Октябрь 1989 г. *Том 159, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

539.9.01

ОБ ОПИСАНИИ КОЛЛЕКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ И ФЛУКТУАЦИЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ

В. Н. Цытович

(Институт общей физики АН СССР)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Полностью ионизированная плазма — это простейшая система заряженных частиц, взаимодействующих между собой и с полями по известным законам электродинамики, которую в определенном приближении можно считать классической, а более строго, в общем случае, надо считать квантовой электродинамикой. Поэтому в такой системе имеются как классические, так и квантовые флуктуации. Усреднение по флуктуациям приводит к определению макроскопически наблюдаемых величин. Развитие современной физики плазмы шло фактически по пути упрощения методов усреднения и по пути более глубокого понимания основ физики коллективных процессов.

Говоря о коллективных процессах, обычно имеют в виду как изменение сечений процессов из-за наличия коллектива частиц, так и возбуждения неравновесных коллективных полей и других возмущений. Первый из них сродни «одеванию» частиц и появлению элементарных возбуждений, образом которых являются «одетые» частицы. Хорошо известным примером является дебаевская экранировка зарядов, привнесенных в плазму извне. Если речь идет о частицах самой плазмы, да еще в условиях сильной неравновесности, то возникает вопрос о том, каким образом каждая частица участвует в дебаевском экранировании других частиц и в то же самое время является одним из зарядов, поле которого экранируется другими зарядами? Ответ на этот вопрос может быть получен при более детальном рассмотрении флуктуаций. Само поле частиц в однородной в среднем (т. е. после усреднения по флуктуациям) плазме отсутствует и может быть «проявлено» только вследствие флуктуаций. Коллективные в сильнонеравновесной системе могут быть как регулярными, так и флуктуационными (об описании коллективных флуктуационных полей см. ниже), изменения сечений из-за коллективных эффектов возникают как для взаимодействий частиц с внешними полями, так и для их взаимодействия с коллективными возмущениями.

Если говорить, например, о рассеянии таких коллективных полей на частицах, то нужно иметь в виду, что одни и те же частицы принимают участие отчасти и в создании полей, а также в дебаевской экранировке частиц и являются теми частицами, на которых происходит рассеяние. Единственный принцип разделения в данном случае —это разделение не по частицам, а по движениям — флуктуационным и средним. Именно такое разделение позволяет ввести понятие «одетых» частиц или возбуждений как объектов, описываемых распределениями, усредненными по флуктуациям. Можно было бы думать, что «одевание» частиц характерно только для конденсированных сред На примере сильно разреженной плазмы видно, что это наивное представление ошибочно. Например, сечения рассеяния волн с длинами, превышающими радиус дебаевского экранирования, будут всегда коренным образом отличаться от сечений рассеяния в вакууме (на «голом» заряде); просто с увеличением разрежения (т е. падением концентрации) растет радиус экранирования, и сделанное утверждение с падением концентрации будет справедливо для больших длин волн.

В результате усреднения по флуктуациям возникают некоторые уравнения для усредненных величин. Это в целом не встречает каких-либо затруднений в понимании. Но помимо формальной стороны важен сам результат и его физическая интерпретация, которая и указывает на факт коренного изменения сечений для средних величин.

Фактически метод цепочки корреляционных функций Боголюбова [1] и сводится к получению уравнения для таких средних. Однако в существующей обширной литературе, посвященной этой проблеме, включая многочисленные монографии, используется чрезвычайно громоздкая математическая процедура, которая может быть сейчас упрощена до предела. Вывод интеграла столкновений Ландау — Балеску [2, 3, 4] занимает при этом несколько строк (см. ниже и [18, 24]; ниже используется обобщение [18, 24] на релятивистский квантовый случай).

Именно существовавшая ранее громоздкость аппарата не позволила перейти к более подробному анализу проблем коллективных эффектов в плазме для процессов, не только связанных со столкновениями частиц, но и тех, в которых участвуют коллективные поля. К ним относятся процессы переходного рассеяния [5, 6], переходного тормозного излучения [6—9], в которых самым ярким образом подтверждается картина «одетых» частиц и, в частности, наглядно видна физическая причина радикального изменения сечений рассеяния и тормозного излучения для находящихся в плазме частиц. Важно, что сама концепция элементарных возбуждений (или «одетых» частиц) возникает автоматически как результат строгого усреднения по флуктуациям при использовании теории возмущений по флуктуирующим полям. Особую роль играют эффекты квантовых флуктуации в почти классических системах, обязанные виртуальным поперечным полям в системе многих частиц (см. [10]). Последние могут переносить энергию от одних частиц к другим. Одним из типов таких взаимодействий являются радиационно-резонансные взаимодействия, осуществляющие дополнительный обмен энергией и импульсом между частицами в присутствии сильно неравновесных коллективных полей [11], помимо (естественно, слабых) радиационных поправок к взаимодействию частиц с этими коллективными полями. Обмен энергией и импульсом «разных» частиц может стать доминирующим процессом [12], а не поправками (хотя он содержит ту же малость $e^2/\hbar c$) в условиях, когда концентрация частиц одного из сортов при таком обмене доминирует (см. ниже; грубо говоря, отношение концентрации n_0/n_t должно «преодолеть» малость $e^2/\hbar c$).

Говоря об этих квантовых флуктуациях, нужно иметь в виду, что распределение частиц должно быть усреднено не только по флуктуациям частиц, но и по «нулевым» флуктуациям, так же как это делается в квантовой электродинамике. При этом мы имеем в виду, конечно, невзаимодействующие частицы, или, точнее, описание процесса в представлении взаимодействия. С учетом взаимодействий квантовые флуктуации в системе частиц, естественно, отличаются от нулевых флуктуации и зависят от концентрации частиц. Эта часть квантовых флуктуации, как оказывается, ответственна за дополнительный обмен энергией и импульсом между частицами при их взаимодействии с коллективными полями.

Таким образом, в таком взаимодействии коллективные квантовые эффекты (обмен энергии и импульса, зависящие от концентрации частиц) сказываются на взаимодействии частиц с коллективными полями. Громоздкость общего аппарата теории флуктуации (включая квантовые флуктуации) не позволяла долгое время рассчитать такие взаимодействия, которые, по-видимому, могут проявляться во многих лабораторных экспериментах и астрофизических наблюдениях [13—15].

Цель настоящей статьи отчасти методическая, а именно, изложить простейший подход к построению усредненных по флуктуациям кинетических уравнений для «одетых» частиц плазмы. Используемые соотношения повторяют известные процедуры, использованные Ю. Л. Климонтовичем и отчасти В. П. Силиным [4] применительно к интегралам столкновений [16] и А. Г. Ситенко [18] при описании флуктуации с учетом нелинейных взаимодействий. Используя общие и простые соображения, ниже получены известные результаты в несколько строк. Причем упрощение изложения позволит затронуть и вопросы, не нашедшие отражения в [16—18], а также дать простую интерпретацию результатам, включая такие, как место переходного рассеяния и переходного тормозного излучения в современной физике плазмы. Уже в [19, 20] (см. [21]) было отмечено, что полные сечения рассеяния на «одетых» плазменных частицах должны включать как обычное томсоновское рассеяние, так и переходное рассеяние и их интерференцию. В [19, 21] особое внимание обращалось на индуцированное рассеяние, описание которого можно получить путем статистического усреднения нелинейных уравнений, не прибегая к теории линейных и нелинейных флуктуации. Получаемые из индуцированных процессов вероятности рассеяния использовались и для расчета спонтанного (т.е. обычно обсуждаемого при малых интенсивностях) рассеяния. Был дан и независимый способ расчета процессов переходного рассеяния, исходя из нелинейных токов плазмы [21, 22].

Но рассеяние в однородной среде есть рассеяние на флуктуациях, что хорошо известно (см. [23]). Ниже в качестве примера использования простых методов расчета флуктуации показано, что спонтанное рассеяние на флуктуациях описывается квадратом суммы амплитуд переходного и томсоновского рассеяния, т. е. переходное рассеяние может быть найдено строго в теории флуктуации. Можно сказать подругому, интерпретируя этот результат на языке «одетых» частиц, а именно: рассеяние на флуктуациях единицей объема плазмы происходит так, как если бы независимо рассеивали «одетые» электроны и ионы (т. е. электроны и ионы, поля которых экранированы дебаевской оболочкой), причем число «одетых» электронов и ионов в единице объема равно числу (реальных) электронов и ионов в единице объема плазмы. Объем плазмы с точки зрения рассеяния заполнен как бы классическими квазинейтральными атомами, у которых электронные оболочки (дебаевские экранирующие «шубы») создаются динамически свободными плазменными электронами. Ясно при этом, что сами дебаевские оболочки создаются теми же электронами (а в общем случае и ионами) плазмы, так что реальный электрон выступает в двух ролях — как центр рассеяния и как элемент дебаевской оболочки. Так реально возникает картина «одетых» частиц. Сами «одетые» частицы описываются функцией распределений, усредненной по флуктуациям.

Важно, что та же картина возникает и для процессов столкновений частиц и процессов тормозного излучения, т. е. излучения при столкновениях частиц. Тормозное излучение единицы объема плазмы, возникающее из-за флуктуации, оказывается равным сумме (с учетом интерференции) обычного и переходного тормозного излучения [7]. Последнее есть не что иное, как переходное рассеяние виртуального кванта сталкивающихся частиц в реальный квант. Это значит, что картина «одетых» частиц «срабатывает» и здесь в полную силу. После изложения этих примеров мы обсудим эффекты квантовых флуктуации и передачи энергии и импульса между частицами в результате воздействия этих флуктуации на взаимодействие частиц с коллективными полями. Будут даны обобщения простых формул для классических флуктуации, обсуждены методы усреднения по квантовым флуктуациям, даны результаты расчета квантовых флуктуации в системе многих частиц, взаимодействующих с коллективными полями.

Нужно отметить, что фактически при настоящем изложении используется довольно глубокая мысль, отмеченная еще Б. Б. Кадомцевым в его обзоре 1964 г. [24], а именно, что можно усреднять одночастичную функцию распределения, подчиняющуюся бесстолкновителыюму кинетическому уравнению, правильно учтя «нулевые» классические флуктуации. Этот классический предел флуктуации при квантовом рассмотрении действительно следует из «нулевых» флуктуации частиц, однако результат, будучи чисто классическим, имеет очень простую интерпретацию на языке классических флуктуаций независимых событий (в данном случае невзаимодействующих частиц).

2. Флуктуации независимых свободных частиц. Рассмотрим вначале классический предел. Пусть $f_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega}$ — одночастичная функция распределения частиц по импульсам $\mathbf{p}$ и по передаваемым четыре-импульсам $k=\{\mathbf{k},\ \omega\}$; $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)=\int f_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega}\exp[i\mathbf{kr}-i\omega t]\,d\mathbf{k}d\omega$ ($f_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega}$ имеет также смысл компонент Фурье по координатам и времени). Каждая из частиц движется свободно, и функция $f_{\mathbf{p}}$ в среднем однородна в пространстве и времени. Микродвижения приводят к зависимости $f_{\mathbf{p}}$ от $\mathbf{k}$ и ω, и они дают флуктуации. Положим

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)=\Phi_{\mathbf{p}}+\delta f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t),\quad \Phi_{\mathbf{p}}=\langle f_{\mathbf{p}}\rangle, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\delta f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)=0, \tag{2.2}$$

где $\Phi_{\mathbf{p}}$ не зависит от $\mathbf{r}$ и t. Уравнение (2.2) является следствием общей теоремы Лиувилля в отсутствие полей. Наличие поля создает взаимодействия. В первом приближении такими взаимодействиями можно пренебречь. Для простоты внешние поля отсутствуют

Одночастичная функция распределения $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)$ получается интегрированием функции распределения от переменных всех частиц по всем переменным, за исключением переменных данной частицы $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, t. Тогда, естественно, возникает уравнение (2.2). В пространственных компонентах Фурье уравнения (2.1), (2.2) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) + i\mathbf{k}\mathbf{v}\delta f_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) = 0, \qquad \langle f_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\rangle = \Phi_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{k}). \tag{2.3}$$

Из общих соображений в однородной и стационарной среде корреляционная функция флуктуаций $\langle\delta f_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega}\delta f_{\mathbf{p}',\mathbf{k}',\omega'}\rangle$ должна быть пропорциональна $\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\omega+\omega')$, кроме того, функции распределения для разных $\mathbf{p}$ никак не коррелированы (отсутствует взаимодействие), т. е. корреляционная функция должна содержать $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ и, наконец, в силу (2.3) она должна содержать $\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})$,

$$\langle\delta f_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega}\delta f_{\mathbf{p}',\mathbf{k}',\omega}\rangle = |\delta f|^2_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\delta(\omega+\omega')\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}). \tag{2.4}$$

Чтобы определить $|\delta f|^2_{\mathbf{p}}$, нужно воспользоваться известной теоремой (см. [25]) статистической физики о том, что средняя флуктуация квадрата числа частиц $\langle\delta N^2\rangle$ в объеме V равна среднему числу частиц $\langle N\rangle$ в объеме V. В качестве таких частиц возьмем частицы с импульсом $\mathbf{p}$. Рассмотрим объем куба с ребром L, разложим все функции в ряды Фурье и перейдем к пределу $L\to\infty$. Тогда при нормировке

$$\left\langle\int f_{\mathbf{p}}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\right\rangle = \int\frac{\Phi_{\mathbf{p}}\,d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = n, \tag{2.5}$$

где n — концентрация частиц, получим $|\delta f|^2_{\mathbf{p}} = \Phi_{\mathbf{p}}$, т. е.

$$\langle\delta f_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\delta f_{\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\rangle = \Phi_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})\delta(k+k'),$$
$$k = \{\mathbf{k},\omega\}. \tag{2.6}$$

Фактически эта простейшая формула и позволяет описывать все богатство коллективных процессов и флуктуации в системе классических заряженных частиц, образующих плазму.

Можно найти квантовое обобщение (2.6) и в классическом пределе получить из него (2.6). Очевидно, что в представлении вторичного квантования $\Phi_{\mathbf{p}}$ это среднее по статистическому ансамблю от числа заполнения частиц импульса $\mathbf{p}$. Сами числа заполнения, как известно, определяются как средние по вакууму $\langle 0|\ldots|0\rangle$ от оператора $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$, где $|0\rangle$ — состояние вакуума, а $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ — оператор рождения частицы ($\hat{a}_{\mathbf{p}}$ — оператор уничтожения частицы) с импульсом $\mathbf{p}$:

$$\Phi_{\mathbf{p}} = \int\langle\langle 0|\hat{a}^+_{\mathbf{p}'}\hat{a}_{\mathbf{p}}|0\rangle\rangle\,d\mathbf{p}'; \tag{2.7}$$

здесь первые (наружные) скобки соответствуют статистическому усреднению, а $\langle 0|$ и $|0\rangle$ — вакуумному конечному и начальному состояниям, т. е. в (2.7) производится усреднение как по статистическому ансамблю, так и по вакуумным флуктуациям. В дальнейшем подразумевается, что всюду для операторных квантованных величин имеется именно такое усреднение. Будем опускать в обозначениях двойные скобки и символ 0 для вакуумного состояния, т. е. (2.7) будем записывать в виде

$$\Phi_{\mathbf{p}} = \int\langle\hat{a}^+_{\mathbf{p}'}\hat{a}_{\mathbf{p}}\rangle\,d\mathbf{p}', \qquad \langle a^+_{\mathbf{p}'}a_{\mathbf{p}}\rangle = \Phi_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{2.8}$$

$\Phi_{\mathbf{p}}$—просто соответствующие числа заполнения, точнее, их средние по статансамблю.

Ясно, что как (2.6), так и (2.8) справедливы для любых распределений, т. е. мы не ограничиваемся равновесными (например, максвелловскими) распределениями.

Можно ввести оператор частиц $\hat{\Psi}$ в импульсном представлении. Для свободных частиц ($\hbar = c = 1$)

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{p}}(t) = \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}, \tag{2.9}$$

где $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ — энергия частиц (в общем релятивистском случае $\varepsilon_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$, однако здесь в нерелятивистской теории $\varepsilon_{\mathbf{p}} = m + (\mathbf{p}^2/2m)$ или $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$, если отбросить постоянный фазовый множитель $\exp(-imt)$ в (2.9)). В силу $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ имеем $\varepsilon_{\mathbf{p}'} = \varepsilon_{\mathbf{p}}$,

$$\Phi_{\mathbf{p}} = \int \langle \hat{\Psi}^{+}_{\mathbf{p}'} \hat{\Psi}_{\mathbf{p}} \rangle \, d\mathbf{p}'. \tag{2.10}$$

Удобно ввести вигнеровский оператор $\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ ($\hbar = c = 1$):

$$\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \hat{\Psi}^{+}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}(t)\, \hat{\Psi}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}(t). \tag{2.11}$$

Тогда (2.8) запишется в виде

$$\langle \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \rangle = \Phi_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{k}). \tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) отличается от классического (23) только тем, что в левой части (2.12) стоит знак оператора.

Введем оператор флуктуации

$$\delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) = \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) - \langle \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) \rangle = \\ = \hat{\Psi}^{+}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}(t)\, \hat{\Psi}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}(t) - \langle \hat{\Psi}^{+}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}(t)\, \hat{\Psi}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}(t) \rangle. \tag{2.13}$$

Легко видеть, что в силу (2.9) он подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) + i\left(\varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right) \delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) = 0. \tag{2.14}$$

При $k \ll p$

$$\varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \approx \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{k}\mathbf{v}$$

и уравнение (2.14) совпадает с (2.3). Решением (2.14) будет

$$\delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) = \delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(0) \exp\left[-i\left(\varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right) t\right], \tag{2.15}$$

$$\delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(0) = \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \langle \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \rangle, \tag{2.16}$$

$$\delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega} = \delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(0)\, \delta\left(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right). \tag{2.17}$$

Найдем теперь искомое среднее

$$\langle \delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega} \delta\hat{f}_{\mathbf{p}',\mathbf{k}',\omega'} \rangle = \delta\left(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right) \delta\left(\omega' - \varepsilon_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}} + \varepsilon_{\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\right) \times \\ \times \left(\langle \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}} \hat{a}_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}} \rangle - \langle \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \rangle \langle \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}} \hat{a}_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}} \rangle \right). \tag{2.18}$$

Учитывая, что не равны нулю только средние, когда имеется сперва оператор рождения, а потом оператор уничтожения (если считать справа налево), разбивая среднее от четырех операторов на произведения попарных средних (что естественно предполагает статистическую независимость свободных частиц, так же как это предполагалось в классическом выводе) и учитывая, что $\mathbf{k}\neq 0$ и оператор $a_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}$ коммутирует с $\hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}$, получим

$$\langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle - \langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\rangle\langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle =$$

$$= \langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle\langle \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}'-\frac{\mathbf{k}'}{2}}\rangle = \Phi_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\left(1-\Phi_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\right)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \quad (2.19)$$

Здесь использовано (2.8) и $\hat{a}^+_{\mathbf{p}'}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}'} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$. В дальнейшем будем считать $\Phi_{\mathbf{p}} \ll 1$ и пренебрегать Φ_{p} по сравнению с единицей. Учтя δ-функции в (2.19), легко видеть, что одна из δ-функций (2.18) превращается в $\delta\left(\omega' + \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right) = \delta(\omega+\omega')$.

Итак, мы получаем [17]:

$$\langle \delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k},\omega}(\delta\hat{f}_{\mathbf{p}',\mathbf{k}',\omega'}\rangle = \Phi_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\delta\left(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right), \quad (2.20)$$

что служит обобщением классического соотношения (2.6) (при $k \ll p$ из (2.20) следует (2.6)).

На первый взгляд, может показаться, что здесь не использовалось соотношение $\langle\delta N^2\rangle = \langle N\rangle$, которое фигурировало при классическом выводе. Однако само это соотношение получается фактически методом, аналогичным разбиению сложных средних на парные и используемым при квантовом выводе.

И еще одно замечание. Кажется не особенно наглядным смысл квантового оператора $\delta\hat{f}$ по сравнению с классическим δf. Оказывается, однако, что и не нужно даже иметь такую интерпретацию, так как фактически представляют интерес только наблюдаемые величины, а для системы частиц, у которой флуктуации в первом приближении соответствуют флуктуациям свободных частиц (а это как раз случай слабо взаимодействующих частиц, образующих плазму, когда $nd_l^3 \gg 1$), наблюдаемые величины, представляющие интерес, выражаются через средние от квадратичных комбинаций $\delta\hat{f}$, а они задаются через наблюдаемую величину, среднюю вероятность наблюдения частиц с импульсом Φ_{p}, соотношением (2.20).

Фактически предметом рассмотрения будут не чисто свободные частицы, а слабо взаимодействующие частицы. С учетом взаимодействия $\hat{\Psi}_{\mathbf{p}}(t)$ будет более сложной функцией времени, нежели (2.9). Эта функция в (2.10) даст величину Φ_{p}, зависящую от t. Важно, что смысл (2.10) как усредненной вероятности сохраняется при учете и взаимодействий, если оператор $\hat{\Psi}^+_{\mathbf{p}}$ — оператор рождения частицы (с учетом взаимодействий), а $\hat{\Psi}_{\mathbf{p}}$ — уничтожения; Φ_{p} имеет вполне конкретный наблюдательный смысл. Поэтому нас может не очень даже интересовать наблюдательный смысл оператора $\delta\hat{f}$, если окончательные соотношения будут содержать Φ_{n}, лишь бы можно было записать динамические уравнения для $\delta\hat{f}$ или $\hat{f}$ (с учетом взаимодействий) или выразить $\delta\hat{f}$ с учетом взаимодействий через $\delta\hat{f}^{(0)}$ для свободных частиц, и при усреднении выражений для $\delta\hat{f}^{(0)}$ использовать (2.20). Оба пути можно использовать: либо записать уравнение для $\delta\hat{f}$ из уравнений Шрёдингера, либо использовать $\hat{S}$-матрицу и представление взаимодействия.

Это отступление нам нужно было для того, чтобы проиллюстрировать фундаментальную роль соотношений (2.20) для всей дальнейшей процедуры расчета усредненных характеристик плазмы и то, что фактически квантовое описание флуктуаций требует знания средних от операторов $\delta\hat{f}$, играющих фактически ту же роль, что и флуктуационная часть функции распределения при классическом описании.

Если мы хотим описывать систему частиц релятивистски инвариантно, то нужно ввести положительные и отрицательные энергии. Для спина 1/2 операторы $\hat{\Psi}_\alpha$ имеют спинорные индексы α. Поэтому удобно ввести оператор Вигнера не соотношением (2.11), а в следующем виде:

$$\hat{f}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}(t)=\frac{1}{2}\left(\hat{\Psi}^{+}_{\beta,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}(t)\,\hat{\Psi}_{\alpha,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}(t)-\hat{\Psi}_{\alpha,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}(t)\,\hat{\Psi}^{+}_{\beta,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}(t)\right). \tag{2.21}$$

Это выражение отличается от (2.11) тем, что приписаны спинорные индексы α и β у операторов $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Psi}^+$ и, кроме того, взята полусумма выражений, которые получаются перестановкой $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Psi}^+$. Для $\mathbf{k}\neq 0$, Ψ и Ψ^+ антикоммутируют. Что касается $\mathbf{k}=0$, то определние (2.21) удобно в том смысле, что в отсутствие частиц среднее по вакууму от (2.21) обращается в нуль.

Плотность 4-тока выражается через $\hat{f}$ следующим образом (для метрики $g_{ii}=1$, $g_{44}=i$, $\gamma_\mu=\{\gamma,\beta\}$; γ, β — матрицы Дирака):

$$\hat{j}_{\mu,\mathbf{k}}(t)=e\int \mathrm{Sp}\, i\beta\gamma_\mu\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t)\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{2.22}$$

Отсюда для свободных частиц получим плотность заряда:

$$\rho_{\mathbf{k}}=\langle\hat{\rho}_{\mathbf{k}}\rangle=e\int\Phi_{\mathbf{p}}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\delta(\mathbf{k}),\qquad \mathrm{Sp}\,\langle\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\rangle=\Phi_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{k}). \tag{2.23}$$

Таким образом, $\Phi_{\mathbf{p}}$ описывает разность числа частиц и античастиц, хотя это, впрочем, и малосущественно, так как можно ввести числа заполнения как положительных, так и отрицательных энергий.

Операторы $\hat{\Psi}$ можно классифицировать по знаку энергии $\lambda=\pm 1$, записав $\hat{\Psi}^\lambda$, тогда $\hat{f}$ будет иметь два индекса λ и λ':

$$\hat{f}^{\lambda,\lambda'}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}=\frac{1}{2}\left(\hat{\Psi}^{+\lambda}_{\beta,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{\Psi}^{\lambda'}_{\alpha,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}-\hat{\Psi}^{\lambda'}_{\alpha,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{\Psi}^{+\lambda}_{\beta,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right), \tag{2.24}$$

$$\hat{\Psi}^{\lambda}_{\alpha,\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}=\sum_{\mu}u^{\lambda,\mu}_{\alpha,\mathbf{p}}\hat{a}^{\lambda,\mu}_{\mathbf{p}}e^{-i\lambda\varepsilon_{\mathbf{p}}t},$$

$\mu=\pm 1$ — проекция спина на $\mathbf{p}$, $u^{\lambda,\mu}_{\alpha,\mathbf{p}}$ — биспинор. Если частицы неполяризованы, то $\Phi_{\mathbf{p}}=\sum_{\mu}\Phi^{\mu}_{\mathbf{p}}$, $\Phi^{+1}_{\mathbf{p}}=\Phi^{-1}_{\mathbf{p}}$

$$\Phi^{\mu}_{\mathbf{p}}=\frac{1}{2}\Phi_{\mathbf{p}},$$

$$\langle\hat{a}^{\mu'+}_{\mathbf{p}'}\hat{a}^{\mu}_{\mathbf{p}}\rangle=\delta_{\mu,\mu'}\Phi^{\mu}_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')=\frac{1}{2}\Phi_{\mathbf{p}}\delta_{\mu\mu'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'),$$

$$\hat{a}^{+1,\mu}_{\mathbf{p}}\equiv\hat{a}^{\mu}_{\mathbf{p}},\quad \hat{a}^{-1,\mu}_{\mathbf{p}}=\hat{b}^{\mu+}_{-\mathbf{p}}. \tag{2.25}$$

Проекционные операторы на положительные и отрицательные энергии $\Lambda^{\pm}_{\mathbf{p}}=\Lambda^{\lambda}_{\mathbf{p}}$ вводятся соотношением

$$\Lambda^{\lambda}_{\mathbf{p}}=\frac{m-i\gamma\mathbf{p}+\lambda\varepsilon_{\mathbf{p}}\beta}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}},\qquad \sum_{\mu}u^{\lambda,\mu}_{\alpha,\mathbf{p}}u^{\lambda,\mu}_{\beta,\mathbf{p}}=\lambda(\Lambda^{\lambda}_{\mathbf{p}}\beta)_{\alpha\beta}. \tag{2.26}$$

Если считать позитроны не отсутствующими, то из (2.24) следует

$$\langle f^{+,+}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}\rangle + \langle f^{-,-}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}\rangle = (\Lambda^+_{\mathbf{p}}\beta)_{\alpha\beta}\,\delta(\mathbf{k})\frac{1}{2}(\Phi^+_{\mathbf{p}} - 1) + \\ + \frac{1}{2}(\Lambda^-_{\mathbf{p}}\beta)_{\alpha\beta}(\Phi^-_{\mathbf{p}} - 1)\,\delta(\mathbf{k}),\quad \langle f^{+,-}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}\rangle = \langle f^{-,+}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}\rangle = 0, \tag{2.27}$$

или, учтя $\Lambda^+_{\mathbf{p}}\beta - \Lambda^-_{\mathbf{p}}\beta = 1$, $\mathrm{Sp}\,\Lambda^+_{\mathbf{p}}\beta = 2$, $\mathrm{Sp}\,\Lambda^-_{\mathbf{p}}\beta = -2$, имеем

$$\mathrm{Sp}\,\Lambda^+_{\mathbf{p}}\beta\hat{f} = (\Phi^+_{\mathbf{p}} - 1)\,\delta(\mathbf{k}),\qquad \mathrm{Sp}\,\Lambda^-_{\mathbf{p}}\beta\hat{f} = (\Phi^-_{\mathbf{p}} - 1)\,\delta(\mathbf{k}), \tag{2.28}$$

$$\mathrm{Sp}\,\hat{f} = \mathrm{Sp}(\Lambda^+_{\mathbf{p}}\beta - \Lambda^-_{\mathbf{p}}\beta)\,\hat{f} = (\Phi^+_{\mathbf{p}} - \Phi^-_{\mathbf{p}})\,\delta(\mathbf{k}). \tag{2.29}$$

В дальнейшем позитроны будут считаться отсутствующими ($\Phi^-_{\mathbf{p}} = 0$). Постоянные члены (2.28), т. е. —1 в правой части (2.28), отражают вакуумные ненаблюдаемые части. Они сокращаются в окончательных наблюдаемых величинах, таких как $\mathrm{Sp}\langle f\rangle$, диэлектрическая проницаемость, уравнение для Φ и т. п. Поэтому в дальнейшем в приводимых выражениях будут учитываться только члены, пропорциональные Φ_{p}, и также будут отбрасываться иногда и квадратичные по Φ_{p} члены (пренебрегая вырождением).

По сути дела, повторяя вывод (2.20), но теперь уже со спинорным оператором (2.21) и учетом соотношений (2.24), (2.26), получим

$$\langle \delta\hat{f}^{+,+}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}\delta\hat{f}^{+,+}_{\alpha'\beta',\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\rangle = \frac{1}{2}\Phi_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}(\Lambda^+_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\beta)_{\alpha\beta'}\times \\ \times(\Lambda^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\beta)_{\alpha'\beta}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\delta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}); \tag{2.30}$$

$$\langle \delta\hat{f}^{+,-}_{\alpha\beta,\mathbf{p},\mathbf{k}}\delta\hat{f}^{-,+}_{\alpha'\beta',\mathbf{p}',\mathbf{k}'}\rangle = \frac{1}{2}\Phi_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}(\Lambda^+_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}\beta)_{\alpha\beta'}\times \\ \times(\Lambda^-_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\beta)_{\alpha'\beta}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,\delta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}). \tag{2.31}$$

Другие комбинации дают нуль, если нет позитронов ($\Phi^-_{\mathbf{p}} = 0$). Флуктуации происходят и на частотах, далеких от реальных частот коллективных мод или частот фотонов, т. е. (2.31) описывают флуктуации не с реальным рождением пар, а (во многих случаях) виртуальным рождением пар. Что касается проекционных операторов в (2.30), то они вполне понятны и отражают те же свойства, что и в (2.27). Весьма существенно, что спинорные индексы у этих операторов перепутаны, что приводит к зацеплению виртуальных процессов. Релятивистски инвариантное рассмотрение флуктуации возможно и для частиц других спинов. Мы здесь не будем приводить соответствующие соотношения, чтобы не загромождать изложения (для спина нуль см., например, [18, 26]).

3. Выделение коллективных полей. Принципиальные моменты удобно выяснить на примере чисто электростатических полей. При наличии полей классическое уравнение для функции распределения частиц сорта α запишется в виде

$$\frac{\partial f^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)f^\alpha_{\mathbf{p}} + e_\alpha\left(\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)f^\alpha_{\mathbf{p}} = 0, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\sum_\alpha e_\alpha \int \frac{f^\alpha_{\mathbf{p}}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{3.2}$$

Эти уравнения получаются из уравнения Лиувилля для точной многочастичной задачи интегрированием по всем переменным, за исключением переменных заданной частицы α, обозначаемых $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$, и, таким образом, включает флуктуации частиц.

Предположим для простоты, что регулярные поля отсутствуют, т. е.

$$\mathbf{E}=\delta\mathbf{E},\ \langle\mathbf{E}\rangle=0. \tag{3.3}$$

Обсуждаемые выше флуктуации свободных частиц происходили так, как если бы эти частицы не имели заряда и не создавали полей. В действительности это не так, и через поля частицы перестают быть полностью независимыми. Однако в бесстолкновительной системе (или, точнее, в бесстолкновительном нулевом приближении) корреляции через флуктуирующие поля являются слабыми и в первом приближении справедливы соотношения предыдущего раздела. Действительно, из уравнения Пуассона (3.2) (а в общем случае из уравнений Максвелла) следует, что флуктуации числа частиц (в правой части (3.2)) автоматически вызывают и флуктуации электрических полей. Последнее в некотором смысле тривиально, если частицы имеют заряды. Но флуктуационные поля изменяют и флуктуации частиц, согласно (3.1). Оказывается, что эти дополнительные флуктуации действительно относительно малы, и критерием их малости в отсутствие коллективных полей является малость столкновений.

Но прежде всего нужно ввести коллективные поля. Проведем усреднение уравнений (3.1), (3.2) и вычтем усредненные уравнения из (3.1):

$$\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{r}}=-e_{\alpha}\left\langle\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}\right\rangle, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{div}\delta\mathbf{E}=4\pi\sum_{\alpha}e_{\alpha}\int\frac{\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}=-e_{\alpha}\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}-e_{\alpha}\left(\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}-\left\langle\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}\right\rangle\right). \tag{3.6}$$

Коллективные поля могут быть регулярными, но могут быть и случайными. Самый простой случай — это линейные коллективные поля. Но возможны и нелинейные коллективные поля, как регулярные, так и нерегулярные. Ограничимся вначале линейными случайными коллективными полями.

Введем

$$\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p},k}=\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p},k}-\frac{e_{\alpha}\delta\mathbf{E}_k}{i(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})}\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\equiv\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p},k}-\delta f^{\alpha(L)}_{\mathbf{p},k}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}+\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p}}+e_{\alpha}\delta\mathbf{E}\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}=\frac{\partial}{\partial t}\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p}}+\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p}}. \tag{3.8}$$

Тогда $\delta\mathbf{E}_k=\delta E_k\dfrac{\mathbf{k}}{k}$,

$$ik\varepsilon^{l}_{k}\delta E_k=4\pi\sum_{\alpha}e_{\alpha}\int\frac{\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p},k}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p}}+\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p}}=-e_{\alpha}\left\{\left(\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p}}+\right.$$
$$\left.+\left(\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta f^{\alpha(L)}_{\mathbf{p}}-\left\langle\left[\left(\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta\tilde{f}^{\alpha}_{\mathbf{p}}+\left(\delta\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta f^{\alpha(L)}_{\mathbf{p}}\right]\right\rangle\right\}, \tag{3.10}$$

где ε^{l}_{k} — линейная продольная диэлектрическая проницаемость, определяемая по регулярной функции распределения

$$\varepsilon^{l}_{k}=1+\frac{4\pi}{k^2}\sum_{\alpha}e^{2}_{\alpha}\int\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i0}\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{3.11}$$

Таким образом, преобразование (3.7) позволило получить уравнение для флуктуации, в котором правая часть содержит только нелинейные по $\delta\mathbf{E}$ члены (так как $\delta f^{\alpha(L)}$ пропорционально $\delta\mathbf{E}$ и в уравнение Паyссона входит $\operatorname{div}\mathbf{D}$, а не $\operatorname{div}\mathbf{E}$, как в (3.5)). Коллективное линейное поле определим как частное решение однородного уравнения (3.9):

$$\varepsilon_k^l \delta E_k^{\mathrm{w}} = 0,\quad \varepsilon_k^l = 0,\qquad \delta\mathbf{E}_k^{\mathrm{w}} = \frac{\mathbf{k}}{k}\delta E_k^{\mathrm{w}}. \tag{3.12}$$

Мы обозначим это поле δE^{w}. Важно, что оно также, как и $\delta f^{(0)}$, является решением однородного уравнения. Поскольку амплитуда поля произвольна и оно случайно, то корреляционная функция в его правой части произвольна:

$$\langle \delta E_{k,i}^{\mathrm{w}} \delta E_{k',j}^{\mathrm{w}} \rangle = \frac{k_i k_j}{k^2} |E^{\mathrm{w}}|_k^2\, \delta(k+k')\,\delta(\varepsilon_k^l)\,\frac{1}{2\pi^2}\,. \tag{3.13}$$

Это соотношение служит определением $|E^{\mathrm{w}}|_k^2$. Его целесообразно сопоставить с (2.6), где $\delta(\omega - \mathbf{kv})$, так же как и $\delta(\varepsilon_k^l)$ в (3.13) является решением однородного уравнения, $\delta(k+k')$ в обоих соотношениях является следствием однородности в пространстве и стационарности во времени. Наконец, $|E^{\mathrm{w}}|_k^2$ в (3.13) и Φ_{p} в (2.6) —произвольные функции распределения частиц и волн. Более того, для большей наглядности можно и в (3.13) ввести число квантов волн случайного поля (3.13).

Запишем энергию поля

$$W^{\mathrm{w}} = \int \frac{\omega\partial\varepsilon_k^l/\partial\omega}{8\pi} e^{i(k+k')x} \langle E_{k,i} E_{k',j} \rangle\, dk\, dk' = \int \frac{\omega_{\mathbf{k}} |E^{\mathrm{w}}|^2_{\mathbf{k},\omega=\omega_{\mathbf{k}}} d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,. \tag{3.14}$$

Здесь учтено, что

$$\delta(\varepsilon_k^l) = (\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}})) \left| \frac{\partial\varepsilon_k^l}{\partial\omega} \right|^{-1}_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}. \tag{3.15}$$

Эту энергию можно записать также через число квантов $N_{\mathbf{k}}$ (чисел заполнения) продольных волн ($\hbar = 1$)

$$W^{\mathrm{w}} = \int \frac{\omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,. \tag{3.16}$$

Таким образом,

$$|E^{\mathrm{w}}|^2_{\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}}} = N_{\mathbf{k}},\qquad |E^{\mathrm{w}}|^2_{\mathbf{k},-\omega_{\mathbf{k}}} = N_{-\mathbf{k}}, \tag{3.17}$$

и соотношение (3.13) можно записать в виде

$$\langle \delta E_{k,i}^{\mathrm{w}} \delta E_{k',j}^{\mathrm{w}} \rangle = \frac{k_i k_j}{2\pi^2 \mathbf{k}^2} \frac{N_{\mathbf{k}}\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + N_{-\mathbf{k}}\delta(\omega + \omega_{-\mathbf{k}})}{|\partial\varepsilon_k^l/\partial\omega|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} \delta(k+k'). \tag{3.18}$$

Подчеркнем еще раз, что выделение линейных коллективных полей не является единственно возможным. Если коллективные поля достаточно сильны, то, вообще говоря, нужно учитывать и их нелинейное взаимодействие. Но помимо коллективных полей (в данном рассмотрении случайных), как уже отмечалось, существуют поля, обусловленные флуктуациями частиц $\delta f^{(0)}$. Обозначим их $\delta E^{(0)}$. В простейшем случае, если в правой части фигурирует $\delta f^{(0)}$, то

$$\delta E_k^{(0)} = \frac{4\pi}{ik\varepsilon_k^l} \sum_\alpha e_\alpha \int \frac{\delta f^{(0)\alpha}_{\mathbf{p},k} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,. \tag{3.19}$$

В рамках линейного уравнения (3.9) его решение состоит из решения однородногоуравнения δE^{w} и неоднородного (3.19): $\delta E=\delta E^{w}+\delta E^{(0)}$. Подчеркнем здесь это именно в связи с предполагаемой линейностью коллективных полей.

Другим мог бы быть результат для нелинейных полей. Проиллюстрируем это качественно, выделив еще в левой части член, нелинейный по полям:

$$ik(\varepsilon_k^l+\hat{\varepsilon}_k^N\{\delta E\})\,\delta E=4\pi\sum_\alpha e_\alpha\int\frac{\delta f_{\mathbf{p}}^{(0\,\alpha}}{(2\pi)^3}\,\mathrm{d}\mathbf{p}+\ldots \tag{3.20}$$

Здесь из правой части (3.9) выделен уже некий нелинейный член, функционально зависящий от δE, и он перенесен в левую часть в виде оператора $\hat{\varepsilon}_k^N$. В правой части выписан первый член, линейный по $\delta f^{(0)}$ и не зависящий от δE, но конечно, как видно из (3.10), имеются и члены, тоже линейные по $\delta f^{(0)}$, но содержащие определенные линейные и нелинейные члены по δE.

Коллективное поле можно было бы определить как нелинейное поле, удовлетворяющее уравнению

$$\delta E^{w}[\varepsilon_k^l+\hat{\varepsilon}_k^N\{\delta E^{w}\}]=0. \tag{3.21}$$

Тогда, линеаризуя по $\delta E^{(0)}$ (3.20), будем иметь

$$\hat{L}\delta E^{(0)}=(\varepsilon_k^l+\hat{\varepsilon}_k^N\{\delta E^{w}\})\,\delta E^{(0)}+\left(\frac{\delta\hat{\varepsilon}_k^N\{\delta E\}}{\delta(\delta E)}\,\delta E^{w}\right)\delta E^{(0)}=$$
$$=4\pi\sum_\alpha e_\alpha\int\frac{f_{\mathbf{p}}^{(0)\alpha}\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{3.22}$$

Конечно, это уравнение отлично от (3.19). Оно показывает, что флуктуационные поля $\delta E^{(0)}$, обязанные флуктуациям частиц в присутствии сильных неравновесных коллективных полей, вообще говоря, видоизменяются (конечно, в правой части должны быть также учтены нелинейные по δE^{w} члены того же порядка, что и учитываемые в левой части (3.22)). В ряде случаев, однако, несмотря на то, что обратные операторы левой части (3.22) и левой части (3.11) отличны друг от друга, в окончательных результатах входят интегралы от $\delta E^{(0)}$ по $\mathbf{k}$, можно нелинейные члены в $\hat{L}^{-1}$ трактовать по теории возмущений.

Таков, например, случай слабой турбулентности коллективных нелинейных полей δE^{w}, когда, несмотря на их нелинейность (слабую), можно пользоваться теорией возмущений для флуктуационных полей $\delta E^{(0)}$ Но тогда можно исходить из (3.19) как приближенного соотношения и все нелинейные члены (3.9), (3.10) трактовать по теории возмущений. Однако в общем случае верно утверждение о том, что флуктуации полей, обязанные флуктуациям частиц, могут существенно видоизменяться коллективными полями.

Этот случай будет особо рассмотрен несколько ниже в связи с так называемым квазилинейным описанием коллективных полей. Здесь же мы напомним схему получения простейшего квазилинейного уравнения из (3.11). Подставим в (3.4) $\delta E=\delta E^{w}$, а в качестве δf используем $\delta f^{(\mathrm{L})\alpha}$ с $\delta E=\delta E^{w}$:

$$\delta f_{\mathbf{p},k}^{(\mathrm{L})\alpha}=-\frac{e_\alpha\delta\mathbf{E}_k^{w}}{i(\omega-\mathbf{kv})}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\partial\mathbf{p}}. \tag{3.23}$$

Имеем

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\partial\mathbf{r}}=e_\alpha^2\pi\int|E^{w}|_k^2\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta(\omega-\mathbf{kv})\left(\mathbf{k}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\partial\mathbf{p}}\right)\mathrm{d}k. \tag{3.24}$$

Это уравнение показывает, как $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ меняется под действием δE^{w}. Это, так же как и обсуждавшиеся выше нелинейности, должно видоизменять флуктуационные поля частиц. Это не сводится просто к изменению $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ в (2.6) с $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}=\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}(t)$, но и приводит к дополнительным электромагнитным флуктуациям, вообще говоря, квантовой природы. Имея в виду это обстоятельство, мы и привели в предыдущем разделе соответствующее обобщение формул для флуктуации частиц на квантовый случай. Аналогия между нелинейным изменением флуктуации типа тех, которые описываются (3.22), и появлением дополнительных флуктуации из-за квазилинейной временной зависимости, естественно, довольно поверхностная. Важно, что и то и другое зависит от амплитуды коллективных полей и общим является видоизменение флуктуации из-за наличия коллективных полей.

Выделение коллективных полей легко проводится и в квантовой системе. Собственно, достаточно записать уравнение для оператора $\hat{f}$ и уравнение Максвелла для потенциалов поля $\hat{A}_{\mu}$ с током $\hat{j}_{\mu}$:

$$\hat{j}_{\mu}=\sum_{\alpha}\frac{e_{\alpha}}{(2\pi)^{3}}\int \mathrm{Sp}\, i\beta\gamma_{\mu}\hat{f}_{\mathbf{p}}^{\alpha}d\,\mathbf{p}. \tag{3.25}$$

Уравнение для $\hat{f}$ для спина 1/2 получается из уравнений Дирака для операторов $\hat{\Psi}$ и определения (2.21). Имеем

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{\alpha}(t)}{\partial t}+i\beta\left(i\gamma\left(\mathbf{p}+\frac{k}{2}\right)+m\right)\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{\alpha}(t)-\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{\alpha}(t)\left(-i\gamma\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)+m\right)i\beta=$$
$$=\int d\,\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,(\hat{f}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}_2}{2},\mathbf{k}_1}^{\alpha}(t)\beta\hat{A}_{\mathbf{k}_2}(t)-\beta\hat{A}_{\mathbf{k}_2}(t)\hat{f}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}_2}{2},\mathbf{k}_1}^{\alpha}(t)); \tag{3.26}$$
$$\hat{A}_{\mathbf{k}}(t)=\gamma_{\mu}\hat{A}_{\mathbf{k},\mu}(t).$$

После того как эти уравнения записаны, можно фактически не повторять описанной процедуры, так как она та же, что и для (3.1). Коллективное поле δE^{w} мы будем везде в дальнейшем считать классическим, но во флуктуациях будем учитывать и квантовые эффекты. В простейшем случае столкновений частиц квантовые эффекты могут сказываться в выражении под знаком кулоновского логарифма, но при наличии квазилинейного взаимодействия флуктуации высшего порядка по e^2 в классическом пределе расходятся, а в квантовом — дают наблюдаемые конечные эффекты.

4. Интеграл столкновений Ландау — Балеску. Начнем рассмотрение, полностью пренебрегая коллективными полями $\delta E^{w}=0$. Тогда останутся флуктуации самих частиц. В правой части (3.4) —уравнения, описывающего усредненное распределение $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ —нужно сохранить лишь члены, квадратичные по $\delta f^{(0)}$. Из (3.9) видно, что δE уже в первом приближении линейно по $\delta f^{(0)}$. Поэтому в (3.4) можно вместо δE подставить $\delta E^{(0)}$:

$$\delta E_{k}=\delta E_{k}^{(0)}=\frac{4\pi}{ik\varepsilon_{k}^{l}}\sum_{\alpha'}e_{\alpha'}\int\frac{\delta f_{\mathbf{p}',k}^{(0)\alpha'}d\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3}}, \tag{4.1}$$
$$\delta \mathbf{E}_{k}=\frac{\mathbf{k}}{k}\delta E_{k}.$$

Что касается δf в (3.4), то согласно (3.7) линейный по $\delta f^{(0)}$ член будет равен

$$\delta f_{\mathbf{p},k}^{\alpha}=\delta f_{\mathbf{p},k}^{(0)\alpha}+\delta f_{\mathbf{p},k}^{(0)\alpha(L)}=\delta f_{\mathbf{p},k}^{(0)\alpha}+\frac{e_{\alpha}\delta\mathbf{E}_{k}^{(0)}}{i(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial\mathbf{p}}. \tag{4.2}$$

Подставляя эти выражения в (3.4), получим [18, 24]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} = -e_{\alpha}\int d k\, d k' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}-i(\omega+\omega')t}\Big\langle\Big(\delta \mathbf{E}_{k}^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\Big)\times \\
&\times\Big(\delta f_{\mathbf{p},k'}^{(0)\alpha} + \frac{e_{\alpha}\delta \mathbf{E}_{k'}^{(0)}}{i(\omega-\mathbf{kv})}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{p}}\Big)\Big\rangle = -\sum_{\alpha'} e_{\alpha}e_{\alpha'}\int\frac{d k\, d k'}{2\pi^{2} i k^{2}\varepsilon_{k}^{l}}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\Big)\times \\
&\times\Big(\langle\delta f_{\mathbf{p}',k}^{(0)\alpha}\delta f_{\mathbf{p},k'}^{(0)\alpha'}\rangle - \frac{e_{\alpha}}{2\pi^{2}\varepsilon_{k'}^{l}k'^{2}}\sum_{\alpha''} e_{\alpha''}\int d\mathbf{p}''\,\langle\delta f_{\mathbf{p}',k}^{(0)\alpha'}\delta f_{\mathbf{p}'',k'}^{(0)\alpha''}\rangle\times \\
&\times\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{p}}\Big)\Big) = -e_{\alpha}^{2}\int\frac{d k}{2\pi^{2} i k^{2}\varepsilon_{k}^{l}}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\Big)\delta(\omega-\mathbf{kv})\,\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} - \\
&-\sum_{\alpha'} e_{\alpha}^{2}e_{\alpha'}^{2}\int\frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{p}'}{i4\pi^{2}k^{4}|\varepsilon_{k}^{l}|^{2}}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\Big)\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}\,\delta(\omega-\mathbf{kv}')\,\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{p}}\Big) = \\
&= \sum_{\alpha'} 2e_{\alpha}^{2}e_{\alpha'}^{2}\int\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3}}\,\frac{d\mathbf{k}}{\mathbf{k}^{4}}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\Big)\frac{\delta(\mathbf{k}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'))}{|\varepsilon_{\mathbf{k},\mathbf{kv}}^{l}|^{2}}\Big[\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{p}}\Big) - \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}}{\partial \mathbf{p}'}\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

В последнем равенстве мы использовали соотношения

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Im}\frac{1}{\omega-\mathbf{kv}} = -\pi\delta(\omega-\mathbf{kv}), \\
\operatorname{Im}\frac{1}{\varepsilon_{k}^{l}} = -\frac{\operatorname{Im}\varepsilon_{k}^{l}}{|\varepsilon_{k}^{l}|^{2}} = \frac{4\pi^{2}}{k^{2}|\varepsilon_{k}^{l}|^{2}}\sum_{\alpha'} e_{\alpha'}^{2}\int\delta(\omega-\mathbf{kv}')\Big(\mathbf{k}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}}{\partial \mathbf{p}'}\Big)\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3}},
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

что дало соответственно первый и второй члены последнего равенства (4.3), которое есть ничто иное, как широко известный интеграл столкновений Ландау — Балеску [3] (если пренебречь ($\varepsilon^{l}-1$) в (4.3), то (4.3) —это интеграл столкновений Ландау [2]).

Таким образом, действительно, интеграл столкновений выводится в одну строку. Весь этот вывод просто квинтэссенция многочисленных исследований. Уравнение (4.3) содержит только усредненные функции распределения, которые входят не только в виде биквадратичных комбинаций, но и в экранирующий фактор $1/|\varepsilon|^{2}$. Этот фактор описывает динамическую экранировку при столкновениях. Термины «динамическая экранировка» целесообразно использовать потому, что частота ω в ε не равна нулю (что соответствовало бы дебаевскому, статическому экранированию), а равна

$$
\omega = \mathbf{kv} \tag{4.5}
$$

или при квантовом описании $\omega = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}$, что описывает закон сохранения энергии в вершине (рис. 1, 2). В другой вершине (см. рис. 2) $\omega = \varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} \approx \mathbf{kv}'$. Оба эти закона сохранения вместе дают

$$
\mathbf{kv} - \mathbf{kv}' = 0. \tag{4.6}
$$

Соотношение (4.5) не выражает собой условия излучения Вавилова — Черенкова, а дает частоту виртуального фотона. Взаимодействие в (4.3) описывается как столкновение через виртуальную продольную волну. Ее функция Грина $1/k\varepsilon_{k}^{l}$ и входит в (4.3).

Физическое же содержание (4.3) очень существенно. Оно состоит в том, что усреднение по флуктуациям приводит к концепции «одетых» частиц, которые описываются теперь усредненной функцией распределения $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$.

Учитывая, что $\mathbf{k}/k$ — это единичный вектор направления, а компонента $\mathbf{k}$, параллельная относительной скорости $k_\parallel = \mathbf{k}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')/|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|$, согласно (4.3) обращается в нуль, мы видим, что интегрирование в (4.3) сводится к интегралу по поперечным по отношению к $\mathbf{v}-\mathbf{v}'$ передаваемым импульсам $\mathbf{k}_\perp$ типа

$$\int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{k_\perp^2} = \int \frac{\pi d k_\perp^2}{k_\perp^2}, \tag{4.7}$$

который логарифмически расходится — это так называемый кулоновский логарифм. Расходимость на нижнем пределе устраняется экранировкой, т. е. $|\varepsilon^l_{\mathbf{k},\mathbf{kv}}|^2$ в (4.3), а на верхнем определяется квантовыми эффектами (если только $\hbar/mv \gg e^2/mv^2$ или $e^2/\hbar v \ll 1$). Таким образом, в области больших значений поперечных передаваемых импульсов сказывается уже квантовая природа флуктуации.

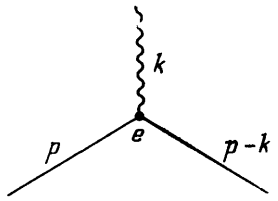

Рис 1

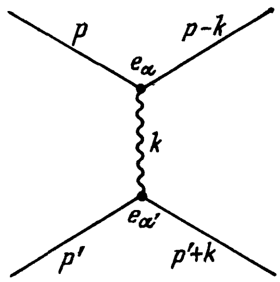

Рис. 2

Для нерелятивистских квантовых частиц можно использовать уравнение Шрёдингера в p-представлении ($\hbar = 1$)

$$i\frac{\partial \hat{\Phi}^\alpha_{\mathbf{p}}(t)}{\partial t} - \varepsilon_{\mathbf{p}}\hat{\Psi}^\alpha_{\mathbf{p}}(t) - e_\alpha \int \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}\hat{\Psi}^\alpha_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}(t)\, d\mathbf{k} = 0, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \tag{4.8}$$

и уравнение для оператора $\hat{f}^\alpha_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$, определяемого соотношением (2.11),

$$i\frac{\partial \hat{f}^\alpha_{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{\partial t} - \left(\varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\right)\hat{f}^\alpha_{\mathbf{p},\mathbf{k}} -$$

$$- e_\alpha \int d\mathbf{k}' \left(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}'}(t)\, \hat{f}^\alpha_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}'}{2},\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(t) - \hat{f}^\alpha_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}'}{2},\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(t)\, \hat{\varphi}_{\mathbf{k}'}(t)\right) = 0. \tag{4.9}$$

Это дает

$$\frac{d\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{e_\alpha}{i}\int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \left\langle \hat{\varphi}_{\mathbf{k}'}\delta\hat{f}^\alpha_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}'}{2},\mathbf{k}-\mathbf{k}'} - \delta\hat{f}^\alpha_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}'}{2},\mathbf{k}-\mathbf{k}'}\hat{\varphi}_{\mathbf{k}'} \right\rangle; \tag{4.10}$$

$$\delta\hat{f}^\alpha_{\mathbf{p},k'} = \delta\hat{f}^{(0)\alpha}_{\mathbf{p},k'} + \frac{e_\alpha \hat{\varphi}_{k'}\left(\Phi^\alpha_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}'}{2}} - \Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}'}{2}}\right)}{\omega' - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}'}{2}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}'}{2}}}, \tag{4.11}$$

$$k^2\varepsilon^l_k\hat{\varphi}^{(0)}_k = 4\pi\sum_{\alpha'} e_{\alpha'}\int \frac{\delta f^{\alpha'(0)}_{\mathbf{p},k}\, d\mathbf{p}}{(2\pi)^3},$$

$$\varepsilon^l_{\mathbf{k},\omega} = 1 + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2}\int \frac{\Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \Phi^\alpha_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}}{\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{4.12}$$

Та же процедура, что и при получении (4.3), дает

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}=\sum_{\alpha'}4e_{\alpha}^{2}e_{\alpha'}^{2}\int\frac{d\mathbf{p}'\,d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3}\mathbf{k}^{4}}\frac{(\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}\Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{\alpha}-\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\Phi_{\mathbf{p}'-\mathbf{k}}^{\alpha'})}{|\varepsilon_{\mathbf{k},\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}}^{l}|^{2}}\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}-\varepsilon_{\mathbf{p}'}+\varepsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{k}}). \tag{4.13}$$

Это выражение (после разложения по передаваемому импульсу $\mathbf{k}$) дает (4.3).

В рамках классического подхода ограничиваться взаимодействием через виртуальную продольную волну можно только для нерелятивистских частиц. Для релятивистских же частиц нужно учесть, что в полное уравнение для $\delta f^{(0)}$ входит сила Лоренца, и для флуктуирующих полей записать уравнения Максвелла с током, определяемым $\delta f^{(0)}$. Это дает интеграл столкновений Беляева — Будкера [27]

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}=\left(\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}\right)^{l}+\left(\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}\right)^{t}, \tag{4.14}$$

где $(d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}/dt)^{l}$ задается (4.3) и описывает процесс, идущий через виртуальную продольную волну, а

$$\left(\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}\right)^{t}=\sum_{\alpha'}e_{\alpha}^{2}e_{\alpha'}^{2}\int\frac{d\mathbf{p}'\,d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3}\mathbf{k}^{4}}\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^{4}\,\delta(\mathbf{k}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'))}{|k^{2}-(\mathbf{k}\mathbf{v})^{2}\,\varepsilon_{\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{v}}^{t}|^{2}}\times$$
$$\times\left[\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}\left(\mathbf{k}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial\mathbf{p}}\right)-\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\left(\mathbf{k}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}}{\partial\mathbf{p}'}\right)\right] \tag{4.15}$$

описывает процесс, идущий через виртуальную поперечную волну.

А в общем релятивистском и квантовом случае из (3.26), (3.25), (2.30), (2.31), (2.29) можно получить обобщение (4.13), (4.15) с учетом вклада процессов через виртуальную продольную и виртуальную поперечную волну. Для дальнейшего нам достаточно выписать функции Грина соответствующих волн. Для поперечной виртуальной волны они будут

$$\frac{1}{k^{2}-(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})^{2}\,\varepsilon_{\mathbf{k},\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}}^{t}},$$
$$\frac{1}{k^{2}-(\varepsilon_{\mathbf{p}}+\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})^{2}\,\varepsilon_{\mathbf{k},\varepsilon_{\mathbf{p}}+\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}}^{t}}. \tag{4.16}$$

Вторая из них соответствует процессу виртуального образования пар, а первая — в пределе больших передаваемых импульсов $\mathbf{k}$, когда $\varepsilon_{k,\varepsilon_{\mathbf{p}}-\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}}^{t}\approx 1$ может быть записана в виде

$$\frac{1}{2|\mathbf{k}|}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}-\varepsilon_{\mathbf{p}}+|\mathbf{k}|}-\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}-\varepsilon_{\mathbf{p}}+|\mathbf{k}|}\right). \tag{4.17}$$

Мы здесь привели эти соотношения с тем, чтобы показать структуру входящих функций Грина, поперечных полей, которые будут фигурировать ниже для других процессов, а также показать, что в интегралы столкновений входят процессы с виртуальным рождением пар. Важно, что получить даже выражения (4.15) по приведенной процедуре технически несложно, что иллюстрирует ее конструктивность. С другой стороны, учет квантовых эффектов —это не некоторые тонкости, как могло бы показаться; они здесь играют существенную роль. Так, с помощью (4.15) можно найти поглощение электромагнитных волн из-за столкновений путем расчета возмущений $\delta\Phi$, обязанных столкновениям и полю волны. Но прямым процессом для поглощения является тормозное излучение, максимальные частоты которого определяются для быстрых частиц исключительно квантовыми эффектами. Таким образом, в системе заряженных частиц квантовые флуктуации учитывать нужно.

Нас будет интересовать в дальнейшем вопрос об изменении флуктуации под действием коллективных полей. Мы вначале, однако, закончим с обсуждением общей картины классических флуктуации, приводящих к ясной физической модели «одетых» частиц, проявившейся в написании интеграла столкновений. Оказывается, что и для других процессов такая картина является совершенно оправданной.

5. Флуктуации и переходное рассеяние. Рассмотрим эффекты рассеяния. Пусть имеется коллективное продольное поле δE_k^{w}. Рассеянное поле тоже будем считать продольным, $\delta E_{k'}^{\text{w}}$. В теории флуктуации можно выделить процессы рассеяния, пропорциональные $|E^{\text{w}}|_k^2$, если собрать все члены, содержащие характерные для рассеяния δ-функции. В силу закона сохранения в элементарном акте рассеяния $(\hbar = 1)$

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \omega_{\mathbf{k}'}, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{p} + \mathbf{k} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}' \tag{5.2}$$

имеем δ-функцию

$$\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}'}). \tag{5.3}$$

Помимо членов, пропорциональных интенсивности поля $|E^{\text{w}}|_k^2$, в интеграле столкновений возникают и члены, пропорциональные интенсивности рассеянного поля $|E^{\text{w}}|_{k'}^2$. Они описывают индуцированное рассеяние. Можно получить все эти члены, но для иллюстрации принципиальных моментов достаточно ограничиться спонтанным рассеянием, пропорциональным интенсивности исходного рассеиваемого поля $|E^{\text{w}}|_k^2$.

Начнем с классического описания, когда (5.3) превращается в

$$\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{kv} - \omega_{\mathbf{k}'} + \mathbf{k}'\mathbf{v}) \tag{5.4}$$

и исходной является система уравнений (3.9), (3.10).

Будем считать, что для рассеиваемой волны $\{\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}\}$ не выполнено черенковское условие $\omega_{\mathbf{k}} \neq \mathbf{kv}$. Для рассеянной волны оно также должно быть не выполнено, т. е. $\omega_{\mathbf{k}'} \neq \mathbf{k}'\mathbf{v}$, так как в противном случае из (5.4) видно, что $\omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{kv}$, в противоречие со сделанным предположением. Не будем останавливаться на том, как выделить в исходном уравнении (3.4), которое мы перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} = -e_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\int dk\, dk' \left\langle \frac{\mathbf{k}}{k}\delta E_k\, \delta f_{\mathbf{p},k'}^{\alpha} \right\rangle, \tag{5.5}$$

те члены, которые оставят только: а) спонтанное рассеяние, линейное по $|E^{\text{w}}|_k^2$, б) переходное рассеяние без учета обычного томсоновского. Мы просто укажем рецепт, показывающий, что нужно учесть, чтобы получить искомый результат. Для проверки его правильности нужно убедиться в том, что все остальные члены не дают дополнительного вклада в тот процесс, которым мы интересуемся. Но это означало бы получить общий результат, что слишком громоздко. И мы это оставляем читателю. Общий результат содержит как обычное, так и переходное рассеяние и их интерференцию, а также, наряду со спонтанным, индуцированное рассеяние.

Итак, рецепт получения членов, содержащих только спонтанное переходное рассеяние, состоит в следующем:

1) в (5.5) вместо $\delta f^{\alpha}_{\mathbf{p},k'}$ нужно использовать нулевое приближение $\delta f^{(0)\alpha}_{\mathbf{p},k'}$;

2) в правой части (3.10) сохранить лишь член с $\delta f^{\alpha(L)}_{\mathbf{p}}$, т. е. (3.9) записать в виде

$$\delta E_k = \frac{4\pi}{i\omega \varepsilon^l_k} \int S_{k,k_1} (\delta E_{k_1} \delta E_{k-k_1} - \langle \delta E_{k_1} \delta E_{k-k_1} \rangle)\, \mathrm{d}k_1, \tag{5.6}$$

где

$$S_{k,k_1} = -\frac{\omega}{2kk_1 |\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|} \sum_{\beta} e^3_{\beta} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega - \mathbf{kv}} \times$$
$$\times \left\{ \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \frac{1}{\omega - \omega_1 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v}} \left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) \frac{\partial \Phi^{\beta}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \right.$$
$$\left. + \left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial \Phi^{\beta}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right) \right\}; \tag{5.7}$$

3) оставить только квадратичные комбинации $\delta f^{(0)}$ и δE^{w}_k.

Эта процедура проводится следующим образом. Соотношение (5.5) уже содержит $\delta f^{(0)}$, так что в δE нужно учесть только линейный по $\delta f^{(0)}$ член. Само $\delta f^{(0)}$ может войти только через δE (см. (3.19)). Но подставив в (5.6) одно из полей $\delta E^{(0)}$ и другое поле рассеиваемой волны δE^{w}, получим нуль в (5.5), так как $\langle \delta E^{\mathrm{w}} \rangle = 0$; необходимо проитерировать (5.6) с виртуальным полем (обозначенным δE^{v}):

$$\delta E_k = \frac{8\pi}{i\omega \varepsilon^l_k} \int S_{k,k_1} (\delta E^{\mathrm{w}}_{k_1} \delta E^{\mathrm{v}}_{k-k_1} - \langle \delta E^{\mathrm{w}}_{k_1} \delta E^{\mathrm{v}}_{k-k_1} \rangle)\, \mathrm{d}k_1, \tag{5.8}$$

где

$$\delta E^{\mathrm{v}}_{k-k_1} = \frac{8\pi}{i(\omega-\omega_1)\varepsilon^l_{k-k_1}} \times$$
$$\times \int S_{k-k_1,k_2} (\delta E^{\mathrm{w}}_{k_2} \delta E^{(0)}_{k-k_1-k_2} - \langle \delta E^{\mathrm{w}}_{k_2} \delta E^{(0)}_{k-k_1-k_2} \rangle)\, \mathrm{d}k_2; \tag{5.9}$$

4) после подстановки (5.9), (5.8) в (5.5) нужно для средних $(\delta f^{(0)})^2$ и $(\delta E^{\mathrm{w}})^2$ воспользоваться ранее полученными соотношениями (2.6) и (3.18). Наконец,

5) нужно использовать условие того, что в нелинейных откликах S_{k,k_1} отсутствуют черенковские резонансы. Используется это следующим образом. В силу (3.18) $k_2 = -k_1$, т. е. результат будет содержать S_{k,k_1} и $S_{k-k_1,-k_1}$. Последнее соотношение согласно (5.7) имеет вид

$$S_{k-k_1,-k_1} = \frac{\omega-\omega_1}{2kk_1|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|} \sum_{\beta} e^3_{\beta} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})} \times$$
$$\times \left[\left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \frac{1}{\omega - \mathbf{kv}} \left(\mathbf{k} \frac{\partial \Phi^{\beta}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right) - \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial \Phi^{\beta}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right) \right]. \tag{5.10}$$

При получении (5.10) из (5.7) при замене $k_1 \to -k_1$ ($k_1 = \{\mathbf{k}_1, \omega_1\}$) множитель $1/(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v})$ был заменен на $-1/(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v})$, что можно делать только в отсутствие резонанса $\omega_1 \neq \mathbf{k}_1\mathbf{v}$, так как при наличии резонанса $1/(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v} + i0)$ переходит в $-1/(\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v} - i0)$, т. е. меняется знак у мнимой части. С учетом сказанного и того, что как в (5.10), так и в (5.7) резонанс рассеяния не запрещен (т. е. знаменатель $1/\omega - \omega_1 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v}$ может обращаться в нуль), получим строгое соотношение

$$S_{k-k_1,-k_1} = \frac{\omega-\omega_1}{\omega} S_{k,k_1}. \tag{5.11}$$

Выводится оно следующим образом. В (5.7) производные $(\mathbf{k}_1\partial/\partial\mathbf{p})$ в первом члене и $((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\partial/\partial\mathbf{p})$ во втором берутся по частям (налево), т. е. (5.7) записывается в виде

$$\frac{S_{k,k_1}}{\omega}=\frac{1}{2kk_1|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}\sum_\beta e_\beta^3\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})^2}\left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\frac{\partial\Phi_\mathbf{p}^\beta}{\partial\mathbf{p}}\right)-(\mathbf{k}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1))\frac{1}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})^2(\omega_1-\mathbf{k}_1\mathbf{v})}\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial\Phi_\mathbf{p}^\beta}{\partial\mathbf{p}}\right)\right]\frac{1}{m}. \tag{5.12}$$

В (5.10) производные $(\mathbf{k}_1\partial/\partial\mathbf{p})$ в первом члене и $(\mathbf{k}\partial/\partial\mathbf{p})$ во втором берутся направо и результат записывается в виде

$$\frac{S_{k-k_1,-k_1}}{\omega-\omega_1}=\frac{1}{2kk_1|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|}\sum_\beta e_\beta^3\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v}}\times\right.$$
$$\times\frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})^2}\left((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\frac{\partial\Phi_\mathbf{p}^\beta}{\partial\mathbf{p}}\right)-\frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)(\omega_1-\mathbf{k}_1\mathbf{v}+\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})^2(\omega_1-\mathbf{k}_1\mathbf{v})^2}\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial\Phi_\mathbf{p}^\beta}{\partial\mathbf{p}}\right)-$$
$$\left.-\frac{m}{(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})(\omega_1-\mathbf{k}_1\mathbf{v})}\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\Phi_\mathbf{p}^\beta\right]\frac{1}{m}. \tag{5.13}$$

В первом члене (5.13) вычтен член с $(\mathbf{k}_1\partial\Phi_\mathbf{p}^\beta/\partial\mathbf{p})$ и такой же член прибавлен к остальным, после чего знаменатель $\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v}$ сокращен. Уже из (5.13) и (5.12) видна тождественность этих выражений, если в последнем члене $(\mathbf{k}\partial/\partial\mathbf{p})$ взять по частям (налево).

Для получения окончательного результата, описывающего главный процесс рассеяния, остается теперь уже только собрать все выражения, воспользовавшись (5.11) с тем, чтобы S_{k,k_1} выразить через $S_{k-k_1,-k_1}$. В получаемом выражении нужно сделать замену $k\to k-k_1$, $k_1\to -k_1$.

В результат в (5.5) войдет соотношение вида

$$\frac{S_{k,k_1}^2}{\varepsilon_{k-k_1}^2}\delta(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})\,\Phi_\mathbf{p}^\beta\frac{|E^\mathrm{w}|_{k_1}^2}{i\varepsilon_k^l} \tag{5.14}$$

(со всеми множителями оно выписано несколько ниже). Здесь же важно подчеркнуть, что в (5.14) вклад даст только $\mathrm{Im}(1/\varepsilon_k^l)$, содержащая две δ-функции:

$$\mathrm{Im}\frac{1}{\varepsilon_k^l}=-\pi\frac{\omega}{|\omega|}\delta(\varepsilon_k^l)=-\frac{\pi(\delta(\omega-\omega_\mathbf{k})-\delta(\omega+\omega_\mathbf{k}))}{|\partial\varepsilon_k^l/\partial\omega|_{\omega=\omega_\mathbf{k}}}. \tag{5.15}$$

Точно так же две δ функции содержатся в выражении для $|E^\mathrm{w}|_{k_1}^2$, пропорциональном

$$N_{\mathbf{k}_1}\delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}_1})+N_{-\mathbf{k}_1}\delta(\omega+\omega_{\mathbf{k}_1}). \tag{5.16}$$

Рассеянию будут соответствовать комбинации частот $\omega=\omega_\mathbf{k}$, $\omega_1=\omega_{\mathbf{k}_1}$ и $\omega=-\omega_\mathbf{k}$, $\omega_1=-\omega_{\mathbf{k}_1}$. Во втором случае можно сделать замену $\mathbf{k}_1\to-\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$. В результат согласно (5.14) войдет $\delta(\omega_\mathbf{k}-\omega_{\mathbf{k}_1}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})$, что как раз и есть искомая δ-функция, описывающая рассеяние. Результат также содержит

$$\frac{S_{k,k_1}^2}{\varepsilon_{k-k_1}^{l2}}+\frac{S_{-k,-k_1}^2}{\varepsilon_{k_1-k}^{l2}}=\frac{S_{k,k_1}^2}{\varepsilon_{k-k_1}^{l2}}+\frac{S_{k,k_1}^{*2}}{(\varepsilon_{k-k_1}^{l*})^2}.$$

Последнее выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{S_{k,k_1}^2}{\varepsilon_{k-k_1}^{l2}}+\frac{S_{k,k_1}^{*2}}{\varepsilon_{k-k_1}^{l*2}}=2\left|\frac{S_{k,k_1}}{\varepsilon_{k-k_1}^l}\right|^2-4\left(\mathrm{Im}\frac{S_{k,k_1}}{\varepsilon_{k-k_1}^l}\right)^2. \tag{5.17}$$

Мнимые части S_{k,k_1} и $\varepsilon^l_{k-k_1}$, входящие в последний член (5.17), содержат интеграл

$$\int d\mathbf{p}'\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v}')$$

и в силу наличия δ-функции в (5.14) будут пропорциональны $\delta((\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}'))$ и при замене $\mathbf{k}-\mathbf{k}_1\to\mathbf{k}$ — пропорциональны $\delta(\mathbf{k}(\mathbf{v}-\mathbf{v}'))$. Эта δ-функция характерна для столкновений. Поэтому члены такого типа дают поправки порядка $\langle\delta E^{w2}\rangle/8\pi nmv^2$ в интеграл столкновений.

Если собрать все члены такого вида, то их можно отнести к интегралу столкновений. Оказывается (что любопытно), что все они объединяются в интеграл прежнего вида (см. разд. 4) с Φ_{p}, в котором учтены поправки порядка $\sim|E^w|^2$. В дальнейшем поэтому надо учесть только первый член (5.17).

Стоит заметить, что при таком выводе отбрасываются также члены с индуцированным переходным излучением (см. ниже), которые также пропорциональны первой степени $N_{\mathbf{k}_1}$ (они, однако, содержат производные $\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}$, а не $\Phi_{\mathbf{p}}$, как в приводимом ниже результате (5.18)). Окончательный результат имеет вид

$$\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{r}}=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\int\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)N_{\mathbf{k}_1}32e^2_\alpha|S_{k,k_1}|^2\delta(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^2\pi\omega^2_{\mathbf{k}}|\varepsilon^l_{k-k_1}|^2(\partial\varepsilon^l_k/\partial\omega)\,\partial\varepsilon^l_{k_1}/\partial\omega_1}\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}\Bigg|_{\substack{\omega=\omega_{\mathbf{k}},\\ \omega_1=\omega_{\mathbf{k}_1}}}. \quad (5.18)$$

Этот результат удивителен в двух отношениях. Во-первых, входящие в (5.17) квадраты модуля комплексных величин интерпретируются как квадраты модуля амплитуд вероятности процесса, $(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)$ в (5.18) — как величина, пропорциональная передаваемому частицам в процессе рассеяния импульсу. Пока что нигде квантовые представления не использовались.

Если ввести вероятность переходного рассеяния $w^\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1)/\hbar$ и учесть, что по квантовым соотношениям в процессе рассеяния импульс частицы меняется на $\hbar(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)$, то легко получить формулу, описывающую изменение распределения частиц из-за спонтанного рассеяния:

$$\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{r}}=$$
$$=-\frac{1}{\hbar}\int[w^\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1)\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}-w^\alpha_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}-\hbar\mathbf{k}_1}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1)\Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}-\hbar\mathbf{k}_1}]N_{\mathbf{k}_1}d\mathbf{k}\frac{1}{(2\pi)^3}\approx$$
$$\approx-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\int(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)w^\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1)N_{\mathbf{k}_1}\frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}. \quad (5.19)$$

Приближенное неравенство (5.19) соответствует малости передаваемого импульса, когда $\hbar$ выпадает из результата. Отсюда вероятность имеет вид

$$w^\alpha_{\mathbf{p}}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1)=\frac{32e^2_\alpha|S_{k,k_1}|^2\delta(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})}{\pi\omega^2|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^2|\varepsilon^l_{k-k_1}|^2(\partial\varepsilon^l_k/\partial\omega)\,\partial\varepsilon^l_{k_1}/\partial\omega_1}\Bigg|_{\substack{\omega=\omega_{\mathbf{k}},\\ \omega_1=\omega_{\mathbf{k}_1}}}. \quad (5.20)$$

Это выражение точно совпадает с тем, которое впервые получено в [6]. Конечно, $1/\hbar$ было введено в определение вероятности. Важно то, что окончательный результат (5.18) чисто классический так же, как и (5.20).

Во вторых, весьма любопытно то, что сама нелинейная вершина S_{k,k_1} и $\varepsilon^l_{k-k_1}$ содержит мнимые части, которые возникают с $\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})$ и $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}$, т. е. соответствуют процессам рассеяния. Конечно, мы привели результат к виду, содержащему только модули S_{k,k_1} и $\varepsilon^l_{k-k_1}$, однако и без этого соответствующие выражения содержали $\operatorname{Im} S_{k,k_1}$ и $\operatorname{Im}\varepsilon_{k-k_1}$, пропорциональные $\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})$. В этом полная самосогласованность задачи — частицы и рассеиваются, и создают (отчасти потому, что рассеяние определяется не только мнимыми, но и действительными частями S_{k,k_1} и $\varepsilon^l_{k-k_1}$) при таком рассеянии самовзаимодействие, обеспечивающее рассеяние. Подчеркнем, что $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}$ в $\varepsilon^l_{k-k_1}$ и S'_{k,k_1} может описывать те же частицы, что и $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}$ в (5.19).

В этом пункте проявляется новый момент по сравнению с тем, что было известно для собственно переходного рассеяния, которое в работе [6] рассматривалось как рассеяние на пробной частице, помещенной в среду с заданной величиной диэлектрической проницаемости. Теперь распределение рассеиваемых частиц $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}$ входит как в (5.19), так и в характеристики среды S_{k,k_1} и $\varepsilon^l_{k-k_1}$. В этом смысле результат (5.20) более общий, нежели тот, который был получен в [6]. Конечно, возникают и поправки к интегралу столкновений частиц. Учет других опущенных членов в исходном уравнении дает помимо переходного рассеяния и обычное томсоновское рассеяние и их интерференцию, а окончательный результат содержит квадрат модуля полной амплитуды рассеяния.

Для того чтобы проделать эти расчеты, достаточно использовать в (5.5) выражение для поля, уточняющее соотношение (5.6). Для этого в (3.10) нужно в правой части учесть член с $\delta\tilde f$, подставив $\delta\tilde f=\delta f^{(0)}+\delta f^{(1)}$, где $\delta f^{(1)}$ задается уравнением (3.10), в которое вместо $\delta\tilde f$ подставлено $\delta f^{(0)}$. Тогда вместо (5.6) получим

$$\delta E_k=\delta E^{\mathrm{w}}_k+\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon^l_k}\int S_{k,k_1}\delta E_{k_1}\delta E_{k-k_1}\,dk_1+$$
$$+\frac{4\pi}{ik\varepsilon^l_k}\sum_\alpha e^2_\alpha\int\frac{\delta E_{k_1}d\mathbf{p}\,dk_1}{(2\pi)^3(\omega-\mathbf{kv})\,k_1}\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}+$$
$$+\frac{2\pi}{ik\varepsilon^l_k}\sum_\alpha e^3_\alpha\int\frac{\delta E_{k_1}\delta E_{k_2}dk_1\,dk_2\,d\mathbf{p}}{(2\pi)^3(\omega-\mathbf{kv})\,k_1k_2}\left(\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{1}{i(\omega-\omega_1-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v})}\left(\mathbf{k}_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\mathbf{k}_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\frac{1}{i(\omega-\omega_2-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)\mathbf{v})}\left(\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\right)\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},k-k_1-k_2}.\qquad(5.21)$$

В последнем члене можно положить δE_{k_1} и δE_{k_2} равными δE^{w}_k, а предпоследний член надо подставить во второй член и только после этого положить δE_k равными δE^{w}_k. Последний член (5.21) даст томсоновское рассеяние, а предпоследний — интерференционный член между томсоновским и переходным рассеянием.

Учет индуцированных процессов дает члены, пропорциональные $N_{\mathbf{k}}$. Конечно, проще сразу выписать окончательные выражения, содержащие полную вероятность рассеяния $w^{\mathrm{tot}}_{\mathbf{p}}$, из квантовых соображений, нежели выводить такое уравнение путем описанной процедуры усреднения ($\hbar=1$):

$$\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{r}}=-\int\{w^{\mathrm{tot}}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1)\,[(N_{\mathbf{k}}+1)N_{\mathbf{k}_1}\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}-(N_{\mathbf{k}_1}+1)N_{\mathbf{k}}\Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}}]+$$
$$+w^{\mathrm{tot}}_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1)\,[(N_{\mathbf{k}_1}+1)N_{\mathbf{k}}\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}-N_{\mathbf{k}_1}(N_{\mathbf{k}}+1)\Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}]\}\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}\frac{1}{(2\pi)^6}\approx$$

$$\approx \frac{\partial}{\partial p_i}\int N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} N_{\mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1 w_{\mathbf{p}}^{\text{tot}}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1)(k_i - k_{1,i})(k_j - k_{1,j})\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial p_j} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial p_i}\int N_{\mathbf{k}_1}(k_{1,i} - k_i)\, w_{\mathbf{p}}^{\text{tot}}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1)\frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6}\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial p_i}\int N_{\mathbf{k}}(k_i - k_{1,i})\, w_{\mathbf{p}}^{\text{tot}}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1)\frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6}\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}. \qquad (5.22)$$

При $N_{\mathbf{k}} = 0$ это уравнение совпадает с (5.19).

Теперь о квантовом обобщении полученных выше результатов. Любопытно, что квантовый расчет при помощи уравнений (4.10), (4.9) и соотношения (2.20) дает для спонтанных процессов сразу первое из соотношений (5.19), а с учетом индуцированных процессов — первое из соотношений (5.22), причем в вероятность (см. (5.20)) переходного рассеяния входят величины $\varepsilon^{l}_{k-k_1}$, задаваемая квантовой формулой (4.12) и S_{k,k_1}, задаваемая соответствующим квантовым обобщением (5.7), которое получается по теории возмущений из (4.9) (поля φ_k считаются при этом классическими, что оправдано, если их четыре-импульсы $\mathbf{k}_1$ малы $(k_1 \ll p)$, но при этом частота и импульс рассеянной волны $k = \{\mathbf{k},\ \omega\}$ произвольны). Наконец, вместо δ-функции в (5.20) входит соответствующее «квантовое обобщение» $\delta(\omega - \omega_1 - \hbar^{-1}(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}+\hbar\mathbf{k}_1}))$. Правда, в обычных условиях вероятность излучения частот ω порядка $\varepsilon_{\mathbf{p}}/\hbar$, когда необходим учет квантовых эффектов, для продольных волн весьма мала, если такой процесс вообще возможен (если $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_{pe}$, плотность плазмы должна быть очень высокой, только тогда ω_{pe} будет порядка хотя бы $mc^2/\hbar$).

Для электромагнитных (поперечных) волн это возможно. На этом пути в [28] была построена квантовая теория переходного рассеяния в электромагнитные волны и квантовая теория переходного излучения [29] (путем суммирования процессов переходного рассеяния на тех гармониках, на которые раскладывается «ступенька» диэлектрической проницаемости).

Наконец, нужно сказать об одном отброшенном при получении (5.18) члене, соответствующем $\omega_1 = -\omega_{\mathbf{k}_1}$, $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$ и $\omega = -\omega_{\mathbf{k}}$, $\omega_1 = \omega_{\mathbf{k}_1}$, который будет содержать

$$\delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} - (\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)\mathbf{v}). \qquad (5.23)$$

В общем случае его отбрасывать не нужно, он описывает процессы одновременного излучения двух квантов и их поглощение. Они в ряде случаев играют существенную роль, особенно если один из квантов низкочастотный. В отличие от (5.22) квантовое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} = -\int \{w_{\mathbf{p}}^{2\text{quant}}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1)[(N_{\mathbf{k}}+1)(N_{\mathbf{k}_1}+1)\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} -$$
$$- N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1}\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}_1-\hbar\mathbf{k}}] + w^{2\,\text{quant}}_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}+\hbar\mathbf{k}_1}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1)[N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} -$$
$$-(N_{\mathbf{k}}+1)(N_{\mathbf{k}_1}+1)\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}+\hbar\mathbf{k}_1}]\}\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1 (2\pi)^{-6}. \qquad (5.24)$$

Индуцированные процессы в классическом пределе описываются также уравнением диффузии (только вместо $(k_i - k_{1,i})(k_j - k_{1,j})$ входит $(k_i + k_{1,i})\cdot(k_j + k_{1,j})$; $\hbar^2$ компенсируется тем, что обе величины $N_{\mathbf{k}_1}$ и $N_{\mathbf{k}_2}$ пропорциональны $1/\hbar$). Для спонтанных процессов возникают тоже 2 члена с $N_{\mathbf{k}_1}$ и $N_{\mathbf{k}_2}$, содержащие $k_i + k_{1,i}$ вместо $k_i - k_{1,i}$ (или $k_{1,i} - k_i$); здесь тоже одно $\hbar$ от $k_{1,i} + k_i$ компенсируется одним N. Интересно, что появляется еще один спонтанный член, не зависящий от $N_{\mathbf{k}}$. Он уже будет иметь чисто квантовую природу даже в пределе $k \ll p$. Имеем из (5.24)

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha,\text{spont}}}{\partial t} + \mathbf{v}\,\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha,\text{spont}}}{\partial \mathbf{r}} = \hbar\,\frac{\partial}{\partial p_i}\int (k_i + k_{1,i})\, w_{\mathbf{p}}^{2\text{quant}}(\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1)\,\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\,\frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6}\,. \quad (5.25)$$

Интенсивность спонтанного излучения отдельной частицей тоже содержит $\hbar$:

$$Q = \int \hbar\,(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1})\, w_{\mathbf{p}}^{2\text{quant}}(\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1)\,\frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6}\,. \quad (5.26)$$

Внимание на это обстоятельство было обращено в [27], где содержался расчет классического предела для $w_{\mathbf{p}}^{2\text{quant}}$ вероятности двухквантового черенковского излучения и подробный анализ этого эффекта.

Здесь стоит напомнить, что исходным предположением при расчетах как рассеяния, так и двухквантового излучения было предположение о том, что одноквантовый черенковский процесс запрещен законами сохранения. Если он разрешен, то основным будет процесс квазилинейного взаимодействия, а рассеяние будет всегда малой поправкой. Это интуитивно ясно из того, что колебания частицы в поле рассеиваемой волны обычно малы, а если рассеиваемых волн много (случайное поле), то частица, переходя от одного резонанса к другому, в конечном счете проводит не много времени в поле заданной гармоники. Если же поле рассеиваемой волны монохроматично, то изменения скорости частицы из-за воздействия волны выводят ее из резонанса за конечное время. Точная теория рассеяния при наличии черепковского квазилинейного взаимодействия проводится с учетом турбулентных перенормировок, т. е. включения черенковского поля в нулевое приближение (см. [24, 31—33]).

Процессы таких перенормировок существенны в случае достаточно интенсивного рассеяния, когда вместо линейной диэлектрической проницаемости ε_k^l при выделении коллективного поля в (3.9) учитывают нелинейный отклик ε_k^N, обязанный процессам переходного рассеяния, т. е. пропорциональный $|E^{\mathrm{w}}|_{k_1}^2$. Другими словами, мы здесь имеем дело с выделением нелинейных коллективных полей [34].

Наличие виртуального поля δE_k^{v} в расчетах переходного рассеяния не случайно. Величина S_{k,k_1} описывает вершину взаимодействия трех полей (рис. 3). Она содержит две переменные k и k_1, так как третья

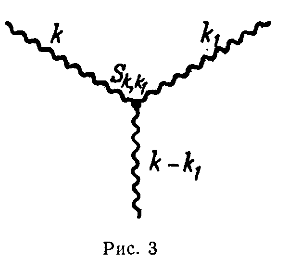

Рис. 3

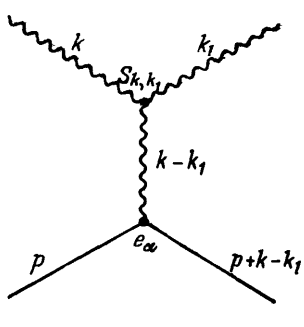

Рис. 4

однозначно определяется законами сохранения. Ее четыре-импульс равен $k—k_1$. Это поле является виртуальным, и график переходного рассеяния имеет вид, изображенный на рис. 4. Естественно, в (5.20) войдет квадрат функции Грина $1/|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|\,\varepsilon_{k-k_1}^l$. Для поперечных виртуальных волн войдет соответственно их функция Грина $[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 - (\omega - \omega_1)^2\,\varepsilon_{k-k_1}^t]^{-1}$.

6. Флуктуации и переходное тормозное излучение. Покажем, что в излучении на флуктуациях присутствует эффект, связанный с переходным рассеянием виртуальных волн в реальные (наряду с хорошо известным обычным тормозным излучением, являющимся процессом томсоновского рассеяния виртуальных волн в реальные). Соответствующий график переходного тормозного излучения имеет вид, изображенный на рис. 5. Здесь все волнистые линии могут соответствовать как продольным, так и поперечным волнам в любых комбинациях (т. е. как реальным, так и виртуальным волнам).

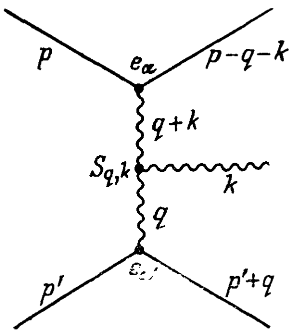

Рис. 5

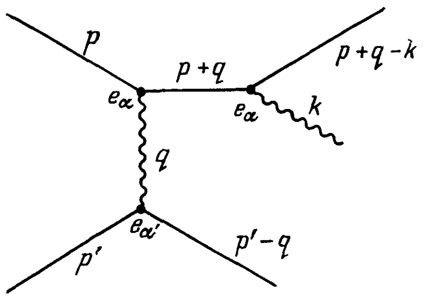

Рис. 6

Для иллюстрации принципиальных вопросов наиболее удобен случай, когда все волны продольны. Тогда можно исходить из (5.5) (т. е., (3.4) и (3.9), (3.10)). Считаем, что теперь нет коллективного поля δE_k^{w}. Поэтому соотношение (5.8) запишем для $\delta E^{(0)}$ и

$$\delta E_k = \frac{8\pi}{i\omega\varepsilon_k^l}\int S_{k,k_1}\left(\delta E_{k_1}^{(0)}\delta E_{k-k_1}^{v} - \langle \delta E_{k_1}^{(0)}\delta E_{k-k_1}^{v}\rangle\right) dk_1. \tag{6.1}$$

Ранее этот вклад отбрасывался, так как ставилась задача найти ответ, линейныйпо $|E^{\mathrm{w}}|_k^2$, но тогда δE_k^{v} было бы квадратичным по δE_k^{w} и в силу независимости усреднения по флуктуациям полей δE_k^{w} и флуктуациям частиц результат обращался бы в нуль. Фактически аргументом служил только принцип отбора эффектов так, чтобы осталась δ-функция, связанная с рассеянием. Отказываясь от этого, мы должны учесть $\delta E^{(0)}$ в (6.1). В случае, когда оба поля в (6.1) равны $\delta E^{(0)}$, результат будет нулем, так как среднее от трех полей равно нулю. Для $\delta E^{\mathrm{v}}{}_{-k_1}$ пишем теперь вместо (5.9)

$$\delta E_{k-k_1}^{\mathrm{v}} = \frac{8\pi}{i(\omega-\omega_1)\,\varepsilon_{k-k_1}^l}\int S_{k-k_1,k_2}\left(\delta E_{k_2}^{(0)}\delta E_{k-k_1-k_2}^{(0)} - \langle \delta E_{k_2}^{(0)}\delta E_{k-k_1-k_2}^{(0)}\rangle\right) d\mathrm{k}_2. \tag{6.2}$$

Дальнейшие расчеты повторяют таковые для переходного рассеяния, за исключением того, что здесь среднее значение $(\delta E^{(0)})^2$ нужно вычислить, используя только формулы (2.6) для усреднения по флуктуациям частиц. Получим

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\sum_{\alpha'}\int d\mathbf{q}\, d\mathbf{k}\, \frac{2e_\alpha^2 e_{\alpha'}^2\mathbf{q}}{\omega_{\mathbf{k}}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\,\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{q}\mathbf{v}' - (\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{v}) \times$$

$$\times \frac{|S_{\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};\mathbf{q},\mathbf{q}\mathbf{v}'}|^2}{|\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q},(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{v}}^l|^2}\,\frac{\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{|\varepsilon_{\mathbf{q},\mathbf{q}\mathbf{v}'}^l|^2\,\partial\varepsilon_k^l/\partial\omega\,|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}}\,\frac{\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha'}}{(2\pi)^3}\,d\mathbf{p}'. \tag{6.3}$$

Смысл соотношения (6.3) очевиден — это сила трения, создаваемого переходным тормозным излучением волны $\mathbf{k}, \omega$ при столкновении частиц α и α', $1/|\mathbf{k}-\mathbf{q}|\,\varepsilon^{l}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{v}}$ и $1/q\varepsilon^{l}_{\mathbf{q},\mathbf{q}\mathbf{v}'}$ соответствуют функциям Грина двух продольных виртуальных волн на рис. 5, $\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{q}\mathbf{v}'-(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{v})$ описывает закон сохранения энергии в элементарном акте переходного тормозного излучения. Аргументы в вершине S ясны также из графика рис. 5. Конечно, обе частицы α и α' равноправны, и можно, заменив обозначения $\mathbf{q}\to\mathbf{k}-\mathbf{q}$, убедиться в этом. Соотношение (6.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial t}+\mathbf{v}\,\frac{\partial\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{r}}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\sum_{\alpha'}\int d\mathbf{q}\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{p}'w^{\alpha,\alpha'}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}(\mathbf{k},\mathbf{q})\,\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}\Phi^{\alpha'}_{\mathbf{p}'}\frac{1}{(2\pi)^3}, \tag{6.4}$$

где $\omega^{\alpha,\alpha'}_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ — вероятность тормозного излучения, в точности совпадающая с выражением, найденным в [6, 7] иным образом.

Учет других членов с $\delta f^{(0)}$ (см. (5.21)) дает в классическом пределе обычное тормозное излучение (рис. 6) и его интерференцию с переходным тормозным излучением; учет поперечных волн дает весь спектр возможных тормозных процессов, а учет $|E^{\mathrm{w}}|^2_k$—индуцированных тормозных процессов. Таким образом, переходное тормозное излучение проявляется как необходимая составляющая часть объемного излучения плазмы из-за флуктуации.

7. Нулевые флуктуации в квазилинейном взаимодействии резонансных полей с частицами. Как уже отмечалось, в литературе очень много внимания уделялось процессам, связанным с рассеянием при наличии резонансных полей, или, точнее, таким нелинейным взаимодействиям, когда для всех волн приближенно выполняется резонансное условие (если оно выполнено для рассеиваемых волн, то автоматически выполнено и для рассеянных). При этом в области резонанса разложение по амплитудам волн оказалось непригодным, а все эффекты оказались поправками к квазилинейному взаимодействию, не аналитическими по $\langle(\delta E^{\mathrm{w}})^2\rangle/4\pi nT$. Теории такого рода носят названия турбулентного уширения резонанса [22]; их основная идея состоит в том, что за исходные берут уже нелинейные коллективные моды вблизи резонанса. Это и позволяет построить аналитическую теорию без разложения по $\langle(\delta E^{\mathrm{w}})^2\rangle/4\pi nT$ (правда, только внутри резонанса, (см. [32]). В таком анализе полностью пренебрегается нулевыми флуктуациями частиц $\delta f^{(0)}$ (см. п. 2). Вместе с тем, вполне резонно при использовании описанной методики, в которой интеграл столкновений последовательно раскладывается по δE и δf, поставить вопросы о влиянии флуктуации частиц $\delta f^{(0)}$ на квазилинейное взаимодействие.

Начать нужно с самой простой задачи, когда, как это часто бывает в эксперименте, число резонансных частиц $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ мало́, и искать только ответ, линейный по числу частиц $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$. При этом придется, естественно, решать уравнения для поля; войдут функции Грина продольных и, в общем случае, поперечных полей. При рассмотрении продольных полек нужно использовать соотношение (5.5). Для того чтобы получить линейное по $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ выражение, нужно в δf^{α} учесть: а) члены, пропорциональные $\delta f^{(2)}\sim\delta f^{(0)}(\delta E^{\mathrm{w}})^2$ вместе с $\delta E^{(0)}$; б) члены, пропорциональные $\delta f^{(1)}\sim\sim\delta f^{(0)}\delta E^{\mathrm{w}}$ и $(\delta f^{(0)})^2\delta E^{\mathrm{w}}$ вместе с $\delta E^{(1)}\sim\delta E^{\mathrm{w}}$ и $\delta E^{\mathrm{w}}\delta f^{(0)}$ (войдут произведения первых и вторых членов указанных разложений) и в) $\delta f^{(0)}$ вместе с $\delta E^{(2)}\sim\delta f^{(0)}(\delta E^{\mathrm{w}})^2$.

Расчет дает, что в рамках уравнения для продольных волн (5.5) все эти поправки строго компенсируются и их суммарный вклад равен нулю. Именно поэтому, по-видимому, на эффект «нулевых» флуктуаций при квазилинейном взаимодействии долгое время не обращалось внимания, так как казалось, что поперечные поправки необходимо учитывать только для релятивистских частиц, а этот случай не очень привлекал внимание (так же и интеграл столкновений с взаимодействием через виртуальную поперечную волну используется мало, поскольку он существенен для релятивистских частиц, а для них столкновения частиц между собой не столь важны).

Фактически же оказывается, что нулевые флуктуации сказываются на квазилинейном взаимодействии только при учете релятивистских эффектов и поперечных виртуальных волн (результат явно зависит от скорости света) и роль этих флуктуации в ряде случаев очень существенна.

При рассмотрении поперечных полей нужно решать уже не уравнение Пуассона, а полное уравнение Максвелла, и в интеграле столкновений типа (5.5) учесть наряду с электрическим полем член с магнитным полем (силу Лоренца). Результат оказывается при этом не равным нулю и, более того, расходящимся по волновым числам виртуальных поперечных полей. Они определяются функцией Грина

$$\frac{1}{\mathbf{q}^2-[(\mathbf{qv})^2/c^2]\,\varepsilon^t_{\mathbf{q},\mathbf{qv}}}\,. \tag{7.1}$$

В силу того, что основной вклад дают большие $\mathbf{q}$ (интеграл по $\mathbf{q}$ расходится), мы для простоты будем пренебрегать поляризационными эффектами, т. е. будем полагать $\varepsilon^t=1$. Таким образом, будем решать уравнения Максвелла в вакууме. Здесь нет необходимости выделять поперечные коллективные моды (как в § 3), так как поперечные волны будем считать отсутствующими, а резонансные поля δE^{w}_k, дающие в первом приближении квазилинейное взаимодействие, будем в рассматриваемых поправках к нему считать продольными. Функцию Грина (7.1) при $\varepsilon^t=1$ можно записать в виде (c=1)

$$\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q-\mathbf{qv}}+\frac{1}{q-\mathbf{qv}}\right), \tag{7.2}$$

а так как происходит интегрирование по всем виртуальным $\mathbf{q}$, то заменой $\mathbf{q}\to-\mathbf{q}$ можно добиться того, чтобы результат содержал

$$\frac{1}{q\,(q-\mathbf{qv})}\,. \tag{7.3}$$

Прямой чисто классический расчет дает [10, 11, 35, 36]

$$\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial t}+\mathbf{v}\,\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{r}}=\frac{\partial}{\partial p_i}\left(D^{\mathrm{ql}}_{ij}+D^{\mathrm{fl}}_{ij}\right)\frac{\partial\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}}{\partial p_j}+\frac{\partial}{\partial p_i}F^{\mathrm{fl}}_i\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}, \tag{7.4}$$

где D^{ql}_{ij} — обычный квазилинейный коэффициент диффузии (см. (3.24)):

$$D^{\mathrm{ql}}_{ij}=e^2_\alpha\int\frac{k_ik_j}{k^2}\,|E^{\mathrm{w}}|^2_k\,\delta(\omega-\mathbf{kv})\,\mathrm{d}k, \tag{7.5}$$

а «поправки», связанные с флуктуациями частиц, имеют вид

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{fl}}_{ij}=&-\frac{e^4_\alpha}{4\pi}\int\frac{|E^{\mathrm{w}}|^2_k\,dk\,d\mathbf{q}}{k^2\,(q-\mathbf{qv})}\,\delta(\omega-\mathbf{kv})\left[k_i\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(v_j-\frac{q_j\,(\mathbf{qv})}{q^2}\right)+\right.\\&\left.+k_j\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(v_i-\frac{q_i\,(\mathbf{qv})}{q^2}\right)\right]\frac{1}{q-\mathbf{qv}}-\frac{e^4_\alpha}{2\pi\varepsilon_{\mathbf{p}}}\int|E^{\mathrm{w}}|^2_k\,dk\,d\mathbf{q}\times\\&\times\frac{\delta(\omega-\mathbf{kv})}{k^2q\,(q-\mathbf{qv})^3}\{(q-\mathbf{qv})(k_i\,[\mathbf{v}\,[\mathbf{qk}]]_j+k_j\,[\mathbf{v}\,[\mathbf{qk}]]_i)+\\&+((\mathbf{kq})-(\mathbf{qv})(\mathbf{kv}))(k_i\,[\mathbf{v}\,[\mathbf{qv}]]_j+k_j\,[\mathbf{v}\,[\mathbf{qv}]]_i)\},\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$E^{\mathrm{fl}}_i=\frac{e^4_\alpha}{2\pi\varepsilon^2_{\mathbf{p}}}\int\frac{|E^{\mathrm{w}}|^2_kk_i\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{k^2q^2v^2}\,\delta(\omega-\mathbf{kv})\left(\frac{1}{2v}\ln\frac{1+v}{1-v}-1\right). \tag{7.7}$$

Величина F_i может быть также представлена в виде, содержащем функцию Грина (7.3). Поскольку, однако, в $F^{\text{п}}$ содержится интегрирование по всем $\mathbf{q}$, в (7.7) проведено усреднение по углам $\mathbf{q}$, $\mathbf{v}$.

Обращает на себя внимание то, что поправки, обязанные флуктуациям, содержат помимо диффузии еще и силу трения (как и интеграл столкновений Ландау (4.3)).

Расходимость в (7.6), (7.7) типа

$$e_\alpha^2 \int \frac{d\mathbf{q}}{q^2}$$

позволяет думать, что возникает вклад от перенормировки массы (ее части, связанной с поперечным виртуальным полем). Однако расчет указывает на то, что не только такие эффекты входят в (7.6), (7.7). Действительно, результат (7.6) содержит не равные нулю члены с $\delta E^{(1)} \sim \sim \delta E^{\text{w}} \delta f^{(0)}$, т. е. с полем, создаваемым как воздействием резонансных полей, так и нулевых флуктуаций. Они описывают видоизменение резонансных полей из-за флуктуаций частиц. Содержатся и члены, описывающие изменения флуктуаций частиц из-за наличия резонансных полей.

Такой обоюдный эффект в известной мере схож с радиационными поправками, когда частица, испустив виртуальный поперечный фотон, провзаимодействует с резонансным полем, а затем поглотит испущенный виртуальный фотон. Однако в данном случае все флуктуационные токи содержат интегралы по всем частицам, и не ясно, может ли поглотить фотон другая частица. Тогда этот эффект отличен от просто радиационных поправок к взаимодействию отдельных частиц с внешними полями. Необходим квантовый расчет с учетом перенормировок, которые корректно можно провести только в рамках релятивистской квантовой теории.

Процедура перенормировок стандартна [37, 38], а исходными могут служить уже выписанные соотношения (2.30), (2.31), которые описывают нулевые флуктуации в системе релятивистских квантовых частиц спина 1/2. В качестве уравнения для $\delta\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ нужно использовать обобщение уравнения (4.9), получаемое из уравнений Дирака для операторов $\hat{\Psi}_{\mathbf{p}}$:

$$\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t)}{\partial t} + i\beta\left(i\boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)+m\right)\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t) - \hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(t)\left(-\boldsymbol{\gamma}\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right)+m\right)i\beta =$$
$$= e\int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\left(\hat{f}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}_2}{2},\mathbf{k}_1}(t)\beta\hat{A}_{\mathbf{k}_2}(t) - \beta\hat{A}_{\mathbf{k}_2}(t)\hat{f}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}_2}{2},\mathbf{k}_1}(t)\right),$$
$$\hat{A}_{\mathbf{k}}(t) = \gamma_\mu \hat{A}_{\mathbf{k},\mu}(t); \tag{7.8}$$

$\gamma_\mu = \{\boldsymbol{\gamma}, i\beta\}$ — матрицы Дирака.

Окончательный результат, содержащий $|E^{\text{w}}|^2(\delta f^{(0)})^2$, раскладываем по $k \ll p$, считая, что резонансные поля классические и для них возможен только резонанс черенковского типа $\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \omega = 0$, но не тот, который связан с рождением пар $\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \omega \neq 0$. Окончательный результат имеет вид [11, 10, 35, 36, 39—41]

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha}{\mathrm{d}t} = \hat{I}_{\mathbf{p}}^{\text{ql}}\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha + \pi^2 e_\alpha^4 \int \frac{|E^{\text{w}}|_k^2}{k^2}\frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times\left\{R_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}}\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\left(\omega - \mathbf{k}\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^\alpha - \right.$$
$$- R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\left(\omega - \mathbf{k}\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha - \left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\left(\omega - \mathbf{k}\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}\right)\times$$
$$\left.\times\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)(R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}\Phi_{\mathbf{p}}^\alpha - R_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}}\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^\alpha)\right\}, \tag{7.9}$$

где

$$R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}} = -\frac{1}{|\mathbf{q}|}\left[\frac{\mathrm{Sp}\left(\gamma - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q}\gamma)}{\mathbf{q}^2}\right)\Lambda^{+}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\left(\gamma - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q}\gamma)}{\mathbf{q}^2}\right)\Lambda^{+}_{\mathbf{p}}\beta}{(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + |\mathbf{q}|)^2} - \frac{\mathrm{Sp}\left(\gamma - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q}\gamma)}{\mathbf{q}^2}\right)\Lambda^{-}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\left(\gamma - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q}\gamma)}{\mathbf{q}^2}\right)\Lambda^{+}_{\mathbf{p}}\beta}{(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} + |\mathbf{q}|)^2}\right], \quad (7.10)$$

$$I^{\mathrm{ql}}_{\mathbf{p}} = \pi e_\alpha^2 \int \frac{|E^{\mathrm{w}}|^2_k}{k^2}\, dk\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\delta\left(\omega - \mathbf{k}\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right), \quad (7.11)$$

а $I^{\mathrm{ql}}_{\mathbf{p}}$ — квазилинейный оператор, $\Lambda^{\pm}_{\mathbf{p}}$ — введенные выше проекционные операторы на положительные (отрицательные) энергии.

В (7.9) обращает на себя внимание то, что помимо членов, пропорциональных $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}$, входят и члены с $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$. Они, конечно, никакой перенормировки не требуют. В (7.9) уже проведена процедура перенормировки, которая привела к видоизменению как раз членов, содержащих $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}$. Легко показать, что эти члены уже не содержат расходимостей при $q \to \infty$, как было в (7.6) [12]. Стоит указать на то, что сходимость возникает только если из всех частей функции Грина в результат войдут именно те комбинации, которые выписаны в (7.10). Говоря о «частях» функции Грина, мы имеем ввиду то, что в (7.2) входит $1/(q - \mathbf{qv})$ и $1/(q + \mathbf{qv})$, которые только в неквантовом пределе сводятся к (7.3) заменой $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$. В квантовом случае могли бы войти комбинации

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + |\mathbf{q}|}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - |\mathbf{q}|},$$

причем вторая «часть» функции Грина уже не сводится к первой заменой $\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$. Кроме того, наряду с $1/(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} + |\mathbf{q}|)$ могло бы войти и выражение $1/(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{p}} - |\mathbf{q}|)$. Эти члены с «другими» частями функций Грина действительно входят во все промежуточные (довольно громоздкие) результаты, но в окончательном виде коэффициенты перед теми «частями», которые не задаются (7.10), строго равны нулю. Точно так же нулем оказываются коэффициенты перед множеством других членов типа $1/2\varepsilon_{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \pm \varepsilon_{\mathbf{p}} \pm |\mathbf{q}|)$ и т. п. Окончательный результат выражается через единственную функцию $R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}$, задаваемую выражением (7.10).

Возможность компактной записи результата в виде (7.9) и (7.10) может служить некоторым «эстетическим» критерием правильности результата.

Что касается членов с $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$, то они, естественно, не расходятся при $\mathbf{q} \to \infty$, так как при этом $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \to 0$. Такие члены явно связаны с передачей импульса (а следовательно, и энергии) от одних частиц другим. Это дает ответ на поставленный выше вопрос о поглощении виртуального фотона. Он действительно поглощается в рассматриваемой системе частиц, но не обязательно на той частице, которая его испустила. Впрочем, неразличимость частиц является необходимым следствием квантового рассмотрения. Но эффект передачи импульса от одних частиц другим является вполне наблюдаемым, в частности, большое число относительно низкоэнергичных частиц могут передать энергию малому числу (грубо, нескольким) частиц больших энергий.

Разложение по $\mathbf{q}$ в (7.9) принципиально невозможно, так как интеграл сходится только при больших $\mathbf{q}$. Можно говорить только о виде подынтегрального выражения (7.9) при малых $\mathbf{q}$. Только в этом пределе войдет $\Phi^\alpha_{\mathbf{p}}$ и ее производные (ср. с (7.6)).

Результат разложения имеет вид

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha\,\mathrm{fl}}}{dt} = -\frac{e_\alpha^4}{8\pi}\int \frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2 q}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\mathbf{q}\left\{\left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta(\omega-\mathbf{kv})\left(\mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{k}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial\mathbf{p}}\right)+\right.$$
$$+\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta(\omega-\mathbf{kv})\left(\mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{q}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial\mathbf{p}}\right)+$$
$$+\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta(\omega-\mathbf{kv})\,\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)G+$$
$$\left.+\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)G\left(\mathbf{k}\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial\mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta(\omega-\mathbf{kv})\right\}, \qquad (7.12)$$

$$G=\frac{2\,[\mathbf{qv}]^2}{q^2\,(|\mathbf{q}|-\mathbf{qv})^2}\,.$$

Это очень близко к (7.6). Точного совпадения нет, так как в (7.12) проведена перенормировка, а в (7.6) нет (и в классическом выражении (7.6) неясно, как ее вообще провести). Более точно, в классическом выражении (7.6) перенормировка не является однозначной процедурой; только в рамках квантовой электродинамики [37] эта процедура становится однозначной (она однозначна и в рамках рассматриваемой здесь квантовой кинетики). Из формул (7.12) и (7.6) можно найти корректный вид классического предела радиационно-резонансных взаимодействий с учетом перенормировок. Поэтому (7.12) является корректным выражением для подынтегрального выражения в описываемых эффектах влияния «нулевых» флуктуаций на квазилинейное взаимодействие.

Кстати, в (7.9) помимо эффектов $\delta f^{(0)}$ учтены и нулевые флуктуации электромагнитного поля. Собственно, из квантовой электродинамики известно, что это эффекты того же порядка (о доказательстве см., например, [37]).

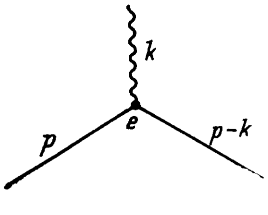

Рис. 7

Обратим внимание на то, что (7.10) содержит как раз функцию Грина поперечных виртуальных полей с учетом виртуального рождения пар (второй член (7.10)), как раз ту, квадрат которой фигурировал в квантовом релятивистском интеграле столкновений.

Последнее не удивительно, так как интеграл столкновений также описывает передачи виртуального фотона, но содержит квадрат матричного элемента, а (7.9) грубо должно соответствовать произведению матричного элемента черенковского излучения (рис. 7) и матричного элемента с излучением резо-

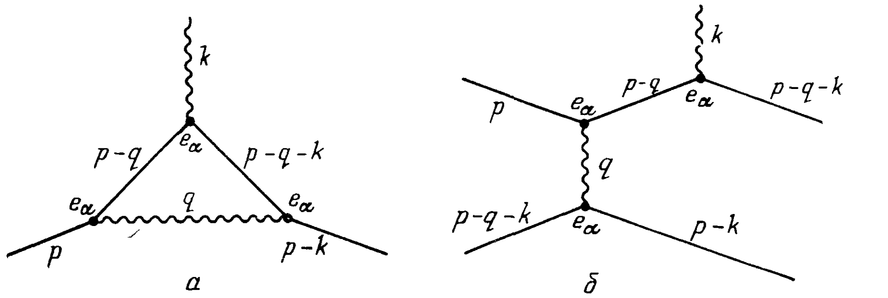

Рис. 8

нансного кванта и однократным обменом виртуальным импульсом в системе частиц (рис. 8, *а* и *б*).

Условность утверждений о каких-то произведениях матричных элементов видна из того, что флуктуации описываются только операторами, т. е. речь идет только об операторах вершин, входящих в лагранжианы, а не об их комбинациях, выстроенных графически согласно правилам S-матрицы (как на рис. 8, *а*, *б*). Величина $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ определяется как среднее по вакууму от соответствующих комбинации операторов.

Напомним, что хотя в данном процессе реального рождения пар не происходит, общее релятивистское определение $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ содержит $\mathrm{Sp} f = \mathrm{Sp}(\Lambda_{\mathbf{p}}^{+}\beta f - \Lambda_{\mathbf{p}}^{-}\beta f)$, т. е. дает разность числа частиц и античастиц, которая, естественно, сохраняется. В (7.9) также выполнено условие сохранения числа частиц.

Вводя $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, запишем (7.9) в виде

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt} = \hat{I}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}l}\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} + \pi e_{\alpha}^{2} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \{R_{\mathbf{p}',\mathbf{p}} \hat{I}_{\mathbf{p}'}^{\mathbf{q}l} \Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha} - R_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{I}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}l} \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} + \hat{I}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{q}l} (R_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} - R_{\mathbf{p}',\mathbf{p}} \Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha})\}, \tag{7.13}$$

из которого следуетсохранение $n_{\alpha} = \int \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\, d\mathbf{p}\,(2\pi)^{-3}$:

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} = 0. \tag{7.14}$$

Таким образом, коллективные эффекты сказываются и в тех процессах, которые соответствуют для отдельных частиц известным радиационным поправкам.

8. Метод S-матрицы. При рассмотрении роли флуктуаций в квазилинейном взаимодействии фактически виртуальные поля $\mathbf{q}$ фигурировали как вакуумные (величиной отличия диэлектрической проницаемости от единицы и функции Грина пренебрегалось), а продольные резонансные коллективные поля считались просто заданными (внешними). Но тогда можно рассмотреть эти задачи при помощи стандартной процедуры S-матрицы, что прольет свет на роль коллективных эффектов в (7.9) (т. е. членов с передачей импульса от одних частиц к другим).

Вводим наряду с квантованными полями классическое случайное продольное поле, описываемое потенциалом φ_k^{w} ($\delta\mathbf{E}_k^{\mathrm{w}} = -i\mathbf{k}\varphi_k^{\mathrm{w}}$). Это поле (с $k \ll p$) может удовлетворять черенковскому условию

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \omega = 0, \tag{8.1}$$

и поэтому матричный элемент S матрицы первого порядка по полю (в отличие от электромагнитных полей в вакууме) не равен нулю:

$$M_{\mathbf{k}}^{(1)} = \langle \mathbf{p} | S^{(1)}(t) | \mathbf{p} - \mathbf{k} \rangle = u_{\alpha,\mathbf{p}}^{+1,\mu'+} u_{\alpha,\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{+1,\mu} \int \varphi_{\mathbf{k},\omega}\, d\omega \int_0^t e^{-i(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})t'}\, dt'. \tag{8.2}$$

Поле φ_k включается адиабатически при $t=0$.

Вероятность черепковского излучения будет [42]:

$$w_{\mathbf{p}}^{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\mu'} \frac{d}{dt} \left\langle \left| \int_{t\to\infty} M_{\mathbf{k}}^{(1)} d\mathbf{k} \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\mu'} \int \frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2}\, dk \cdot |u_{\alpha,\mathbf{p}}^{+1,\mu'+} u_{\alpha,\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{+1,\mu}|^2 \times$$
$$\times \left\{ \exp[-i(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})t] \int_0^t \exp[i(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})t']\, dt' + \exp[i(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})t] \int_0^t \exp[-it'(\omega - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})]\, dt' \right\} =$$

$$= \int \frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2} \, dk \, \frac{\sin(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p-k}} - \omega)\, t}{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p-k}} - \omega)} \sum_{\mu,\mu'} | u_{\alpha,\mathbf{p}}^{+1,\mu'+} u_{\alpha,\mathbf{p-k}}^{+1,\mu} |^2, \tag{8.3}$$

$$dk = d\mathbf{k}\, d\omega.$$

Здесь использовано соотношение

$$\langle \varphi_k^{\mathrm{w}} \varphi_{k'}^{\mathrm{w}} \rangle = \frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2} \delta(k + k'). \tag{8.4}$$

Учтя, что

$$\frac{\sin xt}{x} \underset{t\to\infty}{\to} \pi\delta(x) \tag{8.5}$$

и

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu,\mu'} | u_{\alpha,\mathbf{p}}^{+1,\mu'+} u_{\alpha,\mathbf{p-k}}^{\mu} |^2 = \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p-k}}} (\varepsilon_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p-k}} + m^2 + (\mathbf{p}(\mathbf{p} - \mathbf{k}))) \equiv w_{\mathbf{p},\mathbf{p-k}}^{(0)}, \tag{8.6}$$

получим

$$w_{\mathbf{p}}^{\alpha} = 2\pi e_{\alpha}^2 \int \frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2} \, dk w_{\mathbf{p},\mathbf{p-k}}^{(0)} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p-k}} - \omega). \tag{8.7}$$

Дальше этого пойти в вычислениях с S-матрицей нельзя, т. е. можно либо непосредственно выводить уравнение для $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ из его определения, либо постулировать связь $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ с $w_{\mathbf{p}}$ из физических соображений. Впрочем, для квазилинейного уравнения оба пути приводят к одному и тому же результату. Запишем (постулируем) баланс прямых и обратных процессов в виде

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt} = \int w_{\mathbf{p}}^{\alpha}(\mathbf{k}) (\Phi_{\mathbf{p-k}}^{\alpha} - \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \tag{8.8}$$

где

$$w_{\mathbf{p}}^{\alpha} = \int w_{\mathbf{p}}^{\alpha}(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \tag{8.9}$$

Выражение для $w_{\mathbf{p}}^{\alpha}(\mathbf{k})$ легко записывается исходя из (8.7).

Используя (8.8) и взяв полусумму выражений с заменой $k \to -k$ (учтя $|E^{\mathrm{w}}|_{-k}^2 = |E^{\mathrm{w}}|_k^2$), получим

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt} = \pi e_{\alpha}^2 \int \frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2} \, dk \, [\delta(\varepsilon_{\mathbf{p+k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \omega)(\Phi_{\mathbf{p+k}}^{\alpha} - \Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}) w_{\mathbf{p+k},\mathbf{p}}^{(0)} - \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p-k}} - \omega)(\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} - \Phi_{\mathbf{p-k}}^{\alpha}) w_{\mathbf{p},\mathbf{p-k}}^{(0)}]. \tag{8.10}$$

Уравнение (8.10) является релятивистским квантовым обобщением квазилинейного уравнения (3.24). Оно содержит только черенковскую δ-функцию в силу того, что в (8.2) учтены только состояния с положительной энергией (состояния $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p-k}$ предполагались состояниями с положительной энергией).

Нетрудно в общем случае получить уравнение, описывающее рождение пар, когда выполняется резонанс

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p+k}} - \omega = 0. \tag{8.11}$$

Это требует, чтобы поле δE_k^{w} могло удовлетворять условию (8.11). Мы не будем выписывать соответствующие соотношения, считая, что условие (8.11) не выполнено.

Из (8.10) можно получить (3.24), используя разложение по $k \ll p$. Линейные по $\mathbf{k}$ члены обращаются в нуль в силу $|E^{\mathrm{w}}|_k^2 = |E^{\mathrm{w}}|_{-k}^2$. Первый член в фигурных скобках (8.10) отличается от второго тем, что $\mathbf{p}$ заменено на $\mathbf{p}+\mathbf{k}$, т. е. в первом приближении при разложении по $\mathbf{k}$ результат сводится к действию оператора $(\mathbf{k}\partial/\partial\mathbf{p})$ на второй член, который, в свою очередь, в первом приближении пропорционален

$$(\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} - \Phi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{\alpha}) \approx \left(\mathbf{k}\,\frac{\partial\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial\mathbf{p}}\right);$$

тогда для $w_{\mathbf{p},\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{(0)}$ можно в первом приближении пренебречь зависимостью от $\mathbf{k}: w_{\mathbf{p},\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{(0)} \approx w_{\mathbf{p},\mathbf{p}}^{(0)} = 1$. Это сразу дает уравнение (3.24).

Метод S'-матрицы имеет то преимущество, что можно использовать стандартную процедуру перенормировок. Поэтому можно найти поправки к $w_{\mathbf{p}}$, связанные с радиационными поправками (см. рис. 8, *а*).

Далее для получения уравнения для $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ приходится постулировать балансное уравнение. Для такого постулирования уже нет основания, так как при таком подходе при наличии коллектива частиц учтены только обычные радиационные поправки и теряются коллективные эффекты передачи импульса от одних частиц к другим (рис. 8, *б*). Вместе с тем, результат любопытен хотя бы в том смысле, что позволяет понять, что при этом теряется. Имеем [42]

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt} = \hat{I}_{\mathbf{p}}\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha} + $$
$$+ 2\pi^2 e_{\alpha}^4 \int \frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2}\, dk \left(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta(\omega - \mathbf{kv})\,\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}\left(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right) R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}\, d\mathbf{q}. \quad (8.12)$$

Оказалось, что в (8.12) входит та же величина $R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}$, что и в правильное выражение (7.9), и в (8.12) порядок величин тот же, что и в (7.9). Просто произошло некое «перераспределение» членов, а также (что естественно) вошла только функция $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ (но не $\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{\alpha}$ с передачей импульса другим частицам). Собственно, «такого» типа перераспределение и возникало для переходного рассеяния, когда рассеяние на шубе иона было порядка томсоновского рассеяния на электронах. Фактически рассеивали электроны, но те, которые принадлежат и шубе, поэтому и сечение рассеяния на ионе оказалось порядка томсоновского сечения на электронах. Здесь также произошло «перераспределение», но уже передаваемого импульса. Можно сказать, что все типы таких перераспределений есть следствие дальнодействия кулоновских, а в релятивистском случае и электромагнитных сил (брейтовского взаимодействия или взаимодействия токов частиц). В отношении передаваемого импульса при виртуальных процессах это вполне понятно, так как произведения матричных элементов рис. 8, *б* и рис. 7 для появления δ-функции типа (8.1) требуют, чтобы виртуальная линия частиц на рис. 8, *б* была близка к массовой поверхности, когда оставшийся график близок к графику просто взаимодействия частиц (см. рис. 2), которое является дальнодействующим. Стоит еще раз повторить, что фактически все величины при описании флуктуаций — операторные и эти аргументы носят характер только пояснения.

Кстати, дальнодействующий характер взаимодействия подтверждается непосредственно результатом (7.10). При $q \to 0$ первый член (7.8) стремится к ∞ как $1/q^3$, т. е. в интеграле по $\mathbf{q}$ основной вклад дают малые $\mathbf{q}$. В членах же с $\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha}$ величина $\mathbf{q}$ определяется разностью импульса двух частиц, отдающих и получающих импульс $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}=\mathbf{p}'-\mathbf{p}$, так же как это имеет место для обычного кулоновского или брейтовского взаимодействия. Именно то, что в членах с $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}=\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}'}$ в (7.9), (7.10) входит $R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}=R_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$, и указывает на это обстоятельство. Можно сказать, что возникновение $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}'}$ есть результат суммирования по всем возможностям получения квантов «разными» частицами распределения $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}'}$ с поглощением на одной частице с импульсом $\mathbf{p}$ (интеграл по $\mathbf{p}'=\mathbf{p}+\mathbf{q}$ или по $\mathbf{q}$ в (7.9)). Такое суммирование есть следствие теоремы сложения вероятностей.

Метод S-матрицы можно использовать и для строгого получения кинетических уравнений (7.9). Достаточно воспользоваться операторным представлением [39]

$$\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(t)=S^{+}f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(t)S \tag{8.13}$$

и найти

$$\hat{f}^{\alpha}=\Phi^{\alpha}+\delta\hat{f}^{\alpha},\quad \frac{d}{dt}\left\langle\int \mathrm{Sp}\,\hat{f}^{\alpha}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\right\rangle d\mathbf{q}=\frac{d\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}}{dt}. \tag{8.14}$$

Удобство такого рассмотрения — в использовании стандартных приемов перенормировок. В (8.13) и (8.14) все величины входят через операторы лагранжиана и в этом смысле более отчетливо выглядит сделанное выше утверждение о роли флуктуации. Фактически графики нужно строить для величины $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$, которая есть среднее по вакууму и статистическому ансамблю от определенных выше операторов.

Если $S^{(i)}$ — i-й порядок разложения S-матрицы по полю, то для получения квазилинейного уравнения достаточным является приближение

$$\frac{d\Phi^{\alpha ql}_{\mathbf{p}}}{dt}=\frac{d}{dt}\mathrm{Sp}\int\limits_{t\to\infty} d\mathbf{q}'\,(\langle\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}S^{(2)}\rangle+\langle S^{(2)+}\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}\rangle+ \\ +\langle S^{(1)+}\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}S^{(1)}\rangle). \tag{8.15}$$

Из (8.15) получается уравнение (8.10) без всяких дополнительных предположений типа уравнения баланса.

Для получения флуктуационных поправок нужно использовать приближение [42]

$$\frac{d\Phi^{\alpha fl}_{\mathbf{p}}}{dt}=\frac{d}{dt}\mathrm{Sp}\int\limits_{t\to\infty} d\mathbf{q}'\,(\langle\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}S^{(4)}\rangle+\langle S^{(4)+}\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}\rangle+ \\ +\langle S^{(1)+}\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}S^{(3)}\rangle+\langle S^{(3)+}\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}S^{(1)}\rangle+\langle S^{(2)+}\delta f^{(0)}_{\mathbf{p},\mathbf{q}'}S^{(2)}\rangle). \tag{8.16}$$

При этом следует учитывать в (8.16) только члены порядка не выше $|E^{w}|^2_k$. Это дает [39] в точности уравнения (7.9). И наконец, последнее замечание, касающееся структуры (7.9). Очевидно, что график рис. 8, *а*, имеющий две входящие линии, можно в выражении для $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ (8.14) понимать только в операторном смысле, так же как и тот, который изображен на рис. 8, *б*. На рис. 8, *а* произведено только частичное спаривание внутренних операторов. Поэтому в $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}}$ в конечном счете все концы спариваются через $\delta f^{(0)}_{\mathbf{p}}$. Оператор рис. 8, *а* соответствует определенному члену $S^{(3)}$, а график рис. 8, *б* — $S^{(1)}$, т. е. как раз содержится в (8.16) в третьем или в четвертом члене. Он и даст

$$\langle\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\gamma^{t}_{\mu}\hat{a}_{\mathbf{p}}\delta f^{(0)}_{\mathbf{p}}\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}\gamma^{t}_{\mu}\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\beta\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}}\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}}\beta\hat{a}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\rangle. \tag{8.17}$$

Операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ замыкаются через $\delta\delta f^{(0)}_{\mathbf{p}}$. Результат (8.17), естественно, пропорционален $\Phi^{\alpha}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$, т. е. описывает эффект с передачей импульса другим частицам. Существенно, что квадрат матричного элемента рис. 8, *б* содержал бы произведение $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ и $\Phi_{\mathbf{p-q}}^{\alpha}$. Произведение же графиков рис. 8, *а* и *б* должно содержать и член, линейный по $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ в силу того, что график рис. 7 содержит только одну входящую линию, т. е. либо $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ (если рис. 8, *б* дополнить таким же графиком с начальным импульсом, равным $\mathbf{p}$), либо $\Phi_{\mathbf{p-q}}^{\alpha}$.

9. Электромагнитные флуктуации в системе квазилинейно взаимодействующих частиц. Покажем, что передача импульса во флуктуациях осуществляется благодаря флуктуационным электромагнитным полям. Последнее кажется тривиальным. Однако расчет энергии флуктуаций электромагнитных полей очень высоких частот в присутствии квазилинейного взаимодействия еще с одной стороны освещает описанный коллективный эффект передачи импульса и энергии от большого числа малоэнергичных частиц к небольшому числу частиц больших (возможно, даже очень больших) энергий. Действительно, если энергия электромагнитных флуктуации в системе частиц не равна нулю и даже присутствуют флуктуаций с очень большими частотами и, кроме того, энергия таких флуктуаций зависит от времени, то эта энергия должна передаваться каким-то частицам. Говоря о флуктуациях в системе квазилинейно взаимодействующих частиц, мы будем иметь в виду, для простоты, только очень высокочастотные флуктуаци, т. е. те, для которых показатель преломления практически равен единице, и, естественно, будем говорить только о тех флуктуациях, которые пропорциональны числу квазилинейно взаимодействующих частиц (нулевые флуктуации вакуума не меняются во времени и от них не может быть взята какая-либо энергия). Энергию флуктуаций мы найдем по теории возмущений в линейном по числу частиц $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ приближении, но в общем релятивистском и квантовом случае.

Для энергии высокочастотных нолей запишем

$$W^t=\int \exp[i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}]\,\frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'}{8\pi}\left(\langle \hat{A}_{\mathbf{k}'}(t)\,\hat{A}_{\mathbf{k}}(t)\rangle\,\mathbf{k}^2+\left\langle \frac{\partial \hat{A}_{\mathbf{k}'}(t)}{\partial t}\,\frac{\partial \hat{A}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t}\right\rangle\right)-$$

$$-4\pi\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\left(\frac{\partial \hat{A}_{\mathbf{k}'}(t')}{\partial t'}\,\hat{j}_{\mathbf{k}}(t')+\hat{j}_{\mathbf{k}}(t')\,\frac{\partial \hat{A}_{\mathbf{k}'}(t')}{\partial t'}\right), \qquad (9.1)$$

здесь $\hat{A}$ — оператор векторного потенциала (кулоновская калибровка). Любой оператор равен $\langle\hat{L}\rangle=\langle S^{+}\hat{L}^{(0)}S\rangle$, где $\hat{L}^{(0)}$ — невзаимодействующий оператор. Вклад от $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ учитывается по теории возмущений. Поэтому $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ возникает как среднее от $\langle a^{+}a\rangle$ и оно даст первые поправки по числу частиц. В операторах $\hat{L}^{(0)}$, естественно, ε отсутствует, а в нулевом приближении поле A — это тюле нулевых колебаний. Результат расчета (9.1) имеет вид [41]

$$W^t=\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,\omega\,\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon^{t(+)}(\omega,\mathbf{k})+\omega\varepsilon^{t(-)}(-\omega,\mathbf{k})\right)\Big|_{\omega=|\mathbf{k}|}. \qquad (9.2)$$

Таким образом, (9.2) выражает энергию флуктуационных полей при наличии частиц (часть, не зависящая от $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$, должна быть в (9.2) отброшена — это нулевые флуктуации вакуума). Естественно, что, используя теорию возмущений, можно линейные по $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ поля выразить через вакуумные поля. Поэтому в (9.2) фигурирует подстановка $\omega=|\mathbf{k}|$.

В (9.2) входят «куски» общего выражения для диэлектрической проницаемости (учитывающей релятивистские и квантовые эффекты), которое было другими методами получено еще в [43]:

$$\varepsilon^t(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \varepsilon^{t(+)}(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon^{t(+)}(-\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon^{t(-)}(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon^{t(-)}(-\omega, \mathbf{k}), \tag{9.3}$$

где

$$\varepsilon^{t(\pm)}(\omega, \mathbf{k}) = \\ = 1 \mp \sum_\alpha \frac{\pi e_\alpha^2}{\omega^2} \int \frac{\Phi_\mathbf{p}^\alpha dp}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{Sp}\left[\Lambda_\mathbf{p}^+\left(\gamma - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\gamma)}{k^2}\right)\Lambda_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^\pm\left(\gamma - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\gamma)}{k^2}\right)\right]}{\omega - \varepsilon_\mathbf{p} \pm \varepsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}}. \tag{9.4}$$

В [43] выражение для ε^t получено методом функций Грина и в несколько иной форме. Однако легко убедиться, что оно совпадает с выражением (9.3).

Для того чтобы еще раз проверить результаты всех расчетов, можно подсчитать энергию W^t в классическом пределе в условиях, когда имеются поперечные электромагнитные волны, описываемые числом квантов $N_\mathbf{k} \gg 1$.

Получим

$$\frac{\partial W^t}{\partial t} = \int \frac{N_\mathbf{k}^t d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \frac{\partial \varepsilon^t(\omega, \mathbf{k})}{\partial t}\Bigg|_{\omega=|\mathbf{k}|}. \tag{9.5}$$

Здесь уже входит полная ε^t в виде (9.3), а не ее «куски» $\varepsilon^{t(+)}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon^{t(-)}(\omega, \mathbf{k})$. Ясно, почему в отсутствие квантов входят только «куски» ε^t: при этом квант должен вначале излучиться, а затем поглотиться, при наличии же квантов возможен и процесс поглощения с последующим испусканием.

Рассмотрим теперь, как в классическом пределе энергия (9.2) будет меняться во времени из-за наличия квазилинейного изменения $\Phi_\mathbf{p}^\alpha$ во времени. Величина W^t зависит от $\Phi_\mathbf{p}^\alpha$. Но дифференцирование W^t по времени с подстановкой $\mathrm{d}\Phi_\mathbf{p}^\alpha/\mathrm{d}t$ из квазилинейного уравнения недостаточно для описания всего эффекта.

Этот факт был установлен в нерелятивистском неквантовом пределе для случая наличия большого числа волн $N_\mathbf{k}^t \gg 1$ (с использованием классического подхода) в [44] (см. [45]). Суть здесь в том, что $\frac{dW^t}{dt}$, получаемая из (9.5), пропорциональна $N_\mathbf{k}^t$ и $|E^\mathrm{w}|_k^2$, т. е. соответствует нелинейному процессу, пропорциональному как интенсивности электромагнитных волн $\sim N_\mathbf{k}^t$, так и интенсивности резонансных продольных полей $|E^\mathrm{w}|_k^2$. Но при расчете W^t в токах $\mathbf{j}$ учитывались только члены, линейные по амплитудам электромагнитных полей; в общем случае, $\mathbf{j}$ содержат и члены нелинейные, пропорциональные как амплитуде электромагнитного поля, так и амплитуде резонансного поля. Этот дополнительный нелинейный вклад нужно также учитывать, и он совместно с тем, который получается при дифференцировании W^t по времени (с использованием квазилинейного уравнения), в сумме дает в высокочастотном пределе сохраняющие числа квантов электромагнитных волн. Покажем, как этот результат обобщается на релятивистский и квантовый случай. Запишем (9.5) в виде

$$\frac{\mathrm{d}W^{t,ql}}{\mathrm{d}t} = \int \frac{N_\mathbf{k}^t d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(-\omega \frac{\partial \varepsilon^t(\omega, \mathbf{k})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \omega}\omega^2 \frac{\partial \varepsilon^t(\omega, \mathbf{k})}{\partial t}\right)_{\omega=|\mathbf{k}|}. \tag{9.6}$$

Подставим во второй член (9.4) и для $\mathrm{d}\Phi_{p}^\alpha/\mathrm{d}t$ используем квазилинейное уравнение (3.24), а в (9.1) учтем в S-матрице нелинейные члены и сложим результаты. Оказывается, что второй член (9.6) в точности компенсируется нелинейными членами, и окончательный результат имеет вид

$$\frac{dW^{t,\mathrm{tot}}}{dt}=\frac{dW^{t,\mathrm{ql}}}{dt}+\frac{dW^{t,\mathrm{Nl}}}{dt}=\int\frac{N_{\mathbf{k}}^{t}\,d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(-\omega\,\frac{\partial\varepsilon^t(\omega,\mathbf{k})}{\partial t}\right)_{\omega=|\mathbf{k}|}. \tag{9.7}$$

Учтем, что члены с $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ рассматриваются в первом порядке теории возмущения; используем дисперсионное соотношение

$$\omega_{\mathbf{k}}^2(t)\,\varepsilon^t(\omega_{\mathbf{k}}(t),\mathbf{k},t)=\mathbf{k}^2. \tag{9.8}$$

В адиабатическом пределе

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\,\omega^2\varepsilon^t(\omega,\mathbf{k},t)\Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}\frac{d\omega_{\mathbf{k}}(t)}{dt}+\omega_{\mathbf{k}}^2(t)\,\frac{\partial\varepsilon^t(\omega_{\mathbf{k}}(t),\mathbf{k},t)}{\partial t}=0. \tag{9.9}$$

Учтя, что $\frac{d\omega_{\mathbf{k}}(t)}{dt}$ зависит от $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$, нужно в используемом приближении положить в коэффициенте перед первым членом (9.9) $\varepsilon^t=1$, а во втором члене положить $\omega_{\mathbf{k}}=|\mathbf{k}|$. Тогда $\omega_{\mathbf{k}}=|\mathbf{k}|+\delta\omega_{\mathbf{k}}(t)$,

$$\frac{d}{dt}\,\delta\omega_{\mathbf{k}}(t)=-\omega\,\frac{\partial\varepsilon^t(\omega,\mathbf{k},t)}{\partial t}\Big|_{\omega=|\mathbf{k}|}, \tag{9.10}$$

и, значит, в (9.7) энергия поля меняется лишь в той мере, в которой меняется частота, т. е. сохраняется число квантов $N_{\mathbf{k}}$.

Пусть теперь N_{-} 0. Это тот случай, который нас здесь интересует. Случай же с $N_{\mathbf{k}}\neq 0$ был рассмотрен для иллюстрации. Тогда исходным должно служить соотношение (9.2). С учетом нелинейных эффектов и перенормировки получим [41]

$$\frac{dW^{t,\mathrm{tot}}}{dt}=-\sum_{\alpha}\pi^2e_{\alpha}^4\int\frac{d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\,dk}{(2\pi)^6}\,\frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2}\,(\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-\varepsilon_{\mathbf{p}})\,R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}\times$$
$$\times\left(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})\left(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}. \tag{9.11}$$

Здесь возникло то же выражение для $R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}$, что и выше в п. 7 и 8. Легко убедиться в том, что это изменение энергии совпадает с той энергией, которую получают частицы в соответствии с первыми двумя членами уравнения (7.9). Два последних члена (7.9) дают вклад, который связывается с дополнительным изменением энергии продольных полей. Расчет такой энергии дает [41]

$$\frac{dW^t}{dt}=-\sum_{\alpha}e_{\alpha}^4\pi^2\int\frac{d\mathbf{p}\,d\mathbf{q}\,dk}{(2\pi)^6}\,\frac{|E^{\mathrm{w}}|_k^2}{k^2}\,\omega\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v})\left(\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right)\times$$
$$\times\left(R_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q}}\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}-R_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}}\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{\alpha}\right). \tag{9.12}$$

Если число низкоэнергетичных квазилинейных частиц $\Phi_{\mathbf{p}\;\mathbf{q}}^{\alpha}$ велико, а число быстрых частиц очень мало $\Phi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{\alpha}\gg\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$, то в (7.12) и (7.9) генерацию высокоэнергичных частиц можно описать первым членом уравнения

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}\simeq\pi e_{\alpha}^2\int R_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}\hat{I}_{\mathbf{p}'}^{\mathrm{ql}}\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha}\,\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. \tag{9.13}$$

Асимптотика $R_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}$ при $p\gg p'$ и $p\gg m$ даст для изотропного случая

$$R_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}=\frac{R_{\mathbf{p}'}}{p^5},$$

т. е.

$$\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}=\frac{\pi e_{\alpha}^{2}}{p^{5}}\int R_{\mathbf{p}'}\hat{I}_{\mathbf{p}'}^{\mathrm{ql}}\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha}\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3}}. \tag{9.14}$$

Величина $R_{\mathbf{p}'}$ находится конкретно. Это, однако, сейчас не столь существенно; важно, что входящий в (9.14) интеграл не зависит ни от деталей распределения резонансных полей, ни от деталей распределения частиц $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$, т. е. результат (9.14) универсален.

Получаемый в ультрарелятивистском пределе спектр по энергиям

$$\frac{d\Phi_{\varepsilon}^{\alpha}}{dt}\sim p^{2}\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{dt}\sim\frac{1}{\varepsilon^{3}},\qquad \varepsilon\approx p, \tag{9.15}$$

очень близок к наблюдаемому спектру космических лучей электронов и ионов. Более подробно эти вопросы освещались в [12, 14, 15]. Здесь же хотелось подчеркнуть, что степенной характер спектра (9.14) является прямым следствием степенной зависимости спектра энергии электромагнитных флуктуации от частоты $\omega=|\mathbf{k}|$ (см. (9.11)).

Полная энергия, переданная в быстрые частицы, невелика. Ее нельзя подсчитать из первого члена (7.9) (результат расходится на малых $\mathbf{p}$), нужно учесть и второй член (7.9). Считая распределение резонансных частиц $\mathbf{p}'$ нерелятивистским, получим ($\hbar\neq 1$, $c\neq 1$)

$$\frac{dE^{\mathrm{fl}}}{dt}=\int\frac{d\Phi_{\mathbf{p}}^{\mathrm{fl}}}{dt}\varepsilon_{p}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3}}\approx\frac{8e_{\alpha}^{2}}{3\pi\hbar c}\left(\ln 2-\frac{11}{24}\right)\frac{dE^{R}}{dt}, \tag{9.16}$$

где

$$E^{R}=\int\frac{p'^{2}}{2m}\frac{\Phi_{\mathbf{p}'}^{\alpha}d\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3}}.$$

—энергия резонансных частиц. Так как средняя энергия быстрых частиц порядка mc^2, то их концентрация в $10^{-3}v_T^2/c^2$ раз меньше концентрации резонансных частиц (v_T — их тепловая скорость). Таким образом, весь эффект порядка $e_{\alpha}^2/\hbar c$, а генерация хвоста еще меньше — порядка $e_{\alpha}^2 v_T^2/\hbar c^3$.

Коллективный эффект такого типа, связанный с передачей импульса и энергии в хвостовые частицы, однако представляется важным ввиду его универсальности и степенного характера распределения быстрых частиц по энергиям. Это распределение довольно медленно (по сравнению с экспонентой) падает с энергией, и можно ожидать проявления наблюдаемых эффектов, связанных с ухудшением удержания плазмы, токами увлечения и т. п. [13].

Наконец, следует сказать о теории измерений применительно к описанию частиц при помощи использованных уравнений. Величина $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ имеет вполне однозначный и измеряемый смысл средней величины числа заполнения, во всяком случае, это особенно прозрачно для невзаимодействующих частиц. При наличии взаимодействия соответствующим обобщением служит $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}=\int \mathrm{Sp}\,\langle\hat{f}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{\alpha}\rangle\,d\mathbf{k}$. Важно, однако, что после взаимодействия $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ для свободных частиц приобретает прежний смысл. В этом отношении появление ускоренных частиц после квазилинейного взаимодействия, действующего конечный промежуток времени, является совершенно ясным и однозначным предсказанием. Что касается $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ в течение самого взаимодействия с резонансным полем, то теория квантовых измерений для такого случая не развивалась, и это дело будущего.

10. Заключение. Все описанное говорит о том, что коллектив частиц — такой, как разреженная плазма, ведет себя совсем по-иному, нежели отдельные частицы. Это сказывается в радикальном изменении сечений процессов, объединении частиц в комплексы типа частица+ + шуба, передаче энергии другим частицам. Корректное описание всех процессов, как нам кажется, вряд ли возможно на пути другом, чем учет флуктуаций, как это и было продемонстрировано.

Важно, что фактически возникающие графики соответствуют определенным разложениям по зарядам и полям (но не разложенного по e^2n в переходном рассеянии и переходном тормозном излучении). Возможность такого разложения обязана тому, что плазма— это система слабо взаимодействующих частиц, и такая теория разложения по флуктуационным и коллективным полям адекватна задаче. Подчеркнем, что все результаты годятся для сильно неравновесной плазмы с произвольными распределениями частиц $\Phi_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ и коллективных полей $|E^{\mathrm{w}}|_k^2$.

Конечно, все результаты могли бы быть получены в методе функций Грина [46]. Однако обобщение соответствующих уравнений Келдыша [46, 47] на релятивистский и квантовый случай громоздко и вряд ли использование графической техники здесь дает многое для пояснения физики дела, хотя с математической точки зрения этот ход был бы более элегантным. Здесь избран более простой способ изложения материала.

Наконец, в условиях теплового равновесия можно, конечно, использовать стандартную мацубаровскую технику [48, 49], при этом любопытно, как модифицируются вклады от нелинейных вершин, связанных с переходным рассеянием и переходным тормозным излучением (уже тепловых флуктуаций). Насколько нам известно, такой переформулировкой мацубаровской техники функций Грина пока интересовались мало.

Подчеркнем, что усреднение по флуктуациям приводит к новой наглядной картине системы заряженных частиц; она для процессов излучения рассеяния и столкновений как бы состоит из «нейтральных атомов», окруженных динамически поляризующимися оболочками; причем как электроны, так и ионы имеют такие оболочки, и число «одетых» частиц (электронов и ионов) равно полному их числу в системе. В процессах рассеяния и тормозного излучения на тяжелых частицах существенную роль может играть поляризация этих оболочек (переходное рассеяние и переходное тормозное излучение), однако импульс отдачи получает рассеивающая ими излучающая «центральная частица», точнее, «одетая» частица как целое. Именно из-за этого ионы в плазме могут рассеивать волны с сечением порядка томсоновского сечения рассеяния для электронов в вакууме. Точно так же в радиационных эффектах передача импульса и энергии может осуществляться к «другой» частице, и радиационные эффекты в системе заряженных частиц тем самым существенно отличаются от таковых в вакууме для отдельных заряженных частиц во внешних полях. В этом проявление коллективных процессов в системе многих заряженных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.: Гостехиздат, 1946.
2. Ландау Л. Д.//ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203.
3. Белеску Р. Статистическая механика заряженных частиц.— М.: Мир, 1967.
4. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов.— М.: Наука, 1971.
5. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.//ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 1818.
6. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние.— М.: Наука, 1984.
7. Цытович В. Н.//Тр. ФИАН СССР. 1973. Т. 66. С. 191.

8 Акопян А В, Цытович В Н//Физика плазмы **1975** Т 1 С 673
9 Акопян А В, Цытович В Н//ЖЭТФ **1977** Т 71 С 1616
10 Цытович В Н//ЖЭТФ **1984** Т 87 С 1105
[11] Tsytovich V N//Phys Scripta **1982** V T2/1 P 54, Phys Rep **1989** V 178. P 261
12 Tsytovich V N//Ibidem V T 2/2 P 562
13 Цытович В Н Наблюдательные проявления радиационно ускоренных частиц: Препринт ИОФАН СССР № 85 — Москва, 1987
14 Tsytovich V N//Proceedings of Course and Workshop on Plasma Astrophysics. ESA SP 207 — Varenna, Italy, 1984 — P 141
15 Tsytovich V N//Proceedings of Joint Varenna Abastumany School and Workshop on Plasma Astrophysics — Sukhumi GSSR 1986 — P 217
16 Климонтович Ю Л Статистическая теория неравновесных процессов в плазме — М Изд во Моск ун та 1969
17 Климонтович Ю Л Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы — М Наука, 1976
18 Ситенко А Г Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме — Киев· Наукова думка, 1977
19 Гайлитис А К, Цытович В Н//ЖЭТФ **1964** Т 46 С 1726
20 Гайлитис А К, Цытович В Н//Ibidem Т **47** С 1469
[21] Цытович В Н Нелинейные эффекты в плазме — М Наука, 1967
22 Цытович В Н Теория турбулентной плазмы — М Наука, 1971
23 Гинзбург В Л Теоретическая физика и астрофизика — М Наука, 1981
24 Кадомцев Б Б//Вопросы теории плазмы — М Атомиздат, 1964 — Т **4** С 205
25 Ландау Л Д, Лифшиц Е М Статистическая физика — М Наука, 1964. С 419
26 Цытович В Н Квантовая теория радиационных эффектов при стохастическом ускорении частиц — Препринт ФИАН СССР № 235 — Москва 1983
27 Беляев С Т, Будкер Г И//ДАН СССР 1956 Т 107 С 807.
28 Хорев А Б, Цытович В Н//ЖЭТФ **1985** Т 89 С 1134
29 Хорев А Б, Цытович В Н//Изв вузов СССР Сер «Радиофизика» **1986.** Т 29 С 662
30 Франк И М, Цытович В Н//ЯФ **1980** Т 31 С 974
[31] Dupree T H//Phys Fluids **1966** V 9 P 1773
32 Rudakov L I, Tsytovich V N//Plasma Phys **1971** V 13 P 213
33 Рудаков Л И, Цытович В Н Теория сильного взаимодействия частиц и волн в турбулентной плазме — Препринт ФИАН СССР № 28 — Москва, 1970
34 Ситенко А Г//Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике — Киев Наукова думка 1983 — Ч 1 С 427
35 Цытович В Н//Ibidem — Ч 2 С 334
36 Tsytovich V N//Physica **1982** V 31 P 317
37 Ахиезер А И, Берестецкий В Б Квантовая электродинамика — М Гостехиздат, 1953
38 Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П Релятивистская квантовая теория Ч 1 — М Наука, 1968
39 Tsytovich V N//Proceedings of ICPP Kiev, 1987 — P. 231.
40 Tsytovich V N//Proceedings of the XVIII IGPIG: Contributed papers — Swansee UK: Univ Colledge 1987 — V 2. P 300
[41] Цытович В Н Радиационные поправки к затуханию **Ландау.— Препринт** ИОФАН СССР, № 56 — Москва, 1987
42 Цытович В Н Радиационная релятивистская квантовая кинетика заряженных частиц — Препринт ИОФАН СССР, № 90 — Москва, 1987
43 Цытович В Н//ЖЭТФ **1961** Т 40 С 1775
44 Исаков С Б, Кривитский В С, Цытович В Н ЖЭТФ **1986.** Т 90 С 933
45 Isakov S B, Krivitsky V S, Tsytovich V N//[40] — V. 2 P 252.
46 Келдыш Л В//ЖЭТФ **1964.** Т 47 С 1515
47 Лифшиц Е М, Питаевский Л П Физическая кинетика — М Наука, 1979
48 Бонч-Бруевич В Л, Тябликов С В Метод функций Грина в статистической механике — М Физматгиз, 1961
49 Фрадкин Е С//ЖЭТФ **1964** Т 38 С 157.