

537.622.5

# МАГНИТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ВО ФРУСТРИРОВАННЫХ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ С ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКОЙ

*Р. С. Гехт*

(Институт физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР, Красноярск)

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	261
2. Несоразмерные состояния в треугольных антиферромагнетиках, обусловленные дипольным взаимодействием . . . . .	264
2.1. Неустойчивость конической точки в треугольном антиферромагнетике $RbFeCl_3$ . Фазы с двойной несоразмерной структурой. 2.2. Фазовые и амплитудные модуляции. Коллективные моды в $RbFeCl_3$ . 2.3. Индуцированные внешним полем синусоидальные фазы в соединениях типа $RbFeCl_3(CsNiF_3, CsFeCl_3, CsCuCl_3)$ .	
3. Состояния типа плоской спирали и треугольные сверхструктуры . . . . .	273
3.1. Спиральные конфигурации в галоидных соединениях переходных металлов и в соединениях типа $\beta$ -фазы твердого кислорода. 3.2. Треугольные доменные сверхструктуры. Частично неупорядоченные состояния в $CsCoCl_3, CsCoBr_3$ .	
4. Фазовые переходы в двумерных фрустрированных антиферромагнетиках. . . . .	281
4.1. Фазовая диаграмма для изинговских спинов на треугольной решетке. 4.2. Фазовые переходы в гейзенберговских антиферромагнетиках на треугольной решетке (анизотропный и предельный изотропный случаи). 4.3. Фазы в треугольном планарном антиферромагнетике.	
5. Заключение . . . . .	293
Список литературы . . . . .	294

**1. Введение.** В настоящее время хорошо известно, что эффекты фрустраций играют важную роль в различных магнитных системах. В частности, антиферромагнетики с треугольной решеткой являются типичным примером таких фрустрированных спиновых систем. Проведенные недавно экспериментальные и теоретические исследования позволили установить, что они во многом проявляют свойства, отличные от соответствующих нефрустрированных моделей. Это отличие отражается прежде всего в богатом разнообразии фаз и фазовых переходов, что обусловлено сильным вырождением и потому высокой чувствительностью рассматриваемых систем к различного рода возмущающим взаимодействиям.

Так, в треугольном антиферромагнетике  $RbFeCl_3$  из тепловых и магнитных измерений [1], а также и из нейтронографических исследований [2] обнаружено, что вместо непосредственного перехода из парафазы в соразмерную реализуется переход через две промежуточные по температуре несоразмерные фазы. Более того, в этих чрезвычайно интересных наблюдениях обнаружена новая несоразмерная структура, у которой периоды двух компонент намагниченности несоизмеримы как

по отношению к периоду решетки, так и по отношению друг к другу. Как было указано Шибой [3], несоразмерные фазы в фрустрированном антиферромагнетике  $\text{RbFeCl}_3$  возникают за счет нового механизма, реализуемого вследствие неустойчивости конической точки из-за слабого дипольного взаимодействия. Во внешнем магнитном поле [4–6] неустойчивость конической точки может быть индуцирована даже в таких треугольных магнетиках, как  $\text{CsNiF}_3$ ,  $\text{CsFeCl}_3$ ,  $\text{CsCuCl}_3$ , где при  $H=0$  либо не наблюдаются несоразмерные фазы, либо они возникают за счет другого механизма [7, 8].

В других веществах — галоидных соединениях переходных металлов [10, 11] — в отличие от предыдущих экспериментально наблюдается увеличение периода модулированной фазы с возрастанием температуры  $T$  и переход в соразмерное промежуточное состояние. При этом точка перехода между разными упорядоченными состояниями может изменяться в широком интервале  $T$  как за счет давления [12], так и за счет частичного замещения одних немагнитных ионов другими [13]. Связанный с генерацией высших гармоник нелинейный механизм изменения волнового вектора структуры с  $T$  в этих веществах не реализуется, в то же время для них становится важным учет тепловых ренормировок обменных констант [14], которые и приводят к возрастанию периода мод с температурой [15].

В антиферромагнетиках с ромбоэдрической решеткой фрустрации возможны как в плоскости, так и в третьем направлении. Если фрустрации существуют одновременно во всех трех направлениях, то в таких системах (как, например,  $\beta$  — фаза твердого кислорода) становится возможным возникновение спиральных структур, непрерывно вырожденных как по направлению волнового вектора, так и по его величине [48, 49].

В изинговских фрустрированных антиферромагнетиках  $\text{CsCoCl}_3$ ,  $\text{CsCoBr}_3$  аномалии физических величин возникают в двух температурных точках [16, 17]. Вычисления, проведенные для них в рамках приближения среднего поля [18], а также кластерным вариационным методом [19], показывают, что в промежуточном состоянии одна из трех магнитных подрешеток не упорядочена. Вместе с тем методом Монте-Карло найдено, что такие частично неупорядоченные состояния описываются модой со случайно изменяющейся в пространстве и во времени фазой [20, 21]. Данными результатами можно объяснить наблюдаемые в  $\text{CsCoCl}_3$  заметные флуктуации во времени магнитной структуры [16].

В изингоподобных гейзенберговских антиферромагнетиках связь между поперечными компонентами спинов стимулирует упорядочение магнитных подрешеток. Поэтому с понижением температуры в таких соединениях происходит упорядочение продольных компонент спинов всех трех подрешеток. Кроме того, по мере дальнейшего понижения температуры становится возможным дополнительное упорядочение поперечных компонент [44]. При этом интересно, что в предельном случае  $T=0$  существует нетривиальное вырождение основного состояния: углы между магнитными подрешетками трехподрешеточной структуры могут меняться, сохраняя, однако, отличный от нуля (и вырожденный по направлению) полный момент, причем данное состояние не нарушается даже линейными возбуждениями.

В изотропных и XY-подобных антиферромагнетиках углы между подрешетками фиксированы и составляют 120 градусов. Соединения, где реализуются 120-градусные структуры, известны давно [23, 24]. Тем не менее целый ряд новых и интересных результатов, полученных в последнее время, для таких (с чрезвычайно простым фундаментальным взаимодействием) систем не нашли еще своего отражения в каких-либо обзорах. Свойства фаз и характер процесса упорядочения в них во многом необычен, как, например, в двумерных фрустрированных антифер-

ромагнетиках с гейзенберговскими или ХУ-спинами. Так, в изотропном гейзенберговском антиферромагнетике фазовый переход возникает даже при нулевом внешнем поле, однако в низкотемпературной фазе, аналогично высокотемпературной, спиновые корреляции спадают экспоненциально. Для того чтобы качественно различать эти две фазы, Кавамура и Мияшита [22] ввели так называемую вихревую функцию, являющуюся аналогом петли Вильсона в проблеме кварк-конфайнмента в решеточной калибровочной теории [29, 30]. Интересные экспериментальные данные относительно таких систем получены недавно [31–34] для серий соединений  $VX_2$  ( $X = Cl, Br, I$ ). В треугольных ХУ-антиферромагнетиках наряду с непрерывной дополнительно реализуется двукратная дискретная симметрия. Тем не менее в таких системах при нулевом внешнем поле практически реализуется единственный непрерывный переход, поскольку взаимодействие двух возможных типов топологических дефектов — стенок и вихрей — приводит к слиянию (или, по крайней мере, к чрезвычайной близости) критических точек, которым соответствуют изинговский и Березинского — Костерлица — Таулеса переходы.

В фрустрированных антиферромагнетиках со спином  $S=1/2$  весьма существенны квантовые эффекты. Еще в 1973 г. Андерсон показал [45], что для гейзенберговских антиферромагнетиков возможно существование магнитной квантовой жидкости, основное состояние которой может быть описано ансамблем случайно распределенных синглетных пар на треугольной решетке. Недавние экспериментальные исследования на образце  $NaTiO_2$  подтверждают [46] отсутствие упорядоченных состояний и фазовых переходов в системах с  $S=1/2$ . Вместе с тем в изингоподобных гейзенберговских антиферромагнетиках ( $S=1/2$ ) найдены в определенном интервале внешних полей спиновые конфигурации, аналогичные классическим [47], а в ХУ-антиферромагнетиках — степенное спадание корреляционной функции при  $T=0$  [36].

Благодаря экспериментальным и теоретическим работам последнего времени стали понятны многие интересные и неожиданные свойства рассматриваемых здесь систем, отличительная особенность которых — высокая чувствительность из-за эффектов фрустраций к типу взаимодействия. В данном обзоре мы рассмотрим сначала возможные структуры и поведение спектра коллективных мод в системах с дипольным взаимодействием (раздел 2). К веществам, промежуточные фазы которых могут быть описаны в терминах неустойчивости конической точки, относятся соединения  $AFCl_3$  ( $A = Rb, Cs, Tl, NH_4$ ); в таких веществах треугольные решетки образованы из ферромагнитных цепочек, причем обменное взаимодействие внутри них гораздо сильнее, чем (антиферромагнитное) между ними. Вместе с тем неустойчивость симметричной точки может реализоваться и в веществах, образованных из антиферромагнитных цепочек. Однако, в отличие от первых, дипольное взаимодействие теперь на порядок меньше [56], поэтому температурные области несоизмеримых фаз (если они вообще существуют) будут значительно уже. В разделе 2 подробно рассматриваются возможные фазы соединений  $RbFeCl_3$ ,  $CsFeCl_3$ , а также соединений, изоморфных им, —  $CsNiF_3$ ,  $CsCuCl_3$ .

Затем в разделе 3 обсуждаются фрустрированные антиферромагнетики, в которых реализуется состояние с плоской спиралью. В ромбоэдрических антиферромагнетиках типа  $NiBr_2$  состояние с плоской спиралью возникает только в области низких температур, в то время как в промежуточном интервале температур существует соразмерное антиферромагнитное состояние. В других же ромбоэдрических соединениях (типа  $\beta-O_2$ ) соразмерное промежуточное состояние отсутствует и состояние с плоской спиралью существует во всем температурном интервале ниже точки перехода из парафазы. При этом в промежуточном

интервале температур образуется непрерывно вырожденное состояние с неэквивалентными спиралями, а в области низких температур, где существенны квантовые флуктуации,— состояние с фиксированным волновым вектором спирали [37]. Там же в разделе 3 изучаются изинговские фрустрированные антиферромагнетики при наличии дополнительных обменных взаимодействий между следующими за ближайшими спинами:  $\text{CsCoCl}_3$ ,  $\text{CsCoBr}_3$ . Наряду с другими состояниями в изинговских фрустрированных системах возможны состояния с треугольной сверхструктурой [51].

Далее, в разделе 4 рассматриваются переходы со всеми возможными нарушениями симметрии в двумерных треугольных антиферромагнетиках. К последним можно отнести как гейзенберговские магнетики типа  $\text{VCl}_2$  с  $S = 3/2$ , так и магнитные вещества  $\text{NaTiO}_2$ ,  $\text{LiNiO}_2$  с  $S = 1/2$ . Все они характеризуются крайне слабым межплоскостным обменным взаимодействием. Результаты теоретических исследований сравниваются также с имеющимися экспериментальными данными для планарного квазидвумерного антиферромагнетика  $\text{CsMnBr}_3$  [111]. В конце обзора (раздел 5) кратко обсуждены возможные перспективы дальнейших исследований.

## 2. Несоразмерные состояния в треугольных антиферромагнетиках, обусловленные дипольным взаимодействием.

**2.1. Неустойчивость конической точки в треугольном антиферромагнетике  $\text{RbFeCl}_3$ . Фазы с двойной несоразмерной структурой.** Несоразмерные магнитные структуры обычно возникают в кристаллах, в которых либо реализуется конкуренция положительных и отрицательных связей между ближайшими и следующими за ними спинами, либо симметрия решетки допускает существование инвариантов Лифшица в разложении свободной энергии [7, 8]. Однако на фрустрированных треугольных решетках возможно образование модулированных фаз за счет нового механизма, тесно связанного с вырождением конической точки  $K$  зоны Бриллюэна [52]. В фрустрированных антиферромагнетиках типа  $\text{RbFeCl}_3$  снятие вырождения в симметричной точке  $K$  оказывается возможным благодаря дипольному взаимодействию [3]. В результате возникают не только простые несоразмерные фазы, но и фазы с необычной двойной несоразмерной структурой, экспериментально наблюдаемые в  $\text{RbFeCl}_3$  [1, 2].

Гексагональный магнетик  $\text{RbFeCl}_3$  имеет кристаллическую структуру, симметрия которой принадлежит пространственной группе  $D_{6h}^4$ . Магнитные ионы с  $XU$ -подобными спинами ( $\text{Fe}^{2+}$ ) расположены на линейных цепочках вдоль  $c$ -оси и образуют треугольную решетку. Вдоль цепочек этих соединений реализуется обменная ферромагнитная связь  $J_0$ , а между ними — более слабая антиферромагнитная  $J_1$ . Антиферромагнитное взаимодействие на треугольной решетке приводит к возникновению 120-градусной структуры, состоящей из трех магнитных подрешеток (рис. 1, *a*). С учетом же дипольных сил, даже когда они значительно меньше обменных  $J_0$  и  $J_1$ , данная структура при температуре перехода из парафазы  $T_1$  не образуется: вместо нее в промежуточном интервале  $T$  возникают совершенно другие спиновые конфигурации.

Действительно, ниже точки неустойчивости  $T_1$  волновому вектору  $\mathbf{Q}$  конденсируемой моды отвечает наименьшее собственное значение фурье-компоненты межцепочечного обменного и дипольного взаимодействий

$$A_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) = J(\mathbf{Q})\delta_{\alpha\beta} + D_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}); \quad (2.1)$$

здесь

$$J(\mathbf{Q}) = -2J_1 [\cos(\mathbf{Q}\mathbf{a}) + \cos(\mathbf{Q}\mathbf{b}) + \cos(\mathbf{Q}(\mathbf{a} - \mathbf{b}))] \quad (J_1 < 0), \quad (2.2)$$

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) = (g\mu_B)^2 \sum_{i,j} \left( \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_{ij}^3} - 3 \frac{R_{ij}^\alpha R_{ij}^\beta}{R_{ij}^5} \right) \exp(i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ij}),$$

где  $\mathbf{a} = a(1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b} = a(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$  — элементарные векторы трансляций в базисной плоскости гексагональной решетки. Минимум функции  $J(\mathbf{Q})$  достигается в точке  $K$  пространства обратной решетки, которой

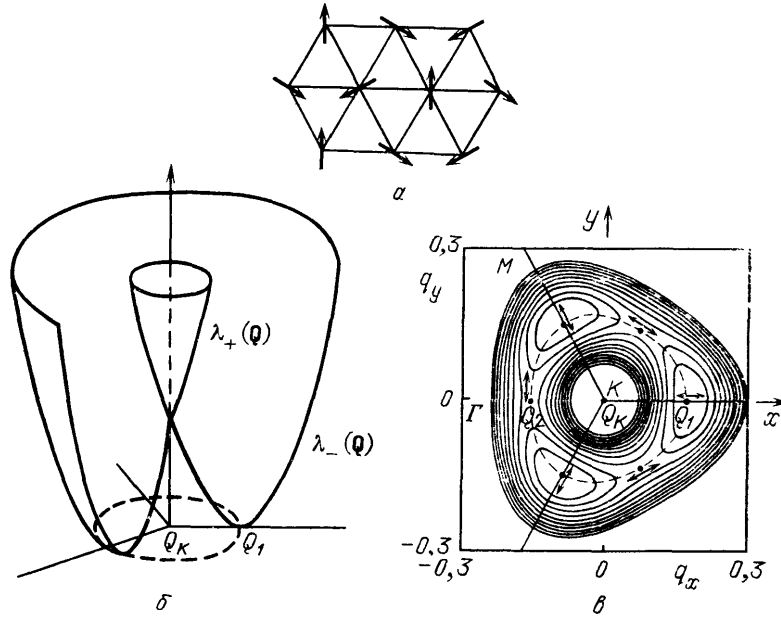


Рис. 1. а — Основное состояние в треугольном антиферромагнетике: 120-градусная структура. б — Собственные значения  $\lambda_{\pm}(\mathbf{Q})$  потенциальной поверхности в окрестности симметричной точки  $\mathbf{Q}_K$ . в — Эквипотенциальные линии  $\lambda_{-}(\mathbf{Q})$ ;  $\mathbf{Q}_1$  и две другие эквивалентные точки соответствуют минимальному значению  $\lambda_{-}(\mathbf{Q})$ . Стрелки вдоль контура со штриховой линией показывают поляризацию спинов [56]

соответствует  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_K \equiv (4\pi/3a, 0, 0)$ . В противоположность  $J(\mathbf{Q})$  вычисления для дипольного тензора  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{Q})$ , проведенные методом Эвальда [53], показывают, что он после разложения в ряд вблизи точки  $K$  содержит члены, линейные по  $\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_K$ :

$$D_{xx} = \gamma_a(\xi - \eta q_x), \quad D_{xy} = \gamma_a \eta q_y \quad (2.3)$$

( $\gamma_a = (g\mu_B)^2/a^3$ ,  $\xi$  и  $\eta$  — численные константы, зависящие от решеточных постоянных  $c$ ,  $a$ ;  $D_{yy}$  отличается от  $D_{xx}$  изменением знака перед членом с  $q_x$ ). Поэтому наименьшее собственное значение  $\lambda_{-}(\mathbf{Q})$  матрицы  $A_{\alpha\beta}(\mathbf{Q})$  будет локализовано не при  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_K$ , а в окрестности точки  $K$ . Собственные значения  $\lambda_{\pm}(\mathbf{Q})$  матрицы (2.1) представлены на рис. 1, б: две потенциальные поверхности  $\lambda_{+}$  и  $\lambda_{-}$  пересекаются в конической точке  $K^*$ . На рис. 1, в показаны эквипотенциальные линии нижней ветви около точки  $K$ , а также спиновая поляризация вдоль контура со штриховой линией. Минимумы  $\lambda_{-}(\mathbf{Q})$  находятся в трех эквивалентных точках [56] со значением  $Q = Q_1$ , где собственные векторы поляризованы параллель-

\*) Структура такой поверхности подобна потенциальной поверхности двукратно вырожденных состояний в эффекте Яна — Теллера [54, 55].

но волновым векторам типа  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_k$ . Точки минимумов отделены друг от друга барьером, максимальное значение которого достигается в седловых точках со значением  $q_2 = |\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_k|$ . В последних, наоборот, собственные векторы поляризованы ортогонально векторам типа  $\mathbf{q}_2$ . Наличие таких особенностей в спектре  $\lambda_-(\mathbf{Q})$  приводит не только к тому, что ниже точки неустойчивости симметричной фазы  $T_1$  становится возможным образование продольной волны модуляции с  $\mathbf{q}_1$ , но становится возможным и образование дополнительной поперечной волны с  $\mathbf{q}_2$  при более низких температурах, когда значение среднего момента достигает достаточно большой величины.

С возрастанием отношения  $\gamma_d/|J_1|$  местоположение  $Q_4$  на рис. 1,  $\theta$  сдвигается от точки  $K$  к точке  $M$ , которой соответствует антипараллельная ориентация спинов.

Рассмотрим последовательные фазовые переходы, используя разложение Ландау для свободной энергии с точностью до членов четвертого порядка по намагниченности  $M_\alpha$  ( $\alpha = x, y$ ):

$$F = \int d\mathbf{R} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_\alpha(\mathbf{R}) a_{\alpha\beta} (-i\nabla) M_\beta(\mathbf{R}) + b \left( \sum_{\alpha} M_\alpha^2(\mathbf{R}) \right)^2 \right] \quad (b > 0). \quad (2.4)$$

Поскольку при  $\gamma_d \ll |J'|$  волновой вектор лежит в окрестности точки  $K$ , удобно выразить  $M_\alpha$  в виде

$$M_\alpha(\mathbf{R}) = \psi_\alpha(\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{Q}_k \mathbf{R}) + \text{к. с.}, \quad (2.5)$$

где комплексные величины  $\psi_\alpha$  — компоненты параметра порядка. После подстановки (2.5) в (2.4) свободная энергия представляется в терминах  $\psi_\alpha$  следующим образом [56]:

$$F = \int d\mathbf{R} \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \psi_\alpha^* a_{\alpha\beta} (\mathbf{Q}_k - i\nabla) \psi_\beta + b [4(|\psi_x|^2 + |\psi_y|^2)^2 + \right. \\ \left. + 2(\psi_x^2 + \psi_y^2)^* (\psi_x^2 + \psi_y^2)] \right\}, \quad (2.6)$$

где  $a_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) = A_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) + \alpha T \delta_{\alpha\beta}$  — тензор обратной восприимчивости ( $\alpha > 0$ ). Анализ возможных структур на основе (2.6) показывает, что по мере понижения температуры возникают последовательные фазовые переходы в три различных состояния. Прежде всего в точке неустойчивости парафазы  $T_1$  возникает частично упорядоченное состояние с одной компонентой спина

$$\psi_x^0(x) = \varphi_0 \exp(iq_1^0 x), \quad |\varphi_0| = [\alpha(T_1 - T)(12b)^{-1}]^{1/2}, \quad (2.7)$$

$$q_1^0 = \frac{2}{3} \frac{\gamma_d \eta}{|J_1|}.$$

При более низких температурах — ниже точки  $T_2$  — термодинамически устойчивому состоянию отвечает такое состояние, когда уже обе компоненты спина упорядочены. В этом случае одновременно с продольной волной модуляции существует и поперечная  $\psi_y^0 = \varphi_y^{(0)} \exp(iq_2^0 x)$ , где

$$|\varphi_y^{(0)}|^2 = -[3a_{yy}(\mathbf{Q}_2) - 2a_{xx}(\mathbf{Q}_1)](20b)^{-1}. \quad (2.8)$$

(Амплитуда  $\varphi_x^{(0)}$  у продольной волны  $\psi_x^0 = \varphi_x^{(0)} \exp(iq_1^0 x)$  получается после замены в (2.8) нижних индексов  $x, y$  и 1, 2 соответственно на  $y, x$  и 2, 1.) В состоянии с  $q_1^0$  и  $q_2^0$  две проекции спина имеют различные периоды, несоизмеримые как по отношению к периоду решетки, так и по отношению друг к другу. Данный тип магнитного упорядочения является новым и отражает анизотропный характер дипольного взаимодействия (наряду,

конечно, с тем, что двойная несоразмерная структура не могла бы существовать в принципе, если бы дипольные силы не стимулировали неустойчивость конической точки).

При еще более низких температурах, когда достигается критическая точка  $T_3$ , происходит, наконец, переход в соразмерное 120-градусное состояние; в этом трехподрешеточном состоянии комплексные амплитуды связаны соотношением  $\psi_y^0 = \pm i\psi_x^0$ .

Согласно данным нейтронографических исследований [2]  $\text{RbFeCl}_3$  имеет три фазовых перехода при 2,5, 2,35 и 1,95 К, причем спиновые поляризации двух несоразмерных структур согласуются с теорией. При 2,5 К экспериментальные значения  $q_1 = q_1^0$  для продольной волны модуляции составляют [2]  $0,16 \text{ \AA}^{-1}$ , а значения  $q_2 = q_2^0$  для поперечной волны равны [2]  $0,11 \text{ \AA}^{-1}$  при  $T=2,3 \text{ К}$ . Эти результаты близки к теоретическим [3]:  $q_1^0 = 2\eta\gamma_d/3|J_1| = 0,18 \text{ \AA}^{-1}$  (здесь использовано, что  $\gamma_d = 0,027 \text{ К}$ ,  $J_1 = -0,5 \text{ К}$ ,  $\eta = 5$ ) и  $q_2^0 = 0,15 \text{ \AA}^{-1}$ .

**2.2. Фазовые и амплитудные модуляции.** Коллективные моды в  $\text{RbFeCl}_3$ . В промежуточном состоянии, когда упорядочена только одна компонента спина, период продольной волны модуляции, а также ее синусоидальная форма не меняются с понижением температуры. Однако после перехода в состояние, в котором упорядочены обе компоненты спина, экспериментально наблюдается в  $\text{RbFeCl}_3$  температурная зависимость волновых векторов мод [2]. Механизм, ответственный за тепловые изменения, обусловлен взаимодействием продольной и поперечной волн, в результате чего дополнительно понижается свободная энергия. Нелинейная связь в (2.6) — перекрестные члены  $(\psi_x^0 \psi_y^{0*})^2$  и  $(\psi_x^{0*} \psi_y^0)^2$  — приводит с возрастанием интенсивности индуцируемых гармоник к изменению чисто синусоидальной структуры в солитонную. Возникающие конфигурации будут характеризоваться не только пространственным изменением фазы, но, вообще говоря, и пространственным изменением амплитуды нелинейной волны [73].

Общее решение уравнений, получаемых при варьировании  $F$ , может быть получено аналогично [57—59], где исследовались генерируемые внешним полем или одноосной анизотропией высшие гармоники несоразмерных магнитных структур. В температурном интервале  $T_3 < T \leq T_2$  это решение имеет следующий вид [73]:

$$\psi_x^0(x) = e^{iq_1 x} \Phi_x^0(x), \quad \psi_y^0(x) = e^{-iq_2 x} \Phi_y^0(x), \quad (2.9)$$

$$\Phi_\alpha^0(x) = \sum_{m=-N}^N \varphi_\alpha^{(m)} \exp[-2mi(q_1 + q_2)x],$$

где амплитуды гармоник  $\varphi_\alpha^{(m)}$  и волновые векторы  $q_1$  и  $q_2$  определяются минимизацией  $F$ :

$$\varphi_x^{(1)} = -\frac{4b\varphi_y^{(0)*}\varphi_x^{(0)*}}{a_{xx}(2Q_2 - Q_1)}, \quad \dots, \quad \varphi_x^{(m)} \sim \varphi_y^{(0)*}\varphi_x^{(m-1)*}, \quad (2.10)$$

$$q_1 = q_1^0 - (q_1^0 - q_2^0) \frac{2|\varphi_x^{(1)}|^2 + 4|\varphi_y^{(1)}|^2}{|\varphi_x^{(0)}|^2} - \dots$$

Аналогичные выражения для  $\varphi_y^{(m)}$  и  $q_2$  получаются после замены в (2.10) нижних индексов  $x, y$  и  $1, 2$  соответственно на  $y, x$  и  $2, 1$ . С понижением температуры значения волновых векторов  $q_1$  и  $q_2$ , как и в эксперименте [2], уменьшаются, причем более быстро, если дипольные силы возраста-

ют. На рис. 2 представлены фаза и амплитуда продольной волны  $\Phi_x^0(x)$  при  $\delta_1 \equiv q_1/q_1^0 = 0,5$ . Зависимость фазы от пространственной координаты  $x$  характеризуется ступенчатой функцией и аналогична зависимости для других физических систем [60—65]. В данном случае доменные стенки (солитоны) обусловлены как изменением фазы, так и изменением амплитуды. Последняя в области доменных стенок уменьшается после маленького всплеска. В области самих доменов реализуется практически соразмерное состояние.

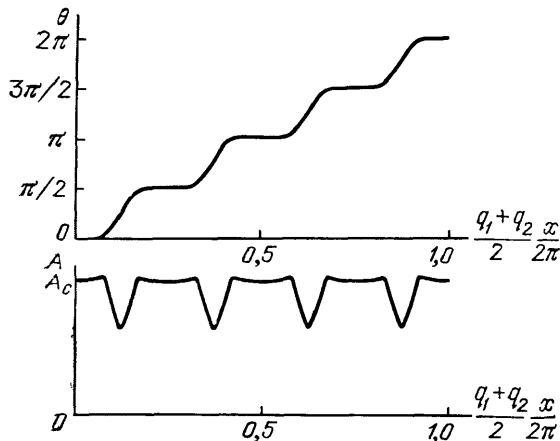


Рис. 2. Пространственная зависимость фазы и амплитуды продольной волны модуляции  $\Phi_x^0(x) = A(x) \exp[i\theta(x)]$  при  $\delta_1 \equiv q_1/q_1^0 = 0,5$  ( $A_c$  — амплитуда, соответствующая соразмерному 120-градусному состоянию)

Период волны, определяемый расстоянием между доменными стенками, равен  $\pi/(q_1 + q_2)$ . Аналогичный солитонный вид имеют фаза и амплитуда поперечной волны  $\Phi_y(x)$ .

Рассмотрим температурную зависимость коллективных мод для двух различных несоразмерных состояний. Поскольку вблизи точки фазового перехода модуль вектора локального магнитного момента не сохраняется, динамические свойства системы будут определяться не только прецессией, но и колебательным движением [80, 81].

Вклад последнего вида движения может привести в результате к появлению новых ветвей в спектре коллективных мод (для случая антиферромагнитного однородного резонанса см. [80, 81], а для спиральных структур — [66]). В выражении для кинетической энергии  $K$  колебательная и прецессионная части описываются соответственно квадратичными и линейными членами по  $\dot{\xi}_\alpha$  [81], где  $\xi_\alpha(\mathbf{R}, t) = \psi_\alpha(\mathbf{R}, t) - \psi_\alpha^0(\mathbf{R})$  — малые отклонения от равновесных состояний, зависящие от пространственных координат и времени. Однако в пределе сильной анизотропии прецессионное движение подавляется [66]. Поэтому ясно, что оно будет подавлено и в  $\text{RbFeCl}_3$  из-за планарности спинов ( $XY$ -подобные спины), так что поведение коллективных мод будет определяться колебательным движением, кинетическая энергия которого дается просто в виде

$$K = \mu \int d\mathbf{R} (|\dot{\xi}_x|^2 + |\dot{\xi}_y|^2),$$

где  $\mu$  — эффективная масса флуктуаций при колебаниях. Динамическое поведение величин  $\xi_\alpha$  описывается на основе комплексно сопряженных уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\xi}_\alpha^*} - \frac{\delta L}{\delta \xi_\alpha^*} = 0, \quad (2.11)$$

где  $L = K - F$  — функция Лагранжа.

В температурном интервале  $T_2 < T < T_1$ , где несоразмерная структура задается только одной компонентой ( $\psi_x^0(x) = \varphi_0 \exp(iq_1^0 x)$ ), отличной от нуля, уравнения Лагранжа (2.11) имеют следующий вид [73]:

$$\mu \dot{\xi}_\alpha + \sum_\beta a_{\alpha\beta} (\mathbf{Q}_k - i\tilde{\nu}) \xi_\beta + 4b(3 - 2\delta_{y\alpha}) \varphi_0^2 e^{2iq_1^0 x} \xi_\alpha^* + + 8b(3 - 2\delta_{y\alpha}) |\varphi_0|^2 \xi_\alpha = 0. \quad (2.12)$$



Уравнения (2.12) содержат периодический коэффициент при  $\xi_\alpha^*$  (или при  $\xi_\alpha$  во второй паре уравнений, комплексно сопряженных (2.12)), который, однако, исчезает, если использовать преобразование  $\xi_\alpha \rightarrow \xi_\alpha \exp(iq_1^0 x)$ . После перехода к фурье-компонентам  $\xi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$  в уравнениях типа (2.12) выражения для четырех собственных частот легко находят при  $k_y = 0$ , что соответствует равенству нулю и недиагональных компонент  $a_{xy}$  в (2.12). Так что в результате уравнения для продольных  $\xi_x$ ,  $\xi_x^*$  и поперечных  $\xi_y$ ,  $\xi_y^*$  компонент флуктуации расщепляются.

Спектр коллективных мод для чисто синусоидальных состояний  $\psi_x^0(x)$  представлен на рис. 3, а. Частотный спектр  $\omega(\mathbf{k})$ , где  $\mathbf{k} =$

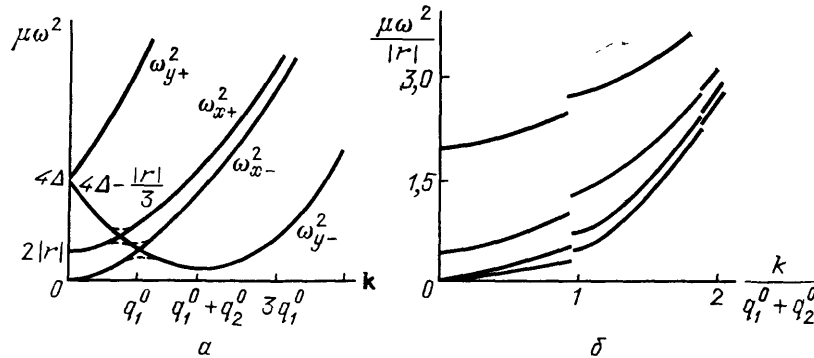


Рис. 3. Спектр коллективных мод. а — Для чисто синусоидальной несоразмерной структуры, когда упорядочена только одна из компонент спина (сплошные линии соответствуют частотам с различными значениями  $k_x$  при  $k_y = 0$ , штриховые — при  $k_y \neq 0$ );  $\Delta \equiv \lambda_-(\mathbf{Q}_k) - \lambda_-(\mathbf{Q}_1) = (\eta\gamma_1)^2/3|J_1|$  — глубина потенциальной ямы. б — Для двойной несоразмерной структуры с одновременным упорядочением обеих компонент спина при значениях  $\delta_1 \approx \delta_2 = 0,97$

$= \mathbf{Q} - (\mathbf{Q}_k + \mathbf{q}_1^0)$ , не содержит разрывов. Вследствие инвариантности относительно произвольного изменения начальной фазы в  $\psi_x^0(x) = |\varphi_0| \exp(iq_1^0 x + \alpha)$  возбуждение одной из ветвей продольных компонент ( $\omega_{x-}^2$ ) в окрестности  $k_x = 0$  является фазоном: в точке  $k_x = 0$  частота ветви  $\omega_{x-}^2$  остается равной нулю (голдстоуновская мода) во всем температурном интервале, в котором существует равновесное состояние с продольной волной модуляции  $\psi_x^0(x)$ . Частоты другой ветви ( $\omega_{x+}^2$ ) возрастают при понижении температуры (амплитудонная мода [67, 68]). С увеличением  $k_x$  обе эти ветви пересекаются с фазовой (мягкой) модой  $\omega_{y-}^2$  поперечных компонент  $\xi_y$ ,  $\xi_y^*$ . В точке  $k_x = q_1^0 + q_2^0$  (т. е. при  $Q_x = Q_k - q_2^0$  исходной системы координат) мягкая мода становится неустойчивой, когда  $T = T_2$ : в этом случае дополнительно конденсируется поперечная волна модуляции  $\psi_y^0(x)$ .

В новом состоянии с двойной несоразмерной структурой спектр мод является зонным, содержащим разрывы на волновых векторах  $k_x = n(q_1 + q_2)$ , и обусловлен тем, что уравнения Лагранжа (2.11) содержат теперь неустраняемый периодический коэффициент в преобразованных уравнениях, т. е. в уравнениях [73] с заменой  $\xi_x \rightarrow \xi_x e^{iq_1 x}$ ,  $\xi_y \rightarrow \xi_y e^{-iq_2 x}$ . Эта ситуация напоминает системы, в которых модуляция однородного состояния возникает за счет конкуренции обменных взаимодействий. В таких системах спектр мод также является зонным лишь для одной из двух основных модулированных структур типа простой спирали и продольной спиновой волны (LSW), а именно для последней LSW-структуры [66], где, однако, в отличие от данных разрывы в спектре обусловлены одноионной анизотропией.

Картина спектра двойной несоразмерной структуры в схеме расширенных зон дана на рис. 3, б. Вследствие инвариантности относительно изменения начальных фаз у обеих компонент параметра порядка дисперсионные кривые содержат теперь две голдстоуновские моды. Численное исследование спектра коллективных мод на основе конечноразностных соотношений для коэффициентов в блоховской функции [66] показывает, что с уменьшением  $\delta_1 = q_1/q_1^0$  и  $\delta_2 = q_2/q_2^0$  разрывы на краях первой зоны Бриллюэна существенно возрастают, причем внутри первой зоны при  $\delta_1 \approx \delta_2 = 0,65$  частоты двух нижних мод близки к нулю во всем интервале  $0 \leq k_\parallel < q_1 + q_2$ , что обусловлено уменьшением взаимодействия между солитонами из-за увеличения расстояния. Этим модам соответствуют колебания доменных стенок; они аналогичны модам бесщелевой ветви для систем, исследованных в [64, 65]. Верхние же моды первой зоны отвечают колебаниям толщины доменных стенок.

Частотный спектр в  $\text{RbFeCl}_3$  впервые наблюдался Петитграндом и др. [82]. Данные их измерений по нейтронному рассеянию в промежуточных фазах качественно согласуются с вычисленными на рис. 3.

**2.3. Индуцированные внешним полем синусоидальные фазы в соединениях типа  $\text{RbFeCl}_3(\text{CsNiF}_3, \text{CsFeCl}_3, \text{CsCuCl}_3)$ .** Магнитное поле  $\mathbf{H}$ , приложенное в плоскости треугольной решетки, деформирует поверхность собственных значений  $\lambda_+(\mathbf{Q})$ . В зависимости от ориентации  $\mathbf{H}$  вид эквипотенциальных линий, представленных, на рис. 1, в, изменяется таким образом, что стабилизируется какое-либо состояние с точкой  $\mathbf{q}$  на контуре со штриховой линией [56]. При фиксированном направлении поля стабилизация той или иной точки определяется спиновой поляризацией, которая при перемещении вдоль штрихового контура плавно поворачивается. Поэтому если  $\mathbf{H}$  параллельно оси  $y$ , то стабилизируется состояние с  $\mathbf{q}_1$ , и наоборот, при ориентации поля параллельно оси  $x$  предпочтительным становится состояние с  $\mathbf{q}_2$ . В конечных полях состояния с  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  имеют форму веерной структуры, поскольку наряду с синусоидальными волнами одновременно индуцируется постоянная составляющая намагниченности. При достаточно больших  $H$  модулированное состояние возможно даже при  $T=0$ . На рис. 4, а представлена фазовая диаграмма  $\text{RbFeCl}_3$  для магнитного поля, приложенного вдоль оси  $y$  [56]; линия переходов между различными несоразмерными фазами содержит трикритическую точку. Фазовая  $T$ – $H$ -диаграмма качественно согласуется с экспериментальными данными [2]: веерная структура наблюдалась в сильных полях, что же касается двойной несоразмерной структуры, то она наблюдалась только в слабых полях.

В гексагональном магнетике  $\text{CsNiF}_3$  (изоморфном  $\text{RbFeCl}_3$ ) экспериментально найденное [69] основное состояние представляет собой структуру с антипараллельным расположением спинов в базисной плоскости (одно из трех эквивалентных состояний с  $\mathbf{Q}_m$  изображено на рис. 5, а). Важную роль в формировании данной структуры играет дипольное взаимодействие [70], поскольку в  $\text{CsNiF}_3$  величина  $\gamma_d$  одного порядка с  $J_1$ . С понижением температуры переход из парамагнитного состояния в состояние с  $\mathbf{Q}_m$  реализуется в этом соединении сразу же без образования промежуточной несоразмерной фазы. Однако во внешнем поле  $\mathbf{H}$ , ориентированном вдоль оси  $x$ , по-прежнему становится возможным возникновение модулированной фазы с волновым вектором  $\mathbf{Q}_2$ . Изменение спиновой структуры по мере нарастания  $H$  представлено на рис. 5, б для случая  $T=0$ . В полях, меньших  $H_{1c}$ , существует двухподрешеточное состояние с отличной от нуля компонентой спина не только вдоль оси  $x$ , но и вдоль оси  $y$ ; при достижении полем критического значения  $H_{1c}$  происходит переход к веерной структуре со скачко-

образным изменением однородной намагниченности. При ненулевых температурах фазовая диаграмма дана на рис. 4, б.

В другом изоморфном кристалле  $\text{CsFeCl}_3$  основное состояние, в отличие от  $\text{RbFeCl}_3$ , немагнитно из-за большей одноионной анизотропии  $D=15,8\text{K}$  [71] по сравнению с константой внутрицепочечной ферромагнитной связи  $J_0=7,4\text{K}$  [71] (межцепочечная антиферромагнитная связь  $J_1=-1,8\text{K}$ ). Выполненные на этом кристалле нейтронографические исследования показали, что во внешнем поле, параллельном  $c$ -оси, при  $T=0,7\text{K}$  наблюдаются брэгговские пики, если  $H>3,8\text{T}$ . В полях выше таких критических появляются различные несоразмерные фазы

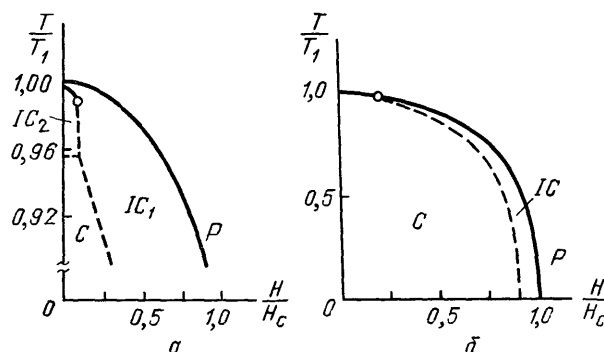


Рис. 4 а — Фазовая диаграмма для  $\text{RbFeCl}_3$  [56], поле приложено вдоль оси  $z$ ; сплошные линии соответствуют переходам второго рода, штриховые — переходам первого рода;  $C$  — соразмерное состояние (120-градусная структура),  $IC_1$  — несоразмерное состояние (продольная волна модуляции с  $q_1$ ),  $IC_2$  — двойная несоразмерная структура (продольная и поперечная волны модуляции с  $q_1$  и  $q_2$  соответственно),  $P$  — парамагнитная фаза. б — Фазовая диаграмма для  $\text{CsNiF}_3$  [4] (поле  $H$  параллельно оси  $x$ );  $C$  — соразмерное состояние с антипараллельным расположением спинов,  $IC$  — несоразмерное состояние с волновым вектором модуляции  $q_2$

(аналогичные фазам [2] в  $\text{RbFeCl}_3$  при  $H=0$ ) с волновыми векторами  $Q$ , близкими к  $K$ -точке. С понижением температуры сателлиты около симметричной точки  $K$  исчезают, и в магнитном поле возникает 120-градусная структура. Наблюдаемые явления могут быть объяснены [72] с учетом корреляционных эффектов, приводящих к тому, что и в поле,

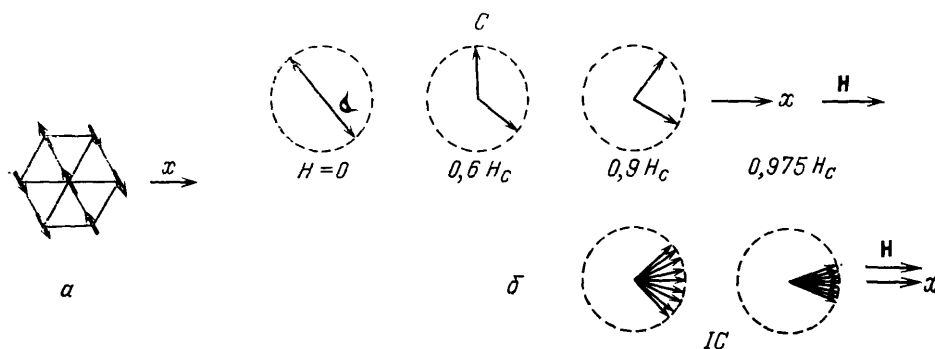


Рис. 5. Спиновые структуры соразмерных и несоразмерных состояний для  $\text{CsNiF}_3$  [4]. а — Основное состояние в нулевом поле. б — При различных значениях поля  $H$  вдоль оси  $x$  ( $T=0$ )

приложенном вдоль  $c$ -оси, реализуется неустойчивость конической точки. В приближении случайных фаз результаты вычислений для критических полей [72] находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [5].

Из рентгеновских и нейтронографических исследований хорошо известно, что гексагональный кристалл  $\text{CsCuCl}_3$  претерпевает структурный

фазовый переход [74—77], связанный с геликоидальным смещением ионов  $\text{Cu}^{2+}$  при температуре 423 К. Ниже точки перехода из парафазы (10,7 К) антиферромагнитное взаимодействие между цепочками в  $\text{CsCuCl}_3$  образует треугольную (120-градусную) магнитную структуру в базисной плоскости, а сильная обменная связь внутри цепочек наряду со слабой анизотропной, описываемой взаимодействием Дзялошинского, приводит к образованию модулированной вдоль  $c$ -оси спиральной структуры [78]. Таким образом, в этом магнитном веществе в отличие от  $\text{RbFeCl}_3$  дипольный механизм возникновения синусоидальной структуры подавлен.

При произвольных соотношениях между дипольным взаимодействием и взаимодействием Дзялошинского

$$\mathcal{H}_D = \sum_{i,j} D_{ij}^z [\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j]_z \quad (2.13)$$

(из-за кристаллической симметрии вектор  $\mathbf{D}_{ij}$  имеет только одну компоненту  $D_{ij}^z$ ) наличие той или иной структуры, реализуемой в точке неустойчивости симметричной фазы  $T_1$ , зависит от соотношения внутри- и междоцепочечных обменных констант  $J_0$  и  $J_1$ . Собственные значения фурье-компонент полного гамильтониана имеют в квадратичном приближении по  $\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_k$  следующий вид [78] (постоянные  $a$  и  $c$  равны единице):

$$\lambda_{\pm}(\mathbf{q}) = C + J_0 q_z^2 + \frac{3}{4} J_1 q_{\perp}^2 \pm [(\eta \gamma_d q_{\perp})^2 + (2Dq_z)^2]^{1/2}, \quad (2.14)$$

где  $C$  — константа, зависящая от обменных параметров  $J_0$ ,  $J_1$  и  $\gamma_d$ ;  $D = |D_{i,i\pm 1}^z|$ . Ясно отсюда, что при  $D=0$  минимум функции  $\lambda_{-}(\mathbf{q})$  достигается на круге  $q_{\perp}^2 \equiv q_x^2 + q_y^2 = (2\eta\gamma_d/3J_1)^2$ ,  $q_z=0$ . Учет кубических членов по  $\mathbf{q}$  в выражении (2.2) для  $J(\mathbf{Q})$  снимает непрерывное вырождение  $\lambda_{-}$  вокруг  $\mathbf{Q}_k$ , так что, как и должно быть, имеем три эквивалентные точки  $\mathbf{q}_1$ , изображенные на рис. 1, б. И наоборот, при  $\gamma_d=0$  минимум  $\lambda_{-}(\mathbf{q})$  реализуется, когда  $q_z=D/J_0$ ,  $q_{\perp}=0$ . На рис. 6, а представлена область

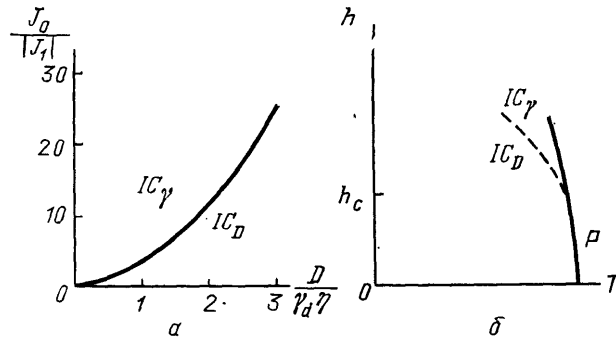


Рис. 6. а — Область существования несоизмерных фаз, возникающих в результате неустойчивости парафазы в  $\text{CsCuCl}_3$  (поле  $H=0$ );  $IC_{\gamma}$  — синусоидальная несоизмерная структура в базисной плоскости,  $IC_D$  — спиральная структура с периодом модуляции вдоль  $c$ -оси гексагональной решетки. б — Фазовая диаграмма для этого соединения

существования различных фаз, возникающих ниже температуры перехода  $T_1$ . При одном и том же фиксированном значении  $J_0/|J_1|$  та или иная спиновая конфигурация образуется в зависимости от отношения  $D/\eta\gamma_d$ . Если выполняется неравенство [57]

$$\frac{D}{\eta\gamma_d} > \left( \frac{J_0}{3|J_1|} \right)^{1/2}, \quad (2.15)$$

то синусоидальная волна в базисной плоскости не конденсируется: вместо нее возникает спираль с периодом модуляции вдоль  $c$ -оси. Условие (2.15) хорошо выполняется в кристалле  $\text{CsCuCl}_3$ , так как согласно экспериментальным данным [77, 79]  $J_0/|J_1| \approx 8$ ,  $D/\eta\gamma_d \approx 20$ .

В тех соединениях, где неравенство (2.15) удовлетворяется, спиральная структура может все же не реализоваться в магнитном поле [6]. При значениях  $H$  выше критических поле индуцирует неустойчивость конической точки, что отражается в сдвиге кривой на рис. 6, а в область спиральной фазы. В результате ниже температуры перехода из парафазы становится возможным существование синусоидальной волны с периодом модуляции на треугольной решетке. Критические же значения поля в базисной плоскости определяются следующим образом:

$$H_c = 2|J_1| \left\{ \frac{1}{J_0} \left[ \frac{D^2}{J_0} - \frac{(\eta\gamma_d)^2}{|3J_1|^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.16)$$

Оценки по формуле (2.16) для кристалла  $\text{CsCuCl}_3$  дают  $H_c \approx 0,3$  Тл, что соответствует экспериментальным значениям. Однако по мере дальнейшего понижения температуры синусоидальное состояние (во внешнем поле  $H > H_c$ ) становится термодинамически неустойчивым в точке  $T = T_2$ , ниже которой минимуму свободной энергии будет соответствовать спиральная фаза [6, 78]. Таким образом, в соединениях, где выполняется неравенство (2.15), в зависимости от температуры возможно существование двух различных несоизмеримых фаз — спиральной с  $q_z \neq 0$  и синусоидальной с  $q_z = 0$  (рис. 6, б).

### 3. Состояния типа плоской спирали и треугольные сверхструктуры.

**3.1. Спиральные конфигурации в галоидных соединениях переходных металлов и в соединениях типа  $\beta$ -фазы твердого кислорода.** В некоторых соединениях переходных металлов — как, например, в ромбоэдрическом антиферромагнетике  $\text{NiBr}_2$  (пространственная группа  $D_{3d}^5$ ) — тепловые флуктуации индуцируют переход спиральной структуры в соразмерное промежуточное состояние [9–13]. Из резонансных измерений установлено [11], что в таких соединениях, имеющих центр инверсии, модулированная структура реализуется в результате конкуренции обменных взаимодействий различных знаков. Еще на примере классических планарных спинов на квадратной решетке Вилленом было указано [14] на важность учета при температурных изменениях волнового вектора структуры тепловых ренормировок обменных констант, возникающих вследствие взаимодействия спиновых волн. Такие ренормировки достигаются уже в рамках самосогласованного гармонического приближения с температурно-зависимым эффективным гамильтонианом. Для XY-спинов это приближение эквивалентно вариационной процедуре [88], примененной к задаче о нелинейном отклике в двумерном изотропном нематике; результаты же, полученные в [88], совпадают (либо близки) с более строгими результатами Березинского [26] для той же физической задачи.

В легкоплоскостных магнетиках квантовые флуктуации могут приводить к дополнительному уменьшению волнового вектора мод. Поэтому в отличие от классических планарных спинов [14] (и аналогичных им систем [88]) необходимо записать температурно зависимый гармонический гамильтониан в терминах двух (канонических) переменных  $\theta_i$ ,  $s_i^z$  — обобщенных координат и импульсов [89, 90]:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} |\theta_{\mathbf{k}}|^2 + b_{\mathbf{k}} |s_{\mathbf{k}}^z|^2). \quad (3.1)$$

Флуктуирующие величины  $\theta_i, s_i^z$  представляют собой соответственно малые отклонения на узле  $i$  азимутального угла  $\varphi_i$  спина и его проекции  $S_i^z$  от термодинамически равновесных значений фаз спирали  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_i$  и постоянной составляющей спина  $m$  вдоль поля, параллельного  $c$ -оси, т. е.  $\theta_i = \varphi_i - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_i, s_i^z = S_i^z - m; a_k$  и  $b_k$  — вариационные параметры.

Волновой вектор спирали  $\mathbf{Q}$ , постоянная составляющая  $m$ , а также параметры  $a_k$  и  $b_k$  находятся из системы уравнений, получаемых в результате минимизации свободной энергии [15] с пробным гамильтонианом (3.1):

$$\begin{aligned} \sum_{i-j} \tilde{J}_{ij} \mathbf{R}_{ij} \sin(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_{ij}) &= 0, \quad m = \frac{1}{2} \frac{H}{D + \tilde{J}_0^s - J_0}, \\ a_k &= (\tilde{J}_0^s - \tilde{J}_k^s) \left( S^2 - m^2 - N^{-1} \sum_{\mathbf{k}'} \langle |s_{\mathbf{k}'}^z|^2 \rangle \right), \\ b_k &= \tilde{J}_0^s - J_k + D, \quad \tilde{J}_k^s = \frac{1}{2} (\tilde{J}_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}} + \tilde{J}_{\mathbf{Q}-\mathbf{k}}); \end{aligned} \quad (3.2)$$

здесь  $D$  — константа анизотропии типа легкая плоскость ( $D > 0$ ),  $N$  — число спинов;  $\tilde{J}_k = \sum_{i-j} \tilde{J}_{ij} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{ij})$  фурье-компоненты обменных констант, ренормированных тепловыми флуктуациями:

$$\tilde{J}_{ij} = J_{ij} \exp \left[ -N^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \langle |\theta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle (1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{ij}}) \right]. \quad (3.3)$$

Корреляторы флуктуирующих величин в (3.2) и (3.3) задаются с учетом нулевых колебаний следующим образом:

$$\langle |\theta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{4a_{\mathbf{k}}} \coth \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2T}, \quad \langle |s_{\mathbf{k}}^z|^2 \rangle = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{4b_{\mathbf{k}}} \coth \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2T} \quad (3.4)$$

( $\omega_{\mathbf{k}} = 2(a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}})^{1/2}$  — спектр спиновых волн).

В соединениях типа  $\text{NiBr}_2$  обменный интеграл для ближайших спинов на треугольной решетке  $J_1$  положителен, а для вторых и третьих соседей  $J_2, J_3$  отрицателен (рис. 7, а). Отрицателен обменный интеграл и между ближайшими спинами в соседних слоях ромбоэдрической решетки ( $J' < 0$ ). Поскольку плоскость треугольной решетки в  $\text{NiBr}_2$  совпадает с плоскостью легкого намагничивания, то в таких системах волновой вектор спирали будет находиться в плоскости поляризации спинов (состояние типа плоской спирали). На рис. 7, б представлена найденная зависимость  $m$  от  $T$  для  $\text{NiBr}_2$ ; она аналогична зависимости, наблюдаемой в эксперименте [9]. График зависимости  $Q$  от  $T$  дан для двух начальных ( $T=0$ ) значений  $Q_0 = [2(4|J_3| - J_1)/3J_1]^{1/2}$ , равных 0,07 и 0,1 (рис. 7, в;  $J_2=0$ ). Полученные кривые приведены с учетом тепловых и квантовых флуктуаций обеих величин  $\theta$  и  $s^z$ . С увеличением  $H$  температурная область спиральной структуры уменьшается (что следует из сравнения нижних кривых рисунка для  $Q_0=0,07$ ); сужение температурного интервала с полем вдоль  $c$ -оси связано с нарастанием фазовых флуктуаций вследствие уменьшения проекции спина в базисной плоскости. Однако с возрастанием межплоскостного взаимодействия область существования несоизмерной фазы, наоборот, увеличивается (что, в свою очередь, следует из сравнения верхних кривых для  $Q_0=0,1$ ). Эти зависимости качественно согласуются с экспериментальными данными [9, 10, 13]. При  $T=0$  перенормировка обменных интегралов в (3.3) обусловлена только квантовыми флуктуациями. значение  $Q = Q_0$  уменьшается как по мере возрастания  $D$ , так и по мере возрастания  $H$ . Если волновой вектор спирали достаточно мал, то внешнее поле может даже при  $T=0$  разрушить спиральную структуру.

Устойчивость несоразмерных состояний сильно зависит не только от размерности пространства, но и от того, на каких решетках — треугольных или квадратных — расположены спины в слоях кристалла, поскольку спектр длинноволновых флуктуации может быть существенно различным для состояний, образованных на этих разных решетках. Так, в слоистых системах из треугольных решеток дальний порядок (в отличие от квадратных) реализуется лишь в определенных направлениях, в других же корреляции спадают степенным образом [15].

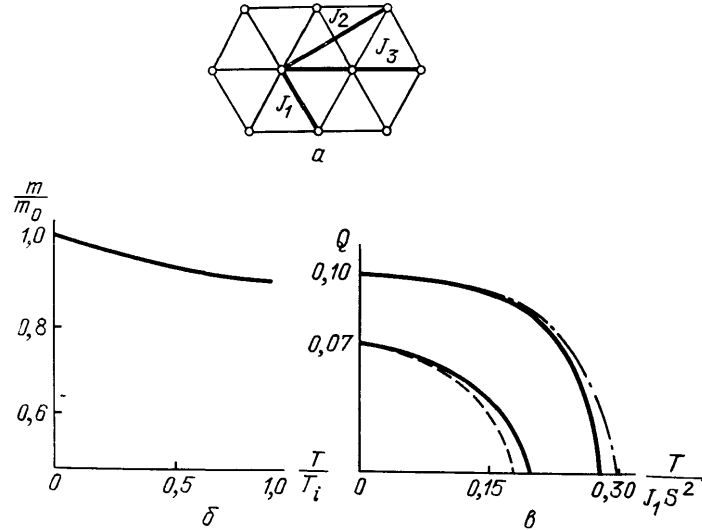


Рис. 7. *a* — Константы обменных взаимодействий между спинами на треугольной решетке. *б* — Температурная зависимость намагниченности  $m$  вдоль  $c$ -оси ромбоэдрической решетки (слабые поля),  $J_3/J_1 = -0.255$ ,  $J'/J_1 = -0.1$ ,  $D/J_1 = 0.05$ . *в* — Температурная зависимость волнового вектора плоской спирали ( $D/J_1 = 0.05$ ); сплошные линии в поле  $H=0$ ,  $J'/J_1 = -0.1$ , штриховая при  $H/J_1 S = 0.01$ ,  $J'/J_1 = -0.1$ , штрихпунктирная при  $H=0$ ,  $J'/J_1 = -0.15$

В ромбоэдрическом кристалле конкуренция обменных взаимодействий может быть вызвана уже наличием связей только между ближайшими спинами: антиферромагнитной  $J_1 (< 0)$  в базисной плоскости и межплоскостной  $J'$  (любого знака). При  $0 < |J'| < 3|J_1|$  состоянию с минимальной энергией соответствует спиральная конфигурация спинов. Более того, энергия основного состояния непрерывно вырождена относительно волнового вектора  $\mathbf{Q}$  неэквивалентных спиралей, отличающихся друг от друга как ориентацией, так и величиной самого  $\mathbf{Q}$ . При  $|J'| \ll 3|J_1|$  эквипотенциальные линии вырожденных состояний представляют собой витки на поверхности шести цилиндров. В трехмерном  $\mathbf{Q}$ -пространстве цилиндры имеют одинаковые радиусы  $2|j'|/\sqrt{3}a$ , где  $j' = J'/J_1$ , и одинаковые высоты  $6\pi/c$ , причем их оси параллельны  $c$ -оси. Эти оси пересекаются с плоскостью  $Q_x, Q_y$  (координатные оси расположены так, что  $Q_y$  параллельно вектору трансляций  $\mathbf{a}$  треугольной решетки) в шести эквивалентных точках  $(0, \pm 4\pi/3a)$ ,  $(\pm 2\pi/\sqrt{3}a, \pm 2\pi/3a)$ . Вблизи одной из них  $(0, 4\pi/3a)$  уравнения для вырожденных значений  $\mathbf{Q}$  представляются следующим образом [48]

$$\begin{aligned} Q_x^* &= -\frac{2j'}{\sqrt{3}a} \sin \frac{cQ_z^*}{3}, \\ Q_y^* &= \frac{4\pi}{3a} + \frac{2j'}{\sqrt{3}a} \cos \frac{cQ_z^*}{3}, \\ -\frac{3\pi}{c} &< Q_z^* < \frac{3\pi}{c}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При  $j'=0$  основное состояние сводится к 120-градусной структуре с отсутствием зависимости в ориентациях спинов между различными слоями. Однако при сколь угодно малых, но отличных от нуля значениях  $j'$ , возникает вырождение для  $\mathbf{Q}$ , с появлением фазовой зависимости в соседних слоях. При  $|j'|\rightarrow 1$  цилиндры трансформируются непрерывным образом в призмы с треугольным основанием (проекции линий вырождения на плоскость  $Q_x, Q_y$  представлены для различных  $j'$  на рис. 8).

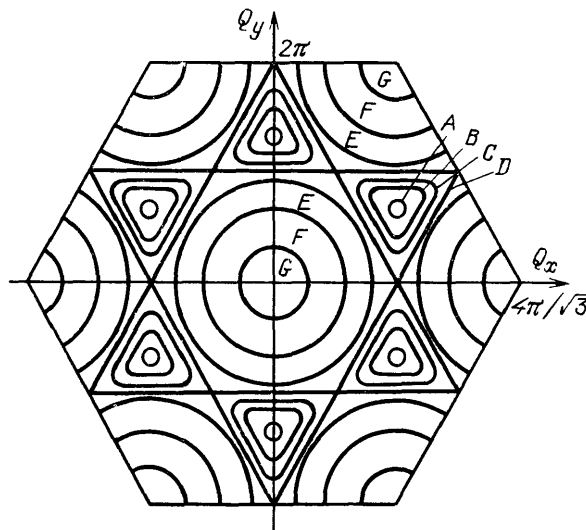


Рис. 8. Проекция линий вырождения на плоскость  $Q_x, Q_y$  при различных значениях  $j'$  [48]: A —  $j'=0,15$ , B —  $j'=0,5$ , C —  $j'=0,8$ , D —  $j'=1$ , E —  $j'=1,2$ , F —  $j'=2$ , G —  $j'=2,8$

При значениях  $j'$ , лежащих в интервале  $1 < |j'| < 3$ , эквипотенциальные линии состоят из семи частей. В пределе  $|j'|\rightarrow 3$  радиусы и высоты цилиндров — центрального и шести других, состоящих из одной трети цилиндрической поверхности, — стремятся к нулю, так что при  $|j'|=3$  возникает однородное состояние, которому соответствует точка  $Q_*^x = Q_*^y = 0$ , а также шесть других точек, эквивалентных первой. Значение же  $Q_*^z$  зависит от знака  $j'$ : если  $j'=-3$ , то  $Q_*^z=0$ , и наоборот, если  $j'=3$ , то  $Q_*^z=3\pi/c$ .

Интересно отметить, что проекции линий вырождения на плоскость  $Q_x, Q_y$  напоминают в работе Дудко и др. [83] картину распределения эффективного обменного поля, создаваемого ионами с опрокинутыми спинами в «смешанном» состоянии (наблюдаемом в сильных магнитных полях) антиферромагнитного  $\text{FeCO}_3$ . Кроме того, они напоминают также силовые линии несоразмерных структур в дипольных системах со слабым обменным взаимодействием [43].

При отсутствии анизотропии спин-волновой спектр содержит мягкую моду для всех значений  $\mathbf{Q}$  вдоль линии вырождения. Наличие «мягкой линии» разрушает дальний порядок для любой конечной температуры [48]. Однако учет нулевых колебаний, оказывается, снимает непрерывное вырождение основного состояния относительно  $\mathbf{Q}$ , оставляя при этом только дискретное [49]. Поэтому даже в изотропном случае квантовые эффекты восстанавливают дальний порядок. Тем не менее при достаточно высоких температурах, когда несущественны квантовые флуктуации, состояние системы будет аналогичным состоянию с «вырожденными спиралями». Действительно, как показывают недавние расчеты [37], квантовые флуктуации в таких системах индуцируют фа-



зовый переход; при этом в промежуточной фазе возникает состояние с неэквивалентными спиралями.

Примером ромбоэдрической системы, где возможно проявление указанных свойств, является  $\beta$ -фаза твердого кислорода [84, 85]. На основе анализа тепловых и магнитных измерений для данного вещества Локтевым [86] впервые было сделано предположение, что магнитная структура  $\beta$ - $O_2$  представляет собой трехподрешеточный неколлинеарный антиферромагнетик. Молекулярный кристалл  $\beta$ -кислород — планарный (XY) магнетик с доминирующей антиферромагнитной связью  $J_1$  между молекулами  $O_2$  в базисной плоскости и со слабой связью  $J'$  между плоскостями [50]. В экспериментах по нейтронному рассеянию, проведенных на поликристалле [91, 92], наблюдается широкий пик в окрестности симметричной точки  $Q_h$ , соответствующей 120-градусной структуре. Ширина этого пика не зависит от температуры и, как показывают расчеты [48], определяется минимальным и максимальным значением  $Q$  для «вырожденных спиралей». Что же касается оценок температуры перехода в состояние с фиксированным волновым вектором спирали, т. е. в состояние, где квантовые флуктуации становятся существенными, то они для  $\beta$ -кислорода дают  $T_c = 14\text{ К}$  [37]. Однако при такой температуре ромбоэдрическая решетка  $\beta$ -фазы неустойчива: вместо нее в интервале от 0 до 24 К реализуется моноклинная решетка ( $\alpha$ -фаза).

**3.2. Треугольные доменные сверхструктуры.** Частично неупорядоченные состояния в  $\text{CsCoCl}_3$ ,  $\text{CsCoBr}_3$ . В этом разделе мы рассмотрим изинговские спиновые системы на треугольных решетках. Будем сначала полагать, что такая решетка образована из цепочек — гексагональная решетка — с ферромагнитным взаимодействием внутри них ( $J_0 > 0$ ). Основное состояние во внешнем поле с отличными от нуля обменными константами  $J_1$  и  $J_2$  ( $J_3 = 0$ ) было найдено в работах [93, 94]. Для фрустрированных изинговских систем, когда между ближайшими спинами на треугольной решетке реализуется антиферромагнитная связь ( $J_1 < 0$ ), а между следующими за ближайшими спинами  $J_2 \geq 0$  фазовая диаграмма дана на рис. 9. При нулевых

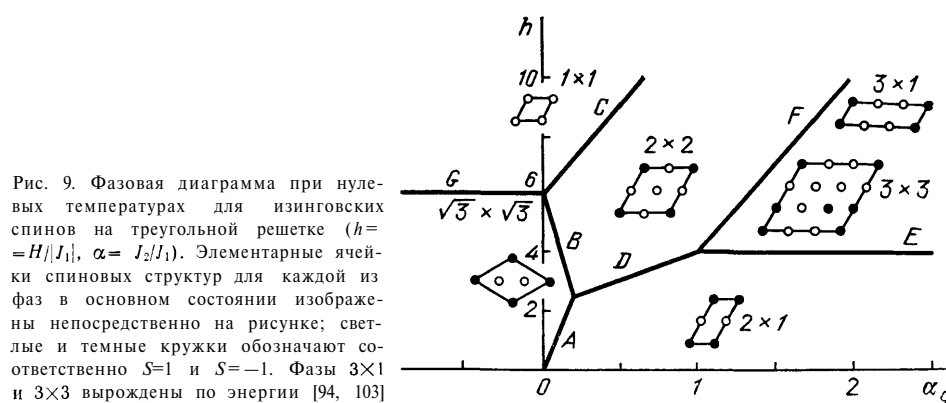


Рис. 9. Фазовая диаграмма при нулевых температурах для изинговских спинов на треугольной решетке ( $h = H/|J_1|$ ,  $\alpha = J_2/J_1$ ). Элементарные ячейки спиновых структур для каждой из фаз в основном состоянии изображены непосредственно на рисунке; светлые и темные кружки обозначают соответственно  $S=1$  и  $S=-1$ . Фазы  $3 \times 1$  и  $3 \times 3$  вырождены по энергии [94, 103]

температурах в зависимости от  $h = H/|J_1|$  и  $\alpha = J_2/J_1$  возможны шесть различных фаз, для которых элементарные ячейки и их обозначения показаны на этом же рисунке; две конфигурации ( $3 \times 3$  и  $3 \times 1$ ) вырождены по энергии: вырождение снимается, если положить, например,  $J_3 \neq 0$ .

На границе раздела фаз  $3 \times 3$  и  $2 \times 2$ , где выполняется условие  $H = 2J_1 - 6J_2$ , можно найти такую доменную стенку, энергия которой равна нулю. При наличии доменной стенки внутри  $3 \times 3$ -структуры энергия, связанная с ее образованием, дается на единицу длины следующим

образом [51]:

$$E_{DB} = \frac{2}{9}(-H + 2J_1 - 6J_2). \quad (3.6)$$

На рис. 10, а сплошной линией изображены (единственные) доменные стенки, имеющие на границе раздела  $3 \times 3$  и  $2 \times 2$ -фаз нулевую энергию. Соразмерные структуры высших порядков возникают при таком периодическом распределении стенок, что они образуют треугольную доменную сверхструктуру. На рис. 10, а представлена длиннопериодическая

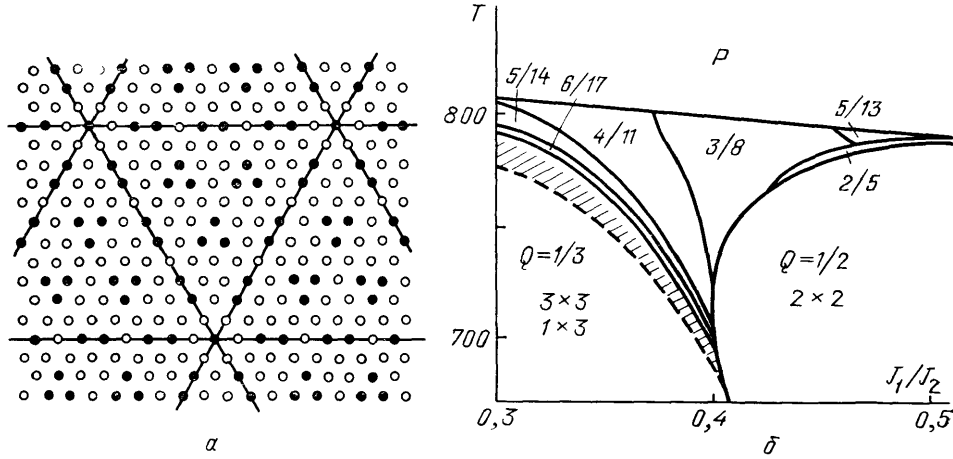


Рис. 10. а — Треугольная доменная сверхструктура с  $Q=4/11$ ; доменные границы изображены сплошной линией. б — Фазовая диаграмма для  $J_0=1717$  К,  $H=23,5$  К и  $J_1+J_2=-0,275 H$  [51] ( $T$  — в К)

структура с  $Q=4/11$  (4/11-структура), у которой наибольшее значение фурье-компоненты (за исключением постоянной составляющей) локализовано при  $\pm Q\mathbf{K}$ , с  $Q=4/11$ , где  $\mathbf{K}$  — вектор обратной решетки; вокруг точек пересечения доменных стенок, как видно из рисунка, частично реализуется  $2 \times 2$ -структура. В общем случае различные треугольные сверхструктуры можно образовать с  $Q=n/(3n-1)$ , где  $n=1, 2, 3, \dots$ . В этих обозначениях  $2 \times 2$ -структура представляет собой структуру с  $Q=1/2$  ( $n=1$ ), а  $3 \times 3$ -структура — с  $Q=1/3$  ( $n=\infty$ ). Энергия таких состояний на один узел:

$$E(n) = E(\infty) + \frac{3(3n-2)}{(3n-1)^2} E_{DB}, \quad (3.7)$$

где  $E(\infty) = -J_0 - (H + J_1 - 3J_2)/3$  — энергия  $3 \times 3$ -структуры. Все спиновые конфигурации с  $Q=n/(3n-1)$  вырождены при  $H=2J_1-6J_2$  ( $E_{DB}=0$ ). Заметим здесь: дополнительная энергия, возникающая от пересечения доменных стенок, также равна нулю при значениях  $H$ , которым соответствует граница раздела  $2 \times 2$ - и  $3 \times 3$ -фаз.

При  $T \neq 0$  треугольные сверхструктуры могут быть стабилизированы из-за выигрыша в энтропии. Если к тому же непосредственно ниже точки перехода из парафазы устойчивые структуры описываются волновым вектором  $\pm Q\mathbf{K}$ , с  $\cos 2\pi Q = -(J_1 + J_2)/2J_2$ , т. е.  $Q$  отвечает максимальному значению фурье-компоненты обменных взаимодействий  $J(Q)$ , можно ожидать, что такие модулированные состояния будут стабилизированы в широком интервале температур.

Минимизация свободной энергии

$$F = - \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} J(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \langle S(\mathbf{R}) \rangle \langle S(\mathbf{R}') \rangle - H \sum_{\mathbf{R}} \langle S(\mathbf{R}) \rangle + T \sum_{\mathbf{R}} \int_0^{2\pi} \langle S(\mathbf{R}) \rangle M^{-1}(x) dx, \quad (3.8)$$

записанной при точном учете внутрицепочечного взаимодействия (предполагается, что  $|J_0| \gg |J_1|, |J_2|$ ),  $M^{-1}$  — обратная функция

$$M(x) = \text{sh } x \cdot [\exp(-2|J_0|T^{-1}) + \text{sh}^2(x)]^{-1/2}, \quad (3.9)$$

проводилось как для структур с  $Q = n/(3n-1)$ , так и для  $Q = m/l$  ( $n, m$  и  $l$  — целые числа). На рис. 10, б представлена фазовая диаграмма, полученная в результате численных расчетов ( $n=1, 2, \dots, 7$  и  $\infty$ ;  $m < l \leq 14$ ); в заштрихованной области существуют структуры с  $Q = n/(3n-1)$ , для которых  $n \geq 8$ . Штриховая линия на этом же рисунке соответствует нулевому значению свободной энергии доменных границ. При  $T \neq 0$   $3 \times 3$ -структура все еще вырождена с  $3 \times 1$ -структурой. Состояние с  $Q = 5/13$  появляется при достаточно высоких температурах. Это обстоятельство связано с тем, что оно не принадлежит к классу вырожденных состояний с  $Q = n/(3n-1)$ . Естественно, что и другие структуры, которые не рассматривались при численных расчетах, могут появиться. Однако их существование по тем же причинам является возможным только при высоких температурах.

Вблизи критической точки анализ структур, проведенный на основе свободной энергии, записанной в форме разложения Гинзбурга — Ландау, показывает, что при  $Q \approx 1/3$  по-прежнему имеется решетка из доменных границ, внутри которой реализуется  $3 \times 3$ -структура.

Выражение (3.8) может, например, объяснить основной механизм, который приводит к существованию модулированной структуры в таком соединении, как суперионный проводник  $\beta\text{-LiAlSiO}_4$ . Это соединение имеет гексагональную решетку, узлы которой могут быть заняты Li. В нейтронографических экспериментах [95, 96] обнаружено, что в чередующихся вдоль  $c$ -оси слоях из Al и Si отношение вероятностей нахождения Li на слоях Al к слоям Si неодинаково и составляет  $1/3$ . Неупорядоченные в своем расположении атомы Li образуют устойчивые состояния при понижении температуры. Так, в соразмерном состоянии возникает  $2 \times 2$ -структура, при которой каждый второй узел на треугольной решетке занят Li, а в промежуточной области  $T$  существует модулированная фаза. Экспериментальные данные на  $\beta\text{-LiAlSiO}_4$  можно согласовать с результатами изинговских систем. Для этого в соответствии с наблюдениями необходимо наличие поля, которое изменяет свой знак от слоя к слою, а также наличие внутрицепочечной антиферромагнитной связи. Гамильтониан, соответствующий (3.8), удовлетворяет требованиям, если выполнено преобразование  $S(i, \mathbf{R}) \rightarrow (-1)^i S(i, \mathbf{R})$ , где  $i$  нумерует положение спинов вдоль  $c$ -оси. Поскольку к тому же взаимодействие между ионами Li кулоновское, то естественно ожидать, что и между спинами на треугольной решетке связь является антиферромагнитной. При достаточно больших отношениях  $J_1/J_2$ , как видно из рис. 10, б (где значения  $J_0 = 1717\text{ K}$  и  $H = 23,5\text{ K}$  выбраны для приложения теории к  $\beta\text{-LiAlSiO}_4$ ), имеет место по мере возрастания температуры переход от структуры  $2 \times 2$  к модулированной, что находится в соответствии с экспериментом.

В изинговских магнетиках  $\text{CsCoCl}_3$ ,  $\text{CsCoBr}_3$  взаимодействие между следующими за ближайшими спинами на треугольной решетке ферромагнитное ( $J_1 < 0, J_2 > 0$ ), поэтому в основном состоянии стабилизируется  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ -структура с тремя спинами на элементарной ячейке (рис. 9). При отличных от нуля температурах в таких антиферромагнетиках наблюдаются [16, 17] два фазовых перехода (у  $\text{CsCoCl}_3$  при  $T_1 = 21,3\text{ K}$  и  $T_2 = 9,2\text{ K}$  [16]).

Самосогласованные уравнения для трех магнитных подрешеток (рис. 11, а) даются в виде

$$\langle S_n \rangle = M(L_n), \quad (3.10)$$

где аргументы  $L_n$  функции  $M$  из (3.9) определяются следующими соотношениями:

$$L_1 = \frac{3J_1}{2T} (\langle S_2 \rangle + \langle S_3 \rangle + 2\alpha \langle S_1 \rangle),$$

$$L_2 = \frac{3J_1}{2T} (\langle S_3 \rangle + \langle S_1 \rangle + 2\alpha \langle S_2 \rangle),$$

$$L_3 = \frac{3J_1}{2T} (\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle + 2\alpha \langle S_3 \rangle)$$

$$(\alpha = J_2/J_1).$$

Уравнения (3.10) приводят к последовательным фазовым переходам. Для малых  $|\alpha|$  имеются три упорядоченные фазы [97]: частично неупорядоченная (PD)  $\langle S_1 \rangle = -\langle S_2 \rangle \neq 0$ ,  $\langle S_3 \rangle = 0$  (рис. 11, б); трехподрешеточная ферримагнитная (3FR)  $\langle S_1 \rangle, \langle S_2 \rangle, \langle S_3 \rangle \neq 0$ ; двухподрешеточная ферримагнитная (2FR)  $\langle S_1 \rangle = \langle S_3 \rangle > 0$ ,  $\langle S_2 \rangle < 0$ . С понижением

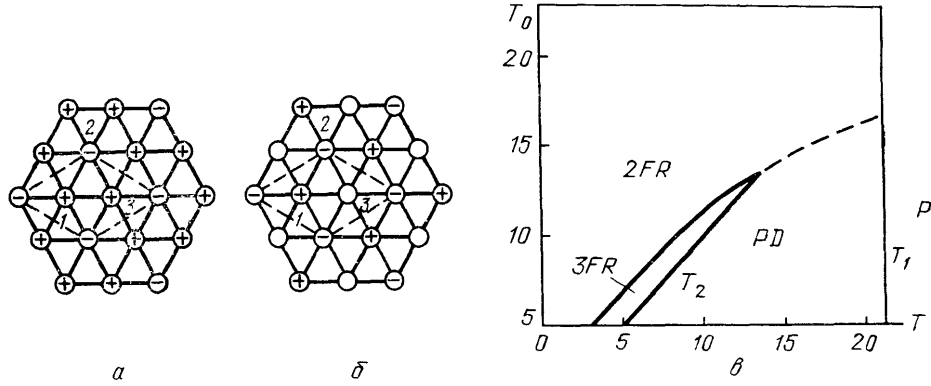


Рис. 11. а, б — Магнитное упорядочение в  $\text{CsCoCl}_3$  и  $\text{CsCoBr}_3$  для  $T < T_1$  (а) и  $T_2 < T < T_1$  (б), знаки «+» и «-» обозначают соответственно ориентацию спинов вверх и вниз; «0» — неупорядоченное состояние цепочки. в — Фазовая диаграмма;  $T_1$  выбрано равным 21,3 К, а  $J_1 = 75$  К, что соответствует экспериментальным значениям для  $\text{CsCoCl}_3$ ; штриховая линия отвечает фазовому переходу первого рода, сплошная — переходу второго рода [18]

$T$  реализуются переходы  $\text{PD} \rightarrow 3\text{FR} \rightarrow 2\text{FR}$ . При умеренных значениях  $|\alpha|$  существуют только фазы PD и 2FR, причем переход между ними является переходом первого рода. И, наконец, при достаточно больших  $|\alpha|$  остается единственная упорядоченная фаза 2FR.

Парамагнитное состояние (P) неустойчиво относительно PD или 2FR-фаз в точке  $T = T_1$ , определяемой из уравнения [18]

$$\frac{3}{2} \frac{|J_1|}{T} (1 - 2\alpha) \exp \frac{|J_0|}{T_1} = 1. \quad (3.11)$$

В свою очередь, частично неупорядоченная фаза неустойчива при  $T = T_0$

$$3 \frac{J_2}{T_0} \exp \frac{|J_0|}{T_0} = 1. \quad (3.12)$$

Если SFR-фаза устойчива, то  $T_0 = T_2$  и является точкой перехода второго рода от PD-состояния к 3FR. Однако если происходит переход первого рода от PD- к 2FR-фазе при  $T = T_2$ , то  $T_2$  больше, чем  $T_0$ . Фазовая диаграмма для произвольных значений  $T_0$  (которым соответствуют согласно (3.12) определенные значения  $J_2$ ) представлена на рис. 11, в. Значения  $T_1 = 21,3$  К и  $J_0 = 75$  К выбраны для  $\text{CsCoCl}_3$ . Полагая также, что в  $\text{CsCoCl}_3$   $\alpha \approx -2 \cdot 10^{-3}$ , получаем, как и наблюдается в эксперименте, две точки фазового перехода.

Качественно такой же результат был получен кластерным вариационным методом [19]. Вместе с тем, методом Монте-Карло найдено [20, 21], что промежуточная фаза в  $\text{CsCoCl}_3$ ,  $\text{CsCoBr}_3$  описывается модой  $\langle S_i \rangle \sim \cos(\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{R}_i + \alpha)$  со случайно изменяющейся в пространстве и во времени фазой  $\alpha = \alpha(\mathbf{R}_i, t)$ . Фаза  $\alpha$  слабо меняется внутри домена и сильно изменяется на границе доменных областей. По мере уменьшения температуры флуктуации фаз уменьшаются, так что в точке фазового перехода существует только 2FR-фаза. Данными результатами можно объяснить наблюдаемые в промежуточном интервале температур заметные флуктуации во времени магнитной структуры кристалла  $\text{CsCoCl}_3$  [16].

#### 4. Фазовые переходы в двумерных фрустрированных антиферромагнетиках.

**4.1. Фазовая диаграмма для изинговских спинов на треугольной решетке.** В двумерных изинговских антиферромагнетиках, где взаимодействие ограничено ближайшими соседями на треугольной решетке, спиновое упорядочение сильно подавлено из-за эффектов фрустраций. В результате в данной системе фазовый переход отсутствует при любой конечной температуре [98–100]. Однако учет взаимодействий следующих соседей стабилизирует спиновое состояние и система проявляет фазовый переход подобно ферромагнитной XY-модели с полем, нарушающим шестикратную симметрию [101].

При  $H \neq 0$  переход между основными состояниями на треугольной решетке может возникать путем образования в исходной фазе локальной спиновой структуры, аналогичной структуре смежной фазы. Доменные стенки, ответственные за образование локальной структуры, можно найти на линиях  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $G$  (см. рис. 9), разделяющих соседние состояния на фазовой диаграмме. Появление их при критических значениях поля не требует затраты энергии. Вместе с тем на линиях  $B$  и  $F$  на рис. 9 невозможно образование стенок с нулевой энергией вследствие геометрического характера спиновых структур двух соседних фаз.

Фазовую диаграмму при отличных от нуля температурах можно построить, вычисляя свободную энергию доменных границ  $\mathcal{F}$  методом межфазных конфигураций [102]. Наиболее просто находится линия переходов между фазой  $2 \times 1$  и парафазой для значений  $\alpha (=J_2/J_1)$  лежащих в интервале от 0,2 до 1. Поскольку в этом интервале  $\alpha$  фаза  $2 \times 1$  примыкает к  $2 \times 2$  на фазовой диаграмме основных состояний (см. рис. 9), то можно ожидать, что доменная стенка — исходная граничная конфигурация в фазе  $2 \times 1$  — будет иметь в критическом поле  $h_c = 2(1 + \alpha)$  локальную структуру с нулевой энергией фазы  $2 \times 2$ . На рис. 12, а представлена такая исходная конфигурация, форма которой имеет зигзагообразный вид; она описывается  $\{m_k, n_k\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ , где  $m_k$  и  $n_k$  — целые числа, связанные со столбцами  $2k-1$  и  $2k$  соответственно (значения  $k$  равны 1, 2, 3, ...,  $M$ ). Новые граничные конфигурации можно получить при сдвиге граничной линии в столбцах  $2k-1$  и  $2k$  вверх или вниз посредством поворотов определенного числа спинов  $m_k$  и  $n_k$ . Каждая такая конфигурация описывается набором целых чисел  $\{m_k, n_k\}$ , знак которых определяется смещением положения граничной линии относительно исходной (знак минус соответствует смещению вниз). Граничные условия предполагаются периодическими:  $m_{N+k} = m_k$  и  $n_{N+k} = n_k$ . Энергия исходной конфигурации

$$E_0 = -2(2J_1 + 2J_2 + H)N \quad (4.1)$$

(условие  $E_0 = 0$  дает выражение для критического поля при нулевых температурах). Энергия произвольной конфигурации с набором  $\{m_k, n_k\}$

дается относительно  $E_0$  следующим образом:

$$\Delta E = -J_1 \sum_{k=1}^N [e^A(m_k, n_k) + e^B(n_k, m_{k+1})], \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} e^A(m, n) &= 2(|n-m-1|-1) + 2\alpha(|n-m|-1) + h(n-m), \\ e^B(n, m) &= 2(|m-n+1|-1) + 2\alpha(|m-n+2|-1) - h(m-n) \\ (h &= H/J_1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем теперь матрицу переноса  $T_{mm'}$ , элементы которой даются в виде

$$T_{mm'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[J_1(e^A(m, n) + e^B(n, m')) T^{-1}]. \quad (4.4)$$

Используя свойства трансляционной симметрии матрицы переноса:  $T_{mm'} = T_{m+1, m'+1}$ , легко вычислить ее максимальное собственное значение

$$\lambda_{\max} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T_{m_0} \text{ и свободную энергию межфазных конфигураций } \mathcal{F} =$$

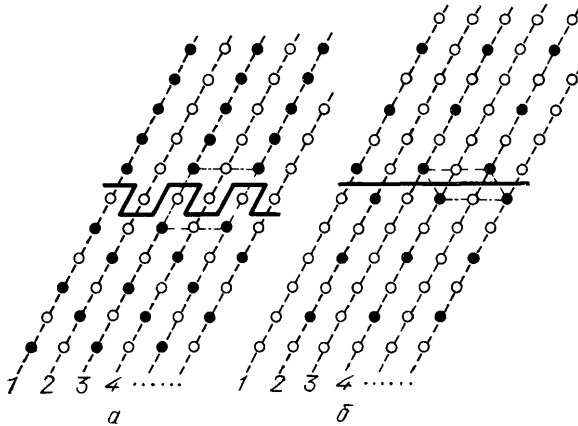


Рис. 12. Исходные граничные конфигурации между двумя  $2 \times 1$ -фазами (а) и двумя  $2 \times 2$ -фазами (б). Светлые и темные кружки обозначают соответственно спины  $S=1$  и  $S=-1$ ; сплошные линии — доменные границы; штриховые — столбцы, пронумерованные от 1 до  $2N$ ; штрих-пунктирной линией изображены элементарные ячейки локальной спиновой структуры смежной фазы  $2 \times 2$  (а) и  $2 \times 1$  (б)

$= E_0 - TN \ln \lambda_{\max}$ . Полагая  $\mathcal{F} = 0$ , получим уравнение для линии фазового перехода [103]

$$(a_+ + b_-)(a_- + b_+) = 1, \quad (4.5)$$

где

$$a_{\pm} = \frac{\exp(-2\alpha/t)}{1 - \exp[-(2+2\alpha \pm h)/t]}, \quad b_{\pm} = \frac{\exp[-(2 \pm h)/t]}{1 - \exp[-(2+2\alpha \pm h)/t]}, \quad t = \frac{T}{|J_1|}.$$

Линия границы  $2 \times 1$ -фазы вычислена по формуле (4.5) для  $\alpha = 0,5$ ; 1 и представлена на рис. 13, а, б кривой 1.

При отличных от нуля температурах легко также найти линию переходов между фазами  $2 \times 2$  и  $1 \times 1$ . На фазовой диаграмме основных состояний они являются смежными со стороны высоких полей. В то же время со стороны низких полей  $h$  фаза  $2 \times 2$  примыкает к фазам  $3 \times 1$ ,  $2 \times 1$  и  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  (рис. 9). Однако при нижних критических полях исходные граничные конфигурации с нулевой энергией существуют только с локальной спиновой структурой, аналогичной фазе  $2 \times 1$ ; на рис. 12, б изображена такая исходная конфигурация с  $\{m_k, n_k\} = \{0, 0, 0, 0, \dots\}$ , для которой энергия  $E_0 = (2J_1 + 2J_2 + H)N$ . Для произвольной конфигурации относительная энергия  $\Delta E$ , даваемая в (4.2) слагаемыми с  $e^A$  и

$e^B$ , выражается теперь следующим образом;

$$e^A(m, n) = 2[|n-m+1|-4(n-m)] + 2\alpha[|n-m|-4(n-m)] + h(n-m), \quad (4.6)$$

$$e^B(n, m) = 2(|m-n|-1) + 2\alpha(|m-n-1|-1) - h(m-n).$$

Поскольку по-прежнему матрица переноса с (4.6) обладает трансляционной симметрией, свободную энергию доменной границы можно получить аналитически. В результате уравнение для линии переходов представится в виде [103]

$$\left[ a + b \exp\left(\frac{4}{t}\right) \right] \left[ a + b \exp\left(\frac{4\alpha}{t}\right) \right] = \exp\left[ \frac{2(1+\alpha)}{t} \right], \quad (4.7)$$

где

$$a = \frac{\exp[-(4+4\alpha-h)/2t]}{1 - \exp[-(6+6\alpha-h)/t]}, \quad b = \frac{\exp(-h/2t)}{1 - \exp[(2+2\alpha-h)/t]}.$$

Линии переходов  $2 \times 2$ -фазы, вычисленные по формуле (4.7) для четырех различных значений  $\alpha$ , изображены на рис. 13 (кривые 2).

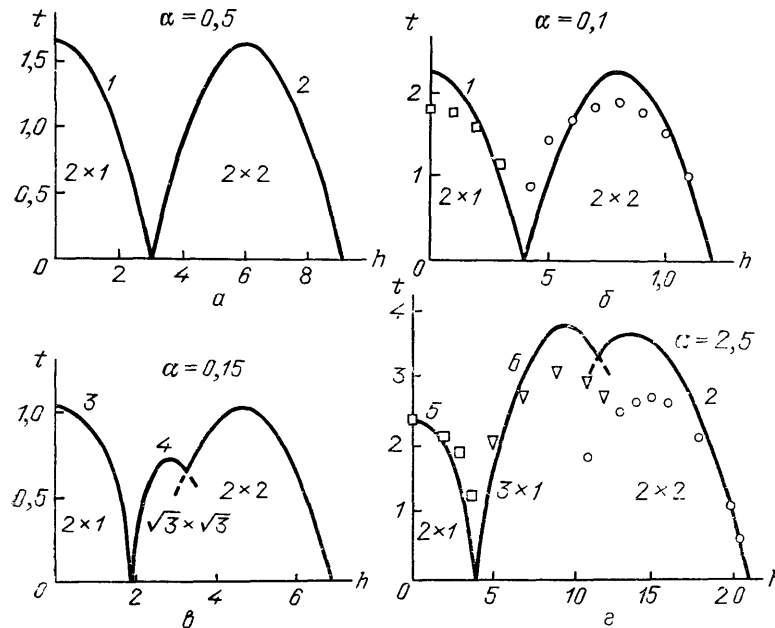


Рис. 13. Фазовые диаграммы для различных значений  $\alpha$ . Кривые 1–6 являются линиями переходов между упорядоченными состояниями и парафазой [103]. Для  $\alpha=1$  и  $2,5$  представлены также результаты численных расчетов по методу Монте-Карло (б, в) [105]

На фазовых диаграммах рис. 13, в, г представлены также линии фазовых переходов (кривые 3, 5), которым соответствуют в исходной  $2 \times 1$ -фазе другие типы граничных конфигураций, а именно, конфигурации с локальной спиновой структурой  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  и  $3 \times 1$ -фазами. Кривые 4, 6 на тех же рисунках построены наоборот, для случая, когда в исходных фазах  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$  и  $3 \times 1$  существуют граничные конфигурации с локальной спиновой структурой, аналогичной  $2 \times 1$ -фазе. Так как для всех этих типов доменных границ элементы матрицы переноса не имеют какой-либо трансляционной симметрии, линии фазовых переходов 3–6 получены численно. При этом для вычисления максимального собственного

значения  $\lambda_{\max}$  использовалась процедура обрезания матрицы  $T_{mm'}$  с бесконечной размерностью [104].

Результаты, полученные методом межфазных конфигураций [102], правильно воспроизводят линии фазовых переходов в основном состоянии  $A, C, D, E$  (см. рис. 9), на которых нет устойчивых соразмерных фаз при любой конечной температуре. Естественно, что это является следствием геометрического характера локальной спиновой структуры доменной границы и не зависит от деталей вычислений. В то же время, поскольку при  $T=0$  на линиях фазовых переходов  $B$  и  $F$  не существует доменных границ с нулевой энергией, обе фазы устойчивы. На рис. 13, б, г для сравнения приведены также результаты численных вычислений [105] методом Монте-Карло. Как видно из этих рисунков, фазовые диаграммы, найденные методом [102], находятся в хорошем соответствии с результатами Монте-Карло. Вместе с тем все же имеются заметные количественные отличия, что, по-видимому, связано с учетом влияния граничных конфигураций конечного размера.

Фазовая диаграмма для более простого случая  $H>0, J_2>0$  ( $\alpha<0$ ) построена в [19, 106–108]. В заключение отметим: в работе [109] обсуждался вопрос о возможности существования частично неупорядоченной фазы в двумерных системах. В приближении среднего поля РД-фаза получена вблизи критических полей  $h_c=2(1+\alpha)$  между фазами  $2\times 1$  и  $2\times 2$ . Однако хорошо известно, что среднеполевое приближение часто дает даже качественно неправильную фазовую диаграмму, если флуктуации велики, как это имеет место в двумерных системах с фрустрированными связями [107, 110]. Поэтому для лучшего понимания и уточнения фазовой диаграммы необходимо дополнительное исследование этого вопроса более строгими методами.

**4.2. Фазовые переходы в гейзенберговских антиферромагнетиках на треугольной решетке (анизотропный и предельный изотропный случаи).** В 2D-анизотропных гейзенберговских антиферромагнетиках, описываемых гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}}^x S_{\mathbf{r}+\mathbf{a}}^x + S_{\mathbf{r}}^y S_{\mathbf{r}+\mathbf{a}}^y) - J_1' \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^z S_{\mathbf{r}+\mathbf{a}}^z, \quad (4.8)$$

связь между  $x$ -компонентами спина ( $J_1 \neq 0$ ) стимулирует упорядочение подрешеток и вызывает, в отличие от рассмотренных выше чисто изинговских треугольных систем с антиферромагнитным взаимодействием лишь между ближайшими спинами, фазовый переход при  $T \neq 0$ . Более того, если в  $J_1' = AJ_1$  коэффициент  $A$  больше единицы, возможны два последовательных фазовых перехода, один из которых связан с упорядочением  $S^z$ -компоненты спина, а другой — с  $S^x$  и  $S^y$ .

В изингоподобном гейзенберговском антиферромагнетике ( $A>1$ ) основное состояние реализуется из трех неколлинеарных магнитных подрешеток, лежащих в одной плоскости, причем эта плоскость во внешнем поле  $\mathbf{H}=(0, 0, H)$  ориентирована так, что включает ось  $z$  (вертикальное расположение). Что же касается поворотов плоскости на угол  $\varphi$  вокруг оси  $z$ , то в такой системе существует непрерывное вырождение. В самой плоскости состоянию с минимальной энергией для трех подрешеток отвечают в классическом случае уравнения типа [44]

$$\cos \theta_1 (\sin \theta_2 + \sin \theta_3) = A \sin \theta_1 (\cos \theta_2 + \cos \theta_3) - \frac{1}{3} h \sin \theta_1, \quad (4.9)$$

где  $\theta_i$  — углы подрешеток в интервале  $[0, 2\pi]$ ,  $h=H/|J_1|$ . Два других уравнения получаются отсюда циклической перестановкой индексов.



Рассмотрим сначала случай  $H = 0$ . Тогда из трех уравнений типа (4.9) независимыми являются только два, так что ориентация одной из подрешеток  $\theta_1$  произвольна. При каждом значении  $\theta_1$  две другие подрешетки подстраиваются нетривиальным образом: углы между различными подрешетками имеют разные значения, изменяющиеся с углом  $\theta_1$ . Эта ситуация напоминает вырождение основного состояния дипольной системы на квадратной решетке, где также ориентация одной из четырех магнитных подрешеток произвольна, а три другие подстраиваются соответствующим образом [121]. В качестве примера устойчивых состояний можно привести следующие решения уравнений типа (4.9): 1)  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, \theta, \pi + \theta)$ , где  $\cos \theta = A/(1+A)$ ; 2)  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\pi/2, \theta, 3\pi - \theta)$ , где  $\sin \theta = 1/(1+A)$ . В обоих случаях энергия основного состояния  $E_0 = -(1+A+A^2)/(1+A)$ . Из этих двух вырожденных решений видно, что в первом случае углы между подрешетками  $\theta, \pi, \pi - \theta$ , а во втором  $-\pi/2 - \theta, \pi - \theta, \pi/2 + 2\theta$ , т. е. действительно, в общем случае они различны и изменяются неэквивалентным образом. При этом система обладает полным моментом  $\mathbf{M}$ , ориентация которого в вертикальной плоскости произвольна, а его модуль по мере уменьшения  $A$  также уменьшается и обращается в нуль в изотропном случае, когда  $A=1$  (структура со 120-градусной конфигурацией спинов, остающейся без изменения и при  $A < 1$ ). Ниже состояния с неколлинеарными спинами удобно характеризовать с помощью так называемого кирального вектора [115], задаваемого следующим соотношением:

$$\mathbf{k} = \frac{2}{3\sqrt{3}} ([\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2] + [\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] + [\mathbf{S}_3, \mathbf{S}_1]), \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$  — единичные векторы спинов, расположенных по вершинам элементарных треугольников (вершины 1, 2, 3 обозначены по часовой стрелке; модуль вектора  $\mathbf{k}$  равен нулю, если какие-нибудь две магнитные подрешетки параллельны, и равен единице для 120-градусной структуры).

Основное состояние с двумя независимыми параметрами  $\varphi$  и  $\theta_1$  имеет пространство вырождения  $V = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ , не нарушаемое даже в гармоническом приближении [44]. В то же время непрерывное вырождение по углу  $\theta_1$  не может быть реализовано при  $T \neq 0$  из-за другой  $Z_6 \times S_1$ -симметрии гамильтониана (4.8) \*).

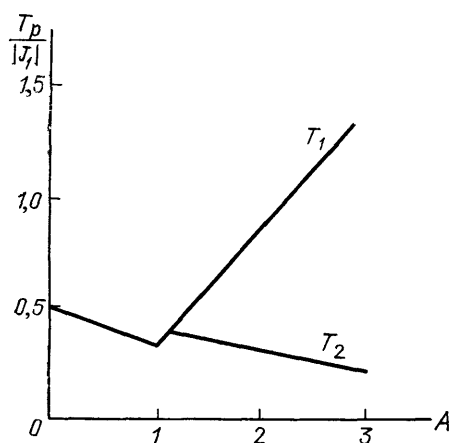
Проведенные при конечных температурах численные вычисления показывают, что теплоемкость имеет аномалии в двух точках (для  $A = 2$   $T_1 = 0,9|J_1|$ ,  $T_2 = 0,3|J_1|$ ). Ниже точки первого перехода  $T_1$  упорядочиваются сначала только  $z$ -компоненты спина (переход с нарушением шестикратной симметрии, так что эффективная симметрия промежуточной фазы  $S_4$ ). В этом состоянии ( $T_2 < T < T_1$ ) две подрешетки спиновой структуры ориентированы в противоположном направлении к третьей, причем полный спиновый момент отсутствует. В низкотемпературной фазе ( $T < T_2$ ) флуктуации по  $\varphi$  подавлены и дополнительно возникают спадающие степенным образом корреляции  $xy$ -компонент спина. В этой фазе киральный вектор  $\mathbf{k}$  отличен от нуля. Действительно, в численных экспериментах [44] было найдено резкое возрастание  $k$  в точке перехода  $T = T_2$  (переход  $S_4 \rightarrow R_1$  с исчезновением свободных  $Z$ -вихрей;  $R_1$  — прямая линия, которой соответствует одномерная группа трансляций  $T(1)$ ). Киральная симметрия и локальный параметр порядка для треугольных антиферромагнетиков с различными спинами представлены в табл. I.

\*) В принципе, конечно, возможно в некоторых случаях и повышение симметрии в критических точках на фазовой диаграмме — явление асимптотической симметрии [117].

Таблица I. Киральная симметрия и локальный параметр порядка в треугольных антиферромагнетиках с различными спинами

Спин	Киральность	Локальный параметр порядка
Изинг — Гейзенберг [44] Гейзенберг [22] XY [38—42]	$S_1$ $S_2$ $Z_2$	$S_1 \times S_1$ $P_3 = S_3 / Z_2$ $Z_2 \times S_1$

С уменьшением  $A$  температурный интервал промежуточной фазы уменьшается (рис. 14) и исчезает при  $A \leq 1$ . В изотропном пределе  $A = 1$  симметрия высокотемпературной фазы изменяется с  $Z_6 \times S_1$  на проективное пространство  $P_3 = SO(3)$ , где  $SO(3)$  — группа трехмерных вращений. 3D-магнетики с пространством параметра порядка  $V \sim SO(3)$

Рис. 14. Фазовая диаграмма треугольных 2D-антиферромагнетиков с анизотропным обменным взаимодействием (по данным работы [44]); при  $A \rightarrow \infty$  отношение  $T_1/A = 0$  (предельный случай изинговской системы)

хорошо известны — это прежде всего  $UO_2$ ,  $YMnO_3$ , сверхтекучая фаза  $^3He-A$ . В рассматриваемых здесь двумерных фрустрированных системах единственный непрерывный переход — переход типа Березинского — Костерлица — Таулеса — обусловлен диссоциацией  $Z_2$ -вихревых пар ( $0 \rightarrow 1+1$ ). При этом интересно: из двух типов вихрей (рис. 15, а, б) вклад в термодинамику дают в основном те  $Z_2$ -структуры, которые образованы вращением кирального вектора вокруг кора вихря (рис. 15, б), поскольку именно они и обладают наименьшей энергией [116]. Два таких  $Z_2$ -вихря, находящихся на расстоянии, меньшем длины спиновых корреляций, имеют из-за выигрыша энергии противоположное направление вращений кирального вектора. Так что они весьма похожи на пару вихрь — антивихрь с противоположным «зарядом», аналогичным  $Z$ -вихрям в XY-ферромагнетиках \*). В табл. II для сравнения приведены данные о топологически устойчивых дефектах, возникающих в различных спиновых системах с 2D-треугольной решеткой.

В отличие от ранее рассмотренного перехода  $S_1 \rightarrow R_1$ , где спиновые корреляции, как и в ферромагнитной XY-модели [26—28], имеют степенную зависимость, в изотропном антиферромагнетике топологический переход  $P_3 \rightarrow S_3$  происходит между двумя фазами, каждая из которых характеризуется экспоненциальным спадом спиновых корреляций. Данное обстоятельство можно, например, понять с точки зрения киральной симметрии. Ниже критической температуры непрерывная степень сво-

\*) Если расстояние между  $Z_2$ -вихрями больше длины спиновых корреляций, этой аналогии, естественно не существует, поскольку спиновые волны разрушают все нетопологические характеристики вихрей.

боды кирального вектора  $\mathbf{k}$  сохраняется, причем его пространство вырождения  $S_2$  совпадает с пространством параметра порядка для гейзенберговских ферромагнетиков. В последних спиновые корреляции также экспоненциально спадают при любой конечной температуре [114],

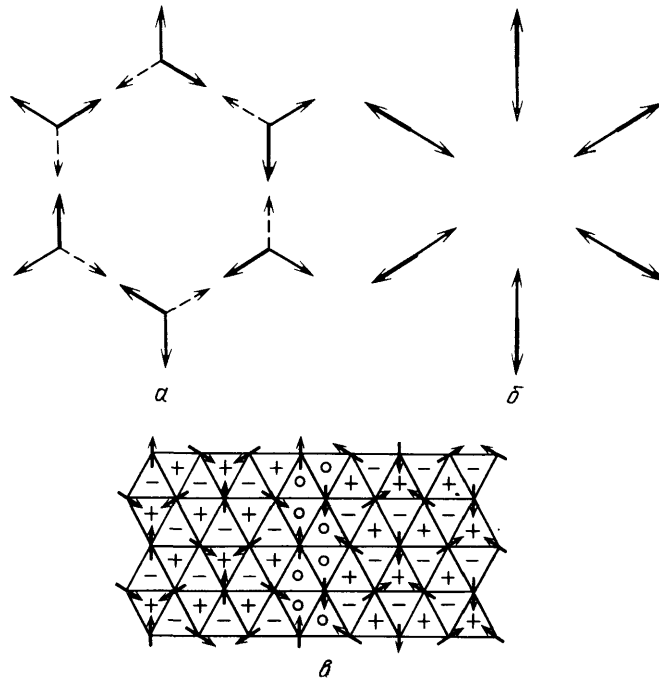


Рис. 15.  $a$ ,  $b$  —  $Z_2$ -структуры с вихревым числом 1 в 2D-гейзенберговских треугольных антиферромагнетиках:  $a$  соответствует перпендикулярная ориентация кирального вектора относительно плоскости рисунка;  $b$  — киральный вектор лежит в плоскости рисунка (а одна из магнитных подрешеток, наоборот, перпендикулярна плоскости этого рисунка).  $c$  — Два основных состояния, разделенных доменной стенкой, в 2D-XY-треугольном антиферромагнетике; знакам «+» и «-» соответствуют значения  $k=1$  и  $k=-1$ , вдоль стенки  $k=0$ .

однако механизм фазового перехода типа Березинского — Костерлица — Таулеса в них не реализуется, поскольку топологические возбуждения — инстантоны (см. табл. II) — имеют только конечную, не зависящую от размера системы энергию.

Таблица II. Пространство параметра порядка  $V$  и ассоциированная гомотопическая группа  $\pi_r(V)$  для различных спиновых систем с треугольной решеткой

Системы	$V$	$\pi_0(V)$	$\pi_1(V)$	$\pi_2(V)$
	Пространство параметра порядка	Линия	Точка	Инстантон
Ферро-XY	$S_1 = SO(2)$	0	$Z$	0
Ферро-Гейзенберг	$S_2$	0	0	$Z$
АФ-Гейзенберг	$P_3 = SO(3)$	0	$Z_2$	0
АФ-XY	$Z_2 \times S_1$	$Z_2$	$Z$	0

Как показали Кавамура и Мияшита [22], параметр порядка в рассматриваемой системе можно ввести посредством вихревой функции, определенной на замкнутом контуре [22]. В высокотемпературной фазе вихревая функция быстро спадает по закону площади, в то время как в низкотемпературной фазе она спадает гораздо медленнее — по закону периметра. Этот критерий фазового перехода аналогичен критерию,

известному в проблеме кварк-конфайнмента в решеточной калибровочной теории [29, 30].

Экспериментально последовательные фазовые переходы обнаружены в прецизионных измерениях на квазидвумерном гейзенберговском антиферромагнетике  $\text{VCl}_2$  [123]. Благодаря слабой изинговской анизотропии в этом магнетике реализуются последовательные фазовые переходы при  $T_1=35,88$  К и  $T_2=35,80$  К. В 2D-гейзенберговской области, чуть выше  $T_1$ , форма линии для восприимчивости  $\chi(\mathbf{q})$  близка к виду Орнштейна — Цернике, что, по-видимому, подтверждает наличие в системе магнитных точечных дефектов. В то же время в другом квазидвумерном гейзенберговском антиферромагнетике  $\text{VBr}_2$  обнаружен только единственный переход. При этом, как и в численных расчетах для изотропного случая  $A=1$ , температурная зависимость однородной восприимчивости вблизи критической точки почти полого и изотропна [31 — 34].

Отметим здесь: в соединениях  $\text{VBr}_2$ ,  $\text{VCl}_2$  из-за слабого межплоскостного взаимодействия наблюдается температурный кроссовер от 2D- к 3D-поведению. Тепловые, магнитные и нейтронографические измерения, выполненные в этих магнетиках в узкой 3D-температурной области, показывают, что критическое поведение в них сильно отличается от обычных нефрустрированных систем с  $Z_2$ -,  $S_1$ -,  $S_2$ -симметрией: теплоемкость в  $\text{VBr}_2$  имеет сильную расходимость [122] ( $\alpha=0,59$ ), а значения  $\beta=0,20$ ,  $\gamma=1,05$  и  $\nu=0,62$  в  $\text{VCl}_2$  [123] близки к критическим индексам  $\text{SO}(3)$ -универсального класса, вычисленным недавно в [35] (табл. III). В связи с этим было бы интересным исследовать критическое поведение (при непрерывных переходах) и в других магнетиках с пространством параметра порядка  $V \sim \text{SO}(3)$ :  $\text{YMnO}_3$ ,  $^3\text{He-A}$ . Основным недостатком при наблюдении нового критического поведения в них — малая ширина критической области. Особенно это касается сверхтекучей фазы  $^3\text{He-A}$ , где критическая область чрезвычайно узка [124] и равна по порядку  $t \sim 10^{-5}$ ; экспериментально обнаружен [23] только конечный скачок теплоемкости (среднеполевое поведение вне области  $t$ ), для наблюдения же ожидаемого расходящегося вида  $C$  необходимы весьма прецизионные измерения.

Таблица III. Значения критических индексов для различных трехмерных систем (значения систем  $Z_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  по данным [125])

Системы	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\nu$
Изинг ( $Z_2$ )	0,110	0,325	1,240	0,630
$\text{XY}$ ( $S_1$ )	—0,008	0,346	1,316	0,669
Гейзенберг ( $S_2$ )	—0,116	0,365	1,387	0,705
АФ-Гейзенберг ( $\text{SO}(3)$ ) [35]	0,4	0,25	1,1	0,53
АФ-XY ( $Z_2$ $S_1$ ) [42]	0,44	0,22	1,1	0,52

Во внешнем поле  $H \neq 0$  нетривиальное вырождение основного состояния по  $\theta_1$  (при  $A > 1$ ) исчезает. Вместо этого в зависимости от величины  $H$  возникают четыре устойчивые планарные конфигурации (рис. 16, а—г). Этим конфигурациям удовлетворяют следующие решения уравнений (4.9):

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \theta_1 = \pi, \theta_2 = -\theta_3 = \theta, \quad \cos \theta &= \left(A + \frac{h}{3}\right)(1+A)^{-1}, \quad 0 \leq h \leq h_{c_1}, \\
 \text{б) } \theta_1 = \pi, \theta_2 = \theta_3 = 0, \quad h_{c_1} &\leq h \leq h_{c_2}, \\
 \text{в) } \theta_1 \neq \theta_2 = \theta_3, \quad h_{c_2} &\leq h \leq h_{c_3}, \\
 \text{г) } \theta_1 = \theta_2 = \theta_3, \quad h &\geq h_{c_3},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

где  $h_{c_1}=3$ ,  $h_{c_2}=1,5[2A-1+(4A^2+4A-7)^{1/2}]$ ,  $h_{c_3}=3(1+2A)$ . Зависимости кривых намагничивания  $M_z(H_z)$  и  $M_x(H_z)$  даны на рис. 16, д (предполагается, что плоскость спиновых конфигураций совпадает с плоскостью  $z, x$ ). Кривая  $M_z(H_z)$  имеет «метамгнитное» поведение в отличие от планарного треугольного антиферромагнетика [39], где она представляет собой прямую линию, пока  $M_z$  не достигнет предельного

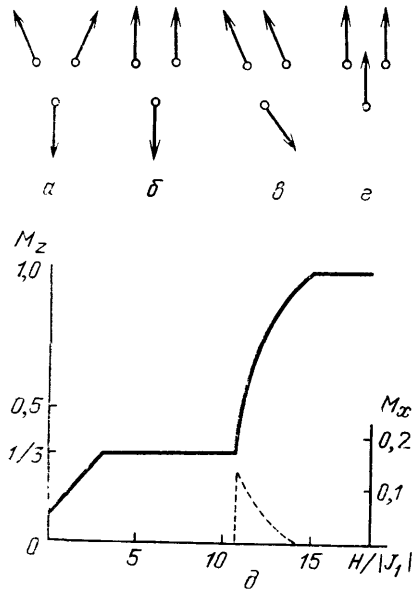


Рис. 16. а–д — Основное состояние изингоподобного гейзенберговского антиферромагнетика в различных полях:  $0 \leq h \leq h_{c_1}$  (а),  $h_{c_1} < h < h_{c_2}$  (б),  $h_{c_2} < h < h_{c_3}$  (в),  $h > h_{c_3}$  (г). е — Кривые намагничивания в единицах  $M$  для случая  $A=2$ ; сплошная линия —  $M_z(H_z)$ , пунктирная —  $M_x(H_z)$  [128]

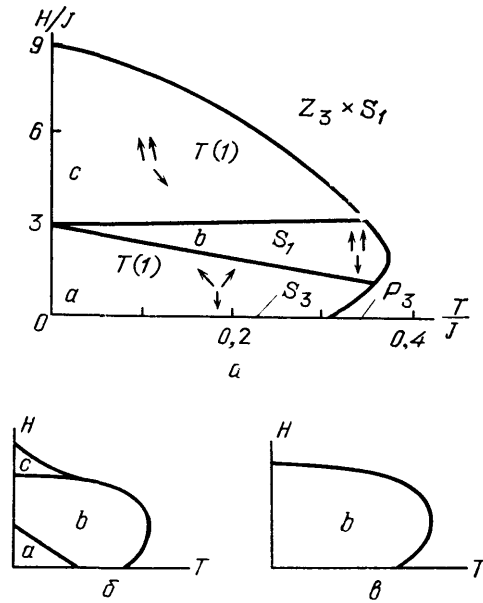


Рис. 17. Фазовые диаграммы (б и в — схематически) для двумерных треугольных антиферромагнетиков. а — Изотропный случай [127]. б — Анизотропный [128]. в — Предельный случай изинговской системы

значения. Аналогично изинговскому случаю [106, 126] кривая  $M_z(H_z)$  имеет плато на высоте  $1/3$  от  $M$ . Плато соответствует структура на рис. 16, б с интервалом полей  $h_{c_1} \leq h \leq h_{c_2}$ ; в изотропном пределе  $A=1$  интервал  $h$  стягивается в точку. Другая кривая  $M_x(H_z)$  обусловлена существованием нетривиальной степени свободы в направлении  $x$  для одного из состояний (рис. 16, в).

Фазовая  $T$ – $H$ -диаграмма для анизотропных гейзенберговских антиферромагнетиков исследовалась в [127, 128]. Она содержит три упорядоченные фазы  $a, b, c$  (рис. 17, а, б), причем высокотемпературная имеет во внешнем поле  $Z_3 \times S_1$ -симметрию. В промежуточном интервале полей даже при  $A=1$  (рис. 17, а) возможны два последовательных фазовых перехода, один из которых связан с упорядочением продольных компонент спина, а другой — с упорядочением поперечных компонент. Фазы  $a$  и  $c$  имеют одинаковую  $R_1$ -симметрию, однако в отличие от фазы  $a$  киральный вектор в фазе  $c$  вследствие параллельности двух подрешеток равен нулю. С увеличением  $A$  область существования фаз  $a$  и  $c$  уменьшается (рис. 17, б) и исчезает в предельном случае чисто изинговской системы (рис. 17, в).

В фрустрированных системах квантовые эффекты могут решающим образом изменить основное состояние, что по существу связано с возможностью полного исчезновения эффективной спиновой длины. Это обстоятельство особенно важно для гейзенберговских антиферромагнетиков со спином  $1/2$ , основное состояние которых Андерсон предложил

описывать как состояние с магнитной квантовой жидкостью, характеризующей ансамблем случайно распределенных подвижных синглетных пар на двумерной треугольной решетке [45]. Такая картина основного состояния — состояния с резонирующей валентной связью (РВС) [45] — по крайней мере частично подтверждается в численных расчетах для конечных систем [129, 130]. Кроме того, Фазекас и Андерсон указали [131], что РВС-состояние может быть уместным даже при описании основного состояния систем с изингоподобной обменной анизотропией. Термодинамические свойства таких систем (при  $H = 0$ ) рассматривались в [132]: в отличие от классических в них не найдено ни упорядочения подрешеток, ни фазовых переходов. В реальных экспериментах на двумерных гейзенберговском  $\text{NaTiO}_2$  и изингоподобном  $\text{LiNiO}_2$  антиферромагнетиках также не обнаружен дальний порядок [46, 87] (брэгговское рассеяние отсутствует даже при очень низких температурах).

Во внешнем поле вопрос об основном состоянии для анизотропных гейзенберговских антиферромагнетиков с  $S=1/2$  исследовался Ниши-мори и Мияшитой [47]. Зависимость  $M_z$  от  $H_z$  определялась путем численной диагонализации спинового гамильтониана (4.8). Результаты вычислений показывают: при  $H \rightarrow 0$  маловероятно, что  $M_z$  остается конечной в отличие от классического случая. Далее, в интервале полей  $h_{c_1} \leq h \leq h_{c_2}$  существует плато (на той же высоте  $1/3$  от  $M$ ) и в квантовой системе, так что для этого интервала  $h$  преобладает классическое состояние с коллинеарными спинами (рис. 16, б). Вне плато система практически находится в квантовом состоянии. В частности, классическая картина перестает быть справедливой при  $h > h_{c_2}$ , где дальний порядок для поперечной намагниченности отсутствует — нарушено состояние со скошенными подрешетками (рис. 16, в), — поэтому всюду  $M_x(H_z) = 0$ .

**4.3. Фазы в треугольном планарном антиферромагнетике.** В фрустрированных антиферромагнетиках с XY-спинами на треугольной решетке наряду с непрерывным вырождением основного состояния дополнительно реализуется двукратное дискретное вырождение: два основных состояния с взаимно противоположной ориентацией волнового вектора  $\mathbf{Q}_k$  120-градусной структуры не могут быть переведены друг в друга при поворотах спинов в плоскости (см. рис. 15, в). В соответствии с тем, что пространство  $V$  в таких системах —  $O(2) = Z_2 \times S_1$ , можно ожидать аналогично результатам предыдущего раздела два фазовых перехода с последовательным нарушением дискретной и непрерывной компонент параметра порядка.

Фазовый переход в нулевом поле исследовался для таких систем в различных работах [38–41]. Первые численные расчеты, проведенные в [38], показали, что критические температуры, обусловленные наличием в системе линейных и точечных дефектов, весьма близки. Более того, дальнейшие численные расчеты [39] показали, что в пределах статистической ошибки эти критические температуры из-за механизма разрыва вихрей доменными стенками совпадают. Аналогичный результат о единственном переходе был получен и другими методами [40, 41].

Приложенное в плоскости треугольной решетки внешнее поле оставляет непрерывное вырождение основного состояния при  $H < 9|J_1|$  (обратное неравенство  $H \geq 9|J_1|$  соответствует параллельной ориентации спинов — схлопнутые подрешетки). Более того, при  $H < 3|J_1|$  сохраняется и дискретная симметрия, т. е., другими словами, существует два несвязных множества состояний. Однако непрерывная степень свободы не обусловлена симметрией гамильтониана для данной системы

$(H \neq 0)$ :

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{S}_{\mathbf{r}} \mathbf{S}_{\mathbf{r}+\mathbf{a}} - \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{H} \mathbf{S}_{\mathbf{r}}, \quad (4.12)$$

так что при конечных температурах она не должна быть разрешена.

При наличии поля группой симметрии  $\mathcal{H}$  в (4.12) является

$$G = \mathbf{T} \cdot C_{6v} \cdot C_s^{(\text{spin})}, \quad (4.13)$$

где  $\mathbf{T} = m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2$ ,  $C_{6v}$  — соответственно группа трансляций и точечная группа на треугольной решетке, а  $C_s^{(\text{spin})}$  — группа, связанная с отражением спина относительно направления магнитного поля. Фурье-компонента спина

$$\Psi_{\mathbf{Q}_k} = N^{-1} \sum_{\mathbf{R}} \mathbf{S}_{\mathbf{R}} \exp(-i\mathbf{Q}_k \mathbf{R}) \equiv (\sigma_{\parallel} + i\tau_{\parallel}, \sigma_{\perp} + i\tau_{\perp}) \quad (4.14)$$

( $\sigma_{\parallel}$ ,  $\tau_{\parallel}$  и  $\sigma_{\perp}$ ,  $\tau_{\perp}$  — соответственно продольные и поперечные компоненты относительно ориентации  $\mathbf{H}$ ), отвечающая параметру порядка, образует четырехмерный базис ( $\sigma_{\parallel}$ ,  $\tau_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$ ,  $\tau_{\perp}$ ), на котором неприводимое представление группы  $G$  состоит из двенадцати элементов. Поскольку, однако, матрицы этого представления имеют блочно-диагональную форму, они могут быть приведены к матрицам двух неприводимых представлений на базисах ( $\sigma_{\parallel}$ ,  $\tau_{\parallel}$ ) и ( $\sigma_{\perp}$ ,  $\tau_{\perp}$ ), причем на первом базисе возможно только шесть различных матриц, а на втором — из-за спиновых отражений относительно поля — вдвое больше. Анализ преобразований с элементами группы  $G$  показывает, что матрицы представлений на базисе ( $\sigma_{\parallel}$ ,  $\tau_{\parallel}$ ) изоморфны точечной группе  $C_{3v}$ , а на ( $\sigma_{\perp}$ ,  $\tau_{\perp}$ ) они изоморфны  $C_{6i}$  ( $(C_{3v}, C_{6i})$  — представление исходной фазы).

Таблица IV. Подгруппы пространственной группы  $G$  и соответствующие им компоненты параметра порядка для планарных антиферромагнитных систем на треугольной решетке [39]

Спиновая группа	Группа трансляций	Точечная группа	Представление	Параметр порядка			
				$ \langle \sigma_{\parallel} \rangle $	$ \langle \tau_{\parallel} \rangle $	$ \langle \sigma_{\perp} \rangle $	$ \langle \tau_{\perp} \rangle $
$C_s$	$m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2$	$C_{6v}$	$(C_{3v}, C_{6v})$	0	0	0	0
$I$	$m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2$	$C_{6v}$	$(C_{3v}, C_{3v})$	0	0	0	0
$C_s$	$(m+2n)\mathbf{a}_1 + (m-n)\mathbf{a}_2$	$C_{6v}$	$(C_s, C_{2v})$	$>0$	0	0	0
$I$	$(m+2n)\mathbf{a}_1 + (m-n)\mathbf{a}_2$	$C_{6v}$	$(C_s, C_s)$	$\geq 0$	0	$>0$	0
$C_s$	$(m+2n)\mathbf{a}_1 + (m-n)\mathbf{a}_2$	$C_{3v}$	$(C_1, C_1)$	$\geq 0$	$>0$	0	0
$I$	$(m+2n)\mathbf{a}_1 + (m-n)\mathbf{a}_2$	$C_{3v}$	$(C_1, C_1)$	$\begin{cases} \geq 0 \\ >0 \end{cases}$	$\begin{cases} \geq 0 \\ >0 \end{cases}$	$\begin{cases} \geq 0 \\ >0 \end{cases}$	$\begin{cases} >0 \\ 0 \end{cases}$

В табл. IV указаны все шесть подгрупп группы  $G$  (предполагается, что наибольшим периодом трансляции является  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ), там же на основе теоретико-группового рассмотрения приведены для соответствующих подгрупп отличные от нуля компоненты параметра порядка. В общем случае при нарушении спиновой ( $S$ ),  $1 \times 1$ -трансляционной ( $T$ ) и точечной ( $P$ ) симметрии возможно одиннадцать непрерывных переходов между различными подгруппами, представления которых даны в табл. IV; приведем их:

- 1)  $(C_{3i}, C_{6v}) \rightarrow (C_{3i}, C_{3i})$ , 2)  $(C_{3i}, C_{6v}) \rightarrow (C_s, C_{2i})$ ,
- 3)  $(C_{3v}, C_{3v}) \rightarrow (C_s, C_s)$ ,

$$\begin{aligned}
&4) (C_s, C_{2v}) \rightarrow (C_s, C_s), \quad 5) (C_s, C_{2v}) \rightarrow (C_1, C_1), \quad 6) (C_s, C_s) \rightarrow (C_1, C_1), \\
&7) (C_1, C_1) \rightarrow (C_1, C_1), \quad 8) (C_{3v}, C_{6v}) \rightarrow (C_s, C_s), \quad 9) (C_{3v}, C_{6v}) \rightarrow (C_1, C_1), \\
&10) (C_s, C_{2v}) \rightarrow (C_1, C_1), \quad 11) (C_{3v}, C_{6v}) \rightarrow (C_1, C_1).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Из всех перечисленных случаев переход 1 — переход с нарушением симметрии относительно спиновых отражений — является единственным, где параметр порядка (4.14) несуществен. Очевидно, что физически это связано с сохранением трансляционной  $1 \times 1$ -симметрии. Переходы же 8 и 9 происходят при одновременном нарушении двух симметрии: либо  $S$ - и  $T$ -симметрий (8), либо  $T$ - и  $P$ -симметрий (9), а переход 11 — с нарушением всех трех,  $S$ ,  $T$ ,  $P$ .

Численное исследование полевой зависимости компонент параметра порядка от температуры показывает, что существуют четыре линии переходов второго рода: две из них типа порядок — беспорядок и две другие — типа порядок — порядок [39]. На рис. 18 представлены области существования различных фаз с не равными нулю компонентами  $\langle \sigma \rangle$ ,  $\langle \tau \rangle$ . Как и для случая анизотропных гейзенберговских антиферромагнетиков (раздел 4.2), существуют три упорядоченные фазы. Симметрии их найдены в соответствии с табл. IV. В интервале  $H \leq 4|J_1|$  упорядоченное состояние реализуется с  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle \neq 0$  (киральным параметр  $k=0$ ) и имеет симметрию  $(C_s, C_{2v})$ ; с понижением температуры дополнительно конденсируется либо поперечная компонента  $\langle \tau_{\perp} \rangle$  (тогда  $k \neq 0$ , фаза  $(C_1, C_1)$ ), либо  $\langle \sigma_{\perp} \rangle$  ( $k=0$ , фаза  $(C_s, C_s)$ ). В результате, если  $H < 3|J_1|$ , реализуются последовательные фазовые переходы  $(C_{3v}, C_{6v}) \rightarrow (C_s, C_{2v}) \rightarrow (C_1, C_1)$ , а при  $3|J_1| < H \leq 4|J_1|$  —  $(C_{3v}, C_{6v}) \rightarrow (C_s, C_{2v}) \rightarrow (C_s, C_s)$ . Эти, а также другие переходы согласуются с найденными на основе симметрийного анализа переходами (4.15).

Фазовые границы во внешнем поле исследовались на основе анализа симметрии и скейлингового расчета по методу Монте-Карло для конечных систем [118–120]. Скейлинговые кривые перехода  $(C_{3v}, C_{6v}) \rightarrow (C_s, C_{2v})$  при  $H=2|J_1|$  и  $H=3|J_1|$  (см. рис. 18) хорошо описываются критическими индексами  $\alpha=1/3$ ,  $\beta=1/9$ ,  $\gamma=13/9$ ,  $\nu=5/6$  [39], имеющими такие же значения, как и при переходе с универсальным классом трехуровневой модели Поттса [133]. В то же время характер перехода на других границах совершенно другой. Так, аналогичные вычисления индексов вдоль границы фазового перехода  $(C_{3v}, C_{6v}) \rightarrow (C_s, C_s)$  дают неуниверсальное поведение [39]: при  $H=4|J_1|$  получено  $\beta=0,20$ ,  $\gamma=1,55$ , а при  $T=0,3|J_1|$  —  $\beta=0,28$ ,  $\gamma=1,45$  (в обоих случаях  $\nu=1$ ; теплоемкость не имеет расходимости:  $\alpha < 0$ ). Неуниверсальное поведение и на двух внутренних фазовых границах — переходы  $(C_1, C_1) \rightarrow (C_s, C_{2v})$  и  $(C_s, C_{2v}) \rightarrow (C_s, C_s)$ , — где с возрастанием температуры от  $T=0,3|J_1|$  до  $T=0,4|J_1|$  значение  $\beta$  изменяется от 0,14 до 0,21. Для последнего перехода интересно в особенности то, что теплоемкость при пересечении границы  $(C_s, C_{2v}) \rightarrow (C_s, C_s)$  не имеет аномалий, а однородная намагниченность — особенностей, так что определение фазового перехода возможно лишь по поведению параметра порядка.

Экспериментально фазовый переход во внешнем поле исследовался в планарном квазидвумерном треугольном антиферромагнетике  $\text{CsMnBr}_3$ . Обнаружено [111], что единственно существующий фазовый переход расщепляется на два при  $H \neq 0$ . В  $\text{CsMnBr}_3$  недавно исследовалось также критическое поведение в 3D-области температурного кроссовера ( $H=0$ ). Экспериментально найденные [112, 113] индексы этого соединения значительно отличаются от стандартных нефрустрированных систем, но в то же время близки к соответствующим индексам  $Z_2 \times S_1$ -универсального класса, теоретически вычисленным в [42, 134] (см. табл. III).



Что же касается двумерных квантовых систем со спином  $S = 1/2$ , то в XY-антиферромагнетиках так же, как и в гейзенберговских, фазовый переход при  $T \neq 0$  не найден. Вместе с тем, для основного состояния численные результаты [36] показывают степенное спадание (с индексом  $\eta = 0,34$ ) корреляционной функции.

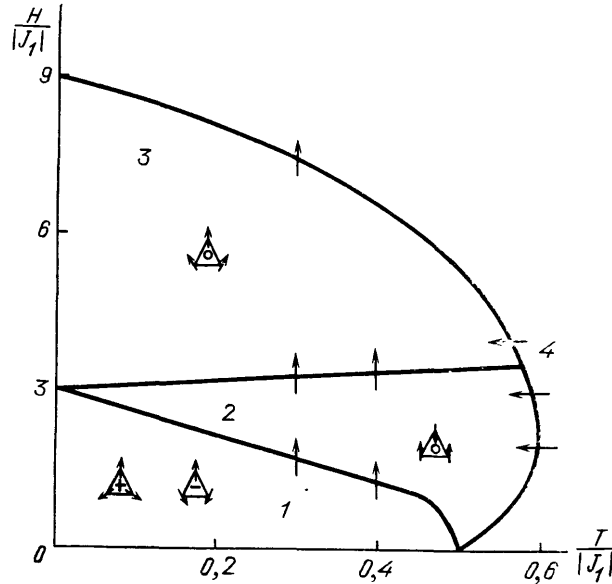


Рис. 18. Фазовая диаграмма для планарных антиферромагнитных систем на треугольной решетке [39]: 1 — фаза  $(C_1, C_1)$  с компонентами параметра порядка  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle \neq 0$ ,  $\langle \tau_{\perp} \rangle \neq 0$ , киральность  $\neq 0$ ; 2 — фаза  $(C_S, C_{2v})$  с  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle \neq 0$ ,  $k=0$ ; 3 — фаза  $(C_S, C_S)$  с  $\langle \sigma_{\parallel} \rangle \neq 0$ ,  $\langle \sigma_{\perp} \rangle \neq 0$ ,  $k=0$ ; 4 — фаза  $(C_{3v}, C_{6v})$  с  $\langle \sigma_{\parallel}, \perp \rangle \neq 0$ ,  $\langle \tau_{\parallel}, \perp \rangle = 0$ . Стрелки на фазовых границах указывают направления переходов, для которых при фиксированных  $H$  или  $T$  исследовалось критическое поведение

**5. Заключение.** Выполненные к настоящему времени экспериментальные и теоретические исследования для антиферромагнетиков с треугольной решеткой позволили обнаружить много очень интересных и разнообразных фаз и фазовых переходов. Свойства фаз, а также поведение систем в процессе упорядочения имеют по сравнению с обычными совершенно другой характер, что в решающей степени связано с фрустрированностью систем. С последним обстоятельством связана и высокая чувствительность параметра порядка к различного рода возмущающим взаимодействиям. В связи с этим дальнейшие исследования представляется целесообразным вести в направлении, позволяющем выяснить роль других возможных факторов. Один из них — влияние примесей на термодинамические свойства фрустрированных систем. Даже слабое случайное искажение треугольной решетки примесями (и изменение тем самым констант обменных взаимодействий) должно приводить к заметным эффектам. Другой фактор — устойчивость треугольных решеток относительно регулярных деформаций. В двумерных антиферромагнетиках фрустрации могут быть разрешены за счет искажения решетки с равносторонней треугольной структуры на равнобедренную, которой будет соответствовать антипараллельное расположение спинов вдоль одного из направлений. Такая неустойчивость по существу есть спин-пайерлсовская, обычно возникающая в квазиодномерных антиферромагнитных системах. Далее, интересно проследить, как будут изменяться свойства квантовой магнитной жидкости при наличии трехмерных эффектов, обусловленных межплоскостным обменным взаимодействием. Представляется также весьма важным более широкое исследование динамических свойств фрустрированных систем и особен-

но двумерных гейзенберговских антиферромагнитных систем, в низкотемпературной фазе которых наблюдается хотя и большая, но конечная длина спиновых корреляций. Несомненно, что дальнейшие активные исследования антиферромагнетиков с треугольной решеткой принесут много других интересных результатов, что поможет еще лучше понять столь разнообразные свойства изучаемых систем.

В заключение выражаю глубокую благодарность Изюмову Ю. А. за обсуждение работы, Каганову М. И., Чубукову А. В. и Кузьмину Е. В. за прочтение рукописи и полезные замечания. Мне приятно поблагодарить Иванова Б. А. за ряд ценных замечаний, учтенных в работе. Наконец, я чрезвычайно признателен Игнатченко В. А. за поддержку идеи написания обзора, обсуждение его плана и содержания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Haseda T, Wada N, Hata M, Amaya K//Physica Ser R 1981 V 108 P 841
- 2 Wada N, Ulikoshi K, Hirakawa K//J Phys Soc Japan 1982 V 51 P 2833
- 3 Shiba H//Sol State Commun 1982 V 41 P 511
- 4 Suzuki N//J Phys Soc Japan 1983 V 52 P 3199
- 5 Кнор В, Стейнер М, Дэй П//J Magn and Magn Mater 1983 V 31—34 P 1033
- 6 Федосеева И. В., Гехт Р. С., Великанова Т. А., Балаев А. Д.//Письма ЖЭТФ 1985 T 41 C 332
- 7 Изюмов Ю. А.//УФН 1984 T 144 C 439
- 8 Изюмов Ю. А. Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах — М. Энергоатомиздат 1987
- 9 Adam A, Billerey D, Terrier C, Mainard R//Sol State Commun 1980 V 35 P 1
- 10 Kuindersma S R, Sanchez J P, Haas C//Physica Ser B 1981 V 111 P 231
- [11] Regnault L P, Rossat Mignod J, Adam A, Billerey D//J de Phys 1982 T 43 P 1283
- 12 Adam A, Billerey D, Terrier C, Barthelemy H, Regnault L P, Rossat Mignod J//Phys Lett Ser A 1981 V 84 P 24
- 13 Moore M W, Day P, Wilkinson C, Ziebeck K R A//Sol State Commun 1985 V 53 P 1009
- 14 Villain J//Physica Ser B 1977 V 86—88 P 631
- 15 Гехт Р. С.//ЖЭТФ 1987 T 95 C 255
- 16 Yoshizawa H, Hirakawa K//J Phys Soc Japan 1980 V 46 P 448
- 17 Yelon W B, Cox D E, Eibschutz M//Phys Rev Ser B 1975 V 12 P 5007
- 18 Shiba H//Prog Theor Phys 1980 V 64 P 466
- 19 Kaburagi M, Tonegawa T, Kanamori J//J Phys Soc Japan 1982 V 51 P 3857
- 20 Matsubara T, Ikeda S//Phys Rev Ser B 1983 V 28 P 4064
- [21] Matsubara T, Inawashiro S//J Phys Soc Japan 1984 V 53 P 4373
- 22 Kawamura H, Miyashita S//Ibidem P 9
- 23 Fruchart D, Beataut E F, Madar R, Lorthioir G, Fruchart R//Sol State Commun 1971 V 9 P 1793
- 24 Андреев А. Ф., Марченко В. И.//УФН 1980 T 130 C 39
- 25 Wheatley J C//Rev Mod Phys 1975 V 47 P 415
- 26 Березинский В. Л.//ЖЭТФ 1970 T 59 C 907
- 27 Kosterlitz J M, Thouless D J//J Phys Ser C 1973 V 6 P 118
- 28 Kosterlitz J M//Ibidem 1974 V 7 P 1046
- 29 Wilson K G//Phys Rev Ser D 1974 V 14 P 2455
- 30 Kogut J B//Rev Mod Phys 1979 V 51 P 659
- [31] Hirakawa K, Kadowaki H, Ubukoshi K//J Phys Soc Japan 1983 V 52 P 1814
- 32 Hirakawa K, Ikeda H, Kadowaki H, Ubukoshi K//Ibidem P 2882
- 33 Yamada I, Ubukoshi K, Hirakawa K//Ibidem 1984 V 53 P 381
- 34 Takeda K, Ubukoshi K, Haseda T, Hirakawa K//Ibidem P 1480
- 35 Kawamura H//Ibidem 1985 V 54 P 3220
- 36 Nishimori H, Nakanishi H//Ibidem 1988 V 57 P 626
- 37 Rastelli E, Tassi A//J Phys Ser C 1988 V 21 P L35
- 38 Miyashita S, Shiba H//J Phys Soc Japan 1984 V 53 P 1145

- 39 Lee D H, Joannopoulos J D, Negele J W, Landau D P//Phys. Rev Lett **1984** V 52 P 433, Phys. Rev. Ser B **1986** V 33 P 450
- 40 Yosefin M, Domany E//Ibidem **1985** V 32 P 1778
- [41] Choi M Y, Stroud D//Ibidem P 5773
- 42 Kawamura H//J Phys Soc Japan **1986** V 55 P 2095
- 43 Гехт Р С//ЖЭТФ **1984** Т 87 С 2095
- 44 Miyashita S, Kawamura H//J Phys Soc Japan **1985** V 54 P 3385
- 45 Anderson P W//Mater Res Bull **1973** V 8 P 153
- 46 Hirakawa K, Kadowaki H, Ubukoshi K//J Phys Soc Japan **1985** V 54 P 3526
- 47 Nishimori H, Miyashita S//Ibidem **1986** V 55 P 4448
- 48 Rastelli E, Tassi A//J Phys Ser C **1986** V 19 Pp L423, L589
- 49 Rastelli E, Tassi A//Ibidem **1987** V 20 P L303
- 50 De Fotis G C//Phys Rev Ser B **1981** V 23 P 4714
- [51] Nakanishi K, Shiba H//J Phys Soc Japan **1982** V 51 P 2089
- 52 Ishibashi G, Dvorak V//Ibidem **1978** V 45 P 1119
- 53 Aharony A, Fisher M E//Phys Rev Ser B **1973** V 8 P 3323
- 54 Jahn H A, Teller E//Proc Roy Soc Ser A **1937** V 161 P 220
- 55 Круличка С Физика ферритов — М. Мир, 1976
- 56 Shiba H, Suzuki N//J Phys Soc Japan **1982** V 51 P 3488
- 57 Соболева Т К, Стефановский Е П, Тарасенко В В//ФТТ **1980**, Т 22 С 2353
- 58 Yokoi C S O, Coutinho Filho M D, Salinas S R//Phys Rev Ser B, **1981** V 24 P 4047
- 59 Изюмов Ю А, Лаптев В М//ФТТ **1984** Т 26 С 734
- 60 Дзялошинский И Е//ЖЭТФ **1964** Т 47 С 992
- [61] McMillan W L//Phys Rev Ser B **1976** V 14 P 1496
- 62 Де Жен П Ф//Физика жидких кристаллов — М. Мир, 1977
- 63 Френкель Я И, Конторова Т//ЖЭТФ **1938** Т 8 С 1340
- 64 Булаевский Л Н, Хомский Д И//ЖЭТФ **1978** Т 74 С 1863
- 65 Покровский В Л, Талапов А Л//ЖЭТФ **1978** Т 75 С 1151
- 66 Изюмов Ю А, Лаптев В М//ЖЭТФ **1985** Т 88 С 165
- 67 Overhauser A W//Phys Rev Ser B **1971** V 3 P 3173
- 68 Lee P A, Rice T M, Anderson P W//Sol State Commun **1974** V 14, P 703
- 69 Steiner M//Ibidem **1973** V 11 P 73
- 70 Yamazaki H, Soares E, Panepucci H, Morishige Y//J Phys Soc. Japan **1980** V 48 P 1453
- [71] Steiner M, Kakurai K, Knorr W, Dorner B, Pynn R, Happek U, Day P, McLean O//Sol State Commun **1981** V 38 P 1179
- 72 Lindgard P A//J Magn and Magn Mater **1986** V 54—57 P 1227
- 73 Гехт Р С//ЖЭТФ **1986** Т 91 С 190
- 74 Kroese C J, Tindemans-van Eyndhoven J C M, Masskaut W J A//Sol State Commun **1971** V 9 P 1707
- 75 Kroese C J, Masskaut W J A, Verschoor G C//Acta Cryst Ser B **1974** V 30 P 1053
- 76 Lee B S//J Phys Ser C **1979** V 12 P 855
- 77 Adachi K, Achiwa N, Mekata M//J Phys Soc Japan **1980** V 49 P 545,
- 78 Gekht R S//Sol State Commun **1985** V 55 P 709
- 79 Tazuke Y, Tanaka H, Iio K, Nagata K//J Phys Soc Japan **1981**, V 50 P 3919
- 80 Гуфан Ю М//ЖЭТФ **1971** Т 60 С 1537
- [81] Дзялошинский И Е, Кухаренко Б Г//ЖЭТФ **1976** Т 70 С 2360,
- 82 Petitgrand D, Hennion B, Radhakrishna P, Escribe C, Legrand S//Recent Developments in Condensed Matter Physics/Ed P Devreese et al — New York Plenum, 1981 — V 4 P 205
- 83 Дудко К Л, Еременко В В, Фридман В М//ЖЭТФ **1975** Т 68, С 659
- 84 Боровик Романов А С, Орлова М П, Стрелков П Г//ДАН СССР, **1954** Т 99 С 699
- 85 Kanda E, Haseda T, Otsubo A//Physica **1954** V 20 P 131
- 86 Локтев В М//ФНТ **1979** Т 5 С 295
- 87 Yamada I, Ubukoshi K, Hirakawa K//J Phys Soc Japan **1985** V 54, P 3571
- 88 Sarma G//Sol State Commun **1972** V 10 P 1049
- 89 Villain J//J Phys Ser C **1973** V 6 P L97
- 90 Гехт Р С, Игнатченко В А//ЖЭТФ **1979** Т 76 С 164
- [91] Stephens P W, Birgeneau R J, Majkrzak C F, Shirane G//Phys Rev Ser B **1983** V 28 P 452
- 92 Meier R J, Helmholtz R B//Ibidem **1984** V 29 P 1387

93. Metcalf B. D.//Phys. Lett. Ser. A. 1974. V. 46. P. 325.
94. Kaburagi M., Kanamori J.//Japan. J. Appl. Phys. Suppl. 2. 1974. V. 13 P. 145.
95. Guth H., Heger G.//Fast Ion Transport in Solids/Ed. P. Vashishta et al.—Amsterdam; North-Holland, 1979.—P. 499.
96. Press W., Renker B., Schulz H., Böhm H.//Phys. Rev. Ser. B. 1980. V. 21. P. 1250.
97. Mekata M.//J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 42. P. 76.
98. Wannier G. H.//Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 357.
99. Houtappel R. M. F.//Physica. 1950. V. 16. P. 425.
100. Wannier G. H.//Phys. Rev. Ser. B. 1973. V. 7. P. 5017.
- [101] Hose J., Kadanoff K., Kirkpatrick S., Nelson D. R.//Ibidem. 1977. V. 16. P. 1217.
102. Müller-Hartmann E., Zittartz J.//Zs. Phys. Kl. B. 1977. Bd. 27. S.261.
103. Takasaki K., Harada I., Tonegawa T.//J. Phys. Soc. Japan. 1986. V. 55. P. 4423.
104. Slotte P. A., Hemmer P. C.//J. Phys. Ser. C. 1984. V. 17. P. 4645.
105. Saito Y.//J. Magn. and Magn. Mater. 1983. V. 31—34. P. 1049.
106. Mihura B., Landau D. P.//Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 977.
107. Landau D. P.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 27. P. 5604.
108. Saito Y., Tabe G.//J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. P. 2955.
109. Saito Y., Furuta K., Hojou M.//Ibidem. 1987. V. 56. P. 178.
110. Fujiki S., Shuton K., Abe Y., Katsura S.//Ibidem. 1983. V. 52. P. 1531.
- [111] Gaulin B. D., Collins M. F., Buyers W. J. L.//J. Appl. Phys. 1987. V. 61 P. 3409.
112. Kadowaki H., Shapiro S. M., Inami T., Ajiro Y.//J. Phys. Soc. Japan. 1988. V. 57. P. 2640.
113. Ajiro Y., Nakashima T., Unno Y., Kadowaki H., Mekata M., Achiwa N.//J. Phys. Soc. Japan. 1988. V. 57. P. 2648.
114. Shenker S. H., Tobochnik J.//Phys. Rev. Ser. B. 1980. V. 22. P. 4462.
115. Villain J.//J. de Phys. 1977. T. 38. P. 385.
116. Kawamura H.//J. Appl. Phys. 1987. V. 61. P. 3590.
117. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1982.
118. Ferdinand A. E., Fisher M. E.//Phys. Rev. 1969. V. 185. P. 832.
119. Barber M. N.//Phase Transition and Critical Phenomena/Ed. C. Domb, M. S. Green.—New York; London: Academic Press, 1983.—V. 8. P. 145.
120. Landau D. P.//Phys. Rev. Ser. B. 1976. V. 14. P. 255; 1977. V. 16. P. 4164.
- [121] Белобров П. И., Гехт Р. С., Игнатченко В. А.//ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 1097.
122. Takeda K., Uryu N., Ubukoshi K., Hirakawa K.//J. Phys. Soc. Japan. 1986. V. 55. P. 727.
123. Kadowaki H., Ubukoshi K., Hirakawa K., Martinez J. L., Shirane G.//Ibidem. 1987. V. 56. P. 4027.
124. Jones D. R. T., Love A., Moore M. A.//J. Phys. Ser. C. 1976. V. 9. P. 743.
125. Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.//Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. P. 95.
126. Ono L., Oguchi T.//Phys. Lett. Ser. A. 1972. V. 38. P. 39.
127. Kawamura H., Miyashita S.//J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. P. 4530.
128. Miyashita S.//J. Phys. Soc. Japan. 1986. V. 55. P. 3605.
129. Marland L. G., Betts D. D.//Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 1618.
130. Oguchi T., Nishimori H., Taguchi Y.//J. Phys. Soc. Japan. 1986. V. 55. P. 323.
- [131] Fazekas P., Anderson P. W.//Phil. Mag. 1974. V. 30. P. 423.
132. Imada M.//J. Phys. Soc. Japan. 1987. V. 56. P. 311.
133. Wu F. Y.//Rev. Mod. Phys. 1982. V. 54. P. 235.
134. Kawamura H.//J. Appl. Phys. 1988. V. 63. P. 3086.