни длина фотона не зависят от массы излучающей частицы.

Из-за очень большой плотности ядер вблизи оси, где существенны некогерентные процессы, при больших энергиях электронов мог бы проявляться эффект Ландау—Померанчука (см., например, [3]). Поэтому для последовательной оценки ϑ_{eff} необходимо учесть еще расширение углов излучения за счет многократного рассеяния. Учитывая изменение угла отклонения частицы на длине формирования фотона как за счет внешнего поля, так и за счет многократного рассеяния, получаем из условия самосогласования

$$\frac{\chi^2}{u^2\zeta^2} + \frac{4\pi Z^2\alpha^2\gamma n}{m^3 u\zeta}\ln\frac{\zeta}{\gamma^2\vartheta_1^2} \lesssim \zeta, \tag{7.7}$$

где Z—заряд ядра, n — плотность ядер в среде, $\vartheta_1 = (\varepsilon u_1)^{-1}$ — угол, отвечающий нижней границе переданных импульсов. Максимальная оценка для k — отношения вкладов многократного рассеяния и внешнего поля в левую часть формулы (7.7) —дает [51]

$$k_{max} \sim \frac{Z\alpha\lambda_c}{u_1}\ln\left(\frac{u_1}{\lambda_c}\right)^2 \ll 1. \tag{7.8}$$

Условие $k \ll 1$ позволяет при расчете вероятностей некогерентных процессов использовать теорию возмущений по рассеянию и пренебречь эффектом Ландау — Померанчука [51, 52].

Поскольку длина формирования фотона при больших $\chi|u \gg 1$ падает как $(u|\chi)^{2/3}$, то таким же образом падает сечение тормозного излучения, При $\chi_1 \gg 1$ имеем [51]:

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\omega} = A_\gamma\frac{2Z^2\alpha^3\Gamma(1/3)}{5m^2\omega}\left(\frac{u}{3\chi_1}\right)^{2/3}\ln\left[m u_1\left(\frac{\chi_1}{u}\right)^{1/3}\right]\left(1 + \frac{(\varepsilon-\omega)^2}{\varepsilon^2}\right), \tag{7.9}$$

где константа A_γ дается выражением

$$A_\gamma = \int d^2\rho\, n_e(\rho)\, n_N(\rho)\left(\frac{\chi_1}{\chi(\varrho)}\right)^{2/3}. \tag{7.10}$$

В потенциале (3.7) находим $A_\gamma \approx 1{,}5 n_e(0)$. Сечение некогерентного рождения пар при $\varkappa_1 \gg 1$ $(\omega \gg \omega_b)$ (3.12)) получается из (7.9) заменами (2.3), а соответствующая константа A_e дается формулой (7.10), в которой надо заменить $n_e(\rho) \to 1$.

Сечение (7.9) получено с логарифмической точностью. Аргумент логарифма в (7.9) представляет собой отношение q_{max}/q_{min}, причем в соответствии с (7.6) произошло увеличение максимальной передачи импульсов: $q_{max} \to m(\chi_1/u)^{1/3}$.

Относительная величина вклада некогерентных процессов в излучение и рождение пар в кристаллах по сравнению с эффектами в усредненном поле осей падает с ростом энергии. Она мала уже в области, где $L_{ch}^{-1}(\varepsilon)$, $W_e(\omega)$ достигают максимального значения $(r_\gamma^{max}, r_e^{max} \gg 1)$, и продолжает уменьшаться при дальнейшем увеличении энергии. Например, интегрируя (7.9) по $d\omega$ с весом ω и умножая результат на N — среднюю плотность атомов в кристалле, получаем с логарифмической точностью интенсивность некогерентного излучения

$$\frac{I^{nc}}{\varepsilon}=\frac{8\cdot 29\pi N}{5\cdot 3^5 3^{1/6}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)A_\gamma\frac{Z^2\alpha^3}{m^2\chi_1^{2/3}}\ln\left(mu_1\chi_1^{1/3}\right). \qquad (7.11)$$

Тогда для отношения интенсивности I^{nc} к интенсивности излучения в поле оси I^F ($\chi_s\gg 1$, используется потенциал (3.7)) имеем [51]

$$\frac{I^{nc}}{I^F}\lesssim 10^{-2}\frac{Z\alpha}{\chi_1^{1/3}}\frac{\ln\left(mu_1\chi_1^{1/3}\right)}{\ln\chi_s}\ll 1. \qquad (7.12)$$

Точно такая же оценка получается при $\varkappa_s\gg 1$ и для отношения вероятности некогерентного рождения пар к вероятности процесса в поле оси.

8. Сравнение теории с экспериментом. В настоящее время две экспериментальные группы I (Франция, США) и II (Дания, Великобритания, Франция) ведут экспериментальные исследования рождения пар и излучения в кристаллах, используя ускоритель SPS в CERN (Швейцария), на котором имеются пучки электронов (позитронов) и фотонов с энергией до 150 ГэВ. Сравним результаты эксперимента с изложенной выше теорией.

8.1. Рождение пар. В работах [28, 30, 32, 33] измерялись зависимость полной вероятности рождения пары от энергии фотона ω и ориентационная зависимость $W_e(\vartheta_0)$ для нескольких интервалов ω в моно-

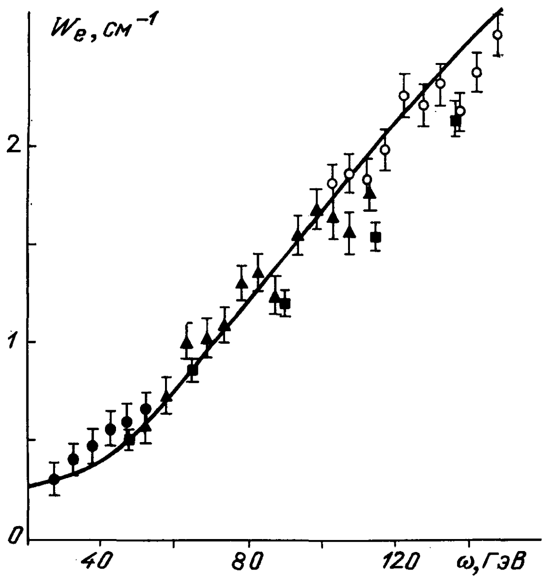

Рис. 11. Полная вероятность рождения пары в Ge ⟨110⟩ (T=100 K) как функция энергии. Экспериментальные данные из работы [32] (кроме квадратиков), квадратики — из работы [33], теоретическая кривая — из работ [13—15]

кристаллах Ge, ориентированных вблизи оси ⟨110⟩ при $T\approx 100$ K. В этой ситуации $\omega_t=50$ ГэВ, а перестройка картины ориентационной зависимости, связанная с изменением знака поправки при $\vartheta_0\ll\vartheta_V$, происходит (см. рис. 6) при $\omega_t\approx 230$ ГэВ.

Результат теоретического расчета функции $W_e^F(\omega)$ для экспериментальных условий был представлен в [13]. На рис. 11 эта же кривая приведена с добавлением модифицированного некогерентного вклада *) $W^{\text{М}}_{\text{ВН}}=0{,}28$ см$^{-1}$, тогда как $W_{\text{ВН}}=0{,}32$ см$^{-1}$. Экспериментальные точки взяты из работ [32, 33]. Видно хорошее согласие теории и эксперимента.

На рис. 12 приведены кривые ориентационной зависимости, вычисленные на основании работ [14, 15] (см. рис. 7) и дополнительно усредненные по интервалам энергии согласно условиям работы [32]. На рис. 13 представлены результаты аналогичной процедуры в условиях эксперимента [33]. Экспериментальные данные подтверждают все качественные особенности развитого теоретического описания. Так, на рис. 12, 13 хорошо видно смещение с ростом энергии влево максимума кривой $W_e(\vartheta_0)$ и ее сужение, что обусловлено более быстрым ростом с энергией вероятности рождения пар в поле оси по сравнению с когерентным рождением пар. Что касается количественного согласия теории и эксперимента, то для всех интервалов энергий точность совпадения оказалась лучше чем 20%. Уточнения теоретических предсказаний можно достичь, удалив из расчета подгоночные процедуры (для потенциала оси, для ориентационной кривой при $\vartheta_0\sim\vartheta_V$). Необходимо и дальнейшее уточнение экспериментальных данных, так как имеется небольшое отличие в результатах экспериментов [32, 33], проведенных для одинаковых условий.

8.2. Излучение. Средние потери энергии вычислялись для равномерного распределения в работе [18] и хорошо согласуются с данными эксперимента [29, 30]. Развитый в [18] подход позволил рассмотреть в [11] и ориентационную зависимость средних потерь энергии. Результат расчета и экспериментальные данные из работ [29, 30] приведены на рис. 14. Использованный в эксперименте кристалл с $L=0{,}14$ см является уже достаточно толстым (см. обсуждение в разделе 6) для электронов, поэтому для них принималось, что $F(\rho,\ \vartheta_0)=1$, т. е. распределение считалось равномерным при всех углах падения ϑ_0. Напротив, для позитронов в первом приближении многократным рассеянием можно пренебречь, и расчет проводился как для тонкого кристалла с учетом эффективной угловой ширины падающего пучка.

Наряду со средними потерями измерялись также спектральные распределения. Однако поскольку применявшиеся детекторы измеряли только суммарную энергию излученных частицей фотонов

$$\Delta\varepsilon=\sum_n \omega_n,$$

то фактически наблюдались не истинные фотонные спектры, а распределения по потерям энергии $\Delta\varepsilon$. В условиях большой множественности эти два распределения будут совершенно разными. Поэтому привлекший всеобщее внимание пик в спектре потерь, обнаруженный в недавнем эксперименте [31], проведенном на сравнительно тонком кристалле с $L=1{,}85\cdot10^{-2}$ см, вовсе не означает проявления неизвестного ранее механизма жесткого излучения. Этот эффект можно описать в рамках развитого выше подхода, если учесть каскадный характер процесса и влияние излучения на его кинетику.

Опираясь на рассмотрение, приведенное в конце раздела 6, в [35] была предложена следующая простейшая модель явления. По начальной заселенности разделим частицы на две группы: первая, для которых $x_1(0)<x_b<x_0$, и вторая, куда входят все остальные частицы, как попавшие в канал, так и надбарьерные. Далее предполагается, что на всей толщине кристалла частицы 1-й группы имеют равномерное распреде-

*) Эта модификация определяется членом $g(\delta_0)$ в формуле (7.4), если с помощью правил подстановки перейти к рождению пар.

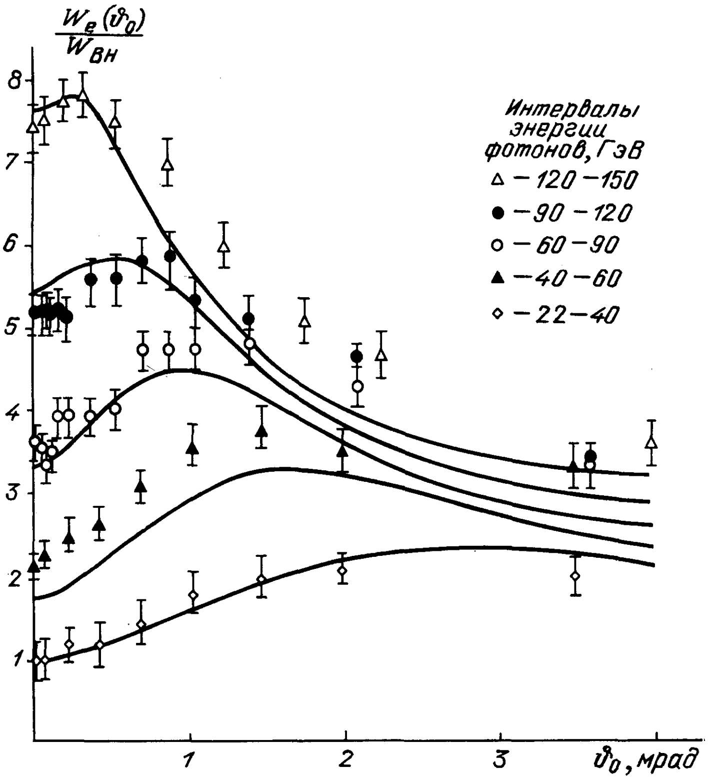

Рис. 12. Ориентационная зависимость полной вероятности рождения пары в Ge ⟨110⟩ ($T=100$ K) для фотонов с энергией в указанных энергетических интервалах. Экспериментальные данные из работы [32]

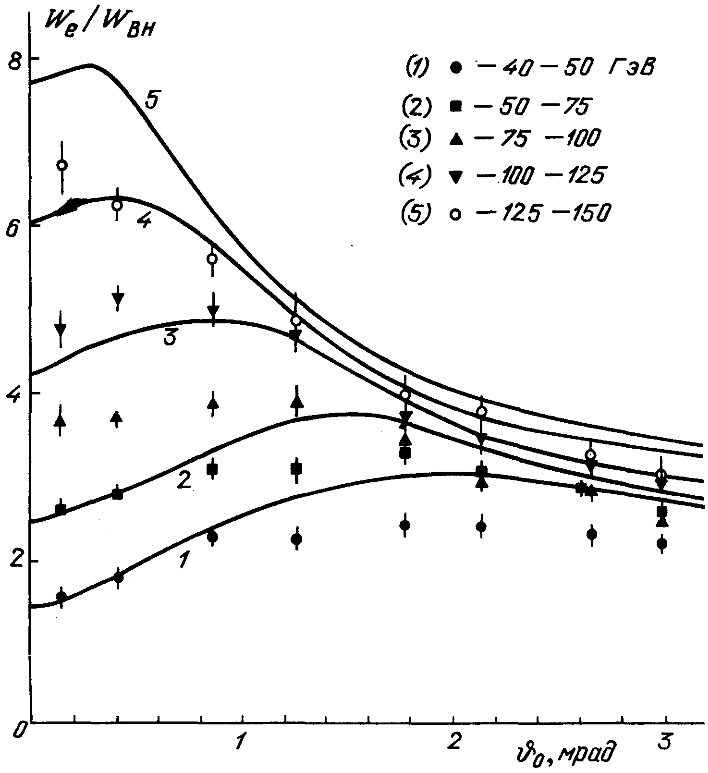

Рис. 13. То же, что на рис. 12, для других интервалов энергии фотона (данные [33])

ление по координате при некотором значении $x_1=x_{eff}<x_b$, а распределение остальных частиц—такое же, как у надбарьерных. После этого при известном теперь распределении частиц можно для каждой группы вычислить характеристики каскада. Значение x_b можно оценить, используя решение системы уравнений (6.7) и возникающую дисперсию распределений по $\varepsilon_\perp$ и ε, однако, строго говоря, в рамках развиваемого описания x_b, как и x_{eff}, являются подгоночными параметрами. По мере увеличения толщины кристалла величины x_b и x_{eff} возрастают и, когда x_b достигает значения x_0 (для обсуждаемых условий это происходит при $L\approx 8\cdot 10^{-2}$ см), частицы 2-й группы «догоняют» первую по потерям энергии и вклад 1-й группы в спектральное распределение по $\Delta\varepsilon$

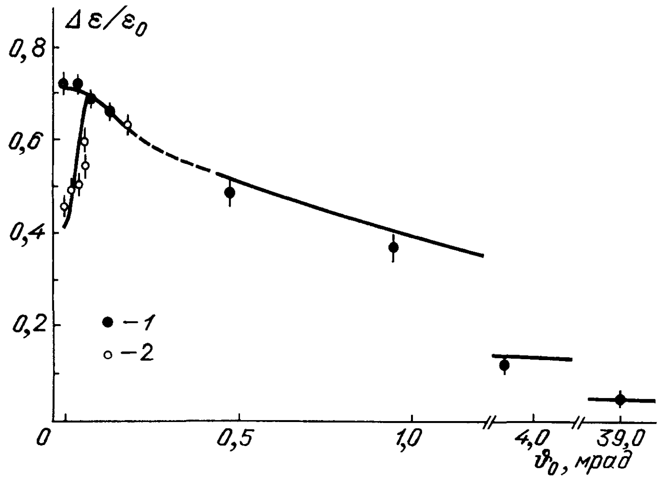

Рис. Н. Относительные потери энергии в зависимости от угла влета относительно оси ⟨110⟩ кристалла Ge (T=100K, начальная энергия ε_0=150 ГэВ, L=1,4 мм). Номера кривых обозначают то же, что и на рис. 8. Экспериментальные данные взяты из работ [29, 30): *1*— электроны, *2* — позитроны

перестает быть выделенным, поэтому для $L=0{,}14$ см достаточно рассматривать излучение одной группы частиц. Следует иметь в виду, что число частиц в 1-й группе всегда мало. Так, при $\vartheta_0=0$ и $\Delta\vartheta_0=30$ мкрад в канал вначале попадает всего 19% частиц и еще меньше частиц имеют значение $x_1(0)<x_b$. При достаточно малых толщинах пик в спектральном распределении по $\Delta\varepsilon$, обусловленный частицами 1-й группы, также пропадает из-за уменьшения, с толщиной кристалла, числа частиц в этой группе (уменьшается x_b) и, в основном, из-за уменьшения кратности излучения. В условиях [31] это должно произойти при $L\approx$ $\approx(5\text{–}7{,}5)\cdot 10^{-3}$ см. По мере роста энергии при фиксированной толщине кристалла величина x_b будет уменьшаться, а для надбарьерных частиц может стать существенным радиационный захват их в канал.

Переходя к сравнению теоретических и экспериментальных данных, напомним, что измерялось распределение по потерям энергии $y=$ $=\Delta\varepsilon/\varepsilon_0$. Мы будем также приводить вычисленный истинный спектр излученных фотонов, который из-за большой множественности заметно отличается от спектра потерь. В этом случае величина y будет означать отношение ω/ε, где ω - частота фотона. Рассмотрим величину

$$F=\frac{a}{L}y\frac{dN_1}{dy}+\frac{(1-a)}{L}y\frac{dN_2}{dy}, \tag{8.1}$$

где, в соответствии с используемой моделью, a — число частиц, попавших в 1-ю группу (индекс 1). Для $L=0{,}14$ см, как объяснено выше, следует положить a=0. Распределение dN_2/dy было найдено в [27], где приведено распределение частиц по энергии, отличающееся от $\mathrm{d}N_2/\mathrm{d}y$ только заменой $y \to 1-y$. На рис. 15, *а* мы представили эти результаты и данные эксперимента [29, 30] в форме (8.1). Видно удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных *) данных и разительное отличие истинного спектра фотонов (кривая *1*) от спектра потерь энергии (кривая 2), что обусловлено высокой множественностью (см. обсуждение в разделе 6).

Для $L=0{,}04$ см было взято $x_b=11$, $x_{eff}=6$. Тогда при $\vartheta_0=0$ для расходимости пучка $\Delta\vartheta_0=30$ мкрад находим $a\approx 0{,}15$. Чтобы продемонстрировать вклад частиц 1-й группы, на рис. 15, *б* построена величина F при

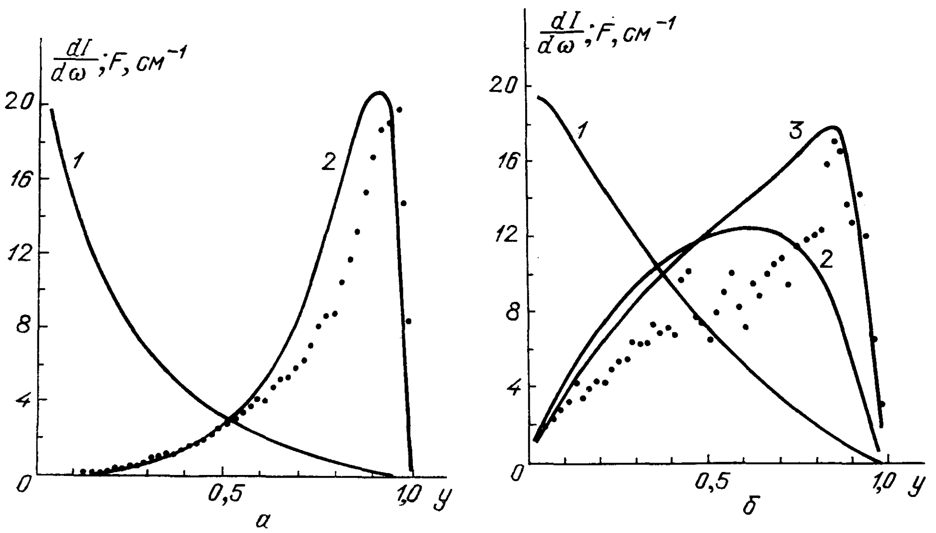

Рис. 15. Спектральное распределение в Ge ⟨110⟩ (T=100 K) в виде, задаваемом формулой (8.1). *а*—Для толщины L=1,4 мм; *1* — истинный спектр фотонов, *2* — спектр потерь энергии. *б* — Для толщины L= 0,4 мм; *1* — истинный спектр, *2* —для равномерного распределения, *3* — с учетом вклада частиц первой группы

a=0 (кривая *2*) и при a=0,15 (кривая *3*), а также истинный спектр при a=0 (кривая *1*). Экспериментальные данные из [30], также представленные на рис. 15, б, свидетельствуют в пользу существования частиц 1-й группы. Имеется некоторое расхождение абсолютных значений. Возможно, это связано с тем, что нормировка кривой для $L=0{,}04$ см на рис. 2 работы [30] заметно отличается от единицы.

Для $L=1{,}85\cdot 10^{-2}$ см мы выбрали $x_b=4{,}2$, $x_{eff}=2{,}5$. Тогда для $\vartheta_0=0$ ($\Delta\vartheta_0=30$ мкрад) получилось a=0,087, а при $\vartheta_0=17$ мкрад, a=0,073. К сожалению, спектральные распределения на рис. 3 работы [31] представлены без вычитания фона. Поэтому мы сравнили разность экспериментальных значений при $\vartheta_0=0$ и $\vartheta_0=96$ мкрад, $\vartheta_0=17$ мкрад и $\vartheta_0=96$ мкрад соответственно. Так как при $\vartheta_0=96$ мкрад даже с учетом расходимости начального пучка все частицы вначале являются надбарьерными (a=0), то эта разность в нашей модели дается выражением

$$\Delta F=\frac{ay}{L}\left(\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}y}\right). \tag{8.2}$$

Эта величина для ϑ_0 построена на рис. 16, *а* (кривая 2), а для $\vartheta_0=17$ мкрад—на рис. 16, *б*. Расчет достаточно хорошо согласуется с

*) Заметим, что на рис. III-15 в [34] положение пика (для L=0,14 см) совпадает с теоретическим на рис. 15, *а*.

экспериментом. Тем самым подтверждается адекватность предложенной модели кинетики. Само наличие пика*) в распределении по $\Delta\varepsilon$ обусловлено большой множественностью излучения частиц 1-й группы. Это ясно из сравнения этого спектра с истинным спектром фотонов от этой группы (кривая *1* на рис. 16, *а*) и дополнительно иллюстрируется рис. 17, где изображены результаты расчета зависимости множественности (для $\omega > 1$ ГэВ, в соответствии с условиями эксперимента [31]) от потерь энергии для частиц 1-й — n_1 (кривая *1*) и 2-й — n_2 (кривая *2*)

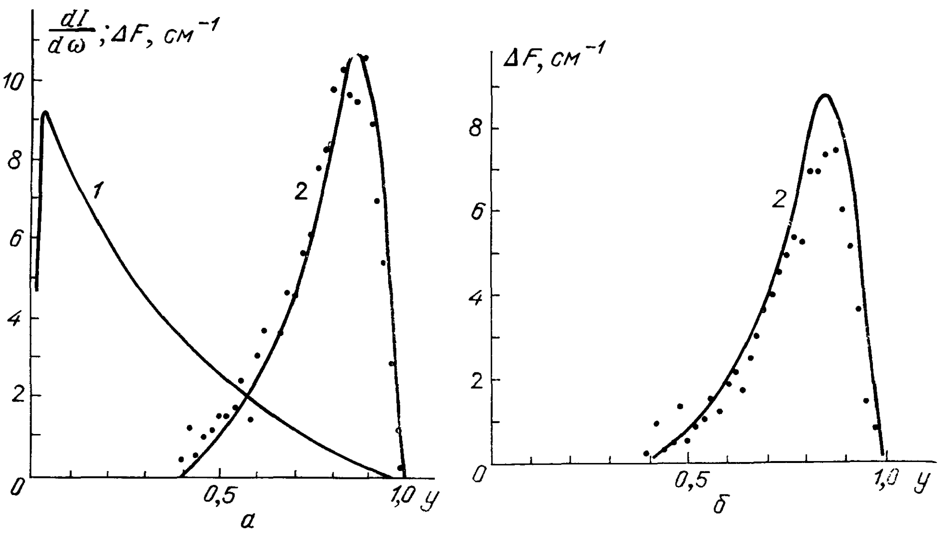

Рис. 16. Спектральное распределение в Ge ⟨110⟩ (T=100K) для L=0,185 мм в форме (8.2). *а* — Для угла падения $\vartheta_0=0$; *1* — истинный спектр, *2* — спектр потерь. *б* — Для угла падения ϑ_0=17 мкрад, только кривая *2*. (Данные [31])

групп при $L=1{,}85\cdot10^{-2}$ см. В эксперименте должно наблюдаться распределение множественности $n=an_1+(1-a)n_2$. Подставляя для эксперимента [31] a=0,087, при $\vartheta_0=0$ имеем в интервале $0{,}82<y<0{,}9$, $n=3{,}2$. В недавней работе [55] авторы эксперимента косвенно (по измерению вероятности конверсии фотонов в пары.) извлекли множественность фотонов. В указанном интервале и при эффективном обрезании по энергии излученных фотонов $\omega_{eff}\simeq100$ МэВ она составляет $n=3{,}8$ или $n=4{,}3$ (в зависимости от способа обработки). Для этих условий ($\omega>\omega_{eff}$) наше предсказание n=3,7. В [55] проведено сравнение с работами [53, 54], утверждается, что наблюдаемая множественность много меньше предсказаний работ [53] ($n\approx12$) и [54] (n несколько меньше 12). На рис. 18 представлены результаты спектрального распределения потерь энергии и истинный спектр фотонов для $\vartheta_0=96$ мкрад, когда электроны и позитроны должны излучать одинаково (кривые 4, 3). Как уже отмечалось, для позитронов при $\vartheta_0=0$ кристалл с $L=1{,}85\times10^{-2}$ см является тонким, и расчет (кривые 2, 1 на рис. 18) проводился с начальным распределением частиц. Из-за перераспределения потока излучение позитронов при $\vartheta_0=0$ заметно слабее, чем для надбарьерных частиц.

*) Попытка объяснить положение пика для кристаллов с толщиной $L=1{,}85\times10^{-2}$ см на основании анализа средних потерь была предпринята в [53], в работе [54] пик изучался с помощью монте-карловского моделирования. Подчеркнем, что изложенный выше подход существенно отличается от принятых в [53, 54].

Таким образом, проведенный анализ показывает, что теория вполне удовлетворительно описывает всю совокупность экспериментальных данных по рождению пар фотоном и излучению частиц в ориентированных кристаллах.

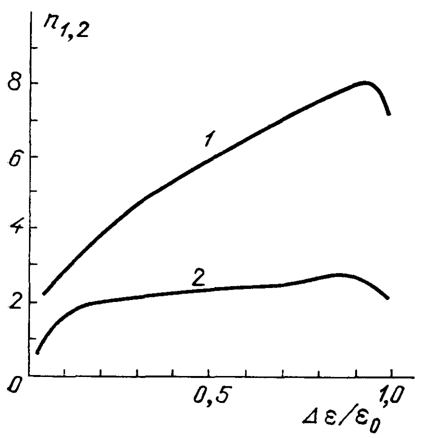

Рис. 17. Зависимость множественности фотонов от потерь энергии. Кривые *1* и *2* — вклады частиц первой и второй групп соответственно

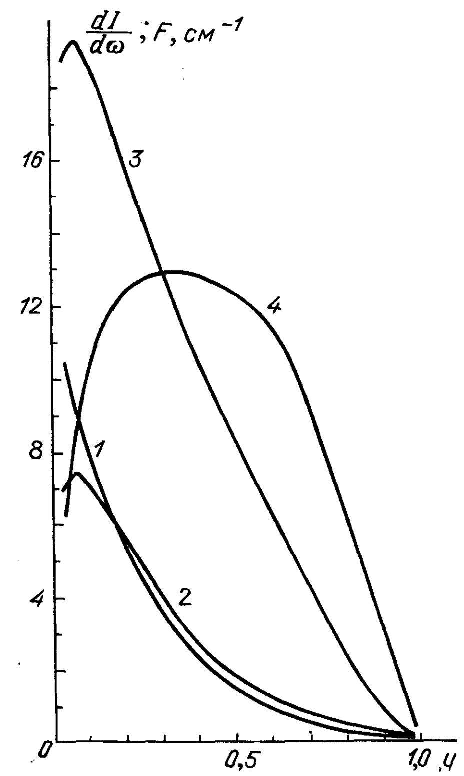

Рис. 18. Спектральные распределения интенсивности в форме (8.1); L=0,185 мм. Истинные фотонные спектры: *1*—для позитронов при $\vartheta_0=0$, *3* — для позитронов и электронов при $\vartheta_0=96$ мкрад. Распределение по потерям в тех же условиях — *2*, *4* соответственно

9. Процессы более высокого порядка, процессы с участием других частиц. Мы обсудили выше основные процессы низшего порядка — излучения электрона (позитрона) и рождение электрон-позитронной пары фотоном. Они, естественно, имеют наибольшие вероятности. Наряду с ними могут идти другие процессы. Обсудим некоторые из них.

9.1. Рождение пары заряженной частицей ($e^{\pm}\to e^{\pm}e^{-}e^{+}$). Этот процесс, идущий через виртуальный фотон (v), мы будем называть прямым электророждением, по своим свойствам (спектры, угловые распределения) он похож на последовательный процесс: $e^{\pm}\to e^{\pm}\gamma$, $\gamma\to e^{+}e^{-}$, который учитывался при рассмотрении каскада. Поэтому для экспериментального выделения прямого электророждения необходимо найти условия, когда его вероятность превосходит вероятность последовательного процесса. Для определенности рассмотрим этот вопрос в условиях эксперимента [30]. В этом случае для оценки числа родившихся заряженных частиц в последовательном процессе $N_c(L)$ можно непосредственно использовать формулу (6.6) и, поскольку будут рассматриваться малые толщины, пренебречь изменением энергии начальной частицы. Имеем из (6.6)

$$N_e(L)\approx 30L^2, \tag{9.1}$$

где L берется в сантиметрах. Число частиц, родившихся в процессе прямого электророждения, будет $N_v(L)=2W_vL$, где вероятность W_v

надо взять при $\varepsilon=150$ ГэВ. Оценку W_ν в рассматриваемой области $\chi\sim$ ~ 1 можно получить на основании работ [56, 57] по электророждению пар во внешнем поле:

$$N_\nu(L)\approx\frac{L}{5}.$$

Отсюда следует, что N_e и N_ν сравниваются при толщине L=70 МКМ. Поскольку можно использовать и более тонкие кристаллы, то ясно, что процесс прямого электророждения может быть выделен экспериментально уже сейчас. Поскольку $N_e/N_\nu \propto L$, то с уменьшением толщины выделение его улучшается. Однако L нельзя брать меньше длины формирования процесса. При высокой энергии ($\chi\gg 1$), когда виртуальность фотона мала, эта длина совпадает с обычной длиной формирования излучения l_f (см. раздел 3). Например, для оси $\langle 110\rangle$ Ge при $\varepsilon=100$ ТэВ, когда $l_f\approx 10^{-3}$ см, имеем при $L=l_f$ маскимальное отношение $N_\nu/N_e\approx$ ≈ 120, т. е. в этих условиях процесс прямого электророждения доминирует.

9.2. Расщепление фотона ($\gamma\to\gamma\gamma$). Процесс идет через электрон-позитронную петлю в поле кристалла. Этот процесс детально изучен в работах [58, 59]. Здесь также имеет место усиление эффекта в поле оси по сравнению с процессом на изолированном ядре. Однако наблюдение процесса расщепления фотона (кстати, вообще до сих пор не наблюдавшегося) является весьма сложной задачей, поскольку отношение вероятностей

$$\frac{W^F_{\gamma\to\gamma\gamma}}{W_{\gamma\to e^+e^-}}\approx 0{,}3\,\frac{\alpha^2}{\pi^2}. \tag{9.3}$$

9.3. Рождение пары нейтрино электроном ($e\to e\nu\bar{\nu}$). Процесс во внешнем поле был рассмотрен в работе [60]. В поле кристалла необходимо провести надлежащие усреднения вероятностей. В итоге имеем, например, для случая $\chi_s\gg 1$

$$\frac{W^F_{e\to e\nu\bar{\nu}}}{W^F_{e\to e\gamma}}\simeq 4\cdot 10^{-4}\,\frac{G^2m^4}{\alpha}\,\chi_s^{4/3}\left[(1+2\eta)\ln\frac{1+\eta}{\eta}-2\right], \tag{9.4}$$

где G — константа слабого взаимодействия. Входящая в эту формулу комбинация констант очень мала ($G^2m^4/\alpha\sim 10^{-21}$), что фактически исключает (сейчас и в обозримом будущем) кристаллы из числа кандидатов в генераторы нейтрино (см. однако [61]).

9.4. Рождение π^0-мезона фотоном ($\gamma+\gamma$ (поле кристалла)$\to\pi^0$). Рождение π^0 фотоном в кулоновском поле (эффект Примакова) используется для определения времени жизни τ_π этого мезона. В кристалле (ср. [62]) возможен аналогичный когерентный эффект.

Если пренебречь конечностью τ_π (соответствующая ширина распада π^0 есть $\Gamma\approx 7{,}6$ эВ), то в двухфотонном процессе должен выполняться закон сохранения $Q+k=p_\pi$ или

$$2\omega|q_\parallel|=\mu^2, \tag{9.5}$$

где μ — масса π^0-мезона. Напомним, что $q_\parallel=\mathbf{qv}=\mathbf{q}_\perp\mathbf{v}+q_n\cos\vartheta_0$, $\mathbf{v}=\mathbf{k}/\omega$, $q_n=(2\pi/d)n_z$, где n_z — произвольное целое число. Считаем $\vartheta_0\ll 1$, тогда $q_\parallel\approx q_n+\mathbf{q}_\perp\mathbf{v}$ и $\mathbf{q}_\perp\mathbf{v}\sim|q_\perp|\vartheta_0\ll|q_n|$ для $n_z\neq 0$. Поскольку в кристалле значения $|q_\parallel|$ ограничены сверху наличием фактора $\exp(-\mathbf{q}^2u_1^2)$ (см. (2.12)), получаем из (9.5) оценку для пороговой частоты фотона $\omega_{th}\approx$

$\approx \mu^2 u_1/2$. Например, в алмазе при комнатной температуре $\omega_{th} \approx 200$ ГэВ. Заметим, что для $n_z=0$ этот порог лежит недостижимо высоко, т. е. в отличие от когерентных процессов, рассмотренных в разделе 4, член с $n_z=0$ не работает. Можно проанализировать эффект в терминах эквивалентных фотонов, записав его вероятность аналогично формуле (4.8):

$$W^{\text{coh}}_{\gamma\to\pi^0} = \sum_{\mathbf{q}} \frac{|G(\mathbf{q})|^2 \mathbf{q}_\perp^2}{4\pi\alpha |q_\parallel|} \sigma_{\gamma\gamma}(|q_\parallel|, \omega),$$
$$W^{\text{nc}}_{\gamma\to\pi^0} = \frac{Z^2\alpha N}{2\pi^2} \int \frac{d^2 q_\perp \mathbf{q}_\perp^2}{(\mathbf{q}^2 + a^{-2})^2} \frac{dq_\parallel}{|q_\parallel|} \sigma_{\gamma\gamma}(|q_\parallel|, \omega). \tag{9.6}$$

Мы использовали в (9.6) выражение для потока (1.5) и привели также вероятность аналогичного некогерентного процесса $W^{\text{nc}}_{\gamma\to\pi^0}$, N — средняя плотность атомов, a — соответствующий радиус экранирования. Сечение образования π^0-мезона двумя фотонами $\sigma_{\gamma\gamma}(|q_\parallel|, \omega)$ имеет вид резонансного распределения Брейта — Вигнера:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(|q_\parallel|, \omega) = \frac{8\pi\Gamma^2}{(2\omega|q_\parallel| - \mu^2)^2 + \Gamma^2\mu^2}. \tag{9.7}$$

Когерентный эффект Примакова из-за дискретности спектра эквивалентных фотонов (значений $q_\parallel$) происходит только для определенных частот $\omega_n = \mu^2/2|q_n|$. Если угловой и энергетический разброс в падающем пучке фотонов удовлетворяет условию $\Delta\vartheta_0$, $\Delta\omega/\omega \lesssim \Gamma/\mu$, то вероятность $W^{\text{coh}}_{\gamma\to\pi^0}$ не зависит от ширины Γ и значительно превосходит величину $W^{\text{nc}}_{\gamma\to\pi^0}$. Однако, поскольку $\Gamma/\mu < 6\cdot 10^{-8}$, то реально выполняются обратные неравенства $\Delta\vartheta_0$, $\Delta\omega/\omega \gg \Gamma/\mu$, причем обычно $\Delta\omega/\omega \gg \Delta\vartheta_0$ и $\Delta\omega \ll \omega_n - \omega_{n\pm 1}$. Усредняя (9.6) в этих предположениях для равномерного распределения по частоте в интервале $\Delta\omega$ около ω_n, находим

$$\langle W^{\text{coh}}_{\gamma\to\pi^0}\rangle \approx \frac{2\pi\Gamma}{\alpha\mu^3}\left(\frac{\omega_n}{\Delta\omega}\right)\frac{1}{|q_n|}\sum_{\mathbf{q}_\perp} |G(\mathbf{q}_\perp, q_\parallel = q_n)|^2 \mathbf{q}_\perp^2,$$
$$\langle W^{\text{nc}}_{\gamma\to\pi^0}\rangle \approx \frac{8\pi Z^2\alpha\Gamma}{\mu^3} N \int\limits_{(q_\perp^{\min})^2}^{(q_\perp^{\max})^2} \frac{x\,dx}{(x + q_n^2 + a^{-2})^2}. \tag{9.8}$$

Для пороговой энергии $\omega_n \approx \omega_{th}$, полагая в (9.8) $|q_n| \approx u_1^{-1}$ и заменяя сумму $\sum_{\mathbf{q}_\perp}$ на интеграл, получаем грубую оценку для отношения когерентного и некогерентного эффектов:

$$\frac{\langle W^{\text{coh}}_{\gamma\to\pi^0}\rangle}{\langle W^{\text{nc}}_{\gamma\to\pi^0}\rangle} \sim \frac{\omega_n}{\Delta\omega}\frac{u_1}{l}, \quad \omega \approx \omega_{th}, \tag{9.9}$$

l — постоянная решетки (см. (2.9)). Видно, что возникающий из-за дискретности спектра фактор усиления $(\omega_n/\Delta\omega)$ оказывается в значительной степени скомпенсированным. Так, в алмазе $u_1/l \sim 10^{-2}$. Тем не менее для пучка фотонов с $\Delta\omega/\omega \lesssim 10^{-2}$ наблюдение когерентного эффекта возможно уже сейчас. Этот вывод сделан в работе [62].

10. Заключение. Итак, в 80-е годы наши знания об основных электромагнитных процессах в кристаллах значительно расширились. Выяснилось, что в зависимости от угла падения начальной частицы действуют разные механизмы излучения и рождения пар. В области высоких энергий процессы в полях осей (плоскостей) протекают значительно интенсивнее, чем в аморфном веществе, являясь самым эффективным механизмом перекачки энергии заряженных частиц в фотоны и фотонов в электрон-позитронные пары.

Эти особенности процессов могут найти практическое применение. Одно из приложений — малогабаритные конвертеры, преобразующие энергию заряженных частиц в излучение. Второе возможное приложение — применение кристаллов для детектирования фотонов, электронов и позитронов [63, 48] (предложение использовать излучение при каналировании в астрофизических детекторах высказано в [64]). Из проведенного анализа вытекает, что с использованием кристаллов можно создать сравнительно компактный электромагнитный калориметр, обладающий к тому же высоким угловым разрешением. Оба этих качества могут быть полезны как в физике высоких энергий, так и в астрофизике. В области низких энергий (десятки МэВ), где механизм излучения электронов совсем иной, приложение процесса излучения к исследованию свойств кристаллов обсуждалось недавно в [65].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тер-Микаэлян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969.
2. Diambrini-Palazzi C.//Rev. Mod. Phys. **1968**. V. 40. P. 611.
3. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов.— М.: Атомиздат, 1973.
4. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. Излучение релятивистских частиц при плоскостном каналировании.— Препринт ИЯФ СО АН СССР 80-03.— Новосибирск, 1980.
5. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ЖЭТФ. **1981**. Т. 80. С. 1348.
6. Калашников Н. П. Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах.—М.: Атомиздат, 1981.
7. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шульга Н. Ф.//Физ. ЭЧАЯ. **1979**. Т. 10. С. 51.
8. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика.—М.: Наука, 1981.
9. Байер В. Н., Катков В. М., Мильштейн А. И., Страховенко В. М.// ЖЭТФ. **1975**. Т. 69. Р. 783.
10. Ритус В. И., Никишов А. И. Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле//Тр. ФИАН СССР. **1979**. Т. 111.
[11] Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Phys. Lett. Ser. A. **1986**. V. 117. P. 251.
12. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ЖЭТФ. **1987**. Т. 92. С. 1228.
13. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Phys. Lett. Ser. A. **1985**. V. 109. P. 179.
14. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ЖЭТФ. **1986**. Т. 90. С. 801.
15. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Nucl. Instr. and Meth. Ser. B. **1986**. V. 16. P. 5.
16. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ДАН СССР. **1986**. Т. 289. С. 75.
17. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Phys. Lett. Ser. A. **1984**. V. 104. P. 231.
18. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Ibidem. **1986**. V. 114. P. 511.
19. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ДАН СССР. **1985**. Т. 282. С. 851.
20. Kimball J. C., Cue N.//Phys. Rept. **1985**. V. 125. P. 69.
[21] Belkacem A., Cue N., Kimball J. C.//Phys. Lett. Ser. A. **1985**. V. 111. P. 86.
22. Kimball J. C., Cue N., Belkacem A.//Nucl. Instr. and Meth. Ser. B. **1986**. V. 13. P. 1.
23. Baryshevskii V. G., and Tichomirov V. V.//Phys. Lett. Ser. A. **1985**. V. 113. P. 335.
24. Барышевский В. Г., Тихомиров В. В.//ЯФ. **1982**. Т. 36. С. 697.

25. Барышевский В. Г., Тихомиров В. В.//ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 232.
26. Kimball J. C., Cue N., Rath L. M., Marsh B. B.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 950.
27. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Nucl. Instr. and Meth. Ser. B. 1987. V. 27. P. 360.
28. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 2371; 1985. V. 54. P. 852 (E).
29. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al.//Ibidem. P. 2667.
30. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al.//Nucl. Instr. and Meth. Ser. B. 1986. V. 13. P. 9.
[31] Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al.//Phys. Lett. Ser. B. 1986. V. 117. P. 211.
32. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al.//Phys. Rev. Lett., 1987. V. 58. P. 1196.
33. Bak J. F., Barbenis D., Brodbeck T. J. et al.//Phys. Lett. Ser. B. 1988. V. 202. P. 615.
34. Belkacem A. Thèse Docteures. Science physique.— Université de Lyon I, 1986.
35. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M. Pair Production and Radiation in Oriented Single Crystals: Status of Theory and Experiment.— Preprint INP 88—17.— Novosibirsk, 1988; Phys. Lett. Ser. A. 1988. V. 132. P. 211; Nucl. Instr. and Meth. Ser. B. 1988. V. 34. P. 521.
36. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ДАН СССР. 1984. Т. 275. С. 1369; Излучение при движении частиц высокой энергии вблизи кристаллических осей в толстых кристаллах.— Препринт ИЯФ СО АН СССР 83-70.— Новосибирск, 1983.
37. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. Рождение электрон-позитронных пар фотонами высокой энергии при влете вблизи кристаллических плоскостей.— Препринт ИЯФ СО АН СССР 87-56.— Новосибирск, 1987; Nucl. Instr. and Meth. Ser. B. 1988. V. 35. P. 21.
38. Тихомиров В. В.//Вестн. БГУ. Сер. 1. 1983. № 2. С. 6.
39. Kimball J. C., Cue N.//Phys. Rev. Lett., 1984. V. 52. P. 1747.
40. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Nucl. Instr. and Meth. Ser. B. 1984. V. 4. P. 346.
[41] Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 2121.
42. Bilokon H., Bologna G., Celani F. et al.//Nucl. Instr. and Meth. 1983. V. 204. P. 299.
43. Ахиезер А. И., Шульга Н. Ф.//ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 94.
44. Bhabha H., Heitler W.//Proc. Roy. Soc. 1937. V. 159. P. 432.
45. Carlson I., Oppenheimer R.//Phys. Rev. 1937. V. 51. P. 220.
46. Landau L., Rumer Yu.//Proc. Roy. Soc. 1938. V. 166. P. 213.
47. Росси Б. Частицы больших энергий.— М.: Гостехтеориздат, 1955.
48. Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Nucl. Instr. and Meth. Ser. A. 1986. V. 250. P. 514.
49. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ЯФ. 1982. Т. 36. С. 163.
50. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 125.
[51] Baier V. N., Katkov V. M., Strakhovenko V. M.//Phys. Stat. Sol. Ser. b. 1988. V. 149. P. 403.
52. Барышевский В. Г., Тихомиров В. В.//ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 1908.
53. Tichomirov V. V.//Phys. Lett. Ser. A. 1987. V. 125. P. 411.
54. Artru X.//Ibidem. 1988. V. 128. P. 302.
55. Belkacem A., Bologna G., Chevallier M. et al. Proton multiplicity in the hard radiation of 150 GeV electrons in an aligned germanium crystal.— Preprint CERN-EP/88-44.— Geneva, 1988.
56. Ritus V. I.//Nucl. Phys. Ser. B. 1972. V. 44. P. 236.
57. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//ЯФ. 1971. Т. 14. С. 1020.
58. Байер В. Н., Мильштейн А. И., Шайсултанов Р. Ж.//ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 1141.
59. Baier V. N., Milstein A. I., Shaisultanov R. Zh.//Phys. Lett. Ser. A. 1987. V. 120. P. 255.
60. Байер В. Н., Катков В. М.//ДАН СССР. 1966. Т. 171. С. 313.
[61] Lasukov V. V., and Vorobiev S. A.//Phys. Lett. Ser. A. V. 106. P. 179.
62. Kimball J. C., Cue N.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1935.
63. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.//Труды VIII Международной конференции по ускорителям частиц высоких энергий. Т. 2.— Новосибирск, 1986.
64. McBreen B.//Astron. Express. 1984. V. 1. P. 105.
65. Огнев Л. И.//УФН. 1988. Т. 154. С. 691.