Ноябрь 1989 г. *Том 159, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

От редакции. 25 декабря исполнится два года со дня смерти Вадима Генриховича Книжника (20.02.1962—25.12.1987). Ему было тогда 25 лет. В теоретической физике Вадим Книжник занимался многими задачами, но всемирную известность ему принесла работа в новой области — теории струн. Теорема Белавина — Книжника установила связь между подходом А. М. Полякова в этой теории и комплексной геометрией, соединив современную теорию поля с современными математическими идеями. Предлагаемый обзор является, по существу, изложением этой теоремы и ее непосредственных следствий, послуживших основой для многочисленных последующих работ. Он написан по лекциям, прочитанным В. Г. Книжником весной 1987 г. на 1-й республиканской школе молодых ученых в Киеве в Институте теоретической физики АН УССР. С тех пор приведенные в лекциях результаты стали классическими, многократно перевыводились и переизлагались другими методами. Однако авторское изложение остается в числе самых ясных и доступных для тех, кто приступает к изучению теории струн. Для специалистов особый интерес представляют последние разделы 12 и IV: в них описаны незавершенные самим автором конструкции, которые должны иметь интересное развитие.

539.12.01

МНОГОПЕТЛЕВЫЕ АМПЛИТУДЫ В ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ СТРУН И КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В. Г. Книжник

(Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР,
Черноголовка, Московская обл.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Теория квантовых струн в последние годы привлекла к себе большое внимание. Это связано с замечательными результатами Грина и Шварца [1], показавшими, что на основе теории суперструн можно построить самосогласованную теорию квантовой гравитации с приемлемыми феноменологическими свойствами. Наиболее популярным кандидатом на роль теории, объединяющей все взаимодействия, является модель гетеротических струн с группой симметрии $E_8 \times E_8$ [2] в 10 изме-

рениях, 6 из которых компактифицированы на многообразие Калаби — Яо[3].

Для полной уверенности в самосогласованности теории суперструн необходимо убедиться в отсутствии расходимостей во всех порядках теории возмущений. Однопетлевые вычисления [1, 2] совместно с некоторыми качественными аргументами [4] подтверждают это предположение, впервые высказанное в [1], однако для многопетлевых диаграмм полное доказательство отсутствует [и сейчас. См. [65].—Ред.]. Не исключено, что более полное понимание структуры многопетлевых поправок позволит продвинуться и в решении других вопросов. Надежды на это, в основном, связаны с тем, что, как мы увидим ниже, многопетлевые амплитуды являются исключительно красивыми объектами, и их теория использует широкий круг физических и математических представлений. В некотором смысле с ростом энергии объединение взаимодействий сопровождается объединением идей.

Настоящий обзор посвящен описанию ряда результатов, полученных в этом направлении для наиболее простой модели замкнутых ориентированных бозонных струн (ESVM).

В геометрическом подходе p-петлевые амплитуды рассеяния замкнутых ориентированных бозонных струн являются суммами по замкнутым ориентируемым поверхностям рода p (с p ручками). В критической размерности $D=26$ суммирование, как будет показано в разделе 2, сводится к интегрированию по пространству модулей M_p римановых поверхностей рода p, и задача состоит в том, чтобы описать аналитические свойства многопетлевых амплитуд как функций от координат на M_p. Именно этими свойствами и определяется структура расходимостей в теории.

Ниже мы увидим, что эти аналитические свойства являются очень простыми. Амплитуды строятся с помощью мероморфных и даже рациональных функций на M_p. Более точно постановку задачи и результат можно сформулировать следующим образом. В ковариантном геометрическом подходе Полякова [5] сумма по поверхностям является суммой по топологиям (род p), внутренним метрикам $g_{ab}(\xi)$ и вложениям $X_\mu(\xi)$ поверхности с координатами $\xi^{1,2}$ в D-мерное плоское пространство-время. При $D=26$ происходит сокращение конформной аномалии [5], и полной квантовой группой симметрии становится произведение группы Вейля $\mathrm{Conf}(S)$ — конформных преобразований $g_{ab}(\xi)\to\lambda(\xi)g_{ab}(\xi)$ — на группу общекоординатных преобразований $\mathrm{Diff}(S)$ поверхности S. Таким образом, для каждого p мы должны проинтегрировать по орбитам группы $H=\mathrm{Conf}(S)\times\mathrm{Diff}(S)$ в пространстве $G(S)$ всех метрик на S, т. е. по фактор-пространству $G/H=M_p$. Это пространство называется пространством модулей римановых поверхностей рода p и его размерность, как было показано Риманом, конечна и равна 0 для $p=0$, 2, для $p=1$ и $6p-6$ для $p\geqslant 2$. В работах Тейхмюллера, Альфорса и Берса [6] было показано, что M_p имеет естественную комплексную структуру. Более того, Mp является алгебраическим многообразием [7].

Пусть $y_1, \ldots, y_{3p-3}$ — какие-нибудь комплексно-аналитические координаты на M_p. Тогда при $D=26$ сумма по поверхностям рода p после выделения объема калибровочной группы будет иметь следующий вид (см. раздел 2):

$$Z_p=\int\limits_{M_p} d\Omega \exp \widetilde{W}(y_i, \bar{y}_i), \tag{1.1}$$

$$d\Omega=\left(\frac{i}{2}\right)^{3p-3} dv\wedge d\bar{v},$$

$$dv=dy_1\wedge\ldots\wedge dy_{3p-3},$$

где $\tilde{W}$ является некоторой функцией координат y_i, $\bar{y}_i$. Возникает естественный вопрос: как комплексная структура на M_p проявляет себя в аналитических свойствах $\tilde{W}(y_i, \bar{y}_i)$? Напомним, что однопетлевое вычисление ($p=1$) дает [8]

$$Z_1 = \int_{M_1} d^2y\, |y\Delta(y)|^{-2} (\ln|y|)^{-14}, \tag{1.2}$$

$$\Delta(y) = y\prod_{k=1}^{\infty}(1-y^n)^{24},$$

где $y=\exp(2\pi i\tau)$, а τ — отношение периодов тора — пробегает фундаментальную область модулярной группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Формула (1.2) наводит на мысль, что эти свойства могут оказаться достаточно простыми и для $p>1$. Мера в (1.2) с точностью до степени логарифма является квадратом модуля аналитической функции y, нигде не обращающейся в нуль и имеющей полюс второго порядка при $y=0$, где тор вырождается. Оказывается, что для $p>1$ мера обладает почти такими же свойствами [9]:

$$\text{А)}\quad \exp\tilde{W}(y_i, \bar{y}_i) = |F(y_1, \ldots, y_{3p-3})|^2 (\det \operatorname{Im}\tau)^{-13}, \tag{1.3}$$

где $F(y)\, dv$ — голоморфная $(3p-3,0)$-форма, нигде не обращающаяся в нуль на M_p, а τ — матрица периодов римановой поверхности с координатами $y_1, \bar{y}_1, \ldots, y_{3p-3}, \bar{y}_{3p-3}$ в M_p.

Б) *форма $F(y)\, dv$ имеет полюс второго порядка на бесконечности D пространства M_p, где поверхности вырождаются* *).

Этот полюс приводит к расходимости в (1.1) и его наличие тесно связано с тем, что основным состоянием бозонной струны является тахион. Подробному изложению этих результатов, полученных А. А. Белавиным и автором в [9], посвящен раздел I настоящего обзора.

Нетрудно показать, что условиями А), Б) форма $F(y)\, dv$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя. Это, в частности, позволяет выразить $F(y)$ для случая $p=2$, 3 и 4 через тэта-функции Римана. Эти результаты вместе с необходимыми сведениями из теории автоморфных форм Зигеля мы приводим в разделе 6. Более того, Бейлинсону и Манину удалось, используя свойства А) и Б) меры, выразить ее через тэта-функции и абелевы дифференциалы для произвольного p [11]. В разделе 7 мы приведем альтернативный вывод этого результата, основанный на построенной в [12] теории аналитических полей на римановых поверхностях.

В разделе 4 мы определяем порядок полюса с помощью прямой оценки континуальных интегралов, однако А. Бейлинсов и В. Дринфельд сообщили автору, что теорема Мамфорда [7] вместе с результатами Вольперта [13] о когомологиях $\overline{M}_p$, позволяет определить порядок полюса в предположении, что $F(y)$ мероморфна на $\overline{M}_p$ и не имеет нулей и полюсов на M_p. Подробнее см. п. 5, где приведена точная математическая формулировка результатов.

В классической математике римановы поверхности рассматривались как разветвленные накрытия комплексной плоскости. Параметрами y_i в этом случае служат комплексные координаты части точек ветвления. Соответствующие вычисления, основанные на представлении точки ветвления вершинным оператором [14], приведены в разделах 9—12.

Появление комплексно-аналитической структуры в теории струн тесно связано с конформной инвариантностью и сокращением гравитацион-

*) После того, как к M_p присоединяется D, оно становится компактным алгебраическим многообразием $\overline{M}_p$ [10].

ной аномалии в секторах правых и левых возбуждений струны по отдельности [15]. При этом $F(y)\,(\overline{F(y)})$ является вкладом в меру левых (правых) возбуждений. Три аномалии — конформная, гравитационная и аналитическая — сокращаются одновременно.

1. Теорема о голоморфности.

2. От суммы по поверхностям к интегрированию по пространству модулей. Согласно [5], сумма по поверхностям определяется как

$$\sum_{\substack{\text{По поверх-}\\ \text{ности}}} e^{-(\text{площадь})} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{p=0}^{\infty} \int \mathrm{D}g_{ab}(\xi)\,\mathrm{D}X_\mu(\xi)\exp\left(-S\left[X_\mu,\,g_{ab}\right]\right), \tag{2.1}$$

где $g_{ab}(\xi)$ — внутренняя метрика на поверхности с координатами ξ_1, ξ_2, а $X_\mu(\xi)$ определяет вложение поверхности в D-мерное пространство-время; S — действие Намбу—Гото:

$$S=\int g^{1/2}\left(g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu+\mu_0^2\right)\mathrm{d}^2\xi. \tag{2.2}$$

Ниже мы положим $D=26$. Мера интегрирования в (2.1) определяется с помощью интервалов в фундаментальном пространстве:

$$\begin{aligned}\|\delta g\|^2&=\int g^{aa_1}g^{bb_1}\delta g_{ab}\delta g_{a_1b_1}g^{1/2}\,\mathrm{d}^2\xi,\\ \|\delta X_\mu\|^2&=\int(\delta X_\mu)^2 g^{1/2}\mathrm{d}^2\xi.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Каждая метрика определяет форму объема $\mathrm{d}v=g^{1/2}\mathrm{d}\xi^1\wedge\mathrm{d}\xi^2$ и согласованную с метрикой комплексную структуру

$$J_a^b=g^{1/2}\varepsilon_{ac}g^{cb}, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$, $\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=1$. С этой комплексной структурой связаны гармонические координаты z, $\bar z$, где z определяется из решения уравнения Бельтрами

$$J_a^b\frac{\partial z}{\partial\xi^b}=i\frac{\partial z}{\partial\xi^a}. \tag{2.5}$$

В этих координатах метрика принимает конформный вид

$$\hat g\equiv g_{ab}\mathrm{d}\xi^a\mathrm{d}\xi^b=\rho(z,\bar z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar z,\quad \rho\equiv e^{\varphi}. \tag{2.6}$$

При бесконечно малых конформных $\varphi\to\varphi+\delta\varphi$ и общекоординатных $z\to z+\varepsilon(z,\bar z)$ преобразованиях вариация метрики равна

$$\begin{aligned}\delta\hat g&=\rho\delta\tilde\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar z+\rho\bar\partial\varepsilon(\mathrm{d}\bar z)^2+\rho\,\partial\bar\varepsilon(\mathrm{d}z)^2,\\ \rho\delta\tilde\varphi&=\rho\delta\varphi+\partial(\rho\,\varepsilon)+\bar\partial(\rho\,\bar\varepsilon),\\ \partial&\equiv\frac{\partial}{\partial z},\quad \bar\partial\equiv\frac{\partial}{\partial\bar z},\end{aligned} \tag{2.7}$$

и ее длина в смысле (2.3) равна

$$\|\delta\hat g\|^2=\int\left[\rho(\delta\varphi)^2+\rho(\partial\bar\varepsilon)\bar\partial\varepsilon\right]\mathrm{d}^2\xi. \tag{2.8}$$

Под $\mathrm{d}^2\xi$ здесь и далее следует понимать $i/2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar z$.

Для выделения из (2.1) объема калибровочной группы общекоординатных и конформных преобразований надо, согласно [5], перейти от интегрирования по Dg_{ab} к интегрированию по $D\varphi$ и $D\varepsilon$. Для этих полей интервалы в функциональном пространстве, с учетом того, что φ — скаляр, а ε — векторное поле, равны

$$\|\delta\varphi\|^2 = \int \rho (\delta\varphi)^2 d^2\xi, \quad \|\varepsilon\|^2 = \int \varepsilon \bar{\varepsilon} \rho^2 d^2\xi. \tag{2.9}$$

Из (2.8), (2.9) находим, что *)

$$Dg_{ab} = \det(-\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial})\, D\varphi D\varepsilon\, Dg_{ab}^{\perp}. \tag{2.10}$$

В этой формуле $Dg_{ab}^{\perp}$ обозначает интегрирование по тем направлениям в функциональном пространстве метрик, которые ортогональны вариациям (2.7). Чтобы доказать, что такие направления существуют, рассмотрим произвольную бесконечно малую вариацию метрики $\delta\hat{g}^*$ (не путать с $\delta\hat{g}$ из (2.7)):

$$\delta\hat{g}^* = \delta\varphi^*\rho\, dz\, d\bar{z} + f(dz)^2 + \bar{f}(d\bar{z})^2. \tag{2.11}$$

Из условия ортогональности

$$\langle\delta\hat{g}, \delta\hat{g}^*\rangle = \int \delta\tilde{\varphi}\delta\varphi^*\rho\, d^2\xi + \int f\bar{\partial}\varepsilon\, d^2\xi + \int \bar{f}\partial\bar{\varepsilon}\, d^2\xi = 0$$

находим

$$\delta\varphi^* = \bar{\partial}f = \partial\bar{f} = 0. \tag{2.12}$$

Вариации метрики, ортогональные калибровочной группе, т. е. удовлетворяющие (2.12), называются голоморфными квадратичными дифференциалами. Известно, что на поверхности рода $p \geqslant 2$ комплексная размерность линейного пространства V таких дифференциалов равна $3p-3$ (1 для $p=1$ и 0 для $p=0$). Таким образом, интегрирование по $Dg_{ab}^{\perp}$ является интегрированием по конечномерному пространству M_p комплексных структур римановых поверхностей рода p (пространству модулей), связанному с вариациями метрики вида (2.12).

Комплексно-аналитические координаты в пространстве M_p вводятся следующим образом [6]. Выберем базис $f_i(z)(dz)^2$ $(i=1, \ldots, 3p-3)$ в V и дуальный ему базис

$$\eta^j(z, \bar{z})\frac{d\bar{z}}{dz} \quad (j = 1, \ldots, 3p-3)$$

в пространстве дифференциалов Бельтрами **):

$$\int \eta^k f_i\, d^2\xi = \delta_i^k. \tag{2.13}$$

Тогда любая комплексная структура J, близкая к структуре $J^{(0)}$, согласованной с метрикой $\rho\, dz\, d\bar{z}$, может быть параметризована комплексными параметрами $y_1, \ldots, y_{3p-3}$ и является согласованной с метрикой

$$\hat{g}(y) = \rho\,|dz + y_i\eta^i d\bar{z}|^2 = \tilde{\rho}\, du\, d\bar{u}, \tag{2.14}$$

где координата u определяется из решения Бельтрами

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}} = y_i\eta^i\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.15}$$

и *голоморфно* зависит от y_i [6].

---

*) В рассматриваемом нами случае рода $p \geqslant 2$ оператор $-\rho^{-2}\partial\rho\bar{\partial}$ не имеет нулевых мод, и обычный штрих у детерминанта можно не писать.

**) Дифференциалом Бельтрами называется величина $\eta(z, \bar{z})$, связь которой с комплексной структурой $J(\eta)$ определяется следующим выражением для согласованной с η метрики $\hat{g}(\eta) = |dz + \eta d\bar{z}|^2$.

Условия (2.13) определяют η^k с точностью до полной производной

$$\eta^k \to \tilde{\eta}^k = \eta^k + \bar{\partial}\varepsilon^k, \tag{2.16}$$

однако комплексные структуры, соответствующие $\delta y_k \eta^k$ и $\delta y_k \tilde{\eta}^k$ и инфинитезимально близкие к $J^{(0)}$, совпадают. Произвол (2.16) фиксируется условием ортогональности метрики (2.14) вариациям (2.7), что приводит к выбору

$$\eta^k = \rho^{-1}(N_2^{-1})^{ki}\bar{f}_i, \quad (N_2)_{ik} \overset{\text{def}}{=} \int \bar{f}_i f_k \rho^{-1}\, d^2\xi, \tag{2.17}$$

следовательно,

$$\|\delta\hat{g}^{\perp}(y)\|^2 = \delta y_i \delta\bar{y}_k (N_2^{-1})^{ik},$$

$$Dg_{ab}^{\perp} = (\det N_2)^{-1}\, d\Omega. \tag{2.18}$$

Теперь подставим (2.18) в (2.10), произведем в (2.1) гауссово интегрирование по $DX_\mu(\xi)$ (с учетом нулевой моды $X_\mu^{(0)}(\xi) = \text{const}$) и выделим бесконечный объем группы общекоординатных и конформных преобразований $\int D\varepsilon D\varphi$. После этого задача сводится к вычислению следующего интеграла по пространству модулей M_p:

$$Z_p = \int d\Omega \exp W(y_i, \bar{y}_i)(\det N_1)^{-13}, \tag{2.19}$$

$$\exp W(y_i, \bar{y}_i) = \frac{\det \Delta_{-1}}{\det N_2}\left(\frac{\det N_0 \cdot \det N_1}{\det' \Delta_0}\right)^{13}.$$

Здесь $\Delta_j = -\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar{\partial}$ является оператором Лапласа, действующим на пространстве j-дифференциалов, т. е. тензоров $\phi_{\underbrace{+\dots+}_{j}}(z, \bar{z})$, преобразующихся как $(dz)^{-j}$

$$(N_j)_{\alpha\beta} = \int \rho^{1-j}\bar{\phi}_\alpha^{(j)}\phi_\beta^{(j)}\, d^2\xi, \tag{2.20}$$

и является матрицей скалярных произведений нулевых мод $\phi_\alpha^{(j)}$ оператора Δ_j. Заметим, что $\det N_1$ не зависит от ρ, а $\det N_{-1}$ в (2.19) отсутствует, так как при $p \geqslant 2$ у Δ_{-1} нет нулевых мод. Вследствие сокращения конформной аномалии [5] произведение остальных членов в (2.19) также не зависит от ρ и является, таким образом, функцией только от y_i, $\bar{y}_i$. В этом можно убедиться с помощью формулы [5, 16]

$$\delta_\rho \ln \frac{\det' \Delta_j}{\det N_j \cdot \det N_{1-j}} = \frac{C_j}{6\pi}\int \delta\rho\rho^{-1}\partial\bar{\partial}\ln\rho\, d^2\xi, \tag{2.21}$$

$$C_j = 6j^2 - 6j + 1,$$

где $N_k \equiv 1$, если у Δ_k нет нулевых мод. В (2.21) стоит 6π вместо обычных 24π, так как $\partial\bar{\partial} = (1/4)(\partial_1^2 + \partial_2^2)$.

3. Голоморфность $F(y)$ [9]. Докажем теперь, что $\exp W(y_i, \bar{y}_i)$ в (2.19) является квадратом модуля голоморфной функции y_i. Для этого нам надо вычислить вариацию $W(y_i, \bar{y}_i)$. При инфинитезимальном изменении комплексной структуры, порождаемом вариацией метрики вида

$$\delta\hat{g} = \rho[\eta(y)(d\bar{z})^2 + \overline{\eta(y)}(dz)^2], \quad \eta(y) = \sum_{i=1}^{3p-3}\delta y_i \eta^i. \tag{3.1}$$

Функция $\exp W(y_i, \bar{y}_i)$ является квадратом модуля голоморфной функции тогда и только тогда, когда вторая вариация W не содержит членов $\eta\bar{\eta}$

$$\delta_\eta \delta_{\bar{\eta}} W = 0. \tag{3.2}$$

С помощью утомительных квазиклассических вычислений в [9] было показано, что

$$\delta_\eta \delta_{\bar{\eta}} \ln \frac{\det' \Delta_j}{\det N_j \cdot \det N_{1-j}} = -\frac{C_j}{6\pi} \int \rho^{-2} (\bar{\partial} f \partial \bar{f} + f\bar{f} \partial\bar{\partial} \ln \rho)\, d^2\xi, \tag{3.3}$$

$$f \equiv \rho\bar{\eta},$$

при условии

$$\delta_\eta \phi_\beta^{(j)} = \delta_{\bar{\eta}} \phi_\beta^{(j)} = 0,$$

откуда, с учетом (2.19), следует (3.2). Аналитическая аномалия (3.3) сокращается и

$$\exp W(y_i, \bar{y}_i) = |F(y_i)|^2. \tag{3.4}$$

Более того, из (3.3) следует, что любое выражение вида

$$\prod_j \left(\frac{\det' \Delta_j}{\det N_j \cdot \det N_{1-j}} \right)^{n_j} \tag{3.5}$$

будет квадратом модуля голоморфной функции на M_p при условии

$$\sum_j C_j n_j = 0. \tag{3.6}$$

В итоге мера (2.19) действительно является с точностью до $(\det N_1)^{-13}$ квадратом модуля аналитической функции при условии, что базис $\phi_\alpha^{(1)}$ в пространстве голоморфных 1-дифференциалов выбран голоморфно зависящим от y_i. Последнее может быть достигнуто следующим образом. Выберем на поверхности S рода p симплектический базис из $2p$ замкнутых, нестягиваемых, ориентированных путей a_i, b_i, $i = 1, \ldots, p$, так, чтобы

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0 \quad (i \neq j, \ a_i \circ b_j = \delta_{ij}), \tag{3.7}$$

где $a \circ b$ обозначает алгебраическое число пересечений (пересечения учитываются с естественными знаками). Известно, что пространство голоморфных 1-дифференциалов (абелевых дифференциалов первого рода) имеет комплексную размерность p и в нем можно выбрать базис $\omega_i = \phi_i^{(1)}(z)\, dz$ нормализованных дифференциалов так, чтобы

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}. \tag{3.8}$$

При этом матрица

$$\tau_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j \tag{3.9}$$

называется матрицей периодов поверхности S. В этом базисе

$$(N_1)_{kj} = \frac{i}{2} \int_S \omega_k \wedge \bar{\omega}_j = \operatorname{Im} \tau_{kj}. \tag{3.10}$$

Подставляя в (2.19) и вспоминая (3.4), получаем (1.3). Голоморфность и отсутствие нулей $F(y)$ следует из того, что регуляризованные детерминанты в (2.19) не должны обращаться на невырожденных поверхностях ни в нуль (так как число нулевых мод у каждого постоянно: одна у Δ_0 и ни одной у Δ_{-1}), ни в бесконечность. В принципе, (3.2) не исключает возможности того, что $F(y_i)$ в (3.4) приобретает ненулевую фазу при обходе вокруг какого-либо пути γ в $\overline{M}_p$ и тем самым является функцией не на $\overline{M}_p$, а на некотором его накрытии. Однако, если $F(y)\,dv$ — мероморфная форма (что мы докажем, доказав Б), то γ должно быть нестягиваемым. Но известно, что таких путей нет: $H_1(\overline{M}_p, \mathbb{Z})=0$ $(p\geqslant 3)$, поэтому такая возможность исключается. В итоге сформулированное во введении свойство А) меры доказано.

Отметим, что вскоре после выхода препринта [9] появились работы [10, 17], в которых содержалось более подробное обсуждение связи утверждения А) с теоремой об индексе для семейства операторов и существованием критической размерности 26. В [10], кроме того, было замечено, что (3.3) является частным случаем локального варианта теоремы об индексе, полученного в [18].

Обсудим теперь кратко связь между голоморфностью меры и конформной инвариантностью. Вторая вариация $\delta\bar{\delta}\widetilde{W}$ эффективного действия духов и полей X_μ может быть выражена через корреляционные функции оператора тензора энергии—импульса $T_{ab}=T_{ab}^{X^\mu}+T_{ab}^{gh}$:

$$\delta\bar{\delta}\widetilde{W}=\int d^2\xi\,\eta(\xi)\int d^2\xi'\,\overline{\eta(\xi')}\langle T_{++}(\xi)\,T_{--}(\xi')\rangle. \tag{3.11}$$

Из наивного закона сохранения мы имеем $\partial_-T_{++}=\partial_+T_{--}=0$, откуда с точностью до нулевых мод $\langle T_{++}(\xi)\,T_{--}(\xi')\rangle=0$. Из-за конформней аномалии это не верно по отдельности для духов и полей X_μ, так как $\langle T_{+-}\rangle\neq 0$, $\partial_-T_{++}=-\partial_+T_{+-}$. Однако при $D=26$ аномалия сокращается, вследствие чего $\langle T_{++}(\xi)\,T_{--}(\xi')\rangle=0$ с точностью до нулевых мод; учитывая последнее, мы приходим снова к результату (3.3).

Перейдем теперь к анализу поведения меры на бесконечности D пространства $\overline{M}_p$, где поверхности вырождаются, и докажем свойство Б).

4. Особенности на бесконечности пространства модулей и расходимости [9]. В этом разделе нам будет удобно иметь дело не с детерминантами, а с континуальными интегралами. Мы будем изучать расходимости следующего интеграла:

$$Z_p=\int\frac{d\Omega}{\det(f_i,f_j)}\,\frac{\left[\int D\varphi\exp\left(-\int\partial\bar{\varphi}\,\bar{\partial}\varphi\,d^2\xi\right)\right]^{13}}{\int D\varepsilon\exp\left(-\int\rho\partial\bar{\varepsilon}\bar{\partial}\varepsilon d^2\xi\right)}, \tag{4.1}$$

где φ — комплексное скалярное поле, ε — комплексное векторное поле духов, f_j — некоторый базис в пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов, связанный с деформациями комплексной структуры

$$dz\to dz+\delta y_i\eta^i d\bar{z} \tag{4.2}$$

соотношением

$$\int\eta^i f_j\,d^2\xi=\delta^i_j; \tag{4.3}$$

y_i — комплексные координаты в пространстве модулей M_p, задаваемые в окрестности заданной комплексной структуры dz формулой (4.2). Скалярное произведение

$$(f_i,f_j)\overset{\text{def}}{=}\int f_i\bar{f}_j\rho^{-1}d^2\xi. \tag{4.4}$$

Формула (4.1) справедлива также и для $p=1$. Мера з Z_p расходится в двух случаях.

Случай I. Поверхность рода p вырождается в две поверхности рода q и $p-q$ с выколотыми точками, причем поверхности в этих точках склеены (рис. 1). Многообразие таких поверхностей в пространстве модулей $\overline{M}_p$ обозначим через D_q, $q=1, 2, \ldots, [p/2]$.

Случай II. Поверхность рода p вырождается в поверхность рода $p-1$ с двумя склеенными точками — остатком выродившейся ручки

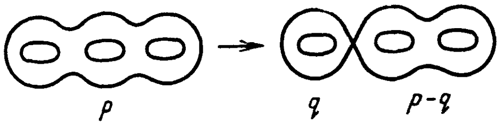

Рис. 1

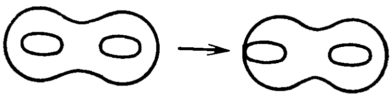

Рис. 2

(рис. 2). В $\overline{M}_p$ такие поверхности лежат на многообразии, обозначаемом D_0. Найдем коразмерности (т. е. $\dim\overline{M}_p-\dim D_\alpha$) подпространства D_q и D_0 в $\overline{M}_p$. Для этого воспользуемся тем, что комплексная размерность пространства модулей поверхности рода $p\gg1$ с n отмеченными точками равна $3p-3+n$ ($2n$ координат точек на многоугольнике в плоскости Лобачевского$+(6p-6)$ параметров многоугольника), поэтому размерности D_q и D_0 равны

$$\dim D_q = 3q-3+1+3(p-q)-3+1=3p-4, \tag{4.5}$$
$$\dim D_0 = 3(p-1)-3+2=3p-4.$$

Таким образом, все D_α имеют комплексную коразмерность 1 в $\overline{M}_p$ и на самом деле дополняют пространство модулей несингулярных поверхностей M_p до компактного пространства $\overline{M}_p$. Для анализа поведения меры в Z_p в некоторой окрестности $D=D_0\bigcup D_1\bigcup\ldots\bigcup D_{[p/2]}$ выберем в этой окрестности координату y_1 поперек D, а $y_2, \ldots, y_{3p-3}$ — вдоль D, так чтобы D локально задавалось уравнением

$$y_1(D)=0. \tag{4.6}$$

Меру будем изучать как функцию y_1 при фиксированных $y_2, \ldots, y_{3p-3}$. Можно показать, что в окрестности $y_1=0$ конформным преобразованием метрики вырождающуюся перемычку можно превратить в очень длинный цилиндр (рис. 3). Для этого выберем вдоль цилиндра длиной T координату τ, $0\leqslant\tau\leqslant T$. Тогда при $T\gg1$ умножение плоской метрики цилиндра на конформный множитель $\lambda=\exp(-2\tau)+\exp(2\tau-2T)$ превращает его в два диска единичного радиуса, соединенные в центрах перемычкой радиуса $e^{-T}\equiv|y_1|\ll1$. Более

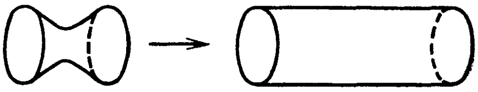

Рис. 3

строго, комплексная структура вырождающейся поверхности в окрестности тонкой перемычки устроена так же, как перемычка гиперболы $uv=y_1$ в $\mathbb{C}^2$, которая при $y_1=0$ вырождается в две плоскости: $u=0$ и $v=0$, пересекающиеся в точке $u=v=0$ трансверсально. Метрика $\hat{g}=|du/u|^2$ переводит перемычку гиперболы в цилиндр длиной $T\backsim\ln(1/|y_1|)$. На самом деле $u=0$ и $v=0$ имеют смысл уравнений тех поверхностей, на которые распадается исходная. Это представление удобно для анализа асимптотик. Напомним, что мера в Z_p не зависит от выбора конформной метрики.

В обоих случаях поверхность S_p будем считать склеенной из цилиндра и одной (случай II) или двух (случай I) крышечек (рис. 4). Координаты (τ, σ) на цилиндре K выберем, как на рис. 5. Поверхность из D соответствует $T\to\infty$, и именно этот предел будет нас интересовать. Из дальнейшего будет видно, что «естественной» координатой y_1 **является**

$$y_1 = \exp[-(T+i\delta)],$$

где δ — угол поворота правого края цилиндра K относительно левого при приклеивании к крышечке.

Оценим сперва континуальные интегралы. Для этого следует зафиксировать граничные условия на контурах Γ_1, Γ_2 и Γ_3, Γ_4, вычислить интегралы при заданных граничных условиях, после чего перемножить их и

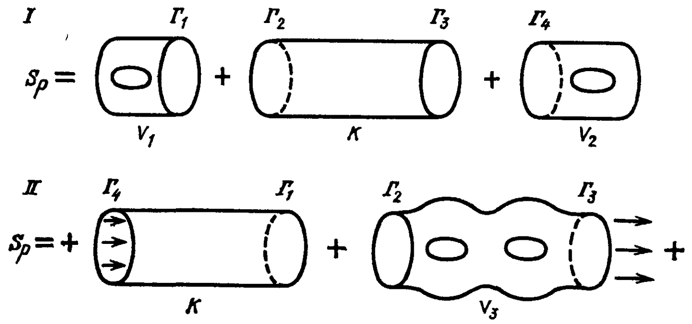

Рис. 4

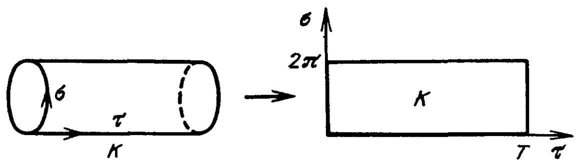

Рис. 5

проинтегрировать по граничным условиям. В случае I для скаляров имеем

$$I_0 = \int D\varphi \exp\left(-\int_{S_p} \partial\bar{\varphi}\,\bar{\partial}\varphi\, d^2\xi\right) = \int D\varphi(0,\sigma)\, D\varphi(T,\sigma)\times$$
$$\times \exp(-v_1[\varphi(0,\sigma)] - v_2[\varphi(T,\sigma)])\, G[\varphi(0,\sigma), \varphi(T,\sigma)], \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \exp(-v_1[\varphi(0,\sigma)]) &= \int_{\text{Задано } \varphi(0,\sigma)} D\varphi \exp\left(-\int_{V_1} \partial\bar{\varphi}\,\bar{\partial}\varphi\, d^2\xi\right), \\ G &= \int_{\substack{\varphi(0,\sigma),\\ \varphi(T,\sigma)}} D\varphi \exp\left(-\int_K \partial\bar{\varphi}\,\bar{\partial}\varphi\, d\sigma\, d\tau\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Аналогично определяются $\exp(-v_2[\varphi(T,\sigma)])$ и $\exp(-v_3[\varphi(0,\sigma),$ $\varphi(T,\sigma)])$ в случае II. Для духов все то же самое, только действие не $\int \partial\bar{\varphi}\,\bar{\partial}\varphi\, d^2\xi$, а $\int \rho\,\partial\bar{\varepsilon}\,\bar{\partial}\xi\, d^2\xi$.

Поскольку на цилиндре K $\rho=1$, то G для скаляров и духов одно и то же:

$$G[\varphi(0,\sigma), \varphi(T,\sigma)] = \exp(-S_{cl}[\varphi(0,\sigma), \varphi(T,\sigma)])\,(\det_{\mathrm{Dir}}\Delta_0)^{-1}, \quad (4.10)$$

где S_{cl} — действие на решение уравнения Лапласа $\partial\bar{\partial}\varphi=0$ с граничными условиями

$$\varphi(0,\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(0)\, e^{in\sigma}, \quad \varphi(T,\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(T)\, e^{in\sigma}, \quad (4.11)$$

а $\det_{\mathrm{Dir}}\Delta_0$ — детерминант оператора Лапласа на цилиндре K с условиями Дирихле на краях. После несложных вычислений находим:

$$G = T^{-1}e^{T/6}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2nT})^{-2}\exp\left(-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{\operatorname{sh} nT}e^{nT}|\varphi_n(0)-e^{-nT}\varphi_n(T)|^2\right). \tag{4.12}$$

Таким образом, мы должны в случае I найти асимптотику при $T\to\infty$ следующего выражения:

$$I_0 = T^{-1}e^{T/6}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-2nT})^{-2}\int\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{D}^2\varphi_n(0)\,\mathrm{D}^2\varphi_n(T)\times$$
$$\times\exp(-v_1[\varphi_1(0)]-S_{\mathrm{cl}}[\varphi_n(0),\varphi_n(T)]-v_2[\varphi_n(T)]). \tag{4.13}$$

При $T\to\infty$ в S_{cl} можно пренебречь обращающимися в нуль членами, если только при этом не возникает дополнительного вырождения у квадратичной формы $v_1+S_{\mathrm{cl}}+v_2$, т. е. независимости от $\varphi_n(0)$ или $\varphi_n(T)$.

Из формулы (4.12) для G видно, что

$$S_{\mathrm{cl}}|_{T\to\infty}\sim T^{-1}|\varphi_0(0)-\varphi_0(T)|^2+\sum_{n>0}2n|\varphi_n(0)|^2+$$
$$+\sum_{n<0}2|n|\,|\varphi_n(T)|^2+\ldots, \tag{4.14}$$

где точками обозначены экспоненциально малые члены. Мы оставили $T^{-1}|\varphi_0(0)-\varphi_0(T)|^2$, поскольку на V_1 и V_2 имеются скалярные нулевые моды, и v_1 и v_2 не зависят от $\varphi_0(0)$ и $\varphi_0(T)$. Экспоненциально малыми членами можно пренебречь, если v_1 не вырождается ни на каком векторе вида

$$\sum_{n<0}a_n e^{in\sigma},$$

а v_2 — на векторе вида

$$\sum_{n>0}b_n e^{in\sigma}.$$

Докажем, что это действительно так. Предположим противное. В этом случае на V_1 имеется решение φ^* уравнения $\bar\partial\varphi=0$, обращающееся на Γ_1 в

$$\sum_{n<0}a_n e^{in\sigma}.$$

Представим теперь, что цилиндр K простирается вправо до бесконечности ($\tau\geqslant 0$) и метрика на нем не единица, а $e^{-2\tau}=\rho^*$. В координатах

$$u=\exp[-(\tau+i\sigma)]\equiv e^{-z}$$

цилиндр $0\leqslant\sigma<2\pi$, $0\leqslant\tau$ является кругом $|u|\leqslant 1$ с постоянной единичной метрикой

$$\rho^*\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar z=|u|^2\,\mathrm{d}\ln u\,\mathrm{d}\ln\bar u=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\bar u.$$

Этим кругом поверхность V_1 заклеивается, становясь компактной поверхностью V_1^* рода $q\geqslant 1$.

Решение φ^* можно продолжить на цилиндр, сохранив его голоморфность

$$\varphi^*(\tau+i\sigma)=\sum_{n<0}a_n\exp[n(\tau+i\sigma)].$$

Следовательно, на поверхности V_1^* существует *голоморфная* функция φ^*, отличная от постоянной. Однако известно, что таких функций не существует. Это противоречие доказывает утверждение.

В итоге у формы v_1 нет нулевых векторов вида

$$\sum_{n<0} a_n e^{in\sigma}.$$

Аналогично и у v_2 нет нулевых векторов вида

$$\sum_{n>0} b_n e^{in\sigma}$$

и в S_{cl} действительно законно пренебречь экспоненциально малыми членами. Поэтому

$$I_0|_{T\to\infty} \sim T^{-1} e^{T/6} \int d^2\varphi_0(0)\, d^2\varphi_0(T) \exp(-|\varphi_0(0)-\varphi_0(T)|^2 T^{-1}) \sim$$
$$\sim e^{T/6} \int d^2(\varphi_0(0)+\varphi_0(T)). \quad (4.15)$$

Как и следовало ожидать, у нас остался интеграл по нулевой моде — объем «Вселенной». Далее мы положим его равным единице. Остается

$$I_0(T)|_{T\to\infty} \backsim e^{T/6} \quad (\text{на } D_q;\ q \neq 0). \quad (4.16)$$

Займемся теперь интегралом по духам

$$I_1(T) = \int D\varepsilon \exp\left(-\int \rho\, \partial\bar\varepsilon\, \bar\partial\varepsilon\, d^2\xi\right). \quad (4.17)$$

Вся разница по сравнению со случаем скаляров состоит в том, что в S_{cl} в (4.10) не надо удерживать $|\varepsilon_0(0)-\varepsilon_0(T)|^2/T$, поскольку у v_1^{gh} нет нулевых векторов вида

$$\sum_{n\leqslant 0} a_n e^{in\sigma}$$

($n\leqslant 0$, а не $n<0$, как для скаляров!), а у v_2^{gh} — вида

$$\sum_{n\geqslant 0} b_n e^{in\sigma}.$$

Для того чтобы доказать это, опять, как и в скалярном случае, предположим противное. Тогда на поверхности V_1 существует решение ε^* уравнения $\bar\partial\varepsilon=0$, которое продолжается на цилиндр K голоморфной функцией

$$\varepsilon^*(\tau+i\sigma) = \sum_{n\leqslant 0} a_n e^{n(\tau+i\sigma)}.$$

Однако ε теперь не скаляр, а вектор. В координатах u

$$\varepsilon^*(u) = \varepsilon^*(z)\frac{du}{dz} = -\varepsilon^*(z)\,u = -\sum_{n\leqslant C} a_n u^{1-n}$$

обращается в нуль при $u=0$. Следовательно, на заклеенной поверхности V_1^* существует голоморфное *непостоянное* векторное поле $\varepsilon^*(z)$. Но мы знаем, что таких полей нет, если род q поверхности V_1^* больше либо равен единице. Более того, при $q>1$ вообще никаких голоморфных векторных полей не существует, а при $q=1$ имеется одно голоморфное векторное доле, нигде не обращающееся в нуль. Отсюда мы заключаем, что

v_1^{gh} не имеет нулевых векторов вида

$$\sum_{n\leqslant 0} a_n e^{in\sigma}.$$

Поскольку в этом случае в S_{cl} в (3.10) не надо удерживать член $|\varepsilon_0(0)-\varepsilon_0(T)|^2/T$, то вся главная часть зависимости от T определяется сомножителем $\det_{\mathrm{Dir}}\Delta_0(T)$ в G:

$$I_{-1}(T)|_{T\to\infty} \backsim T^{-1}e^{T/6} \quad (\text{на } D_q,\ q\neq 0). \tag{4.18}$$

Отношение же континуальных интегралов, имеющееся в мере Z_p, ведет себя как *)

$$I_{(\mathrm{I})} = \left.\frac{I_0^{13}}{I_{-1}}\right|_{T\to\infty} \backsim Te^{2T} \quad (\text{на } D_q,\ q\neq 0). \tag{4.19}$$

Случай II рассматривается совершенно аналогично, только V_3 заклеивается двумя дисками — справа и слева. Единственным отличием является то, что теперь и в случае скалярного поля в S_{cl} можно пренебречь членом $|\varphi_0(0)-\varphi_0(T)|^2/T$. Это связано с тем, что у v_3 нулевой модой является лишь сумма $\varphi_0(0)+\varphi_0(T)$, а не $\varphi_0(0)$ и $\varphi_0(T)$ по отдельности, как было для v_1+v_2 в случае I.

Таким образом, в случае II $I_0 \sim I_{-1}$ и отношение континуальных интегралов

$$I_{(\mathrm{II})} = \left.\frac{I_0^{13}}{I_{-1}}\right|_{T\to\infty} \sim T^{-12}e^{2T} \quad (\text{на } D_0). \tag{4.20}$$

Нам осталось оценить форму объема

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\det(f_i,\ f_j)} = \prod_{i=1}^{3p-3} \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}\bar{y}_i \det{}^{-1}(f_i,\ f_j). \tag{4.21}$$

Для этого воспользуемся тем, что с вариацией T связан дифференциал Бельтрами, постоянный на K. Действительно, вариацию комплексной структуры, порождаемую таким дифференциалом, $\mathrm{d}z \to \mathrm{d}z + a\,\mathrm{d}\bar{z}$, можно рассматривать, как преобразование $z \to \tilde{z} = z + a\bar{z}$, которое переводит прямоугольник $0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant T$ $(z=\tau+i\sigma)$ в параллелограмм. Новым значением координаты $(T+i\delta)/2\pi i$ в пространстве $\overline{M}_p$ является комплексное отношение периодов этого параллелограмма

$$\mathrm{d}\,\frac{T+i\delta}{2\pi i} = \frac{\tilde{z}(T)}{\tilde{z}(2\pi i)} - \frac{T}{2\pi i} = \frac{aT}{\pi i},$$

откуда $a = \mathrm{d}(T+i\delta)/2T$. Следовательно, координате $\tilde{y}_1 = T+i\delta$ в пространстве модулей $\overline{M}_p$ соответствует дифференциал Бельтрами $\eta^1 = 1/2T$, так как сдвигу на $\mathrm{d}\tilde{y}_1$ в $\overline{M}_p$ соответствует, как мы только что показали, вариация комплексной структуры

$$\mathrm{d}z \to \mathrm{d}z + \mathrm{d}\tilde{y}_1\eta^1\mathrm{d}\bar{z}.$$

Из (4.3) находим, что квадратичный дифференциал **) f_1 на K равен единице. Координата $\tilde{y}_1$ направлена поперек D. Остальные квадратич-

*) Случай, когда род V_1^* равен нулю (заклеивание крышечкой), был разобран Поляковым, которому автор признателен за разъяснения. В этом случае $I_{(\mathrm{I})}$ не зависит от T.

**) Напомним, что формулы (4.2), (4.3) — это определение направлений η^i и соответствующих координат δy_i в $\overline{M}_p$ по базису f_j.

ные дифференциалы могут быть выбраны так, что $(f_i, \tilde{f}_1) \sim 1$ и соответствующие им координаты направлены вдоль D. В этом случае

$$\det(f_i, f_j) \backsim (\tilde{f}_1, \bar{\tilde{f}}_1) \backsim T,$$
$$\frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} \backsim \frac{d\tilde{y}_1 \wedge d\bar{\tilde{y}}_1}{T} \wedge d\Omega_{\parallel} = \frac{dT\, d\delta}{T} d\Omega_{\parallel} =$$
$$= \frac{e^{2T}}{T} dy_1 \wedge d\bar{y}_1 \wedge d\Omega_{\parallel} = \frac{dy_1 \wedge d\bar{y}_1}{|y_1|^2 \ln(1/|y_1|)} \wedge d\Omega_{\parallel}, \tag{4.22}$$

где

$$y_1 = e^{-\tilde{y}_1} = \exp[-(T + i\delta)].$$

Поверхность D задается уравнением $y_1(D) = 0$. Эта координата хороша тем, что, как видно из (4.12), отношение детерминантов раскладывается в ряд по y_1, $\bar{y}_1$ и расходимости, которые кажутся экспоненциальными, в координатах $y_1, \ldots$ являются степенными.

Собирая вместе (4.19) —(4.22), находим асимптотику меры в окрестности D_q, $q \neq 0$

$$\frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} \frac{I_0^{13}}{I_{-1}}\bigg|_{|y_1| \to 0} \sim \frac{d^2 y_1}{|y_1|^4} \sim dT e^{2T} \tag{4.23}$$

и окрестности D_0:

$$\frac{d\Omega}{\det(f_i, f_j)} \frac{I_0^{13}}{I_{-1}}\bigg|_{|y_1| \to 0} \sim \frac{d^2 y_1}{|y_1|^4 [\ln(1/|y_1|)]^{13}} \sim \frac{dT}{T^{13}} e^{2T}. \tag{4.24}$$

Для того чтобы найти порядок полюса формы $F(y)\, dv$ из (1.3), (3.4), нам осталось оценить матрицу периодов (3.25) в окрестности поверхности D. В случае I распада на две поверхности S_q и S_{p-q} рода q и $p-q$, p голоморфных 1-дифференциалов ω_i, (3.24) переходят в голоморфные 1-дифференциалы ω'_α, $\alpha = 1, \ldots, q$ на S_q и ω''_β, $\beta = 1, \ldots, p-q$ на S_{p-q}. Матрица периодов $\hat{\tau}$ при этом принимает блочный вид и $\det \operatorname{Im} \hat{\tau}(y)$ при $y_1 \to 0$ имеет конечный предел. Таким образом, в окрестности D_q, $q \neq 0$

$$\det \operatorname{Im} \hat{\tau}(y)|_{y_1 \to 0} \backsim \det \operatorname{Im} \hat{\tau}' \cdot \det \operatorname{Im} \hat{\tau}'', \tag{4.25}$$

где $\hat{\tau}'(\hat{\tau}'')$ — матрица периодов $S_q(S_{p-q})$. Для того чтобы оценить матрицу периодов в случае II — вырождения ручки,— выберем базис циклов (3.23) так, чтобы цикл a_p проходил поперек цилиндра K на рис. 4, II, а цикл b_p — вдоль. Выберем на K координату $z = \tau + i\sigma$ (см. рис. 5). Тогда из соотношения

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

и условия голоморфности $\bar{\partial}\omega_i = 0$ следует, что при $T \gg 1$ все дифференциалы, кроме ω_p, экспоненциально затухают на цилиндре

$$\omega_i \lesssim e^{-\tau} + e^{-(T-\tau)} \quad (i = 1, \ldots, p-1),$$

а $\omega_p = 1/2\pi i$ при $\tau \gg 1$, $T - \tau \gg 1$. Отсюда единственный расходящийся при $T \to \infty$ элемент матрицы периодов равен

$$\tau_{pp} = \oint_{b_p} \omega_p \approx \frac{T}{2\pi i}$$

и в окрестности D_0 имеем *)

$$\det \operatorname{Im} \hat{\tau}|_{y_1\to 0} \backsim T = \ln \frac{1}{|y_1|}. \tag{4.26}$$

Подставляя (4.25), (4.26) в (1.2) и сравнивая соответственно с (4.23), (4.24), находим, что форма $F(y)\,\mathrm{d}v$ имеет на D полюс второго порядка

$$F(y)\,\mathrm{d}v|_{y_1\to 0} \backsim y_1^{-2}\mathrm{d}\,y_1 \wedge \mathrm{d}\,v_{\parallel}. \tag{4.27}$$

Таким образом, свойство Б) меры, сформулированное РО введении, доказано.

Покажем теперь, что условием отсутствия нулей в M_p и асимптотикой (4.27) форма $F(y)$ $\mathrm{d}v$ определяется однозначно, с точностью до постоянного множителя. Действительно, отношение любых двух форм F' и F'', удовлетворяющих этим условиям, является мероморфной функцией на $\bar{M}_p$, не обращающейся в нуль или бесконечность нигде, кроме, быть может, пересечений компонент D_α поверхности D (т. е. в тех местах, где коэффициент при y_1^{-2} (4.27) может иметь особенности). Отсюда вытекает, что либо $F'/F''=\mathrm{const}$, либо многообразие нулей и полюсов функции F'/F'' имеет комплексную коразмерность 2 в $\bar{M}_p$. Однако известно, что многообразие нулей и полюсов непостоянной мероморфной функции на компактном алгебраическом многообразии имеет комплексную коразмерность 1. Значит, $F'/F''=\mathrm{const}$.

Асимптотики (4.23), (4.24) имеют очень простой смысл. Если рассматривать теорию струны как теорию бесконечного числа взаимодействующих частиц, то K на рис. 5 имеет смысл пропагатора в представлении собственного времени T, а интеграл по $\mathrm{d}T$ от меры в случае II может быть записан в виде

$$Z_p^{\text{расх.II}} = \int \mathrm{d}^D\rho_\mu \int_0^\infty \mathrm{d}T \sum_r V_3(r, p_\mu)\exp[-(p_\mu^2 + m_r^2)T], \tag{4.28}$$

где сумма идет по всем частицам, соответствующим различным возбужденным состояниям струны (p_μ — импульс, протекающий по петле). При больших T в интеграле по импульсам в (4.28) существенны малые p_μ^2 и мера в (4.28) имеет асимптотику

$$\mathrm{d}TT^{-D/2}\sum_r \exp(-m_r^2 T)V_3(r, 0), \tag{4.29}$$

откуда следует, что главный вклад в интеграл (4.28) на больших временах T дают тахионы и безмассовые состояния:

$$Z_p^{\text{расх.II}} \sim \int^\infty \mathrm{d}TT^{-D/2} \sum_{m_r^2\leqslant 0} e^{-m_r^2 T} V_3(r, 0). \tag{4.30}$$

Вспомним теперь, что в замкнутой бозонной струне основное состояние является тахионом [20] с $m_0^2 = -2$ (в нашей нормировке), а возбужденные состояния имеют $m_r^2 \geqslant 0$ (мультиплет безмассовых возбуждений содержит гравитон $g^{\mu\nu}$, тензор $A^{[\mu\nu]}$ и дилатон ϕ). Тогда с учетом того,

*) В этом случае вырожденную поверхность можно представлять себе как поверхность рода $p-1$ с двумя выколотыми точками R и Q. Цикл a_p обходит вокруг одной из них, а цикл b_p соединяет их. Дифференциал ω_p является нормализованным абелевым дифференциалом третьего рода с полюсами в R и Q. Подробное обсуждение см. в работе Алессандрини [19].

что $D=26$, получаем из (4.30) асимптотику

$$Z_p^{\text{расх.II}} \sim \int^{\infty} \mathrm{d}T T^{-13} e^{2T},$$

совпадающую с (4.24). Отметим, что при $D>2$ безмассовые состояния не дают вклада в расходимость интеграла (4.30).

В случае I частицы распространяются между вершинами V_1 и V_2 (см. рис. 4 и 1) с нулевым импульсом и вместо (4.30) имеем

$$Z_p^{\text{расх.I}} \sim \int^{\infty} \mathrm{d}T \sum_{m_r^2 \leqslant 0} e^{-m_r^2 T} V_1(r, 0) V_2(r, 0), \tag{4.31}$$

и главный вклад в расходимость в (4.31) опять связан с тахионом и имеет вид

$$\int^{\infty} \mathrm{d}T e^{2T},$$

что совпадает с (4.23). Однако ясно, что в этом случае имеется также и расходимость, связанная с безмассовым дилатоном ($g^{\mu\nu}$ и $A^{[\mu\nu]}$ из вакуума не рождаются) и, по-видимому, приводящая к перенормировке наклона реджевской траектории.

В итоге порядок γ полюса формы $F(y)\,\mathrm{d}v$ равен

$$\gamma = 1 - \frac{m_0^2}{2}\,. \tag{4.32}$$

Отметим в заключение этого раздела, что аналогичный метод оценки континуальных интегралов и анализ расходимостей был применен в работах [21, 22], использующих формулу следа Сельберга.

5. Мера в бозонной струне и теорема Мамфорда. В этом разделе мы приведем математически строгую формулировку полученных выше результатов и обсудим их связь с теоремой Мамфорда [7]. Из (2.19), (3.4) следует, что $F(y)$ является не функцией, а сечением некоторого линейного (т. е. комплексная размерность слоя равна единице) расслоения E над M_p. Более точно, $F(y)$ является вкладом в меру от левых возбуждений струны

$$F(y) = \det \bar{\partial}_{-1} \cdot (\det \bar{\partial}_0)^{-13}, \tag{5.1}$$

где $\bar{\partial}_j$ действует на пространстве j-дифференциалов; $\det \bar{\partial}_j$ является сечением линейного расслоения [23] со слоем, порождаемым вектором

$$\Phi_1^{(j)} \wedge \ldots \wedge \Phi_{\alpha_j}^{(j)} \wedge \Phi_1^{(1-j)} \wedge \ldots \wedge \Phi_{\alpha_{1-j}}^{(1-j)},$$

где $\Phi_\alpha^{(j)}$ — некоторый базис в пространстве $\operatorname{Ker} \bar{\partial}_j$ голоморфных j-дифференциалов, а $\Phi_\alpha^{(1-j)}$ — базис в $(\operatorname{Coker} \bar{\partial}_j)^* \approx \operatorname{Ker} \bar{\partial}_{1-j}$. Таким образом, E является тензорным произведением двух линейных расслоений над M_p

$$E = K \otimes \lambda^{-13}, \tag{5.2}$$

где K — расслоение $(3p-3,0)$ форм со слоями, порождаемыми вектором $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_{3p-3}$, а λ-расслоение модулярных форм — со слоями, порождаемыми $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p$, где $\{\omega_i\}$ — базис в пространстве голоморфных 1-форм. Мы его выбрали, как в конце раздела 3. Расслоение λ нетривиально, поскольку при обходе по замкнутой кривой γ в $\bar{M}_p$ базис циклов может измениться. Сечение $F(y)$ хорошо определено лишь в том случае, когда в (5.1) сокращаются гравитационные аномалии [24]. Это на самом деле имеет место [15], причем условие сокращения гравитационной аномалии фактически эквивалентно [25] условию сокращения конформной аномалии в отношении $\det \Delta_{-1}/\det' \Delta_0$.

Теорема*), доказанная Мамфордом [7] на основе вычисления характеристического класса $c_1(E)$ расслоения E, утверждает, что это расслоение тривиально на M_p (что отражает, в частности, отсутствие топологических препятствий к сокращению аномалий). Более того, из вычисления $c_1(E)$ также следует, что у E существует голоморфное и не обращающееся на M_p в нуль сечение F, имеющее полюс второго порядка на бесконечности D. Более того, теорема Вольперта [13] о независимости компонент $D_0, \ldots, D_{[p/2]}$ бесконечности D в группе $H_{6p-8}(\overline{M}_p, Q)$ гомологий пространства $\overline{M}_p$ позволяют заключить, что любое голоморфное и не обращающееся в нуль на M_p сечение E отличается от F на постоянный множитель. Как было замечено Бейлинсоном и Дринфельдом, с помощью квадрата модуля сечения F можно определить меру на $\overline{M}_p$:

$$d\mu = d v \wedge d\bar{v} \, |F(y)|^2 (\det(\omega_i, \omega_j))^{-13}, \tag{5.3}$$

где

$$(\omega_i, \omega_j) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{i}{2} \int \omega_i \wedge \overline{\omega}_j,$$

а $\det(\omega_i, \omega_j)$ является естественной эрмитовой метрикой на λ и в выбранном в конце раздела 3 базисе совпадает с $\det \operatorname{Im} \hat{\tau}$. Сравнивая (5.3) и, (2.19), (3.4), (4.27), мы видим, что в теории бозонных струн возникает именно такая мера. Таким образом, нами доказана следующая

Теорема [9]. *Мера интегрирования в теории замкнутых бозонных ориентируемых струн является квадратом модуля глобального, голоморфного и не имеющего нулей на M_p сечения расслоения $K \otimes \lambda^{-13}$, деленным на* 13 *степень естественной метрики на* λ.

Поскольку голоморфная структура на пространстве модулей возникает из алгебраической, любой голоморфный объект на нем, в частности сечение F, возникающее в теории струн, является алгебраическим (согласно принципу GAGA [27]). Наши результаты естественно обобщает следующая гипотеза.

Гипотеза [9]. Многопетлевые амплитуды (не только вакуумные) в любой конформно-инвариантной теории струн (такой, как бозонная струна в $\mathbf{D} = 26$ или суперструна в $D = 10$) выражаются через алгебраические объекты (функции или сечения голоморфных расслоений) на пространстве модулей римановых поверхностей.

Таким образом, квантовая геометрия является комплексной геометрией пространства $\overline{M}_p$.

II. Явные формулы для меры через тэта-функции. В предыдущих разделах было показано, что суммирование по замкнутым ориентируемым поверхностям рода $p \geqslant 2$ (которое определяет p-петлевые вакуумные амплитуды теории бозонных струн) в критической размерности $D = 26$ сводится к интегрированию по пространству M_p комплексных структур римановых поверхностей рода p. Были изучены аналитические свойства меры интегрирования как функции комплексных координат на M_p. Мера, помноженная на $(\det \operatorname{Im} \hat{\tau})^{-13}$ ($\hat{\tau}$ — матрица периодов поверхности), является квадратом модуля функции, голоморфной на M_p и нигде не обращающейся в нуль. Эта функция имеет полюс второго порядка на бесконечности $D = \overline{M}_p / M_p$ компактифицированного пространства модулей M_p. Этими свойствами мера определяется однозначно с точностью

*) Загадочное совпадение числа 13 в теореме Мамфорда с числом 26/2 в теории струн было отмечено Ю. И. Маниным [26]. Автор признателен ему за привлечение нашего внимания к работе [7].

до произвольной постоянной, что позволяет построить явные формулы для рода $p=2$, 3 и 4 через тэта-функции.

6. Мера для p=2, 3, 4. В этом разделе мы приведем формулы для меры в случае $p=2$ и $p=3$, полученные в [28], и сформулируем гипотезу о виде меры для $p=4$ [9, 29]. Непосредственное вычисление меры для $p=2$ приведено в разделе 11. Простые формулы для рода $p=2$, 3 удается написать потому, что в этих случаях существует явная параметризация пространства M_p матрицами периодов, к описанию которой мы и перейдем.

На произвольной римановой поверхности S_p рода p по симплектическому базису циклов (замкнутых путей) a_i, b_i, $i=1, \ldots, p$

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0 \quad (i \neq j, \; a_i \circ b_j = \delta_{ij}), \tag{6.1}$$

введенному в конце раздела 3 и связанному с ним базису голоморфных 1-дифференциалов ω_i

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}, \tag{6.2}$$

можно построить матрицу периодов

$$\tau_{ik} = \oint_{b_i} \omega_k, \tag{6.3}$$

удовлетворяющую соотношениям Римана [30]

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}, \quad \operatorname{Im} \tau > 0. \tag{6.4}$$

Эти соотношения являются следствием формулы

$$\int_{S_p} \omega \wedge \bar{\omega}' = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_{a_i} \omega \overline{\int_{b_i} \omega'} - \int_{b_i} \omega \overline{\int_{a_i} \omega'} \right),$$

где ω и ω' — произвольные голоморфные 1-дифференциалы; и того, что норма ненулевого дифференциала о положительна

$$\|\omega\|^2 = \frac{i}{2} \int_{S_p} \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

Теорема Торелли утверждает, что комплексная структура с точностью до диффеоморфизма однозначно определяется матрицей периодов. Таким образом, комплексные структуры можно параметризовать матрицами τ. Однако одной и той же поверхности может соответствовать бесконечно много матриц τ. В самом деле, базис $\{a_i, b_i\}$ условиями (6.1) определяется неоднозначно. Мы можем выбрать другой базис

$$b_i' = A_{ik} b_k + B_{ik} a_k, \quad a_i' = C_{ik} b_k + D_{ik} a_k, \tag{6.5}$$

который будет удовлетворять (6.1), если целочисленные матрицы A, B, C, D удовлетворяют условиям

$$AB^T - BA^T = CD^T - DC^T = 0, \; AD^T - BC^T = 1, \tag{6.6}$$

т е. матрица

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in S_p(p, \mathbb{Z}) \equiv \Gamma_p.$$

Группа Γ_p называется модулярной группой Зигеля степени p. При преобразованиях (6.5) базис дифференциалов (6.2) переходит в

$$\omega_i' = \omega_k (C\tau + D)^{-1}_{ki}, \tag{6.7}$$

откуда находим, что матрица периодов τ' в базисе (6.5) имеет вид

$$\tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}. \tag{6.8}$$

Таким образом, для того чтобы не учитывать одну и ту же поверхность несколько раз, нам нужно ограничиться рассмотрением факторпространства

$$\mathfrak{S}_p = \frac{\mathcal{H}_p}{\Gamma_p},$$

где $\mathcal{H}_p$ обозначает пространство всех симметрических $p\times p$ матриц с положительно-определенной мнимой частью и называется верхней полуплоскостью Зигеля. Группа Γ_p действует на ней преобразованиями (1.8). Многообразие $\mathfrak{S}_p$ имеет комплексную размерность $p(p+1)/2$, которая для $p=1$, 2, 3 совпадает с размерностью пространства M_p. Действительно, для этих случаев $\mathfrak{S}_p$ и M_p совпадают. В итоге для рода $p=1$, 2, 3 пространство M_p может быть параметризовано матрицами, пробегающими фундаментальную область $\mathfrak{S}_p$ группы Γ_p в верхней полуплоскости Зигеля $\mathcal{H}_p$.

Из (1.3) следует, что мера, в случае $p=2$, 3, должна иметь вид [28]

$$Z_p = \int\limits_{\mathfrak{S}_p} \prod_{k\leq j} \frac{i}{2}\, d\tau_{kj} \wedge d\bar{\tau}_{kj}\, |\chi_{12-p}(\tau)|^{-2} (\det \operatorname{Im} \tau)^{-13}. \tag{6.9}$$

Можно показать, что естественной модулярно-инвариантной мерой на $\mathfrak{S}_p$ является

$$d\mu_p = \prod_{k\leq j} \frac{i}{2}\, d\tau_{kj} \wedge d\bar{\tau}_{kj} (\det \operatorname{Im} \tau)^{-p-1}.$$

Кроме того, из (6.6) следует, что

$$\det \operatorname{Im} \tau' = |\det(C\tau + D)|^{-2} \det \operatorname{Im} \tau. \tag{6.10}$$

Поэтому условие того, что мера в (6.9) является мерой на $\mathfrak{S}_p$, т. е. модулярно инвариантна, имеет вид

$$\chi_k(\tau') = [\det(C\tau + D)]^k \chi_k(\tau), \quad k = 12 - p \tag{6.11}$$

(для $p=3$ формула (6.11) нуждается в уточнении, см. ниже). Далее, форма $\prod\limits_{i\leq j} d\tau_{ij}$ имеет на компоненте D_0 бесконечности ($\operatorname{Im} \tau_{11} \to \infty$) полюс первого порядка, а на компоненте D_1 (для $p=2$, 3 других компонент нет), где т принимает блочный вид, нуль порядка $p-2$. Поэтому из свойства Б) из раздела 1 (6.11) следует, что $\chi_k(\tau)$ является параболической модулярной формой веса $k=12-p$ на $\mathfrak{S}_p$, причем на D_1 она имеет нуль порядка p. Модулярной формой (Зигеля) веса k на $\mathfrak{S}_p$ называется голоморфная на $\mathcal{H}_p$ функция τ, преобразующаяся по закону (6.11). Для нечетного p обязательно k четное. Модулярная форма, обращающаяся в нуль на D_0, называется параболической. Если же р и k нечетные, то форму нужно определять с помощью домножения на характер группы Γ_p, так как при одновременной замене знака у A, B, C и D в (6.8) τ' не меняется, а правая часть в (6.11) меняет знак.

Для $p=1$, 2 пространство модулярных форм на $\mathfrak{S}_p$ хорошо изучено. Так для $p=1$ все формы являются линейными комбинациями форм веса 4 и 6, их число определяется формулой

$$p_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k}(1)\, t^{2k} = (1 - t^4)^{-1} (1 - t^6)^{-1}, \tag{6.12}$$

где $d_{2k}(p)$ обозначает число линейно независимых модулярных форм веса $2k$ на $\mathfrak{S}_p$. Для $p=2$ ситуация аналогичная, хотя и несколько более сложная [31]. Если ограничиться формами четного веса, то имеется 4 основных формы с весами 4, 6, 10 и 12:

$$p_2(t)=(1-t^4)^{-1}(1-t^6)^{-1}(1-t^{10})^{-1}(1-t^{12})^{-1}. \tag{6.13}$$

В [31] приводятся выражения для основных форм через ряды Эйзенштейна и тэта-константы. В этой же работе показано, что имеется *единственная* параболическая форма веса 10. Она должна, следовательно, совпадать с χ_{10} из (6.9) и иметь на D_1 нуль второго порядка, в чем нетрудно убедиться с помощью формулы [31]

$$\chi_{10}(\tau)=\prod_m \theta_m^2(\tau), \tag{6.14}$$

где тэта-константы $\theta_m(\tau)$ определяются как

$$\theta_m(\mathbf{z};\tau)=\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^p}\exp\left[\pi i\left(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{m}'}{2}\right)^t\tau\left(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{m}'}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+2\pi i\left(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{m}'}{2}\right)^t\left(\mathbf{z}+\frac{\mathbf{m}''}{2}\right)\right], \tag{6.15}$$

$$\theta_m(\tau)\equiv\theta_m(\mathbf{0};\tau),\quad \theta_{m,k_1\ldots k_s}=\left.\frac{\partial^s\theta_m(\mathbf{z};\tau)}{\partial z_{k_1}\ldots\partial z_{k_s}}\right|_{\mathbf{z}=0},\quad m\equiv(\mathbf{m}',\mathbf{m}''),$$

а компоненты векторов $\mathbf{m}'$, $\mathbf{m}''$ характеристики m принимают значения 0,1. Величина

$$e(m)=\mathbf{m}'\cdot\mathbf{m}''(\mathrm{mod}\,2)$$

называется четностью характеристики т, и в (6.14) произведение берется только по четным характеристикам. Для рода p имеется $2^{p-1}(2^p+1)$ четных и $2^{p-1}(2^p-1)$ нечетных характеристик. Если $e(m)=1$, то $\theta_m(\mathbf{0};\tau)=0$. Из (6.14), (6.15) следует, что при $\tau_{12}\to 0$

$$\chi_{10}\sim-2^{14}\exp\left[2\pi i(\tau_{11}+\tau_{22})\right](\pi\tau_{12})^2, \tag{6.17}$$

но и требовалось.

Докажем теперь, что форма $\chi_{10}(\tau)$ не имеет нулей внутри $\mathfrak{S}_2$, следуя [28] (см. также [32]). Для этого мы воспользуемся следующей формулой для фермионного детерминанта [9, 33], доказанной в разделе 7 настоящей работы

$$\det{}_m\bar\partial_{1/2}\cdot(\det\bar\partial_0)^{1/2}=\theta_m(\tau). \tag{6.18}$$

Здесь $\det_m\bar\partial_{1/2}$ является детерминантом оператора Дирака, действующего на пространстве «живущих» на S_p левых вейлевских фермионов, удовлетворяющих периодическим (антипериодическим) граничным условиям при обходе вокруг циклов a_i при $m_i'=1(0)$ и вокруг циклов b_i при $m_i''=1\ (0)$:

$$|\det\bar\partial_0|^2\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{\det'\Delta_0}{(\det\operatorname{Im}\tau)\left(\int\rho d^2\xi\right)}; \tag{6.19}$$

более точное определение см. в разделе 7.

Из (6.18), (6.19) вытекает, что $\theta_m(\tau)$ обращается в нуль на тех поверхностях S_2, на которых у $\bar\partial_{1/2}$ появляются нулевые фермионные моды с граничными условиями т, т. е. когда на S_2 существуют голоморфные 1/2-дифференциалы с характеристикой m. По теореме Римана об особенгостях четность числа таких 1/2-дифференциалов совпадает с четностью $e(m)$ характеристики т. Более того, в случае общей поверхности их число равно $e(m)$. Таким образом, обращение в нуль $\theta_m(\tau)$ при $e(m)=0$ на поверхности S_2^* означает, что на S_2^* существуют, по крайней мере, два голоморфных 1/2-дифференциала $\psi_1(z)(dz)^{1/2}$ и $\psi_2(z)(dz)^{1/2}$ с характеристикой т. Кроме того известно, что у голоморфного j-дифференциала на поверхности рода p имеется $2j(p-1)$ нулей. Поэтому на поверхности S_2^* существует мероморфная функция $f(z)=\psi_1(z)/\psi_2(z)$, имеющая 1 нуль и 1 полюс, откуда следует, что род S_2^* равен 0. Это противоречие доказывает отсутствие нулей у $\theta_m(\tau)$ при $e(m)=0$ внутри $\mathfrak{S}_2$. Отсутствие 1/2-дифференциалов с четной характеристикой следует также из того, что любая поверхность рода 2 является гиперэллиптической кривой

$$y^2=(z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_s) \tag{6.20}$$

в $\mathbb{C}^2=(y,z)$, и нетрудно проверить, что имеется ровно 6 голоморфных 1/2-дифференциалов

$$\psi_i=\left(\frac{z-a_i}{y}\right)^{1/2}(dz)^{1/2} \tag{6.21}$$

по одному для каждой из 6 нечетных характеристик.

Перейдем теперь к случаю $p=3$. Мера

$$\prod_{i\leqslant j} d\tau_{ij}$$

;в этом случае имеет полюс 1 порядка на D_0 и нуль 1 порядка на D_1. Кроме того, как было отмечено выше, форма χ_9 веса 9 может быть определена только со значениями в характере Γ_3. Обычной же комплекснозначной формой веса 18 является

$$\chi_9^2=\chi_{18}. \tag{6.22}$$

Она должна иметь нуль 2 порядка на D_0 и 6 порядка на D_1. Такая форма существует и равна [34]

$$\chi_{18}=\prod_m \theta_m(\tau), \tag{6.23}$$

где произведение берется по всем 36 четным характеристикам. Однако χ_{18} обращается в нуль не только на D_0 и D_1, но и на многообразии D_* гиперэллиптических поверхностей внутри $\mathfrak{S}_3$ [8]. Действительно, на гиперэллиптической поверхности рода 3

$$y^2=(z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_8), \tag{6.24}$$

кроме 28 фермионных нулевых мод

$$\psi^{(ij)}=\left[\frac{(z-a_i)(z-a_j)\,dz}{y}\right]^{1/2},\quad i<j, \tag{6.25}$$

по одной на каждую из 28 нечетных характеристик, имеются две моды

$$\psi^{(0)}=y^{-1/2}(dz)^{1/2},\quad \psi^{(1)}=z\psi^{(0)} \tag{6.26}$$

с одной и той же четной характеристикой, конкретное значение которой зависит от выбора базиса циклов (6.1) на кривой (6.24). Таким образом, χ_{18} действительно обращается в нуль на D_*, причем в координатах y, раздела 2 этот нуль — второго порядка. Обратно, если на поверхности S_3^* форма χ_{18} обращается в нуль, то на S_3^* имеется минимум два голоморфных 1/2-дифференциала $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(1)}$ с одинаковой четной характеристикой, и их отношение $f(z)=\psi^{(0)}/\psi^{(1)}$ является мероморфной функцией на S_3^* с двумя нулями и двумя полюсами, т. е. S_3^* является двухлистным накрытием $\mathbb{C}P^1$. Следовательно, поверхность S_3^*-гиперэллиптическая.

В итоге χ_{18} обращается внутри $\mathfrak{S}_3=M_3$ в нуль на гиперэллиптических поверхностях и только на них. В координатах y_i из раздела 2 этот нуль — второго порядка и корень $\chi_9=\chi_{18}^{1/2}$ извлекается. Остается показать, что в координатах y_i мера $\prod\limits_{i\leqslant j}\mathrm{d}\tau_{ij}$ имеет нуль 1 порядка. Для этого выберем на поверхности (6.24) базис голоморфных квадратичных дифференциалов

$$f_k=z^{k-1}y^{-2}(\mathrm{d}z)^2\quad(k=1,\ \ldots,\ 5),\ f_6=y^{-1}(\mathrm{d}z)^2$$

и метрику $\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar z$, симметричную относительно преобразования γ: $(y,z)\xrightarrow{\gamma}(-y,z)$. Тогда можно выбрать η^6 нечетным относительно γ

$$\eta^6=\mathrm{const}\cdot\frac{\bar f_6}{\rho\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar z}\,. \tag{6.28}$$

Кроме того, голоморфные абелевы дифференциалы $\omega_i=\phi_i(z)\mathrm{d}z$ являются линейными комбинациями

$$\frac{\mathrm{d}z}{y},\ \frac{z\,\mathrm{d}z}{y},\ \frac{z^2\mathrm{d}z}{y}\,.$$

Тогда из (6.28) и формулы для вариации τ

$$\frac{\partial\tau_{ab}}{\partial y_i}=-\int\limits_{S_p}(\eta^i\omega_a)\wedge\omega_b, \tag{6.29}$$

справедливой для любого рода, следует, что

$$\frac{\partial\tau_{ab}}{\partial y_6}=0, \tag{6.30}$$

откуда, выбрав $y_6(D_*)=0$, находим

$$\prod_{i\leqslant j}\mathrm{d}\tau_{ij}\underset{y_6\to 0}{\sim}y_6\mathrm{d}y_1\ \ldots\ \mathrm{d}y_6.$$

Следовательно, мера

$$\prod_{i\leqslant j}\mathrm{d}\tau_{ij}\chi_{18}^{-1/2}\backsim\mathrm{d}y_1\ \ldots\ \mathrm{d}y_6 \tag{6.31}$$

в окрестности D_* в координатах y_i голоморфна и не обращается в нуль, как и должно быть согласно основной теореме раздела 5. Имеющаяся для $p=3$ в мере (6.9), (6.22), (6.23) интегрируемая корневая особенность, наивно противоречащая доказанной в разделах 1 —5 голоморфности, связана с тем, что в окрестности многообразия гиперэллиптических поверхностей (имеющих симметрию γ) M_3 вкладывается в $\mathfrak{S}_3$ негладко. Таким образом, мы доказали справедливость (6.9), (622), (6.23) для меры в случае рода $p=3$. Отметим также, что аналитические свойства форм χ_{10} и χ_{18} были изучены Игусой [31, 34] другими методами.

Явные формулы (6.9) и (6.19), (6.23) имеет смысл дополнить формулами для амплитуд рассеяния тахионов [9, 29]. Для этого потребуется, следуя [5], вычислить гауссов интеграл

$$\int \mathrm{D}\,X_\mu \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int \partial X^\mu \bar\partial X_\mu \mathrm{d}^2\xi\right)\prod_{k=1}^{N}\int \exp\left(ip_k^\mu X_\mu(\xi_k)\right)\rho(\xi_k)\,\mathrm{d}^2\xi_k =$$

$$= \left(\frac{\det N_0}{\det' \Delta_0}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int \partial X^\mu_{\mathrm{cl}} \bar\partial X_{\mathrm{cl},\mu}\,\mathrm{d}^2\xi\right)\prod_{k=1}^{N}\int \exp\left(ip_k^\mu X_{\mu,\mathrm{cl}}(\xi_k)\right)\rho(\xi_k)\,\mathrm{d}^2\xi_k \stackrel{\mathrm{def}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\det N_0}{\det' \Delta_0}\right)^{13} K(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N; \tau), \qquad (6.32)$$

где $Xc\backslash$ (|) является решением уравнения

$$-2\partial\bar\partial X^\mu_{\mathrm{cl}}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} i\pi p_k^\mu \delta(\xi - \xi_k). \qquad (6.33)$$

Благодаря условию сохранения импульса

$$\sum_{k=1}^{N} p_k^\mu = 0, \qquad (6.34)$$

решение (6.33) нетрудно выразить через тэта-функции (6.15)

$$X^\mu_{\mathrm{cl}}(\xi) = -\sum_{k=1}^{N} ip_k^\mu\left[\ln|\theta_m(\mathbf{z}(\xi)-\mathbf{z}(\xi_k);\ \tau)|^2 + \right.$$

$$\left. + 4\pi \operatorname{Im}(\mathbf{z}(\xi))^t (\operatorname{Im}\tau)^{-1}\operatorname{Im}\mathbf{z}(\xi_k)\right], \qquad (6.35)$$

где m — любая нечетная характеристика. Аргументом $\mathbf{z}(\xi)$ (6.35) является интеграл от вектора $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ из голоморфных абелевых дифференциалов по некоторому пути, соединяющему точку ξ с фиксированной точкой ξ_0:

$$\mathbf{z}(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \boldsymbol{\omega}. \qquad (6.36)$$

Регуляризуя функцию (6.35) при $\xi=\xi_k$, как в [5], находим, что на массовойповерхности $\mathbf{p}^2=2$ зависимость от р в (6.32) сокращается, и после несложных вычислений фактор $K(\mathbf{p}_i;\ \tau)$ приводится к виду

$$K(\mathbf{p}_i;\ \tau) = \int \prod_{k=1}^{N} \frac{i}{2} \nu_m^2(\xi_k) \wedge \overline{\nu_m^2(\xi_k)} \prod_{j<i} |\chi_{ij}|^{2\mathbf{p}_i\mathbf{p}_0}, \qquad (6.37)$$

$$\chi_{ij} \equiv \theta_m(\mathbf{z}_{ij};\ \tau)\exp\left[-\pi \operatorname{Im}\mathbf{z}^t_{ij}(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\operatorname{Im}\mathbf{z}_{ij}\right],$$

где $\mathbf{z}_{ij}=\mathbf{z}(\xi_i)-\mathbf{z}(\xi_j)$ и 1-дифференциал $\nu_m^2(\xi)$ имеет вид

$$\nu_m^2(\xi) = \omega_i(\xi)\left.\frac{\partial\theta_m(\mathbf{z};\ \tau)}{\partial z_i}\right|_{\mathbf{z}=0}. \qquad (6.38)$$

Выражение (6.37) не зависит от выбора нечетной характеристики m и его можно подставлять в меру для получения амплитуд

$$A_p(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_N) = \int_{M_p} \mathrm{d}\Omega\, |F(y)|^2 (\det \operatorname{Im}\tau)^{-13} K(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_N;\ \tau). \qquad (6.39)$$

Для случая $p=1$ с помощью (6.37) и (1.2) воспроизводится известный результат [8].

Перейдем теперь к случаю $p=4$. Комплексная размерность $\mathfrak{S}_4$ на единицу больше, чем M_4, поэтому для матрицы τ имеется одно соотношение. Оно называется соотношением Шоттки [35] и является условием обращения в нуль некоторой параболической формы J_8 веса 8

$$J_8(\tau)=0. \tag{6.40}$$

Строго говоря, Шоттки доказал, что любая матрица τ римановой поверхности рода 4 удовлетворяет (6.29), а обратное утверждение было доказано сравнительно недавно [36], куда мы и отсылаем читателя за формулой для J_8 через $\theta_m(\tau)$. Результаты [36] позволяют сформулировать следующую гипотезу [9, 29]:

Гипотеза 1. Мера для $p=4$ имеет вид

$$Z_4=\int\limits_{\mathfrak{S}_4} d\mu_4\,|\,\delta(J_8)\,|^2(\det \operatorname{Im}\tau)^{-8}\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{M_4\subset\mathfrak{S}_4}\operatorname{res}(d\tau J_8^{-1}(\tau))\wedge\overline{\operatorname{res}(d\tau J_8^{-1}(\tau))}(\det\operatorname{Im}\tau)^{-13}. \tag{6.41}$$

7. Аналитические поля на римановых поверхностях и формула Бейлинсона — Манина. В разделах 2, 3 было показано, что мера в теории струн выражается через голоморфные объекты $\det\bar\partial_j$ — сечения детерминантных расслоений над M_p, — и задача вычисления меры, тем самым, сводится к задаче построения таких сечений. Это происходит вследствие того, что правые и левые возбуждения двумерных квантовых полей не взаимодействуют друг с другом. Последнее позволяет согласованным образом выделять киральные (аналитические) сектора этих возбуждений, структуру которых мы подробно изучим в этом параграфе, следуя работе [12]. Для того чтобы точнее сформулировать задачу, введем на двумерной поверхности 5 с координатами ξ^1, ξ^2 и метрикой $g_{ab}(\xi)$ некоторые аналитические координаты z, $\bar z$, в которых метрика принимает конформный вид

$$g_{ab}(\xi)\,d\xi^a d\xi^b=\rho(z,\bar z)\,dz\,d\bar z,$$

и рассмотрим набор $\{\phi^{(j)}\}$ полей со спином j или j-дифференциалов, которые при аналитических заменах двумерной координаты z на поверхности S преобразуются как

$$\phi^{(j)}(z,\bar z)=\left(\frac{d f(z)}{dz}\right)^j\tilde\phi^{(j)}(f,\bar f). \tag{7.1}$$

С помощью пары антикоммутирующих полей $\phi^{(j)}$ и $\phi^{(1-j)}$ можно построить действие [25]

$$S_j=\int\limits_S\phi^{(1-j)}\bar\partial\phi^{(j)}\,dz\wedge d\bar z,\quad \bar\partial\equiv\frac{\partial}{\partial\bar z}, \tag{7.2}$$

где в общем случае интегрирование идет по римановой поверхности 5 рода p. Ниже мы всюду будем считать, что $p\geqslant 2$.

Формально свободная энергия F_j такой системы равна

$$F_j=-\ln\det\bar\partial_j \tag{7.3}$$

(где индекс j у $\bar\partial$ обозначает, что $\bar\partial$ действует на j-дифференциалах) и нашей основной задачей является отыскание явной формулы для F_j. Фактически для каждого j мы построим некоторое сечение $\det\bar\partial_j$ соответствующего детерминантного расслоения так, чтобы любое конформно-инвариантное произведение этих сечений не имело внутри M_p ни нулей, ни полюсов. Благодаря этому, полученными ниже формулами можно пользоваться для вычисления конформно-инвариантных произведений (3.5), (3.6) и, в частности, для вычисления меры в теории бозонных струн:

$$Z_p = \int\limits_{M_p} \prod_{i=1}^{3p-3} \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}\bar{y}_i \, |F(y)|^2 (\det \operatorname{Im} \tau)^{-13} \quad (p \geqslant 2), \tag{7.4}$$

$$F = {}'\det \bar{\partial}_{-1} (\det \bar{\partial}_0)^{-13}.$$

В действительности, в настоящее время не существует хорошего квантово-полевого определения величины $\det \bar{\partial}_j$, которое могло бы служить отправной точкой какого-либо вычисления, поэтому формулы, приведенные ниже, являются в большей степени определениями, чем равенствами. Тем не менее, они кажутся нам весьма наглядными и могут быть использованы для вычисления таких величин, как $F(y)$ в (7.4), доставляя нам связь между квантовой теорией поля j-дифференциалов (7.1), (7.2) и геометрическим подходом Квиллена [23] и Фальгингса [37]. Мы также увидим, что формулы, полученные Бейлинсоном и Маниным [11], естественно возникают в нашем подходе. Наша стратегия будет состоять в том, что мы, исходя из представлений квантовой теории поля, выясним, какими свойствами должно обладать любое осмысленное выражение для $\det \bar{\partial}_j$. Затем построим наиболее простую формулу с такими свойствами и проверим ее в различных частных случаях.

Начнем со случая $j>1$, и попробуем определить формально

$$\det \bar{\partial}_j = \int \mathrm{D}\varphi \, \mathrm{D}f \exp\left(\int \varphi \bar{\partial} f \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}\right), \tag{7.5}$$

где f и φ являются соответственно j- и $(1-j)$-дифференциалами. Конечно, формула (7.5) не может быть правильной, поскольку у $\bar{\partial}_j$ имеется $n_j = (2j-1)(p-1)$ нулевых мод — голоморфных j-дифференциалов $f_1(z)(\mathrm{d}z)^j, \ldots, f_{n_j}(z)(\mathrm{d}z)^j$. Мы должны выделить из (7.5) их вклад и написать

$$\det \bar{\partial}_j = \frac{\langle f(z_1) \ldots f(z_{n_j})\rangle}{\det \| f_i(z_k) \|}, \tag{7.6}$$

где в матрице $\|f_i(z_k)\|$ в знаменателе на пересечении i-й строки и k-го • столбца стоит элемент $f_i(z_k)$ и

$$\langle f(z_1) \ldots f(z_{n_j})\rangle = \int \mathrm{D}\phi \, \mathrm{D}f f(z_1) \ldots f(z_{n_j}) \exp \int\limits_S \phi \bar{\partial} f \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}. \tag{7.7}$$

Для того чтобы (7.6) не зависело от выбора точек z_i, корреляционная функция (7.7) должна быть антисимметрична по всем z_i и по каждому z_i быть голоморфным j-дифференциалом. Но мы знаем, что вследствие гравитационной аномалии [24] невозможно построить корреляционную функцию (7.7) так, чтобы она не зависела ни от выбора координат в других точках поверхности, ни от выбора конформной метрики ρ. Это вытекает из того, что согласно [24] вариация F_j при малом общекоординатном преобразовании имеет вид

$$\delta_\varepsilon F_j = \frac{C_j}{24\pi} \int \rho^{-1} \partial(\rho\varepsilon)(\Delta \ln \rho) \, i \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}, \tag{7.8}$$

$$C_j = 6j^2 - 6j + 1.$$

Таким образом, F_j зависит от комплексной структуры X поверхности 5, конформной метрики ρ на ней и выбора аналитической координаты z: $F_j = F_j(X, \rho, z)$. Ниже мы не будем рассматривать общий случай произвольных X, ρ, z, а рассмотрим лишь зависимость F_j от X и z при некоторой фиксированной конформной метрике $\rho=\rho_*$. Наиболее удобно выбрать

$$\rho_* = |\nu_*(z)|^4, \tag{7.9}$$

где $\nu_*(z)$ — некоторый голоморфный 1/2-дифференциал (фермионная нулевая мода) и $*$ обозначает его граничные условия или характеристику (определяемую ниже). Важным для нас является то обстоятельство, что в общем случае ν_* имеет ровно $p-1$ нулей 1 порядка, которые мы обозначим через $R_1 \ldots R_{p-1} : \nu_*(R_i)=0$.

Для матрицы (7.9) вариация (7.8) F_j имеет вид

$$\delta_\varepsilon F_j = \frac{2}{3} C_j \sum_{i=1}^{p-1} \left(\varepsilon'(R_i) + 2 \frac{\nu_*'}{\nu_*} \varepsilon(R_i) \right) = \frac{2}{3} C_j \delta_\varepsilon \ln \prod_i \nu_*^2(R_i), \tag{7.10}$$

$$\delta_\varepsilon \nu_*(z) = \varepsilon \partial \nu_* + \frac{1}{2} (\partial \varepsilon) \nu_*(z), \tag{7.11}$$

что дает

$$\det \bar\partial_j [X, \rho_*, z] = \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{df}{dz}(R_i) \right)^{-2C_j/3} \det \bar\partial_j [X, \rho_*, f]. \tag{7.12}$$

Таким образом, $\det \bar\partial_j$ преобразуется как произведение $(-2C_j/3)$-дифференциалов в точках R_i.

Последнее условие на $\det \bar\partial_j$ состоит в том, что он не должен зависеть от координат $\bar y_i$ на пространстве модулей M_p.

Немаловажным свойством формулы (7.6) является то, что она зависит от выбора базиса $\{f_i\}$ в пространстве голоморфных j-дифференциалов, в согласии с определением Квиллена $\det \bar\partial_j$ как сечения детерминантного расслоения на M_p [23] (см. раздел 5). Для произвольного j не существует какого-либо выделенного базиса $\{f_i\}$, за исключением случая $j=1$, когда имеется нормализованный базис 1-дифференциалов $\{\omega_i, i = 1, \ldots, p\}$, введенный в разделе 3.

Удобно использовать именно этот базис для определения $\det \bar\partial_0$:

$$\det \bar\partial_0 = \frac{\int D\omega D\varphi \omega(z_1) \ldots \omega(z_p) \varphi(z) \exp \int \omega \bar\partial \varphi d z \wedge d \bar z}{\det \| \omega_i(z_j) \|}, \tag{7.13}$$

где p 1-дифференциалов $\omega(z_i)$ и скаляр $\varphi(z)$ появились вследствие того, что имеется p нулевых мод ω и 1 нулевая мода φ: $\varphi(\xi)=\mathrm{const}$; причем предполагается, что (7.13) не зависит от z. Отметим, что по отношению к преобразованиям (6.5) — (6.7) выражение (7.13) ведет себя как модулярная форма веса 1.

Наиболее простые формулы получаются не для самих $\det \bar\partial_j$, а для комбинаций

$$\lambda_j = \det \bar\partial_j \cdot (\det \bar\partial_0)^{1/2}. \tag{7.14}$$

Из предыдущего обсуждения следует, что λ_j должна быть $-(2j-1)^2$-дифференциалом по отношению к конформным преобразованиям в точках R_i и быть модулярной формой веса 1/2 относительно Γ_p, точнее относительно подгрупы Γ_p, сохраняющей характеристику $\nu_*(z)$ в (7.9). Кроме того, для полуцелых j имеется 2^{2p} различных граничных условий и λ_j должно зависеть от них.

Нам осталось объяснить, как параметризуются эти граничные условия, и ввести последние недостающие понятия и обозначения, необходимые для построения формулы для λ_j. Для этого рассмотрим для заданного $j \in \mathbb{Z}+(1/2)$ мероморфный j-дифференциал f и обозначим через (f) формальную сумму

$$(f) = \sum_{\iota} n_{\iota} Q_{\iota} - \sum_{k} m_k P_k, \tag{7.15}$$

где $Q_{\iota}(P_k)$ — нули (полюса) $f(z)$ порядка $n_{\iota}(m_k)$. Зафиксируем также на поверхности S точку Q и определим отображение

$$\xi \to \boldsymbol{\xi} = \int_{Q}^{\xi} \boldsymbol{\omega} \tag{7.16}$$

поверхности 5 в комплексный тор $\mathrm{J} = \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p \oplus \tau\mathbb{Z}^p$, где матрица периодов т определена в (6.3).

Важным свойством отображения (7.15) является то, что образ (f)

$$(\mathbf{f}) = \sum_{\iota} n_{\iota} \mathbf{Q}_{\iota} - \sum_{k} m_k \mathbf{P}_k \tag{7.17}$$

не зависит от выбора f и при $j=0$ $(f)=0$ (теорема Абеля). Отсюда следует

$$2(\mathbf{f}) = 2j\mathbf{k} \ (\text{в J}), \tag{7.18}$$

где константа Римана $\mathbf{k}=(\omega)$ для произвольного мероморфного 1-дифференциала ω и, следовательно,

$$(\mathbf{f}) = j\mathbf{k} + \frac{1}{2}\tau\mathbf{m}' + \frac{1}{2}\mathbf{m}'', \tag{7.19}$$

где компоненты р-векторов $\mathbf{m}'$, $\mathbf{m}''$ равны 0 или 1. Набор 2^{2p} различных пар $(\mathbf{m}', \mathbf{m}'') \equiv \mathbf{m}$, называющихся характеристиками f, инвариантно параметризует все возможные граничные условия на f. Число $e(m) = = \mathbf{m}' \cdot \mathbf{m}'' \pmod 2$ называется четностью характеристики m. В случае $j >$ >1, из теоремы Римана—Роха следует, что число голоморфных j-дифференциалов не зависит от m и равно $n_j = (2j-1)(p-1)$, однако для $j = 1/2$ ситуация более гонкая. В этом случае известно (из теоремы Римана об особенностях [38]), что четность характеристики совпадает с четностью числа голоморфных 1/2-дифференциалов, причем для поверхности общего положения имеет место равенство $n_{1/2}(m) = e(m)$. Напомним, что для нечетных характеристик m голоморфные 1/2-дифференциалы $\nu_m(z)$ могут быть построены явно:

$$\nu_m^2(z) = \theta_{m,\iota}\omega_{\iota}(z), \tag{7.20}$$

где θ-функция Римана была определена в разделе 6 и

$$\theta_{m,\iota} \equiv \left.\frac{\partial\theta_m(\mathbf{z})}{\partial z_{\iota}}\right|_{\mathbf{z}=0}. \tag{7.21}$$

Теперь все готово для построения λ_j. Для $j \in \mathbb{Z}+(1/2)$ мы предлагаем выражение

$$\lambda_j = \frac{\nu_*^{2j-1}(z_1)\ldots\nu_*^{2j-1}(z_{n_j})\langle V_1(z_1)\ldots V_1(z_{n_j})\,V_{1-2j}(R_1)\ldots V_{1-2j}(R_{p-1})\rangle_*}{\det\|f_{\iota}(z_k)\|\,(\nu_*'(R_1)\ldots\nu_*'(R_{p-1}))^{(2j-1)^2}} \times$$
$$\times\,\theta_m\left(\sum_{\iota}\mathbf{z}_{\iota} - (2j-1)\sum_{\alpha}\mathbf{R}_{\alpha}\right), \tag{7.22}$$

где $*$ обозначает произвольную нечетную характеристику, $(\nu_*) =$

$=R_1+\ldots+R_{p-1}$; m является характеристикой f_j и

$$\left\langle \prod_i V_{q_i}(z_i) \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_i \left(\theta_{*,k}\omega_k(z_i)\right)^{q_i^2/2} \prod_{i<k} \left(\theta_*(\mathbf{z}_i-\mathbf{z}_k)\right)^{q_iq_j}, \tag{7.23}$$

$$\sum_i q_i = 0.$$

Воспользовавшись известными аналитическими свойствами θ-функций [38], нетрудно проверить, что (7.22) удовлетворяет всем вышеперечисленным условиям.

Для $j \in \mathbb{Z}$ выражение такое же, за исключением того, что m должно совпадать с $*$.

Формула (7.23) непосредственно обобщается на случай корреляционных функций. Для этого каждой дополнительной паре $f(z)$, $\Phi(z')$ в (7.7) ставятся в соответствие операторы $\nu_*^{2j-1}(z)V_1(z)$, $\nu_*^{1-2j}(z')V_1(z')$ в (7.22) и к аргументу θ-функции добавляется $\mathbf{z}-\mathbf{z}'$.

Заметим, что (7.23) является киральной частью корреляционной функции экспонент свободного скалярного поля φ на поверхности. Это следует из соответствующей формулы раздела 6:

$$\left\langle \prod_k e^{iq_k\varphi(z_k,\bar z_k)} \right\rangle = \left| \left\langle \prod_i V_{q_i}(z_i) \right\rangle_* \right|^2 \times$$
$$\times \exp\left[-2\pi \sum_{i<j} q_iq_j \operatorname{Im}(\mathbf{z}_i-\mathbf{z}_j)^t (\operatorname{Im}\tau)^{-1} \operatorname{Im}(\mathbf{z}_i-\mathbf{z}_j)\right], \quad \sum_i q_i = 0. \tag{7.24}$$

Перейдем теперь к обсуждению различных частных случаев. Прежде всего рассмотрим $j=0$. В этом случае (7.13). (7.23) принимают вид

$$\lambda_0 = \frac{\nu_*^{-1}(z)\,\nu_*(z_1)\ldots\nu_*(z_p)\,\langle V_1(z)\,V_{-1}(z_1)\ldots V_{-1}(z_p)\,V_1(R_1)\ldots V_1(R_{p-1})\rangle_*}{\det\|\omega_i(z_k)\|\,\nu_*'(R_1)\ldots\nu_*'(R_{p-1})} \times$$
$$\times\,\theta_*(\mathbf{z}-\mathbf{z}_1-\ldots-\mathbf{z}_p+\mathbf{R}_1+\ldots+\mathbf{R}_{p-1}). \tag{7.25}$$

Воспользуемся теперь независимостью (7.25) от z, z_i и положим $z_p=z$, $z_i=R_i$, $i=1,\ldots,p-1$. После этого получаем

$$(\det\bar\partial_0)^{3/2} = \frac{\theta_{*,i}\omega_i(z)}{\det\|\omega(z)\,\omega(R_1)\ldots\omega(R_{p-1})\|}. \tag{7.26}$$

Это выражение не зависит от z и выглядит как прямое обобщение θ_1' для $p=1$. Как было объяснено выше, $\omega(R_i)$ в (7.26) появились вследствие гравитационной аномалии, которая не проявляет себя для $p=1$, так как согласно (7.9), $\rho_*=\text{const}$ и правая часть (7.8) обращается в нуль. Комбинируя (7.22) и (7.26), можно также получить формулы и для самих $\det\bar\partial_j$.

Другой интересный и важный случай $j=1/2$. Для четных характеристик мы получаем

$$\det{}_m\bar\partial_{1/2}(\det\bar\partial_0)^{1/2} = \theta_m(0), \quad e(m)=0 \tag{7.27}$$

и для нечетных m:

$$\det{}_m\bar\partial_{1/2}(\det\bar\partial_0)^{1/2} = \frac{\langle V_1(z_1)\,V_1(z_2)\rangle_m}{\nu_m(z_1)\,\nu_m(z_2)}\,\theta_m(\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2) =$$
$$= \nu_m^{-2}(z)\,\theta_{m,i}\omega_i(z), \quad e(m)=1, \tag{7.28}$$

где две нулевые моды в (2.28) появились из-за того, что действие $S_{1/2}=\int\tilde\psi\bar\partial\psi\,dz\wedge d\bar z$ содержит два различных фермионных поля со спином 1/2: $\tilde{\psi}$ и ψ, причем каждое имеет нулевую моду $v_m(z)$. Нетрудно также получить следующее выражение для корреляционных функций фермионов ψ и $\tilde{\psi}$; для любого m они равны

$$\left\langle \prod_{i=1}^{N} \psi(z_i)\tilde{\psi}(z_i') \right\rangle_m \det{}^{1/2} \bar{\partial}_0 = \prod_{i=1}^{N} (\theta_{*,l}\omega_l(z_i)\,\theta_{*,k}\omega_k(z_i'))^{1/2} \times$$

$$\times \prod_{i<j} \theta_*(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j)\,\theta_*(\mathbf{z}_i' - \mathbf{z}_j') \prod_{i,j} \theta_*^{-1}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j')\,\theta_m\left(\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i')\right). \quad (7.29)$$

Выражение (7.28) для детерминанта оператора Дирака согласуется с приведенными в [9, 33] и выводится следующим образом [12, 39, 40].

Опираясь на результаты разделов 2, 3, представим $\lambda_{1/2}$ в виде

$$|\lambda_{1/2}|^2 = \frac{\left| \int D\psi D\tilde{\psi} \exp\left[(1/2\pi i)\int \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi dz d\bar{z}\right]\right|^2}{(\det \operatorname{Im}\tau)^{1/2} \int D\varphi \exp\left(\frac{1}{4\pi i}\int \partial\varphi\bar{\partial}\varphi dz \wedge d\bar{z}\right)},$$

где φ — вещественное скалярное поле. При малой деформации комплексной структуры

$$dz \to d\tilde{z} = dz + \eta d\bar{z}$$

вариация $\lambda_{1/2}$ равна

$$\delta_\eta \ln \lambda_{1/2} = \frac{1}{2\pi i}\left\langle \int \eta T dz \wedge d\bar{z} \right\rangle + \frac{1}{4i}\operatorname{tr}[(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\delta_\eta \tau], \quad (7.30)$$

где $T \equiv T_{++}$ является левой компонентой тензора энергии импульса полей ψ, $\tilde{\psi}$ и φ

$$\langle T \rangle = \langle T^{(1/2)} \rangle - \langle T^{(0)} \rangle. \quad (7.31)$$

Первое слагаемое $T^{(1/2)} = (1/2)((\partial\psi)\,\tilde{\psi} - \psi\partial\tilde{\psi})$ является тензором энергии-импульсафермионов $\psi, \tilde{\psi}$, а второй член $T^{(0)} = -(1/2)(\partial\varphi)^2$—тензором энергии-импульса скалярного поля φ. Их вакуумные ожидания можнонайти, подставляя в двухточечные корреляционные функции соответствующие операторные разложения:

$$\langle \psi(z)\,\tilde{\psi}(z')\rangle_m = \frac{(\theta_{*,i}\omega_i(z)\,\theta_{*,k}\omega_k(z'))^{1/2}}{\theta_*(\mathbf{z}-\mathbf{z}')}\,\frac{\theta_m(\mathbf{z}-\mathbf{z}')}{\theta_m(0)} \approx$$

$$\approx (z - z')^{-1} + (z - z')\langle T^{(1/2)}(z')\rangle + o((z - z')^2), \quad (7.32)$$

$$\langle e^{i\varphi(z,\bar{z}')}\, e^{-i\varphi(z',\bar{z}')}\rangle = |z - z'|^2[1 + (z - z')^2\langle T^{(0)}(z')\rangle + \ldots] =$$

$$= \left|\frac{(\theta_{*,i}\omega_i(z)\,\theta_{*,k}\omega_k(z'))^{1/2}}{\theta_*(\mathbf{z}-\mathbf{z}')}\right|^2 \times$$

$$\times \exp[2\pi \operatorname{Im}(\mathbf{z}-\mathbf{z}')^t(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\operatorname{Im}(\mathbf{z}-\mathbf{z}')]. \quad (7.33)$$

Последнее выражение в (7.32) является единственным антисимметричным (1/2, 1/2)-дифференциалом по (z, z') с характеристикой τ, полюсом 1 порядка при $z = z'$ и голоморфным по z, z', при $z \neq z'$.

Строго говоря, (7.32), (7.33) справедливы только в том случае, когда метрика ρ в некоторой окрестности, содержащей z и z', выбрана постоянной. Однако комбинация (7.31), которую мы хотим найти, не зависит от ρ вследствие сокращения всех аномалий. Сравнивая (7.31) и

(7.32), получаем

$$T(z)=\frac{1}{2}\frac{\theta_{m,ij}\omega_i(z)\,\omega_j(z)}{\theta_m(0)}+\frac{\pi}{2}(\operatorname{Im}\tau)^{-1}_{ik}\,\omega_i(z)\,\omega_k(z)=$$

$$=2\pi i\frac{\partial\ln\theta_m(0)}{\partial\tau_{kl}}\omega_k(z)\,\omega_l(z)+\frac{\pi}{2}(\operatorname{Im}\tau)^{-1}_{ik}\,\omega_i(z)\,\omega_k(z). \quad (7.34)$$

Подставляя это выражение в (7.39) и используя формулу для вариации τ

$$\delta_\eta\tau_{ij}=\int\eta\omega_i\omega_j dz\wedge d\bar{z}, \quad (7.35)$$

находим

$$\delta_\eta\ln\lambda_{1/2}=\delta_\eta\ln\theta_m(0),$$

откуда и следует (7.27).

Любопытно, что выражение для $T^{(0)}$, полученное из (7.33), содержит так называемую проективную связность Γ [41]

$$T^{(0)}=\Gamma-\frac{\pi}{2}(\operatorname{Im}\tau)^{-1}_{ik}\,\omega_i\omega_k,$$

$$\Gamma=\frac{1}{12}\left[\frac{\theta_{*,i}\omega_i''}{\theta_{*,i}\omega_i}-\frac{3}{2}\left(\frac{\theta_{*,i}\omega_i'}{\theta_{*,i}\omega_i}\right)^2\right]-\frac{1}{3}\frac{\theta_{*,ijk}\omega_i\omega_j\omega_k}{\theta_{*,k}\omega_k}. \quad (7.36)$$

В отличие от T в (7 34), $T^{(0)}$ не является квадратичным дифференциалом и, как следует из (7.36), преобразуется при заменах $z\to f(z)$ через производную Шварца

$$T^{(0)}(z)=\frac{1}{12}\left[\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right]+\left(\frac{df(z)}{dz}\right)^2\tilde{T}^{(0)}(f(z)) \quad (7.37)$$

в соответствии с общими правилами конформной теории поля [42]. Выражение (7.36) превращается в 2-дифференциал, если в нем восстановить зависимость от конформной метрики $\phi=\ln\rho$

$$T^{(0)}[\phi]=\Gamma-\frac{\pi}{2}\omega^t(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\omega+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\partial^2\phi\right]. \quad (7.38)$$

Формулу (7.38) можно было бы также получать из операторного разложения произведения токов ω и $\partial\varphi$

$$\partial_{z'}G_\xi(z,z')=\langle\langle\omega(z)\,\partial_{z'}\varphi(z')\rangle\rangle=(z-z')^{-2}-\langle T^{(0)}_{\text{hol}}(z')\rangle+\ldots$$

$$\ldots=\partial_{z'}\frac{\left\langle\oint_{a_1}\omega(z_1)\,dz_1\ldots\oint_{a_p}\omega(z_p)\,dz_p\varphi(\xi)\,\omega(z)\,\varphi(z')\right\rangle}{\left\langle\oint_{a_1}\omega(z_1)\,dz_1\ldots\oint_{a_p}\omega(z_p)\,dz_p\varphi(\xi)\right\rangle}. \quad (7.39)$$

Из (7.39) следует, что $G_\xi(z,z')$ является (1,0)-дифференциалом по (z,z') с полюсами при $z=z'$, $z=\xi$, удовлетворяющим

$$\oint_{a_i}G_\xi(z,z')\,dz=0,\quad \oint_{\gamma_{z'}}G_\xi(z,z')\,dz=-\oint_{\gamma_\xi}G_\xi(z,z')\,dz=2\pi i.$$

Этими условиями $G_\xi(z,z')$ определяется однозначно.

$$G_\xi(z,z')=\partial_z\ln\frac{\theta_*(z-z')}{\theta_*(z-\xi)},$$

и мы находим

$$T^{(0)}_{\text{hol}} = \Gamma. \tag{7.40}$$

Интересно, что всевозможные классические тождества между 1-дифференциалами можно выводить, представляя их как различные тождества Уорда в конформной теории полей ω, φ. Например, можно получить (7.35), начав с тождества

$$\tau_{ik} = \frac{1}{2\pi i}\left\langle\!\!\left\langle \oint_{b_i} \omega dz \oint_{b_k} \partial\varphi\, dz' \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Два оставшихся примера, которые нам хотелось бы обсудить, это $j=3/2$ и $j=2$. Опять мы будем стремиться поместить все точки z_i в (7.22) в соответствующие R_i, после чего найдем:

$$\lambda_{3/2}(m) = \theta_m(0)\det{}^{-1}\|\zeta(R_1)\zeta'(R_1)\ldots\zeta(R_{p-1})\zeta'(R_{p-1})\|,$$
$$e(m)=0, \tag{7.41}$$

$$\lambda_{3/2}(m) = \theta_{m,i}\omega_i''(R_1)\det{}^{-1}\|\zeta'(R_1)\zeta'''(R_1)\zeta(R_2)\zeta'(R_2)\ldots$$
$$\ldots\zeta(R_{p-1})\zeta'(R_{p-1})\|,\quad e(m)=1, \tag{7.42}$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ — столбец из $2p-2$ голоморфных 3/2-дифференциалов с характеристикой τ;

$$\lambda_2 = \theta_{*,i}\omega_i''(R_1)\det{}^{-1}\|\mathbf{f}(R_1)\mathbf{f}''(R_1)\mathbf{f}^{\text{IV}}(R_1)\mathbf{f}(R_2)\ldots\mathbf{f}'(R_{p-1})\mathbf{f}''(R_{p-1})\|, \tag{7.43}$$

где $\mathbf{f}$ — столбец из голоморфных 2-дифференциалов. Особенно простым является выражение (7.41), которое, в частности, описывает зависимость духового детерминанта в гетеротической струне от граничных условий на фермионы на мировом листе. Вид (7.41) позволяет предположить [43, 44], что неренормализационные теоремы [4] в суперструне являются следствием тождества Римана [38]. (Представление о современном состоянии проблемы можно получить из работ [65].— *Ред.*)

Формулы для $\det\bar\partial_j$ могут быть использованы для вычисления конформно-инвариантных произведений различных операторов Лапласа $\Delta_j = -\rho^{j-1}\partial\rho^{-j}\bar\partial$, действующих на j-дифференциалах. Согласно разделам 2, 3 имеем

$$\prod_j\left(\frac{\det'\Delta_j}{\det N_j\cdot\det N_{1-j}}\right)^{n_j} = \left|\prod_j(\det\bar\partial_j)^{n_j}\right|^2,\quad \sum_j C_j n_j = 0,$$
$$(N_j)_{ik} = \int f_i^{(j)}\bar f_k^{(j)}\rho^{1-j}dz\wedge d\bar z. \tag{7.44}$$

Из (7.9), (7.22) следует, что произведение $\prod_j(\det\bar\partial_j)^{n_j}$ не зависит от выбора координат в точках R_i вследствие

$$\sum_j C_j n_j = 0.$$

Это показывает тесную связь между сокращением аналитической аномалии в (7.44) и сокращением гравитационной аномалии в $\prod_j(\det\bar\partial_j)^{n_j}$. Покажем теперь, как возникает связь с формулой Бейлинсона—Манина [11] для меры в теории бозонных струн. В модели ESVM мера является частным случаем (7.44), и из (7.4), (7.26) и (7.43) мы находим

$$F = \frac{\lambda_2}{\lambda_0^9} = \frac{\det{}^9\|\boldsymbol{\omega}(R^1)\boldsymbol{\omega}''(R_1)\boldsymbol{\omega}(R_2)\ldots\boldsymbol{\omega}(R_{p-1})\|}{(\theta_{*,i}\omega_i''(R_1))^8\det\|\mathbf{f}(R_1)\mathbf{f}''(R_1)\mathbf{f}^{\text{IV}}(R_1)\mathbf{f}(R_2)\ldots\mathbf{f}'(R_{p-1})\|}, \tag{7.45}$$

где голоморфные квадратичные дифференциалы $f_i(z)$ в колонке $\mathfrak{f}=(f_1,\ldots,f_{3p-3})^t$ определяют координаты y_i на M_p, использованные в (7.4), как в разделе 2. Нетрудно убедиться, что (7.45) не зависит от выбора конформных координат в точках R_i, которые можно зафиксировать условиями

$$\nu_*'(R_i)=1 \quad (i=1,\ldots, p-1). \tag{7.46}$$

Далее, мы постараемся так изменить базисы $\{\omega_i\}$, $\{f_i\}$, чтобы детерминанты (7.45) максимально упростились. Это достигается следующим выбором:

$$\begin{aligned} &\omega_\alpha(R_i)=\delta_{\alpha i} \ (\alpha=1,\ldots, p-1), \ \omega_p=\nu_*^2, \\ &\zeta_k=\omega_k\nu_* \ (k=1,\ldots, p), \ \zeta_{p+l}(R_{i+1})=\delta_{i,l} \ (l=1,\ldots, p-2), \\ &f_k=\nu_*\zeta_k \ (k=1,\ldots, 2p-2), \ f_{2p-2+l}(R_i)=\delta_{li} \ (l=1,\ldots, p-1). \end{aligned} \tag{7.47}$$

Условия нормировки в (7.47) записаны в координатах (7.46) и определяют ω_α, ζ_k, ... однозначно. Подставляя (7.47) в (7.45), мы получаем формулу Бейлинсона—Манина:

$$F=(\theta_{*,l}\omega_l''(R_1))^{-8}=\left(\frac{\nu_*^2(z)}{\theta_{*,l}\omega_l(z)}\right)^8, \tag{7.48}$$

где мы воспользовались тем, что последнее отношение не зависит от z. Если мы дополнительно зафиксируем ν_*, как в (7.20), то получим $F=1$ в соответствии с теоремой Мамфорда [7] о тривиальности соответствующего расслоения на ∂M_p. Отметим также, что для $p=2$ можно показать, что формула (7.45) действительно не зависит от выбора характеристики и совпадаете (6.9), (6.14).

Таким образом, нами построена конформная теория поля аналитических j-дифференциалов на римановых поверхностях рода p и явная формула (7.45) для меры в теории струн. Мы пользовались специально выбраннойметрикой $\rho_*=|\nu_*|^4$ и оказалось, что при таком выборе имеют место следующие правила фермионизации (сравни (7.23), (7.24) и (7.30)):

$$\begin{aligned} &f^{(j)}\longleftrightarrow \nu_*^{2j-1}\,\psi, \quad \varphi^{(1-j)}\longleftrightarrow \nu_*^{1-2j}\tilde{\psi}, \\ &|\mathrm{vacuum}\rangle\mapsto \\ &\qquad\mapsto(\det\bar{\partial}_0)^{-1/2}\prod_{i=1}^{p-1}[\tilde{\psi}(R_i)\tilde{\psi}(R_i)\ldots\tilde{\psi}^{(2j-2)}(R_i)(\nu_*'(R_i))^{-(2j-1)^2}], \end{aligned} \tag{7.49}$$

где поля ψ и $\tilde{\psi}$ являются 1/2-дифференцизлами, на которые наложены граничные условия $*$ при $j\in\mathbb{Z}$и те же граничные условия, что и на $f^{(j)}$ при $j\in\mathbb{Z}+(1/2)$. Таким образом, мы видим, что обобщение правил бозонизации для рода $p\geqslant 2$ не является тривиальным. Было бы интересно также преобразовать полученные выше формулы к произвольной метрике ρ.

В заключение отметим, что часть формул этого параграфа (в основном для $j=1/2$) была недавно получена рядом авторов в связи с многопетлевыми вычислениями в суперструне [44, 45] и обобщением формул бозонизации [46]. Формула (7.27) появилась в [9] и [33], причем в [33] для определения зависимости фермионного детерминанта от граничных условий был использован красивый аналог теоремы о голоморфности для пространства модулей линейных расслоений над римановой поверхностью. Эти результаты описаны в следующем параграфе. Интересный альтернативный подход квычислению $\det\Delta_j$ с помощью бозонизации содержится в [47].

8. Теорема Квиллена и зависимость детерминантов от граничных условий. В этом разделе мы рассмотрим зависимость детерминанта оператора Лапласа Δ_j, действующего в пространстве j-дифференциалов $\phi(z, \bar{z})$ на римановой поверхности X рода $p>0$, от граничных условий. Последние параметризуются множителями $\exp(2\pi i x_k)$ и $\exp(2\pi i y_k)$, приобретаемыми полем ϕ при обходе вокруг базисных циклов a_k и b_k. Пространство $\mathcal{T}$ всевозможных граничных условий является, таким образом, $2p$-мерным тором с координатами $x \leqslant x_k$, $y_k < 1$. Мы будем вычислять $\det \Delta_j = \det \Delta_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, как функцию на $\mathcal{T}$.

Известно, что на $\mathcal{T}$ имеется естественная комплексная структура. Это позволяет действовать в духе раздела 3 и вычислять зависимость $\det\Delta_j$ от комплексных координат на $\mathcal{T}$ с помощью соответствующего аналога утверждений А), Б) введения о теореме Квиллена [23]. Этим способом зависимость $\det \Delta_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ была найдена в [33] для $j=1/2$.

Для того чтобы правильно ввести на $\mathcal{T}$ комплексную структуру, удобно переформулировать задачу. Именно, с помощью замены

$$\phi(z, \bar{z}) = \varphi_0(z, \bar{z}) \exp\left\{2\pi i \left[x_k \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \omega_k dz + (y_k - x_m \operatorname{Re} \tau_{mk}) (\operatorname{Im} \tau)^{-2}_{kl} \operatorname{Im} \int_{z_0}^{z} \omega_l dz \right]\right\}, \qquad (8.1)$$

где z_0 — произвольная точка на X, а ω_k — нормализованный базис голоморфных 1-дифференциалов, мы сведем ее к вычислению детерминанта оператора

$$\Delta_j(A) = -\rho^{j-1} (\partial - A) \rho^{-j} (\bar{\partial} + \bar{A}), \qquad (8.2)$$

который входит в действие для j-дифференциалов $\phi_0(z, \bar{z})$ с зарядом 1 в абелевом калибровочном поле

$$A = \pi i x_k \omega_k + \pi (y_l - x_m \operatorname{Re} \tau_{ml}) (\operatorname{Im} \tau)^{-1}_{lk} \omega_k \qquad (8.3)$$

на X с нулевой напряженностью

$$F = \partial \bar{A} - \bar{\partial} A = 0. \qquad (8.4)$$

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{A}$ всех полей A с нулевой напряженностью. В этом пространстве действует калибровочная группа $\mathcal{G}$ преобразований

$$A \to A - \partial f, \quad \varphi_0 \to e^{f} \varphi_0, \qquad (8.5)$$

которую удобно представить как произведение группы $\mathcal{G}_0$ с однозначными на X функциями f на группу Γ заменой (8.1) с целыми x_k и y_k. По определению, каждой орбите группы $\mathcal{G}$ в $\mathcal{A}$ соответствует голоморфное линейное расслоение, и факторпространство

$$J_X = \mathcal{A}/\mathcal{G}$$

называется пространством модулей голоморфных линейных расслоений над X (степени $2j(p-1)$) или якобианом X. Нетрудно показать, что в каждой орбите группы $\mathcal{G}$ имеется единственный представитель вила (8.3), отвечающий калибровке

$$\bar{\partial} A = 0, \quad 0 \leqslant x_k, \ y_k < 1. \qquad (8.6)$$

Поэтому пространство $\mathcal{T}$ граничных условий совпадает с якобианом:

$$\mathcal{T} = J_X.$$

Как и в разделе 2 комплексная структура на J_X определяется с помощью $\mathcal{G}_0$-инвариантных комплексных координат $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z}(\bar{A}) = \int \omega_k \bar{A} \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2\pi} = \mathbf{x} + \tau \mathbf{y}, \tag{8.7}$$

взаимно однозначно отображающих $\mathcal{A}/\mathcal{G}_0$ в $\mathbb{C}^p$. Группа Г, очевидно, действует на нем сдвигами на векторы решетки $\mathbb{Z}^p \oplus \tau\mathbb{Z}^p$, откуда следует, что

$$J_X = \mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^p \oplus \tau\mathbb{Z}^p. \tag{8.8}$$

В итоге $\mathcal{T} = J_X$ является комплексным тором и естественно попытаться выяснить, каковы аналитические свойства $\det \Delta_j$, как функции комплексных координат (8.7) на нем. Ответ на этот вопрос дает

Теорема Квиллена.

$$\delta\bar{\delta} \ln \frac{\det' \Delta_j(A)}{\det N_j(A) \cdot \det N_{1-j}(A)} = \frac{1}{2\pi} \int \delta A \delta \bar{A}\, dz \wedge d\bar{z}, \tag{8.9}$$

где $N_j(A)$ — матрица скалярных произведений нулевых мод оператора $\bar{\partial}_j + \bar{A}$. Эта теорема доказывается несложным квазиклассическим вычислением. Из (8.9) с учетом (8.7) следует, что

$$\frac{\det' \Delta_j}{\det N_j \circ \det N_{1-j}} (\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \varkappa_j \exp\left[-\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \mathbf{z} (\operatorname{Im} \tau)^{-1} \operatorname{Im} \mathbf{z}\right] |f_j(\mathbf{z})|^2, \tag{8.10}$$

где постоянная $\varkappa_i$, разумеется, зависит от τ, а функция $f_i(\mathbf{z})$:

А) *является голоморфным сечением расслоения* $\det(\bar{\partial}_j + \bar{A})$ *над якобианом* J, которое определяется аналогично расслоению $\det \bar{\partial}_j$ над M_p, введенному в разделе 5. Более того, для $p \geqslant 2$ и $j \neq 1/2$ число нулевых мод оператора $\bar{\partial}_j + \bar{A}(\mathbf{z})$ не зависит от z *), поэтому

Б$_1$) *при $p \geqslant 2$, $j \neq 1/2 f_j(\mathbf{z})$ нигде не обращается в нуль.* При $j = 1/2$ у оператора $\bar{\partial}_{1/2} + \bar{A}(\mathbf{z})$ в случае общих X и $\mathbf{z}$ нулевых мод нет, поэтому ясно, что функция $f_{1/2}(\mathbf{z})$ должна обращаться в нуль в тех точках J_X, где эти нулевые моды появляются, причем кратность нуля должна совпадать с их числом. Известно, что если характеристика 1/2-дифференциала φ_0, на который действует оператор $\bar{\partial}_{1/2}$, равна m (см. раздел 7), то множество таких расслоений задается в J_X уравнением $\theta_m(\mathbf{z}) = 0$, поэтому

Б$_2$) *кратность и положение нулей $f_{1/2,m}(\mathbf{z})$ и $\theta_m(\mathbf{z})$ совпадают.*

Очевидно, что для всех j функция $f_j(\mathbf{z})$ определяется свойствами А), Б) с точностью до не зависящего от $\mathbf{z}$ множителя. В самом деле, если бы это было не так, то отношение любых двух таких функций, отличное от константы, не имело бы на $\mathbb{C}^p$ нулей и полюсов и обладало бы периодическим модулем, что противоречит принципу максимума.

Явные формулы для $f_j(\mathbf{z})$ легко строятся с помощью θ-функций, исходя из обобщения представления (7.6) для $\det(\bar{\partial}_j + \bar{A})$. Вобозначениях раздела 7 имеем

$$f_j(\mathbf{z}) = \lambda_j (\det \bar{\partial}_0)^{-1/2} \times$$
$$\times \frac{\theta_*(\mathbf{z}_1 + \ldots + \mathbf{z}_{n_j} - \mathbf{z}'_1 - \ldots - \mathbf{z}'_{n_{1-j}} - (2j-1)(\mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_{p-1}) - \mathbf{z})}{\theta_*(\mathbf{z}_1 + \ldots + \mathbf{z}_{n_j} - \mathbf{z}'_1 - \ldots - \mathbf{z}'_{n_{1-j}} - (2j-1)(\mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_{p-1}))} \tag{8.11a}$$

*) Для $j \in 1/2\mathbb{Z}$ оно равно 0 при $j<0$, 1 при $j=0$, p при $j=1$ и $(2j-1)(p-1)$ при $j>1$.

для $j \in \mathbb{Z}$ и

$$f_j(\mathbf{z}) = \lambda_{j,m} (\det \bar\partial_0)^{-1/2} \times$$
$$\times \frac{\theta_m (\mathbf{z}_1 + \ldots + \mathbf{z}_{n_j} - \mathbf{z}'_1 - \ldots - \mathbf{z}'_{n_{1-j}} - (2j-1)(\mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_{p-1}) - \mathbf{z})}{\theta_m (\mathbf{z}_1 + \ldots + \mathbf{z}_{n_j} - \mathbf{z}'_1 - \ldots - \mathbf{z}'_{n_{1-j}} - (2j-1)(\mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_{p-1}))} \qquad (8.11б)$$

для $j \in \mathbb{Z} + (1/2)$, где во всех формулах раздела 7 для λ_j базис голоморфных j-дифференциалов следует заменить на базис нулевых мод оператора $\bar\partial_j + \overline{A(\mathbf{z})}$. Общий множитель в (8.11) выбран так, чтобы постоянная $\varkappa \equiv \prod_j \varkappa_j$ в конформно-инвариантном произведении детерминантов (8.10) не зависела от τ.

Подчеркнем, что для доказательства справедливости (8.11) как функций $\mathbf{z}$ при фиксированном τ, рассуждения раздела 7 не требуются. Достаточно проверить, что (8.11) не зависят от выбора точек z_k, z'_l на X и удовлетворяют свойствам $(\text{Б}_{1,2})$. Оба факта легко устанавливаются с помощью известных аналитических свойств тэта-функций.

Особенно простой вид формула (8.11б) приобретает для $j=1/2$.

$$f_{1/2,m}(\mathbf{z}) = \theta_m(\mathbf{z}) (\det \bar\partial_0)^{-1/2}. \qquad (8.12)$$

Для каждого $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \tau\mathbf{y}$ удобно ввести характеристику $m(\mathbf{z}) = 1/2(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, с помощью которой выражение (8.12) можно преобразовать к виду [33]:

$$\det{}_m \Delta_{1/2}(\mathbf{z}) \left(\frac{\det' \Delta_0 (0)}{\int \rho d^2\xi \cdot \det \operatorname{Im} \tau} \right)^{1/2} = |\theta_{m+m(\mathbf{z})}(\tau)|^2. \qquad (8.13)$$

Эта формула согласуется с (7.27), поскольку фермионы с (целочисленной) характеристикой m_1. Это то же самое, что фермионы с (целочисленной) характеристикой m_2 в калибровочном поле A_{12}:

$$m(\mathbf{z}(A_{12})) = m_1 - m_2,$$

т. е. *)

$$\det{}_{m_2} \Delta_{1/2} (A_{12}) = \det{}_{m_1} \Delta_{1/2} (0). \qquad (8.14)$$

Аналогичные рассуждения для других полуцелых j позволяют доказать, что формулы (7.22) правильно описывают зависимость $\det \bar\partial_j$ от характеристики.

III. Римановы поверхности как разветвленные накрытия. В этом разделе мы используем классическое представление о римановой поверхности, как о разветвленном накрытии плоскости и будем вычислять многопетлевую меру в теории струн, как функцию комплексных координат точек ветвления. Результаты предыдущих разделов позволяют свести задачу к изучению поведения аналитических полей на разветвленных накрытиях. Как будет показано в разделе 9, точка ветвления в теории аналитических полей играет роль вершинного оператора с простыми конформными свойствами. Это позволяет получить явные формулы для $\det \Delta_j$ и $\det \bar\partial_j$ в случае накрытий с абелевой группой монодромии (см. раздел 10). К сожалению, в этом подходе к вычислению меры до конца удается продвинуться лишь для $p=2$ (см. раздел 11), однако ряд интересных утверждений можно получить и в общем случае (см. раздел 12) [48]. В изложении разделов 9—11 мы, в основном, следуем работе [15]. Отметим, что другими методами большая часть результатов разделов

*) Отметим, что при принятых определениях $\det_{m_2} (\bar\partial_{1/2} + \overline{A}_{12}) \neq \det_{m_1} \bar\partial_{1/2}$.

10—11 была получена в [49], а величина $\det'\Delta_0$ на гиперэллиптических поверхностях впервые найдена в [50].

9. Точки ветвления, как первичные конформные поля. Рассмотрим поведение аналитических полей на произвольной римановой поверхности X в малой окрестности U некоторой точки ветвления порядка n. Аналитическую координату y на поверхности X, однозначную в U, выберем так, чтобы накрывающее отображение $X \xrightarrow{z} \mathbb{C}P^1$ в окрестности U имело вид

$$z(y) = a + y^n. \tag{9.1}$$

При этом метрику на X будем считать z-плоской

$$g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g_{z\bar{z}} = 1. \tag{9.2}$$

Занумеруем n листов римановой поверхности X обратного отображения

$$y(z) = (z - a)^{1/n}$$

числами $0, 1, \ldots, n-1$ так, чтобы при обходе вокруг точки a в плоскости z мы переходили с листа с номером l на лист с номером $l+1$ ($(n-1)+1 \equiv 0!$). Операцию обхода вокруг точки a будем обозначать символом $\hat{\pi}_a$. На каждом листе l мы рассмотрим пару аналитических антикоммутирующих полей $f^{(l)}$ и $\varphi^{(l)}$ со спинами j и $(1-j)$ соответственной действием

$$S^{(l)} = \int f^{(l)} \bar{\partial} \varphi^{(l)} dz \wedge d\bar{z} \tag{9.4}$$

($f^{(l)}(z, \bar{z})$ — обозначает поле f в точке $y(z)$ на l-м листе поверхности X).

Напомним, что тензор энергии-импульса полей $f^{(l)}$, $\varphi^{(l)}$ имеет вид [25]

$$T^{(l)} = -jf^{(l)}\partial\varphi^{(l)} + (j-1)\,\varphi^{(l)}\partial f^{(l)}, \tag{9.5}$$

и при конформных преобразованиях

$$z \to \alpha(z), \quad \bar{z} \to \bar{\alpha}(\bar{z}) \tag{9.6}$$

эти поля трансформируются согласно

$$\begin{aligned} &\tilde{f}^{(l)}(\alpha, \bar{\alpha}) \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^j = f^{(l)}(z - \bar{z}), \\ &\tilde{\varphi}^{(l)}(\alpha, \bar{\alpha}) \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^{1-j} = \varphi^{(l)}(z, \bar{z}). \end{aligned} \tag{9.7}$$

В (9.7) предполагается следующая нормировка:

$$f^{(l)}(z')\,\varphi^{(l)}(z) \sim I\,(z' - z)^{-1} + \text{Regge terms}, \tag{9.8}$$

где I — единичный оператор.

При обходе вокруг точки ветвления мы переходим с одного листа на другой. Это означает, что должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\hat{\pi}_a f^{(l)}(z) = f^{(l+1)}(z), \\ &\hat{\pi}_a f^{(l)}(z) = \varphi^{(l+1)}(z). \end{aligned} \tag{9.9}$$

(Мы обычно будем опускать аргумент $\bar{z}$ у полей f, φ, так как в силу уравнений движения $\bar{\partial} f = \bar{\partial}\varphi = 0$ их корреляционные функции от $\bar{z}$ не зависят.)

Для того чтобы выяснить, что происходит с полями $f^{(l)}$, $\varphi^{(l)}$, $l=0,\ldots,n-1$ в окрестности точки ветвления, удобно перейти к базису, в котором оператор $\bar{\pi}_a$ диагонален:

$$f_k = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{l=0}^{n-1} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{n}\,[k+j(1-n)]\,l\right\} f^{(l)},$$
$$\varphi_k = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{l=0}^{n-1} \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}\,[k+j(1-n)]\,l\right\} \varphi^{(l)}. \tag{9.10}$$

Здесь мы сдвинули k на $j(1-n)$ из соображений удобства, которые выяснятся ниже. Из (9.10) следует, что

$$\hat{\pi}_a f_k = \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}\,[k+j(1-n)]\,f_k\right\},$$
$$\hat{\pi}_a \varphi_k = \exp\left\{-\frac{2\pi i}{n}\,[k+j(1-n)]\,\varphi_k\right\}. \tag{9.11}$$

Важнейшим для нас следствием (9.11) является то, что сохраняющиеся токи

$$J_k = :f_k\varphi_k:, \qquad \bar{\partial} J_k = 0 \tag{9.12}$$

являются однозначными функциями z в окрестности точки a.

Оказывается, что по каждому из токов J_k точка ветвления обладает зарядом

$$q_k = \frac{k+j(1-n)}{n}, \tag{9.13}$$

т. е. в окрестности точки a ток J_k имеет полюс 1 порядка

$$J_k(z) = \frac{q_k}{z-a} + \text{Regge terms}. \tag{9.14}$$

(Напомним, что это и подобные соотношения следует понимать как тождества для различных корреляционных функций.) Для того чтобы выяснить смысл этих соотношений, удобно выразить операторы f_k, φ_k ($k=0, \ldots, n-1$) через n аналитических скалярных бозонных полей $\phi_k(z)$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$), нормированных согласно

$$\langle \phi_k(z)\,\phi_0(z')\rangle = -\ln(z-z') \tag{9.15}$$

с помощью следующих правил бозонизации:

$$f_k = :e^{i\phi_k}:, \quad \varphi_k = :e^{-i\phi_k}:, \quad J_k = i\partial\phi_k,$$
$$T_k = -jf_k\partial\varphi_k - (1-j)\,\varphi_k\partial f_k = -\frac{1}{2}(\partial\phi_k)^2 + \left(\frac{1}{2} - j\right) i\partial^2\phi_k. \tag{9.16}$$

В терминах полей ϕ_k соотношения (9.13), (9.14) означают, что точке ветвления соответствует оператор

$$V_{\mathbf{q}}(a) = :e^{i\mathbf{q}\vec{\phi}(a)}:, \quad \mathbf{q}\vec{\phi} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k\phi_k. \tag{9.17}$$

С помощью (9.13), (9.16), находим, что конформная размерность Δ_n

оператора $V_{\mathbf{q}}(a)$ равна

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}q_k^2 + (j-1/2)\,q_k\right) = \frac{nC_j^F}{24}\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

$$C_j^F = (-2)(6j^2-6j+1), \tag{9.18}$$

где $C = nC_j^F$ — центральный заряд алгебры Вирасоро, построенной из компонент Лорана полного тензора энергии-импульса [42]

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} T_k$$

системы полей f_k, φ_k, $k=0,\ldots,n-1$.

Отметим, что равенство

$$\Delta_n(C) = \frac{C}{24}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \tag{9.19}$$

является следствием общего закона преобразования тензора энергии-импульса T при аналитических заменах координат в любой конформной теории поля с центральным зарядом C [42]

$$T(y) = \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 T(z) + \frac{C}{12}\left[\frac{\partial^3 z/\partial y^3}{\partial z/\partial y} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 z/\partial y^2}{\partial z/\partial y}\right)^2\right]. \tag{9.20}$$

Поскольку в координатах y (9.3) функция $T(y)$ регулярна при $y\to 0$, то из (9.20) следует, что в координатах z у T появляется дополнительная особенность при $z=a$

$$T(z) = \frac{C}{24}(z-a)^{-2}(1-n^{-2}),$$

откуда и следует (9.19).

Перейдем теперь к доказательству формул (9.13), (9.14). Для этого рассмотрим операторное разложение $f^{(l)}(z')\varphi^{(m)}(z)$ в окрестности точки ветвления:

$$f^{(l)}(z')\,\varphi^{(m)}(z) = \left(\frac{dy'}{dz'}\right)^j f(y')\left(\frac{dy}{dz}\right)^{1-j}\varphi(y) = n^{-1}(y')^{j(1-n)}(y)^{(1-j)(1-n)}(y'-$$
$$-y)^{-1} + \ldots = n^{-1}(z'-z)^{-1}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\frac{y'}{y}\right)^{l+j(1-n)}. \tag{9.21}$$

Здесь мы с помощью (9.7) совершили конформное преобразование к координатам y и воспользовались тем, что в этих координатах разложение тривиально:

$$f(y')\,\varphi(y) = (y'-y)^{-1} + \ldots$$

(В (9.21) подразумевается, что значение $y'(z')\,(y(z))$ берется на листе $l(m)$.) Из (9.21) и (9.11) следует, что

$$f_k(z')\,\varphi_m(z) = \delta_{k,m}(z'-z)^{-1}\left(\frac{y'}{y}\right)^{k+j(1-n)} + \ldots =$$
$$= \delta_{k,m}\left((z'-z)^{-1} + \frac{k+j(1-n)}{n}(z-a)^{-1} + O(z'-z)\right) + \ldots \tag{9.22}$$

Сравнивая с

$$f_k(z')\,\varphi_m(z) = \delta_{k,m}(z'-z)^{-1} + :f_k\varphi_m(z): + O(z'-z),$$

при $k=m$, получаем (9.13), (9.14). Отметим, что, согласно (9.17), произведение $f_k(z')\varphi_k(z)$ возле точки ветвления дает в корреляционные функ-

функции вклад

$$f_k(z')\,\varphi_k(z)\,V_{\mathbf{q}}(a) =$$
$$=(z'-z)^{-1}\left[(z'-a)(z-a)^{-1}\right]^{q_k}\!:\!\exp\left(i\phi_k(z')-i\phi_k(z)+i\mathbf{q}\phi(a)\right)\!:, \qquad (9.23)$$

что также согласуется с (9.22).

Формулы (9.13), (9.17) являются основным результатом этого раздела.

10. Взаимодействие точек ветвления в случае абелевой группы монодромии. Применим теперь результаты раздела 9 к простому, но уже достаточно интересному случаю поверхностей

$$y^n=(z-a_1)\ldots(z-a_M), \quad M=mn, \qquad (10.1)$$

для которых базис (9.10) диагонализует все операторы $\hat{\pi}_{a_i}$ одновременно и формулы (9.16), (9.17) справедливы глобально, т. е. на всей поверхности X. Число точек M в (10.1) выбрано кратным n для того, чтобы $z=\infty$ не являлась точкой ветвления.

Как было показано в разделе 7, основной величиной, играющей роль статистической суммы для аналитических полей, является детерминант оператора $\bar{\partial}_j$, определяемый с помощью вакуумного среднего (7.7), согласно (7.6).

Как следует из результатов раздела 2, величиной $\det\bar{\partial}_j$ можно пользоваться для вычисления детерминанта оператора Лапласа, действующего на пространстве j-дифференциалов:

$$\det{}'\Delta_j=|\det\bar{\partial}_j|^2\det N_j\cdot\det N_{1-j}\exp(C_jS_L), \qquad (10.2)$$
$$S_L=\frac{1}{2\pi}\int(\partial\varphi\,\bar{\partial}\varphi+\mu^2e^{\varphi})\,d^2\xi, \quad \varphi=\ln\rho,$$

где $N_j^{\alpha\beta}=\int f_\alpha\bar{f}_\beta d^2\xi$ —матрица скалярных произведений голоморфных j-дифференциалов f_α в метрике (9.2), а S_L—действие Лиувилля [5], вычисленное в этой метрике. С учетом того, что последнее не зависит от a_i, формула (10.2) легко приводится к виду

$$\det{}'\Delta_j=\int d^2z_1\ldots d^2z'_{n_{1-j}}\left|\langle f(z_1)\ldots f(z_{n_j})\,\varphi(z'_1)\ldots\varphi(z'_{n_{1-j}})\rangle\right|^2, \qquad (10.3)$$

где мы опустили некоторую (возможно бесконечную) численную постоянную, не зависящую от положения точек a_i и воспользовались тем, что (7.6) не зависит от z_k, z'_l. Операторы $\varphi(z'_k)$ введены в (10.3) в количестве, необходимом для поглощения всех нулевых мод поля φ; соответственно n_{1-j} обозначает число голоморфных $(1-j)$-дифференциалов. Напомним также, что

$$\det{}'\Delta_j=\det{}'\Delta_{1-j}. \qquad (10.4)$$

Перейдем теперь к вычислению средних в (10.3) по правилам (9.13), (9.17). Согласно (9.16), каждое поле ϕ_k имеет на бесконечности заряд $2j-1$, поэтому не обращаются в нуль лишь те корреляторы, в которых суммарный заряд всех операторов по каждому полю ϕ_k равен $1-2j$, т. е.

$$d_j^{(k)}\equiv N(f_k)-N(\varphi_k)=1-2j-mnq_k\ (k=0,1,\ldots,n-1); \qquad (10.5)$$

здесь $N(f_k)$ (соответственно $N(\varphi_k)$) обозначает число операторов $f_k(\varphi_k)$ в рассматриваемом среднем. В формуле (10.5) принято во внимание, что операторы f_k и φ_k имеют по полю ϕ_m заряды $\delta_{k,m}$ и $-\delta_{k,m}$, а точка ветвления — заряд q_m. Отметим, что суммируя (10.5) по всем k, мы получаем теорему Римана—Роха:

$$\operatorname{ind}(\bar{\partial}_j) \equiv n_j - n_{1-j} = (2j-1)(p-1), \tag{10.6}$$

где

$$p = 1 - n + \frac{1}{2} mn(n-1)$$

— род поверхности (10.1). Последнее вытекает из общей формулы Римана — Гурвица, которая утверждает, что род римановой поверхности X, являющейся n-листным накрытием $\mathbb{CP}^1$ с точками ветвления a_i, $i = 1, \ldots, N$ порядков n_i, равен

$$p = 1 - n + \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i - 1}{2}. \tag{10.7}$$

Формулы (9.13), (9.17) вместе с правилами [5, 25] дают нам полное описание всех корреляционных функций аналитических полей на поверхностях (10.1). При этом для детерминантов операторов Лапласа Δ_j в метрике (9.2) мы получаем простое интегральное представление (10.3) типа кулоновского газа, аналогичное интегральному представлению Фейгина — Фукса для корреляционных функций в минимальных моделях конформной квантовой теории поля [51].

В важном частном случае $j=1$ $d_1^{(k)} = m(n-k-1)-1$ и с учетом (10.4) мы находим следующее представление для детерминанта оператора Лапласа Δ_0 [12] (см. также [50]):

$$\det{}' \Delta_0 = \int \prod_{k=0}^{n-2} \prod_{i=1}^{d_1^{(k)}} d^2 z_{i,k} \left| \left\langle \prod_{i,k} f_k(z_{i,k}) \varphi_{n-1}(z) \right\rangle \right|^2 =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-2} \int \prod_{i=1}^{d_1^{(k)}} d^2 z_{i,k} \left| \prod_{i<j}^{d_1^{(k)}} (z_{i,k} - z_{j,k}) \prod_{i=1}^{d_1^{(k)}} y(z_i)^{k+1-n} \prod_{\alpha<\beta}^{m-n} (a_\alpha - a_\beta)^{\left(\frac{k+1-n}{n}\right)^2} \right|^2. \tag{10.8}$$

Мы опустили в этой формуле бесконечную постоянную $\int d^2 z$, воспользовавшись тем, что $\varphi_{n-1}(z)$ поглощает скалярную нулевую моду и поэтому среднее в (10.8) не зависит от z (реально это происходит вследствие того, что при $j=1$, $q_{n-1}=0$).

Остановимся особо на случае n=2 гиперэллиптических поверхностей, задаваемых уравнением

$$y^2 = (z - a_1) \ldots (z - a_{2p+2}) \tag{10.9}$$

в $\mathbb{C}^2 = (y, z)$. Вычисление детерминанта оператора Лапласа на такой поверхности представляет особый интерес не только для двухпетлевых вычислений, но и в связи с задачей о корреляционных функциях спиновых операторов в модели Ашкина — Теллера [50] или, что то же самое — корреляционных функциях твист-полей, возникающих при распространении струны по Z_2-орбифолду [52].

Для вычисления $\det' \Delta_0$ мы воспользуемся формулой (3.9), которая для $n = 2$ принимает особенно простой вид:

$$\det{}' \Delta_0 = \int \prod_{k=1}^{p} d^2 z_k \left| \langle f(z_1) \ldots f(z_p) \varphi(z) \rangle \right|^2 =$$

$$= \int \prod_{k=1}^{p} d^2 z_k \left| \prod_{i<j}^{p} (z_i - z_j) \prod_{l=1}^{p} y^{-1}(z_l) \prod_{\alpha<\beta}^{2p+2} (a_\alpha - a_\beta)^{1/4} \right|^2. \tag{10.10}$$

Полезно преобразовать это выражение к виду, полученному в работе [50], где этот детерминант был впервые вычислен. Для этого удобно вернуться к формуле (7.6), которую для $j=1$ и поверхности (10.9) можно записать в виде

$$\langle f(z_1)\ldots f(z_p)\,\varphi(z)\rangle = \det\bar\partial_1\cdot\det\|\omega_i(z_j)\|. \tag{10.11}$$

Здесь мы положили скалярную нулевую моду равной 1, а базис ω_i, $i=1,\ldots,p$ в пространстве голоморфных 1-дифференциалов выбрали, как в разделе 6. При этом матрица N_1^{ij} скалярных произведений дифференциалов ω_i и $\bar\omega_j$ в формуле (10.2) совпадает с мнимой частью матрицы периодов, и применяя к правой и левой части (10.11) оператор

$$\prod_{i=1}^{p}\oint_{a_i} dz_i,$$

получаем, с учетом (10.10) и (10.2),

$$\det\bar\partial_1 = \det\bar\partial_0 = \prod_{i<j}(a_i-a_j)^{1/4}\det K, \tag{10.12а}$$

$$\det{}'\Delta_0 = |\det K|^2\prod_{i<j}|a_i-a_j|^{1/2}\det\operatorname{Im}\tau, \tag{10.12б}$$

где $p\times p$-матрица K равна

$$K_{ji} = \oint_{a_i} z^{j-1}y^{-1}(z)\,dz \quad (i,\ j=1,\ldots,\ p). \tag{10.13}$$

Именно в таком виде $\det'\Delta_0$ был получен в работе [50].

Рассмотрим теперь поля на гиперэллиптических поверхностях (10.9) с полуцелыми j. При таких j появляется возможность накладывать различные граничные условия на поля f и φ: они могут быть периодическими или апериодическими при обходе вокруг базисных циклов поверхности (10.9). Анализируя порядок особенностей полей f и φ в точках ветвления при различных граничных условиях, нетрудно установить, что произвол в их выборе проявляется в том, что точкам ветвления могут соответствовать не только операторы

$$V_+(a) = \exp\left[i\left(-\frac{j}{2}\phi_0+\frac{1-j}{2}\phi_1\right)\right], \tag{10.14а}$$

но и

$$V_-(a) = \exp\left[i\left(\frac{1-j}{2}\phi_0-\frac{j}{2}\phi_1\right)\right]. \tag{10.14б}$$

(Напомним, что $f_l=\exp(i\phi_l)$, $\varphi_l=\exp(-\phi_l)$, $l=0,\ 1$). При этом суммарный заряд всех операторов $V_\pm(a_i)$ по каждому из полей ϕ_0, ϕ_1 должен быть числом и с точностью до замены $\phi_0\leftrightarrow\phi_1$ для поверхности рода p имеется ровно 2^{2p} вариантов, в соответствии с общим числом различных граничных условий

Ниже мы ограничимся случаем $j=1/2$, рассмотрение которого позволит нам получить ряд тождеств для тэта-функций на поверхностях (10.9). Такая возможность появляется благодаря общей формуле (7.27) для фермионного детерминанта

$$\det{}_m\bar\partial_{1/2}\cdot(\det\bar\partial_0)^{1/2} = \theta_m. \tag{7.27'}$$

Напомним, что в этой формуле подразумевается, что на поверхности нет фермионных нулевых мод (голоморфных 1/2-дифференциалов). Если же таковые имеются, то $\det_m\partial_{1/2}$ необходимо определять с помощью формулы (7.28), которая в общем случае имеет вид

$$\langle \psi\tilde{\psi}(z_1)\ldots\psi\tilde{\psi}(z_{n_{1/2}})\rangle(\det\bar{\partial}_0)^{1/2} = \theta_{m,k_1\ldots k_{n_{1/2}}}\omega_{k_1}(z_1)\ldots\omega_{k_{n_{1/2}}}(z_{n_{1/2}}), \tag{10.15}$$

где мы переобозначили поля f и φ через ψ и $\tilde{\psi}$. Очевидно, что число $n_{1/2}$-нулевых мод полей ψ и $\tilde{\psi}$ совпадает. Вычисляя в (7.27), (10.15) левую часть описанными выше методами, можно получать различные полезные выражения для тэта-констант и их производных.

Начнем со случая, когда нулевых мод нет. Поскольку при $j=1/2$ поля ϕ_0 и ϕ_1 не имеют заряда на бесконечности, то не обращаются в нуль лишь средние

$$\left\langle \prod_{i',i''} V_+(a_{i'})V_-(a_{i''})\right\rangle$$

с равным числом операторов V_+ и V_-. Обозначив соответствующую характеристику символом $\{i'|i''\}$ с помощью (10.14), получаем

$$\det{}_{\{i'|i''\}}\bar{\partial}_{1/2} = \prod_{i'<j'}(a_{i'}-a_{j'})^{1/8}\prod_{i''<j''}(a_{i''}-a_{j''})^{1/8}\prod_{i',i''}(a_{i'}-a_{i''})^{-1/8}. \tag{10.16}$$

Подстановка этого выражения в (7.27) дает нам, с учетом (10.12а), формулы Тома [53]

$$\theta_{\{i'|i''\}} = \prod_{i'<j'}(a_{i'}-a_{j'})^{1/4}\prod_{i''<j''}(a_{i''}-a_{j''})^{1/4}\det{}^{1/2}K. \tag{10.17}$$

Подчеркнем еще раз, что характеристики $\{i'|i''\}$ исчерпывают все граничные условия, при которых нет фермионных нулевых мод [53].

Для того чтобы перейти к формулам (10.15), необходимо рассматривать средние с различным числом операторов V_+ и V_-. Условие целочисленности суммарного заряда при этом означает, что разность числа операторов V_+ и V_- делится на 4. Так, для рода $p=2$ имеется 6 таких характеристик m_k, $k=1,\ldots,6$ (см. раздел 6). У полей ψ и $\tilde{\psi}$ появляется по одной нулевой моде. Соответствующие средние равны

$$\left\langle \tilde{\psi}_0(z)\psi_0(z')V_+(a_k)\prod_{i\neq k}V_-(a_i)\right\rangle = \left(\frac{z-a_k}{y(z)}\right)^{1/2}\left(\frac{z'-a_k}{y(z')}\right)^{1/2}\prod_{i\neq k}(a_i-a_k)^{-1/8}\prod_{\substack{i,j\neq k\\ i<j}}(a_i-a_j)^{1/8} \tag{10.18}$$

и аналогичное (10.17) тождество имеет вид

$$\frac{z-a_k}{y(z)}\prod_{\substack{i,j\neq k\\ i<j}}(a_i-a_j)^{1/4}\det{}^{1/2}K = \theta_{m_k,i}\,\omega_i(z). \tag{10.19}$$

С помощью этих тождеств мы покажем в следующем разделе, что формула Бейлинсона — Манина (7.48) для меры в теории бозонных струн в случае $p=2$ не зависит от выбора опорной нечетной характеристики и действительно сводится к формулам, полученным в разделе 6.

11. Двухпетлевая мера в бозонной струне. В этом разделе мы применим развитые выше методы для вычисления двухпетлевой меры в модели замкнутых ориентированных бозонных струн в критической размерности $D=26$ (ESVM) и покажем, что полученное нами выражение совпадает с приведенными в разделах 6, 7 формулами, использующими θ-функции. Отправной точкой всех вычислений будет служить общее соотношение (7.4) для p-петлевой меры, в котором $\det\bar{\partial}_{-1}$ и $\det\bar{\partial}_0$ следует определять с помощью (7.6). В случае $p=2$ все поверхности являются гиперэллиптическими и могут быть заданы уравнением

$$y^2=(z-a_1)\cdot\ \ldots\ \cdot(z-a_6) \tag{11.1}$$

в $\mathbb{C}^2=(y, z)$. Пространство модулей M_2 можно параметризовать координатами любых трех точек ветвления, например a_1, a_2, a_3, при фиксированных положениях трех оставшихся точек. При этом оно будет накрываться гиперплоскостью $\mathbb{C}^3=(a_1, a_2, a_3)$ $6!=720$ раз, и для нахождения статсуммы Z_2 можно интегрировать по $\mathbb{C}^3$, поделив результат на 720, В метрике (9.2) мы, фактически, уже нашли все корреляторы, входящие в определение детерминантов в (7.4), и нам осталось лишь определить базис голоморфных квадратичных дифференциалов $f_i(z)$ в (7.6), соответствующий координатам a_i, $i=1$, 2, 3 и M_2. Нетрудно показать, что этот базис имеет вид

$$f_i(z)=(z-a_i)^{-1}\prod_{k=4}^{6}\frac{a_i-a_k}{z-a_k}\qquad(i=1,\,2,\,3), \tag{11.2}$$

и детерминант в знаменателе (7.6) равен

$$\prod_{i=1}^{3}da_i\det{}^{-1}\|f_k(z_j)\|=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}v_{pr}}(a_{45}a_{56}a_{64})^{-1}\det{}^{-1}\|(z_j-a_i)^{-1}\|\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{3}\prod_{k=4}^{6}\frac{z_j-a_k}{a_j-a_k}=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}v_{pr}}\prod_{i<j}^{3}z_{ij}^{-1}\prod_{k<l}^{6}(a_{kl})^{-1}\prod_{i=1}^{3}y^2(z_i), \tag{11.3}$$

где мы ввели обозначения

$$\mathrm{d}a\equiv\mathrm{d}a_1\ldots\mathrm{d}a_6,\quad z_{ij}=z_i-z_j,\quad a_{kl}=a_k-a_l,$$
$$\mathrm{d}v_{pr}\equiv\mathrm{d}a_4\mathrm{d}a_5\mathrm{d}a_6\,(a_{45}a_{56}a_{64})^{-1}.$$

Коррелятор в числителе (7.6) легко вычисляется с помощью общих правил (9.13), (9.17). Для $j=2$, $n=2$, с учетом (10.5), находим

$$\left\langle\prod_{i=1}^{3}f(z_i)\right\rangle=\left\langle\prod_{i=1}^{3}f_0(z_i)\prod_{k=1}^{6}V_{(-1,-1/2)}(a_k)\right\rangle=$$
$$=\prod_{i<j}^{3}z_{ij}\prod_{i=1}^{3}y^{-2}(z_i)\prod_{k<l}^{6}(a_k-a_l)^{5/4}. \tag{11.4}$$

Остальные сомножители в (7.4) были вычислены ранее в разделе 10: формулы (10.12). Собрав все вместе, находим

$$Z_2=\int\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}V_{pr}}\left|\prod_{k<l}^{6}a_{kl}^{-3}\det{}^{-13}K\right|^2\det{}^{-13}\operatorname{Im}\tau=$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}V_{pr}}\left|\prod_{k<l}^{6}a_{kl}^{-3}\right|^2\left(\int\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2\,|z_{12}y^{-1}(z_1)\,y^{-1}(z_2)\,|^2\right)^{-13}, \tag{11.5}$$

где $\mathrm{d}^2a\equiv\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}\bar{a}$, а

$$\mathrm{d}V_{pr}=\mathrm{d}v_{pr}\wedge\mathrm{d}\bar{v}_{pr}$$

обозначает элемент объема проективной группы. Поскольку при перестановках точек a_i комплексная структура рассматриваемой поверхности не меняется, то однозначной координатой в пространстве M_2, направленной поперек подмногообразия $a_i = a_j$ поверхностей с вырожденной ручкой будет

$$y_{ij} = (a_i - a_j)^2.$$

В координатах a_i, a_k, y_{ij}, $k \neq j$ в окрестности $y_{ij} = 0$ мера в (115), очевидно, имеет полюс 2 порядка в согласии с общей теоремой раздела 4 Интеграл в фигурных скобках в (11.5), в свою очередь, дает нужную степень $\ln|y_{ij}|$. Нетрудно также проверить и то, что мера в (11.5) имеет полюс 2 порядка в случае распада на 2 тора

Установим теперь соответствие (11.5) с (69) и (6.14). Для этого следует перейти от координат a_i к координатам τ_{ij} Это достигается заменой в формуле (7.6) для $\det \partial_{-1}$ базиса (11 2) на базис, связанный с вариациями τ_{ij} Из (7.35) следует, что элементами этого базиса являются произведения соответствующих голоморфных 1-дифференциалов

$$d\tau_{ik} \to f = \omega_i \omega_k, \tag{11.6}$$

обозначив элементы нового базиса через $\tilde{f}_i$ согласно

$$\tilde{f}_1 = \omega_1^2, \quad \tilde{f}_2 = \omega_2^2, \quad \tilde{f}_3 = \omega_1\omega_2, \tag{11.7}$$

$d\tau_{11} d\tau_{22} d\tau_{12}$ через $d\tau$,

находим

$$\frac{da}{dv_{pr}} \det{}^{-1} \| f_i(z_j) \| = d\tau \det{}^{-1} \| \tilde{f}_i(z_j) \| =$$

$$= d\tau \left(\det \| \omega_\alpha(z_\beta) \| \det \| \omega_\alpha(z_\gamma) \| \det \| \omega_\alpha(z_\delta) \| \right)^{-1} =$$

$$= d\tau \det{}^3 K \prod_{i<j}^{3} z_{ij}^{-1} \prod_{i=1}^{3} y^2(z_i) \quad (\beta = 1, 2, \ \gamma = 2, 3, \ \delta = 3, 1), \tag{11.8}$$

где в последнем равенстве мы перешли от базиса ω_i к базису 1-дифференциалов

$$\varpi_i = z^{i-1} y^{-1}(z) \quad (i = 1, 2) \tag{11.9}$$

с помощью (10.13).

Вспоминая (11.3), находим

$$\frac{da}{dv_{pr}} = d\tau \det{}^3 K \cdot \prod_{k<l}^{6} (a_k - a_l), \tag{11.10}$$

и (11.5) принимает вид

$$Z_2 = \int_{M_2} d^2\tau \left| \prod_{k<l}^{6} a_{kl}^{-2} \det{}^{-10} K \right|^2 \det{}^{-13} \operatorname{Im} \tau. \tag{11.11}$$

Наконец, перемножив тождества (10.17) для всех 10 четных характеристик, получим

$$\chi_{10}(\tau) = \prod_{\substack{m \\ e(m) = 0}} \theta_m^2 = \det{}^{10} K \cdot \prod_{k<l}^{6} a_{kl}^2, \tag{11.12}$$

Откуда и следует результат раздела 6:

$$Z_2 = \int_{M_2} d^2\tau \, |\chi_{10}(\tau)|^{-2} \det{}^{-13} \operatorname{Im} \tau. \tag{11.13}$$

Перейдем теперь к проверке справедливости формулы Бейлинсона — Манина (7.48), записанной в виде (7.45). Как уже указывалось выше, для $p=2$ имеется 6 голоморфных 1/2-дифференциалов

$$\psi_\alpha(z)=\left(\frac{z-a_\alpha}{y(z)}\right)^{1/2} (\alpha=1,\ \dots,\ 6) \tag{11.14}$$

с различными нечетными характеристиками m_α, каждый из которых имеет единственный нуль 1 порядка в точке a_α. Для $*=m_\alpha$ выражение (7.45) принимает вид

$$F(y)=\frac{\det^9\|\omega(a_\alpha)\,\omega''(a_\alpha)\|}{(\theta_{m_\alpha,i}\omega_i''(a_\alpha))^8\det\|\mathbf{f}(a_\alpha)\,\mathbf{f}''(a_\alpha)\,\mathbf{f}^{\mathrm{IV}}(a_\alpha)\|}. \tag{11.15}$$

Покажем, что оно сводится к (3.11). Для этого подставим в (11.15)

$$\mathbf{f}=(\tilde{f}_1,\ \tilde{f}_2,\ \tilde{f}_3)^t, \quad \omega=K^{-1}\mathbf{w}, \tag{11.16}$$

где $\tilde{f}_i$ и w_i определены в (11.7), (11.9), и воспользуемся тождеством (10.19). Заменив в числителе и знаменателе (11.5) a_α на z и выделив наиболее сингулярный при $z\to a_\alpha$ вклад, находим

$$\begin{gathered}\det\|\omega(z)\,\omega''(z)\|\sim(z-a_\alpha)^{-2}\det{}^{-1}K\cdot\prod_\beta{}'(a_\alpha-a_\beta)^{-1},\\ \det\|\mathbf{f}(z)\,\mathbf{f}''(z)\,\mathbf{f}^{\mathrm{IV}}(z)\|\underset{(11.8)}{\backsim}(z-a_\alpha)^{-6}\det{}^{-3}K\cdot\prod_\beta(a_\alpha-a_\beta),\\ \theta_{m_\alpha,i}\,\omega_i''(z)\backsim(z-a_\alpha)^{-3/2}\det{}^{1/2}K\cdot\prod_\beta(a_\alpha-a_\beta)^{-1/2}\prod_{\substack{\beta<\beta'\\ \beta,\beta'\neq\alpha}}(a_\beta-a_{\beta'})^{1/4}.\end{gathered} \tag{11.17}$$

(Появление особенностей при $z=a_\alpha$ связано с тем, что мы вычисляем все величины в координатах z, $\bar{z}$, сингулярных в окрестности точек ветвления.) Отсюда следует, что суммарная степень $z-a_\alpha$ в (7.45) равна нулю и при $z\to a_\alpha$ она имеет конечный предел

$$F=\det{}^{-10}K\prod_{k<l}^{6}(a_k-a_l)^{-2}, \tag{11.18}$$

который не зависит от выбора m_α(!) и после подстановки в (7.4) дает выражение (11.11), которое, в свою очередь, сводится к (11.13). Это является дополнительным аргументом в пользу справедливости (7.45) для произвольного рода.

12. **Сумма всех высших петель как конформная теория поля.** Рассмотрим теперь произвольное N-листное накрытие X плоскости $\mathbb{CP}^1$ с точками ветвления a_i порядков n_i. В этом случае каждой точке ветвления a_i по-прежнему соответствует вершинный оператор $V(a_i,\bar{a}_i)$, являющийся произведением духовой части $V^{\mathrm{gh}}(a_i)$ и оператора бозонного спина $\mathfrak{S}(a_i,\bar{a}_i)$ теории полей X_μ:

$$V(a_i,\bar{a}_i)=V^{\mathrm{gh}}(a_i)\bar{V}^{\mathrm{gh}}(\bar{a}_i)\,\mathfrak{S}(a_i,\bar{a}_i), \tag{12.1}$$

но поля ϕ_k, введенные в разделе 9, глобально определить нельзя, поскольку операторы $\hat{\pi}_{a_i}$ не приводятся к диагональному виду одновременно.

В этом разделе мы попытаемся представить сумму всех многопетлевых диаграмм

$$Z_*=\sum_{p\geqslant 2}Z_p \tag{12.2}$$

как статистическую сумму некоторой двумерной конформно инвариантной теории поля с лагранжианом, содержащим операторы (12.1).

В связи с этим удобно не переходить в теории скалярного поля X_μ к формализму первого порядка. Это позволяет избежать появления вакуумных средних в знаменателе.

Начнем с преобразования отдельных слагаемых в (12.2). Из (9.19) следует, что размерность оператора (12.1) равна нулю вследствие сокращения в критической размерности конформной аномалии. Однако легко убедиться, что, например, в формуле (11.5) конформная размерность подынтегрального выражения по отношению к группе проективных преобразований равна 1 (по a_i и $\bar{a}_i$). Это увеличение размерности связано с множителем (11.3), и можно показать, что в общем случае его роль сводится к тому, что оператор $V^{\mathrm{gh}}(a_i)$ в (12.1) следует заменить (в обозначениях раздела 9 для $j=2$) на оператор

$$U^{\mathrm{gh}}(a_i) = :f_{n-2}V^{\mathrm{gh}}(a_i): \; = :\exp\left(i \sum_{\substack{k=0,\\ k\neq n-2}}^{n-1} \frac{k+2-2n}{n}\, \phi_k(a_i)\right): \tag{12.3}$$

размерность которого на 1 больше. Аналогичным образом следует поступить и с $\bar{V}^{\mathrm{gh}}(\bar{a}_i)$ в (12.1), а на бесконечность поместить оператор

$$A^{\mathrm{gh}} = \varepsilon_{N-2}\partial\varepsilon_{N-2}\partial^2\varepsilon_{N-2}\bar{\varepsilon}_{N-2}\bar{\partial}\bar{\varepsilon}_{N-2}\bar{\partial}^2\bar{\varepsilon}_{N-2} \tag{12.4}$$

с духовым зарядом $(-3, -\bar{3})$ и размерностью нуль. Поле $\varepsilon(z)$ в (12.4) это (-1)-дифференциал, сопряженный квадратичному дифференциалу f в (12.3) *). В целом замена операторов V^{gh} с зарядом -1 по полю духов ε_{n-2} на операторы U^{gh} с зарядом 0 и вакуумом (12.4) аналогична соответствующему переходу в древесных амплитудах [54].

Таким образом, в общем случае p-петлевую меру можно представить в виде

$$Z_p = \int \prod_{i=1}^{l} \frac{\mathrm{d}^2 a_i}{\mathrm{d}V_{pr}} \left\langle A^{\mathrm{gh}}(\infty) \prod_{i=1}^{l} U^{\mathrm{gh}}(a_i)\,\bar{U}^{\mathrm{gh}}(\bar{a}_i)\, \mathfrak{S}(a_i, \bar{a}_i)\right\rangle, \tag{12.5}$$

где предполагается, что накрытие $X \xrightarrow{z} \mathbb{CP}^1$ с точками ветвления a_i, $i = 1, \ldots, l$ является жестким, т. е. выполнены условия

α) $l=3p$;

β) координаты любых $l-3$ точек ветвления локально параметризуют в M_p окрестность нулевой коразмерности.

Кроме этого, желательно, чтобы интегрирование в (12.5) шло по $\mathbb{C}^{l-3}$, т. е. чтобы, как и для $p = 2$,

γ) отображение $\mathbb{C}^{l-3} = (a_1, \ldots, a_{l-3}) \to M_p$ являлось конечнолистным накрытием.

Ясно, что для произвольного накрытия X условия α) и β) не выполняются **). Однако оказывается, что в этом случае нарушается за-

*) Напомним, что согласно обозначениям раздела 9,

$$\varepsilon_{N-2} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{(k)},$$

где $\varepsilon^{(k)}$ обозначает духовое поле на k-м листе поверхности X. Отметим также, что в определении операторов (12.3) участвуют поля $f^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ только на тех листах k, которые склеены в точке ветвления a_i.

**) Что касается условия γ), то оно заведомо не может выполняться для $p \geqslant 24$. так как в этом случае пространство M_p нерационально [55]. К счастью, требование γ) не является обязательным. Ситуация, описанная ниже (12.14), подразумевает существование конечнолистного накрытия $M_p \mapsto \mathbb{C}^{3p-3}$. Это общими теоремами не запрещено.

кон сохранения духового заряда, и среднее в (12.5) обращается в нуль! Для того чтобы продемонстрировать это, рассмотрим ток

$$J=\sum_{k=0}^{N-1} :f^{(k)}\varepsilon^{(k)}: . \tag{12.6}$$

В общем случае это единственный ток, не меняющийся при обходе вокруг точек ветвления:

$$\hat{\pi}_{a_i} J = J, \quad i=1,\ldots, l.$$

С помощью (12.3) и результатов раздела 9 нетрудно показать, что заряды операторов $A^{gh}(\infty)$ и $U^{gh}(a_i)$ по этому току равны соответственно -3 и $1-(3/2)(n_i-1)$. Суммарный заряд Q должен быть равен $-3N$, откуда находим

$$l=3\left(1-N+\sum_{i=1}^{l}\frac{n_i-1}{2}\right)=3p. \tag{12.7}$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой Римана—Гурвица (10.7).

Таким образом, не обращаются в нуль лишь те средние (12.5), которым соответствуют жесткие накрытия. Это обстоятельство наводит на мысль, что сумма многопетлевых вкладов может быть представлена статистической суммой конформной теории поля с действием

$$S_N=S_N^{(0)}+\int\sum_{\alpha=1}^{d(N)}\lambda_\alpha\Phi_\alpha(a,\bar{a})\,d^2a-\ln A_N^{gh}(\infty), \tag{12.8}$$

в котором операторы

$$\Phi_\alpha^\Gamma(a,\bar{a})=U^{gh}(a)\bar{U}^{gh}(\bar{a})\mathfrak{S}(a,\bar{a}) \tag{12.9}$$

с различными α соответствуют различным видам точек ветвления на N-листной поверхности. Нетрудно показать, что число $d(N)$ таких видов равно

$$d(N)=\sum_{k=0}^{N-2}\frac{N!}{k!\,(N-k)},$$

поскольку подстановки, соответствующие операторам $\hat{\pi}_a$ обхода вокруг точки a, должны содержать ровно 1 цикл. Член $S_N^{(0)}$ описывает свободное действие полей духов и X_μ на каждом из N листов в метрике (9.2), слагаемое $\ln A_N^{gh}(\infty)$ описывает граничные условия на духи: полный заряд Q по току (12.6) должен быть равным $-3N$. Подгоночные параметры λ_α играют роль констант связи, об их значениях мы скажем ниже.

Разлагая $\langle\exp(-S_N)\rangle$ по λ_α, мы получаем сумму членов вида (12.5), однако при этом, кроме жестких связных накрытий, появятся слагаемые, соответствующие несвязным накрытиям *). Кроме того, род связных накрытий ограничен: $p\leqslant 2N-2$. Оба дефекта легко устранить. Для этого достаточно поместить вместо A^{gh} на ∞ оператор V_N, соответствующий точке ветвления порядка N (за счет этого мы избавляемся от несвязных накрытий) и, ограничившись сектором с духовым зарядом

$$Q=2-3N$$

*) При выводе (12.7) предполагалось, что накрытие связное, т. е. что X это одна. а не две поверхности.

по току (12.6), перейти к пределу $N \to \infty$. Очевидно, что при этом перед операторами $\Phi_\alpha^{(n)}$, соответствующими ветвлениям одного порядка n, должны стоять одинаковые коэффициенты λ_n. В итоге Z_* можно искать в виде

$$Z_* = \lim_{N \to \infty} Z(N),$$

$$Z(N) = \int \mathrm{D}X_\mu \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{D}f^{(k)} \mathrm{D}\varepsilon^{(k)} \Bigg|_{Q=2-3N} V_N(\infty) \times$$

$$\times \exp\left(-S^{(0)} - \int \sum_{n=2}^{N} \lambda_n(N) \Phi^{(n)}(a, \bar{a})\, \mathrm{d}^2 a \right), \quad (12.11)$$

$$\Phi^{(n)}(a, \bar{a}) = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{(n)}(a, \bar{a}),$$

где в последней строчке суммирование идет по всем операторам, соответствующим ветвлениям порядка n. Выражение (12.11) легко преобразовать к виду

$$Z_* = \int \mathrm{D}X_\mu \prod_{k=0}^{N-1} \mathrm{D}f^{(k)} \mathrm{D}\varepsilon^{(k)} \Bigg|_{Q=-3N} A^{\mathrm{gh}}(\infty) \int \Phi_N(a, \bar{a})\, \mathrm{d}^2 a \times$$

$$\times \exp\left(-S_N^{(0)} - \int \sum_{n=2}^{N} \lambda_n(N) \Phi^{(n)}(a, \bar{a})\, \mathrm{d}^2 a \right), \quad (12.12)$$

откуда следует, что при разложении (12.11) в ряд по $\lambda_n(N)$ возникают всевозможные слагаемые вида (12.5), причем не обращаются в нуль только те, которым соответствуют жесткие накрытия (!), автоматически получающиеся связными.

Нетрудно показать, что для каждого N в разложении имеется конечное число ненулевых слагаемых. В них отсутствуют все операторы $\Phi^{(n)}$ с $n > N$, и все накрытия имеют род $2 \leqslant p \leqslant N$. Поэтому равенство

$$Z(N) = \sum_{p=2}^{N} Z_p \quad (12.13)$$

содержит $N-1$ условий на $N-1$ параметра $\lambda_n(N)$ с $2 \leqslant n \leqslant N$. Естественно предположить, что упомянутые параметры этими условиями определяются однозначно и представление (12.11) тем самым существует.

В итоге нами получен следующий результат:

Сумма всех высших петель в теории замкнутых ориентированных бозонных струн равна пределу при $N \to \infty$ статистической суммы двумерной конформной теории поля с действием

$$S_N = S_N^{(0)} + \int \sum_{n=2}^{N} \lambda_n(N) \Phi^{(n)}(a, \bar{a})\, \mathrm{d}^2 a - \ln V_N(\infty) \quad (12.14)$$

и граничными условиями (12.10) *при специальном выборе параметров* $\lambda_n(N)$.

Было бы интересно изучить свойства теории (12.14) при $N \to \infty$. Вполне возможно, что в этом пределе модель содержит непертурбативные явления, например операторы Φ_{cusp}, соответствующие точкам ветвления ∞ порядка на римановой поверхности функции $y = \ln z$. Логарифмические расходимости, о которых шла речь в [4], приводит к тому, что модель (12.14) обладает нетривиальной ренормгруппой, приводящей, кроме перенормировки констант $\lambda_n(N)$, к появлению в действии новых операторов, соответствующих двойным точкам и т. д. Кроме того, не исключено, что с появлением в пределе $N\to\infty$ операторов Φ_{cusp}, возникает новый тип расходимостей. Если бы аналогичное явление удалось обнаружить в суперструне, оно могло бы означать нестабильность плоского 10-мерного вакуума.

IV. Заключительные замечания. Здесь мне хотелось бы сказать несколько слов о результатах, не вошедших в настоящий обзор. Общий ход рассуждений в предыдущих разделах состоял в том, что доказав в разделе I общую теорему о голоморфности, мы с ее помощью переходим в разделе II к аналитическим полям и далее; зафиксировав координаты на M_p, вычисляем меру. Если параметризовать M_p матрицами τ, то мера выражается через θ-функции, и задача вычисления Z_p сводится к задаче характеризации матриц периодов римановых поверхностей (проблема Шоттки; см. раздел 6). Эта проблема была недавно решена Мулазом и Шиотой [56], доказавших справедливость гипотезы Новикова о том, что

$\tau\in\mathcal{H}_p$ является матрицей периодов невырожденной римановой поверхности рода p тогда и только тогда, когда существуют векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3\in\mathbb{C}^p$, $\mathbf{a}_1\neq 0$ и квадратичная форма

$$Q(t)=\sum_{i,j=1}^{3}Q_{ij}t_it_j,\quad Q_{ij}\in\mathbb{C}$$

такие, что для любого $\xi\in\mathbb{C}^p$ функция

$$\tau(t)=\exp[Q(t)]\,\theta_0(t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2+t_3\mathbf{a}_3+\xi)\tag{IV.1}$$

(непутать $\tau(t)$ с τ-матрицей периодов!) является τ-функцией уравнения Кадомцева — Петвиашвили (КП), т. е. удовлетворяет уравнению

$$(\mathrm{D}_1^4+3\mathrm{D}_2^2-\mathrm{D}_1\mathrm{D}_3)\,\tau\cdot\tau=0,$$

где

$$\mathrm{D}_i\tau\cdot\tau=\frac{\partial}{\partial y_i}\tau(t_i-y_i)\cdot\tau(t_i+y_i)\Big|_{y_i=0}.$$

Подробности о τ-функции и связи иерархии КП с теорией струн см. в работах [57].

Отметим, что существует еще один способ выражения меры через тэта-функции [58] с помощью результатов работы [37]. В [47] была предложена интересная интерпретация этих формул с помощью неабелевой бозонизации на римановой поверхности произвольного рода.

Другой способ ввести голоморфные координаты на M_p использован в настоящей работе: комплексные структуры параметризуются координатами точек ветвления. Оказывается [48], что для вычисления меры в этом случае необходимо привлечь методы теории голономных квантовых полей [59]. Эти методы были развиты авторами [59] для решения проблемы Римана о построении матричных коэффициентов A_i линейного уравнения

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i}{z-a_i}Y\tag{IV.2}$$

с заданными матрицами монодромии M_i:

$$\hat{\pi}_{a_i}Y(z)=Y(z)M_i,\tag{IV.3}$$

где $Y(z)$ обозначают фундаментальную матрицу решений системы (2).

Эта связь возникает следующим образом. Рассмотрим на поверхности X, заданной в виде накрытия z-плоскости с точками ветвления a_i, $i=1, \ldots, l$ функцию Грина для аналитических полей f и φ со спинами j и $1-j$:

$$Y^{km}(z, z_0) = (z_0 - z)\left\langle \varphi^{(k)}(z_0) f^{(m)}(z) \prod_i V_{\mathbf{q}_i}(a)\right\rangle \left\langle \prod_i V_{\mathbf{q}_i}(a_i)\right\rangle^{-1} \tag{IV.4}$$

$(k,\ m = 0, \ldots, N-1)$.

Здесь верхний индекс у полей φ и f обозначает номер листа, а операторы $V_{\mathbf{q}_i}(a_i)$ соответствуют точкам ветвления, как в разделах 9, 10. Для простоты мы предполагаем, что заряды $\mathbf{q}_i$ подобраны так, что

$$\tau(a_1 \ldots a_l) \overset{\text{def}}{=} \left\langle \prod_{i=1}^{l} V_{\mathbf{q}}(a_i)\right\rangle \neq 0 \tag{IV.5}$$

(не путать с τ-функцией в (IV.1)!)

Очевидно, что для функции (IV.4) матрицы M_i в (IV.3) являются матрицами перестановок и не зависят от z_0 и a_i:

$$\frac{\partial M_i}{\partial z_0} = \frac{\partial M_i}{\partial a_j} = 0 \quad (i,\ j = 1, \ldots, l). \tag{IV.6}$$

Функция $\partial_z Y \cdot Y^{-1}$ является аналитической функцией z с полюсами 1 порядка в точках a и нулем на бесконечности, т. е. удовлетворяет уравнению (IV.2) с некоторыми $A_i = A_i(z_0, a_1 \ldots a_N)$. Из условия (IV.6) и нормировки

$$Y^{km}(z_0, z_0) = \delta^{km} \tag{IV.7}$$

вытекают соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Y}{\partial a_i} Y^{-1} = \frac{A_i}{z_0 - a_i} - \frac{A_i}{z - a_i}, \\ &\frac{\partial Y}{\partial z_0} Y^{-1} = -\sum_{i=1}^{l} \frac{A_i}{z_0 - a_i}. \end{aligned} \tag{IV.8}$$

Условия совместности (IV.8) и (IV.2) приводят к уравнениям деформации Шлезингера (см. [59])

$$\mathrm{d}A_m = \sum_k{}' [A_k,\ A_m]\, d \ln \frac{a_m - a_k}{z_0 - a_k}, \tag{IV.9}$$

где

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{d}a_i \frac{\partial}{\partial a_i}.$$

С другой стороны, подставляя в (IV.4) операторное разложение

$$\begin{aligned} \sum_k f^{(k)}(z)\,\varphi^{(k)}(z_0) = N\,(z - z_0)^{-1} + J(z_0) + {} \\ + (z - z_0)\,(j\partial_{z_0} J(z_0) + T(z_0)) + O((z - z_0)^2), \end{aligned} \tag{IV.10}$$

можно выразить через коэффициенты A_i среднее от тензора энергии-импульса $\langle T(z_0)\rangle$, вычеты которого в $z_0 = a_i$, согласно [42] равны

$$\frac{\partial \ln \tau(a_1 \ldots a_l)}{\partial a_i}.$$

Интегрируя последние, получаем замечательный результат Дзимбо, Сато и Мива [59]:

$$\mathrm{d}\ln\tau(a_1\ldots a_l)=\sum_{i<k}{}' \operatorname{tr}(A_iA_k)\,\mathrm{d}\ln(a_i-a_k). \tag{IV.11}$$

Таким образом, τ-функции (IV.5) и, в частности, p-петлевая мера в (12.5) выражаются через решения уравнений деформации (IV.9). Полное описание граничных условий для этих уравнений, так же, как и выяснение связи с результатами раздела II, является нерешенной задачей. Во всяком случае ясно, что для монодромии, порождаемой перестановками τ-функции (IV.5), являются θ-функциями, аналогично (IV.1).

Наконец, имеется еще один способ параметризации M_p, задающий риманову поверхность в виде фундаментального многоугольника F фуксовой группы $\Gamma\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ с $2p$ образующими $\hat a_i$, $\hat b_i\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и соотношением

$$\prod_{i=1}^{p}\hat a_i\hat b_i\hat a_i^{-1}\hat b_i^{-1}=1. \tag{IV.12}$$

Координатами в M_p являются $6p-6$ *вещественных* параметров группы Γ, и детерминанты и мера выражаются через эти параметры с помощью ζ-функции Сельберга. Основные формулы, использующиеся при этом, имеют вид

$$\begin{gathered}\det{}'\Delta_j=\det{}'\Delta_{1-j}=\zeta(j)=\prod_{\gamma}\prod_{n=0}^{\infty}\{1-\exp[-(j+n)\,l_\gamma]\}\quad(j=2,3,\ldots),\\ \left(\int_F\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\right)^{-1}\det{}'\Delta_0=\zeta'(1),\\ Z_p=\int_{M_p}[\mathrm{d}\tau]\,\zeta(2)\,(\zeta'(1))^{-13},\quad[d\tau]=\prod_{i=1}^{3p-3}l_i\mathrm{d}l_i\mathrm{d}\nu_i,\end{gathered} \tag{IV.13}$$

где в первой формуле произведение идет по всем примитивным ориентированным геодезическим γ длиной l_γ (соответствующие элементы $\hat\gamma\in\Gamma$ не являются степенями никаких других элементов из Γ), а метрика в Δ_j является метрикой постоянной отрицательной кривизны в верхней полуплоскости Лобачевского, на которой действует $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Геодезические длиной l_i в мере $[d\tau]$, заимствованной из [60], не пересекаются друг с другом, а в остальном выбираются произвольно.

Угол ν_i параметризует поверхности, получаемые разрезанием исходной по геодезической l_i и склейкой обратно, после поворота на ν_i.

Подход, приводящий к (IV.13), был использован множеством авторов, а за деталями и ссылками мы отсылаем читателя к [10, 61]. На наш взгляд, единственным недостатком красивых формул (IV.13) является то, что они дают выражение для меры в терминах вещественных координат на M_p (точнее, на пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}$, являющемся его накрытием). При этом простая комплексно-аналитическая структура теории является скрытой, что при рассмотрении суперструн является серьезным препятствием к их изучению. Многопетлевые амплитуды в теории суперсимметричных и гетеротических струн не обсуждались в настоящем обзоре, поскольку имеющиеся на сегодняшний день*) результаты носят, на наш взгляд, предварительный характер.

*) Начало 1987 г. См. [65]. (*Примеч. ред.*).

Автор благодарит Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР, где были получены результаты этой работы.

* * *

Обзор не был подготовлен автором для публикации в журнале «УФН», поэтому он не содержит традиционного вступления о физических приложениях теории струн и ее месте в современной теоретической физике. До сих пор наиболее популярным приложением струн остается квантовая теория гравитации и, следовательно, реалистическое объединение всех фундаментальных взаимодействий. О том, почему теория струн способна дать решение этой проблемы, см. в популярных статьях [62].

Более серьезно классический период развития струнной теории (1968—1985 гг.) отражен в монографиях [63] (см. также обзор [64]). (*Редакция*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Schwarz J. H. Phys. Rep. **1982**. V. 89. P. 223.
Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. Ser. B. **1984**. V. 149. P. 117; **1985** V. 151. P. 21.
2. Gross D. J., Harvey J., Martinec E., Rohm R.//Phys. Rev. Lett. **1985**. V. 52. P. 502; Nucl. Phys. Ser. B. **1985**. V. 256. P. 253. **1986**. V. 267. P. 75.
3. Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E.//Ibidem. **1985**. V. 258. P. 46.
4. Martinec E.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 171. P. 189.
5. Polyakov A. M.//Ibidem. **1981**. V. 103. Pp. 207, 211.
6. Bers L.//Bull. Am. Math. Soc. N. S., **1981**. V. 5. P. 131.
7. Mumford D.//L'Ens. Math. **1977**. T. 23. P. 39.
8. Shapiro J. A.//Phys. Rev. Ser. D. **1972**. V. 5. P. 1945.
9. Belavin A. A., Knizhnik V. G.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 168. P. 201; ЖЭТФ. **1986**. Т. 91. С. 247.
10. Bost J., Jolicoeur J.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 147. P. 273.
[11] Beilinson A. A., Manin Yu. I.//Commun. Math. Phys. **1986**. V. 107. P. 359.
12. Knizhnik V. G.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 180. P. 247.
13. Wolpert S. A.//Bull. Am. Math. Soc. N. S. **1984**. V. 11. P. 189.
14. Knizhnik V. G.//Commun. Math. Phys. **1987**. V. 112. P. 567.
15. Alvarez O. Preprint UCB-PTH-85/39.LBL-20251.
16. Alvarez O.//Nucl. Phys. Ser. B. **1985**. V. 216. P. 125.
17. Catenacci R., Cornalba M., Martinelli M., Reina C.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 172. P. 328.
18. Bismut J. M., Freed D.//Commun. Math. Phys. **1986**. V. 106. P. 159; V. 107 P. 103.
19. Lovelace C.//Phys. Lett. Ser. B. **1970**. V. 32. P. 703; **1971**. V. 34. P. 500.
Kaku M., Yu L. P.//Ibidem. **1970**. V. 38. P. 166; Phys. Rev. Ser. D. **1971**. V. 3. Pp. 2999, 3007, 3020.
Alessandrini V.//Nuovo Cimento. Ser. A. **1971**. V. 2. P. 321.
Alessandrini V., Amati D.//Ibidem. **1971**. V. 4. P. 793.
Kaku M., Scherk J.//Ibidem. Pp. 430, 2000.
20. Virasoro M. A.//Ibidem. **1969**. V. 177. P. 2309.
Shapiro J. A.//Phys. Lett. Ser. B. **1970**. V. 33. P. 361.
[21] Gava E., Iengo R., Jayaraman T., Ramachandran R.//Ibidem. **1986**. V. 168. P. 207.
22. Iengo R.//Phys. Lett. Ser. B. **1987**. V. 186. P. 152.
23. Квиллен Д.//Функ. анал. и его прилож. **1985**. Т. 19. С. 37.
24. Alvarez-Gaumé L., Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. **1984**. V. 234. P. 269
25. Friedan D.//Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics. Les Houches, Summer 1982/Eds J.-B. Zuber, R. Stora.— Amsterdam: North-Holland, 1984.
26. Манин Ю. И.//Функ. анал. и его прилож. **1985**. Т. 20. С. 88.
27. Serre J. P.//Geometrie algebrique et geometrie analytique. Ann. Inst. Fourier. **1950**. T. 6. P. 1.
28. Belavin A., Knizhnik V., Morozov A., Perelomov A.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 178. P. 324. Письма ЖЭТФ. **1986**. Т. 43. С. 319.
Moore G.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 176. P. 69.
29. Morozov A. Yu.//Ibidem. **1987**. V. 184. P. 171; **ЯФ. 1987. Т. 45. С. 287.**
30. Кра И. Автоморфные формы и клейновы группы.— М.: Мир, 1975.
[31] Igusa J. I.//Am. J. Math. **1962**. V. 84. P. 175; **1964**. V. 86. P. 392.
32. Мамфорд Д.//Математика. **1968**. Т. 12, вып. 6. С. 67.

33. Alvarez-Gaumé L., Moore G., Vafa C.//Commun. Math. Phys. **1986**. V. 106. P. 1.
34. Igusa J. I.//Am. J. Math. **1967**. V. 89. P. 817.
35. Schottky F.//Zs. reine and angew. Math. **1888**. Bd 102. S. 304.
36. Igusa J. I.//J. Fac. Science. Univ. Tokyo **1981**. V. 28. P. 531.
37. Faltings G.//Ann. of Math. **1984**. V. 119. P. 387.
38. Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых.— М.: Мир, 1984.
39. Namazie M. A., Narain K. S., Sarmadi M. H.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 177. P. 329.
40. Sonoda H.//Ibidem. V. 178. P. 390.
[41] Тюрин А. Н.//УМН. **1978**. Т. 33, вып. 6(204). С. 149.
42. Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.//Nucl. Phys. Ser. B. **1984**. V. 241. P. 333.
43. Morozov A. Yu., Perelomov A. M.//Phys. Lett. Ser. B. **1987**. V. 183. P. 296; Письма ЖЭТФ. **1986**. Т. 44. С. 157.
44. Atick J., Sen A.//Phys. Lett. Ser. B. **1987**. V. 186. P. 319.
45. Verlinde E., Verlinde H.//Ibidem. V. 192. P. 95.
46. Lerche W., Lust D.//Ibidem. P. 45.
Eguchi T., Ooguri H.//Nucl. Phys. Ser. B. **1987**. V. 282. P. 308; Phys. Lett. Ser. B. **1987**. V. 187. P. 127.
Verlinde E., Verlinde H.//Nucl. Phys. Ser. B. **1987**. V. 288. P. 357.
47. Alvarez-Gaume L., Bost J., Moore G., Nelson P., Vafa C.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 178. P. 41.
Bost J., Nelson P.//Phys. Rev. Lett. **1986**. V. 57. P. 795.
48. Бершадский М. А., Радуль А. О. Фермионы на Z_n-кривых.— Препринт МГУ.— Москва, 1986.
49. Bershadsky M. A., Radul A. O.//Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. **1987**. V. 2. P. 165.
50. Zamolodchikov Al.//Nucl. Phys. Ser. B. **1987**. V. 285. P. 481.
[51] Dotzenko Vl. S., Fateev V. A.//Ibidem. **1984**. V. 240. P. 312.
52. Dixon L., Friedan D., Martinec E., Shenker S. Preprint EFI-86-42; Nucl. Phys. Ser. B. **1987**. V. 282. P. 13.
53. Fay J. D.//Lect. Not. Math. **1973**. V. 352.
54. Friedan D., Martinec E., Shenker S.//Nucl. Phys. Ser. B. **1986**. V. 271. P. 93.
55. Harris J.//Proc. of the Intern. Congress of Mathematica.— Amsterdam: North-Holland, 1984.— V. 1. P. 719.
56. Mulase M.//J. Diff. Geom. **1986**. V. 19. P. 403.
Shiota T.//Invent. Math. **1986**. V. 83. P. 333.
57. Кричевер И. М.//УМН. **1977**. Т. 32, вып. 6. С. 183; англ. перевод://Russ. Math. Surveys. **1977**. V. 32, No. 6. P. 185.
Sato M., Sato Y.//RIMS Kokyuroku. **1980**. V. 388. P. 183; **1981**. V. 414. P. 181.
Jimbo M., Miwa T.//Vertex Operators in Mathematics and Physics.— Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1984.
Segal G., Wilson G.//Loop Groups and Equations of KdV Type.— Publ. IHES, 1985.
Ishibashi N., Matsuo Y., Ooguri H.//Mod. Phys. Lett. Ser. A. **1987**. V. 2. P. 119.
Saito S.//Phys. Rev. Lett. **1987**. V. 59. P. 1798.
58. Manin Yu. I.//Phys. Lett. Ser. B. **1986**. V. 172. P. 184; Письма ЖЭТФ. **1986**. Т. 43. С. 161.
59. Сато М., Дзимбо М., Мива Т.//Математика. **1983**. Т. 30.
60. Wolpert S.//An. J. Math. **1985**. V. 107. P. 969.
[61] Баранов М. А., Шварц А. С.//Письма ЖЭТФ. **1985**. Т. 42. С. 340.
62. Грин М.//УФН. **1987**. Т. 151. С. 683;
Казаков Д. И.//УФН. **1986**. Т. 150. С. 561.
63. Green M., Schwarz J., Witten E. Superstring Theory. V. 1, 2.— Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1987; готовится перевод: Шварц Дж., Грин М., Виттен Е. Теория суперструн.— М.: Мир.
Polyakov A. M. Gauge Fields and Strings.— New York: Harwood Academic Publ., 1987.
64. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.//УФН. **1986**. Т. 150. С. 489.
65. Atick J., Moore G., Sen A.//Nucl. Phys. Ser. B. **1988**. 307. P. 221; V. 308. P. 1.
Bershadsky M.//Phys. Lett. Ser. B. **1988**. V. 201. P. 67.
Переломов А. М. и др.//ЖЭТФ. **1989**. Т. 95. С. 1153.