

524.354.5

«ЗАМАГНИЧЕННЫЕ» ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ**А. Н. Алиев, Д. В. Гальцов**(Шемахинская астрофизическая обсерватория АН АзССР;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	129
2. Черная дыра во внешнем электромагнитном поле	133
2.1. Постоянное однородное осесимметричное магнитное поле вблизи вращающейся черной дыры. Фарадеевская индукция. 2.2. Постоянное однородное электромагнитное поле, не обладающее осевой симметрией. 2.3. Неоднородные осесимметричные стационарные поля. 2.4. Влияние внешнего магнитного поля на метрику пространства-времени.	
3. Пондеромоторное воздействие внешнего электромагнитного поля на черную дыру	142
3.1. Заряженная черная дыра в однородном электрическом поле. 3.2. Дрейф вращающейся черной дыры в электромагнитном поле. 3.3. Прецессия момента количества движения заряженной дыры в магнитном поле. 3.4. Релаксация вращательного момента в асимметричном поле.	
4. Движение заряженных частиц	145
4.1. Круговые орбиты в экваториальной плоскости невращающейся черной дыры в магнитном поле. 4.2. Малые колебания около круговых орбит. 4.3. Движение в поле Шварцшильда — Эрнста. 4.4. Движение в магнитном поле в метрике Керра.	
5. Спонтанное и вынужденное излучение при негеодезическом движении частиц	148
5.1. Модель скалярных волн. 5.2. Синхротронное излучение ультрарелятивистских частиц. 5.3. Локальное описание синхротронного излучения в гравитационном поле. 5.4. Вынужденное излучение.	
6. Воздействие магнитного поля на квантовые процессы в черных дырах	156
6.1. Изменение химического потенциала горизонта. 6.2. Магнитная эргосфера. 6.3. Изменение спектра квазистационарных состояний массивных заряженных частиц.	
7. Заключение	159
Список литературы	159

1. Введение. Развитие теории гравитации и успехи наблюдательной астрономии последнего десятилетия привели к тому, что представление о черных дырах стало неотъемлемой частью современной физики и астрофизики. Изложение основных теоретических концепций, лежащих в основе физики черных дыр, можно найти в книгах¹⁻³, детальное развитие теории черных дыр и их взаимодействия с окружающей средой отражено в недавно вышедших монографиях⁴⁻⁶. Особенно интригующими являются предсказания квантовых свойств микроскопических черных дыр⁷⁻⁹, идущие от замечательного открытия Хокинга квантовой неустойчивости черной дыры¹⁰. Хотя в настоящее время нет экспериментальных указаний на существование во Вселенной микроскопических черных дыр, возможность их образования на ранних стадиях космологического расширения и последующего испарения является одним из существенных факторов, определяющих выбор космологически непротиворечивой модели теории элементарных частиц¹¹. Квантовая теория черных дыр вскрыла неожиданные и глубокие связи между геометрией, квантовой теорией поля и термодинамикой, оказав определенное

влияние на развитие квантовой теории гравитации. Тем самым представление о черных дырах столь органично вписалось в общую физическую картину мира, что получение доказательств существования в космосе черных дыр звездной массы либо сверхмассивных черных дыр в центре галактик перестало быть «вопросом жизни и смерти» для теории черных дыр. Однако, как бы еще раз подтверждая справедливость фразы Дирака (сказанной по поводу магнитного монополя): «Было бы странно, если бы Природа не использовала этой возможности», астрофизика последнего десятилетия дала новые аргументы в пользу реального существования черных дыр в космосе.

Имеются достаточно убедительные данные, свидетельствующие о том, что ряд наблюдаемых в настоящее время рентгеновских источников содержит черные дыры. Основой для такого суждения служит превышение вероятного значения массы компактного объекта над предельной массой нейтронной звезды, оцениваемой в рамках наиболее правдоподобных моделей величиной не более трех солнечных масс. Помимо известного источника Лебедь X-1, обнаруженного еще в 1971 году (см. обзор¹²), в настоящее время имеется ряд «надежных» кандидатов в черные дыры. Это рентгеновский источник LMC X-3 в Большом Магеллановом облаке, масса компактного объекта в котором оценивается величиной порядка 10 масс Солнца¹³, а также, вероятно, источник LMC X-1, масса которого превышает более трех солнечных масс, а рентгеновский спектр имеет аналогичные свойства^{14, 15}. Согласно новым данным черная дыра присутствует в двойной системе AO620—00 в созвездии Единорога. На основе анализа фотометрических наблюдений этой системы, проводившихся в течение нескольких лет, и по смещению дискретных линий поглощения, обнаруженных в спектре оптической звезды, делается вывод, что вероятное значение массы невидимого компонента больше 7 масс Солнца^{16, 17}. Не исключено наличие черной дыры в качестве невидимого компонента уникального объекта Геминги — источника жестких гамма квантов, наблюдаемые свойства которого достаточно хорошо воспроизводятся, если предположить, что система имеет общую массу около 5 масс Солнца и состоит из белого карлика и черной дыры, обращающихся друг относительно друга с периодом 59 с^{18, 19}. Весьма вероятно, что черной дырой является необычный источник оптического, рентгеновского и радиоизлучения SS-433 в созвездии Орла²⁰. Анализ кривой оптического блеска системы, проведенный авторами работ^{21, 22}, показывает, что при различных предположениях о массах составляющих ее объектов значение массы невидимого компонента намного превышает критическую массу нейтронных звезд.

Данные наблюдений достаточно убедительно указывают на присутствие черных дыр в активных ядрах галактик и квазаров. Наблюдаемая высокая энергетическая активность этих объектов довольно естественно объясняется наличием в них сверхмассивных черных дыр^{1, 23–25}. В пользу этой модели свидетельствуют наблюдения центральной области гигантской эллиптической галактики M87 в созвездии Девы, где обнаружено наличие «темной» массы порядка $3 \cdot 10^9$ солнечных масс^{26, 27}.

Важное значение для астрофизических приложений имеет изучение механизмов извлечения энергии из черной дыры. Одним из таких механизмов является процесс Пенроуза, состоящий в распаде частицы, движущейся в эргосфере вращающейся черной дыры, на пару частиц, одна из которых имеет отрицательную (по отношению к наблюдателю на бесконечности) полную энергию; при этом вылетающая из эргосферы частица получает добавочную энергию, извлекаемую из вращательной энергии черной дыры²⁸. Однако расчет показывает, что реализация этого процесса в астрофизических условиях маловероятна²⁹. Волновым аналогом процесса Пенроуза является так называемая «суперрадиация», предсказанная Зельдовичем³⁰ и Мизнером³¹, теория которой для случая метрики Керра была построена Старобинским³². В режиме суперрадиации рассеяние мультиполя с проекцией орбитального момента m на ось симметрии вращающейся дыры и частотой $\omega <$

$< m\Omega_H$, где Ω_H — угловая скорость вращения черной дыры, сопровождается увеличением амплитуды поля.

Однако в реалистических моделях аккреции газа черной дырой источником энерговыделения в основном является энергия связи частиц в сильном гравитационном поле дыры. Как известно, в поле Шварцшильда максимальная энергия связи составляет примерно 5,7% энергии покоя, в случае Керровской черной дыры с экстремальным вращением эта величина может достигать 42% (подробнее см. обзор³³). Дальнейший поиск механизмов энерговыделения, которые, в частности, были бы способны объяснить высокую активность ядер галактик и квазаров, привел к модели «замагниченной» черной дыры, в которой вокруг вращающейся черной дыры предполагается существование крупномасштабного магнитного поля. Такая модель обсуждалась в последнее время в рамках различных подходов^{34–37} и вызывает сейчас большой интерес в астрофизике. С другой стороны, возникающая в этой модели органическая взаимосвязь электродинамики и гравитации, приводящая к ряду новых «гравимагнитных» эффектов, представляет и общефизический интерес. Именно это побудило авторов к написанию настоящего обзора, который в противоположность работам^{36, 37} (см. также изложение в книге⁵) не имеет прямой астрофизической направленности, а посвящен обсуждению физических аспектов теории «замагниченных» черных дыр.

Известно, что электрически нейтральная черная дыра не может иметь собственных «магнитных волос» (помимо гипотетических монопольных). Еще в 1965 г. В. Л. Гинзбург и Л. М. Озерной, рассматривая гравитационный коллапс статической звезды с замороженным магнитным полем, пришли к важному выводу о том, что при приближении границы тела к горизонту событий магнитное дипольное поле звезды полностью исчезает³⁸. Позже этот результат был обобщен на случай вращающейся звезды³⁹ и подтверждался в других работах^{40–42}, в соответствии с известным изречением Уилера; «черная дыра не имеет волос». Однако магнитное поле вблизи черной дыры может возникнуть за счет внешних причин, например наличия у черной дыры магнитного спутника (пульсара) в результате аккреции окружающей плазмы; наконец, возможно магнитное поле космологического происхождения^{43–45}. Наличие магнитного поля вокруг черной дыры, которое вблизи горизонта событий во многих случаях можно считать квазиоднородным, создает условия для реализации электродинамического механизма извлечения вращательной энергии из черной дыры через взаимодействие заряженных частиц с индукционным электрическим полем, возникающим из-за ее вращения. Оценка энерговыделения в такой системе говорит о возможности привлечения ее в качестве модели активных ядер галактик и квазаров^{34–37}.

Стационарные аксиально-симметричные конфигурации электромагнитных полей в пространстве-времени черных дыр изучались в работах^{46–54}. Было найдено решение уравнений Максвелла для пробного электромагнитного поля в метрике Керра, которое асимптотически соответствует однородному магнитному полю^{46–48}. При вращении черной дыры в однородном магнитном поле благодаря фарадеевской индукции возникает разность электростатических потенциалов между горизонтом событий и бесконечно удаленной точкой и при равном нулю значении электрического заряда черной дыры. Это делает энергетически выгодным поглощение дырой электрического заряда соответствующего знака при аккреции плазмы. Процесс прекращается, когда фарадеевская разность потенциалов будет скомпенсирована разностью потенциалов, создаваемой приобретаемым дырой зарядом.

Если черная дыра вращается в однородном электромагнитном поле, не обладающем аксиальной симметрией, то с течением времени она теряет свой момент вращения, и в соответствии с теоремой Хокинга⁴² конфигурация становится либо аксиально-симметричной, либо статической^{55–57}, причем, при наличии у дыры электрического заряда, одновременно возникает прецессия вектора момента вращения вокруг направления внешнего поля^{57, 58}.

На черную дыру, вращающуюся в асимметричном электромагнитном поле, обладающем отличным от нуля вектором Пойнтинга, действует пондеромоторная сила, обусловленная несимметричным поглощением черной дырой потока импульса электромагнитного поля^{57, 59}. В работах^{51, 52, 54} исследовались электромагнитные поля вблизи вращающейся черной дыры, генерируемые стационарными аксиально-симметричными источниками (точечный электрический заряд, кольцевой ток), причем полученные в них решения, в отличие от ранее известных^{48–50, 53}, были представлены в замкнутой алгебраической форме, а не в виде мультипольных разложений, что позволило, в частности, вычислить сдвиг собственной энергии заряда в гравитационном поле черных дыр^{60, 61}.

Представляет интерес получение точных решений системы уравнений Эйнштейна — Максвелла, описывающих черную дыру во внешнем магнитном поле с учетом влияния последнего на метрику пространства-времени. Такие решения удается построить, воспользовавшись симметрией системы уравнений Эйнштейна — Максвелла для аксиально-симметричных полевых конфигураций относительно некоторой однопараметрической группы преобразований. Одним из первых, кто указал на этот путь нахождения решений, был Элерс⁶², впоследствии проблема обсуждалась в работах^{63–66}. В частности, была доказана теорема⁶⁶ о том, что система уравнений Эйнштейна — Максвелла, описывающая стационарные аксиально-симметричные конфигурации электровакуума, инвариантна относительно некомпактной группы $SU(2,1)$. Дальнейшее развитие этого направления привело к обнаружению бесконечно-параметрической группы преобразований⁶⁷, и в конечном счете к формулировке различных методов полного интегрирования системы уравнений Эйнштейна — Максвелла для аксиально-симметричных стационарных полей. Мы не будем подробнее останавливаться здесь на этих интересных результатах, полученных в последние годы, отсылая читателя к обзору⁶⁸, так как для наших целей достаточно использовать однопараметрическую группу преобразований, впервые указанную Гаррисоном⁶³. В работах Эрнста^{64, 65} теория была сформулирована на языке комплексных потенциалов, и далее с помощью упомянутой выше теоремы были построены новые точные решения лек невращающейся, вращающейся и обладающей некоторым специфическим электрическим зарядом, а также для медленно вращающейся, электрически нейтральной черной дыры во внешнем однородном магнитном поле^{69–71}. Характерные особенности и физические свойства этих решений изучались в работах^{72–78} (п. 2, 3).

Движение пробных частиц вблизи черных дыр в отсутствие внешних электромагнитных полей в настоящее время хорошо изучено (см. книги^{1, 79–81}, обзоры^{33, 82} и приведенные в них ссылки). При наличии внешнего асимптотически однородного магнитного поля исследование движения нейтральных и заряженных частиц в пространствах Шварцшильда, Шварцшильда — Эрнста, а также в метрике Керра показывает, что магнитное поле существенно расширяет области существования и устойчивости круговых орбит и делает возможным ультрарелятивистское движение по устойчивым орбитам, удаленным от замкнутой фотонной орбиты^{83, 84}. Существуют устойчивые круговые орбиты, для которых дефект массы частицы приближается к 100% (п. 4). Движение заряженных частиц в магнитном поле вблизи черных дыр изучалось также численно^{85–87}.

Заряженные частицы, захваченные на ультрарелятивистские круговые орбиты вокруг черной дыры, находящейся во внешнем магнитном поле, будут испускать излучение, свойства которого близки к свойствам синхротронного излучения (СИ) электронов в ускорителях^{88, 90}. Исследованию такого излучения были посвящены работы^{83, 84, 91–93} (подробнее см. книгу⁶). Интересно отметить, что излучение, испускаемое ультрарелятивистской заряженной частицей, движущейся вдоль геодезической⁹⁴, так называемое «геодезическое синхротронное излучение» (ГСИ), по спектральному составу

и зависимости интенсивности от лоренцева фактора $\gamma = \frac{E}{\mu}$ существенно отличается от СИ заряда, движущегося в основном под действием негравитационных сил. Это связано с тем, что геодезическая, по которой движется ультрарелятивистская частица, близка к мировой линии светового луча, в результате чего длина формирования высокочастотного импульса излучения в режиме ГСИ превосходит соответствующую величину для СИ в γ раз⁹⁵. Для описания спектра СИ в искривленном пространстве-времени можно применить метод локальных координат, который позволяет обобщить теорию синхротронного излучения (в том числе с учетом квантовых эффектов) на случай произвольного, медленно меняющегося гравитационного поля^{96–98} (п. 5).

Известно, что взаимодействие электронов, движущихся в магнитном поле в плоском пространстве-времени, с электромагнитными волнами может иметь характер отрицательного поглощения, что лежит в основе принципа действия мазеров на циклотронном резонансе^{99–101}. Этот эффект является важным и в астрофизических условиях¹⁰². Одним из способов получения отрицательного поглощения волн является введение в систему нелинейности. Примером может служить релятивистский электрон в магнитном поле; эффект усиления волн связан с нелинейной зависимостью импульса от скорости. Другой механизм отрицательного поглощения реализуется в линейных мультипериодических системах, обладающих несколькими несовпадающими частотами¹⁰³.

Механизмы отрицательного поглощения обоих типов могут естественным образом реализоваться и в гравитирующих системах. Исследования, проведенные в работах^{104–106} по теории вынужденного излучения вблизи невращающейся и вращающейся черных дыр в магнитном поле, показывают, что взаимодействие заряженных частиц с электромагнитными волнами на некоторых комбинационных частотах имеет характер отрицательного поглощения (мазер-эффект) (п. 5).

Внешнее электромагнитное поле оказывает существенное влияние на квантовые процессы в черных дырах¹⁰⁷. В случае однородного магнитного поля, в том числе с учетом влияния последнего на метрику пространства времени, или при наличии произвольной (пробной) аксиально-симметричной конфигурации электромагнитного поля, спадающего на бесконечности, изменяется порог суперрадиации из-за появления дополнительной разности потенциалов между горизонтом событий и удаленной точкой, а также изменения скорости увлечения систем отсчета на горизонте заряженной черной дыры. Изменяется также коэффициент прохождения через потенциальный барьер, причем при развитии бозонной неустойчивости на суперрадиантных квазистационарных уровнях массивных частиц магнитное поле порождает асимметрию по знаку электрического заряда и проекции углового момента рождаемых частиц (п. 6).

2. Черная дыра во внешнем электромагнитном поле. Согласно теоремам, доказанным в работах^{40–42}, наиболее общее семейство асимптотически плоских решений системы уравнений Эйнштейна — Максвелла, обладающих несингулярным горизонтом событий, совпадает с семейством Керра — Ньюмена¹⁰⁸. Соответствующий интервал пространства-времени в координатах, введенных Бойером и Линдквистом, имеет вид¹⁰⁹

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \\ - \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} a^2 \sin^2 \theta\right) d\varphi^2 + \frac{2(2Mr - Q^2)}{\Sigma} a \sin^2 \theta d\varphi dt; \quad (2.1)$$

здесь

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

M — масса, Q — электрический заряд, $a = J/M$ — параметр вращения черной дыры. При этом 4-потенциал электромагнитного поля определяется соотношением

$$A = A_\mu dx^\mu = \frac{Qr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi). \quad (2.2)$$

В используемой здесь системе единиц $G = \hbar = c = 1$ напряженность электромагнитного поля имеет размерность см^{-1} , аналогичную размерность имеет обратная масса $1/M$. Последняя и задает характерный масштаб напряженности магнитного поля:

$$B_M = \frac{1}{M} \approx 2,4 \cdot 10^{19} \frac{M_\odot}{M} (\text{Гс}), \quad (2.3)$$

где $M_\odot$ — масса Солнца, которое будет существенно влиять на метрику вблизи горизонта событий черной дыры (в обычных единицах $B_M = c^4 G^{-1} M^{-1}$). При напряженности поля $B \ll B_M$ вне черной дыры заведомо существует область, в которой пространство-время не искажается внешним полем, и для описания последнего достаточно рассмотреть малые возмущения полей. Заметим, что для заряженной черной дыры рассмотрение электромагнитных и гравитационных возмущений должно проводиться совместно, так как в системе уравнений

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2 \left(F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (2.4)$$

$$F_{\mu\nu}^{;\nu} = 0, \quad (2.5)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ — скалярная кривизна, точка с запятой обозначает ковариантную производную разложения тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(0)} + F_{\mu\nu}^{(1)} \quad (2.6)$$

и метрики

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

приводят к связанной системе линейных уравнений относительно $F_{\mu\nu}^{(1)}$ и $h_{\mu\nu}$.

Если черная дыра не заряжена, $Q = 0$, или же заряд ее мал, $Q \ll M$, то для описания внешних полей достаточно построить соответствующие решения уравнений Максвелла на фоне метрики Керра ((2.1) при $Q = 0$). Подчеркнем, что, строго говоря, система уравнений (2.4), (2.5) не допускает введения в правую часть (2.5) тока, так как при этом соответствующий вклад нужно было бы ввести и в правую часть (2.4), чтобы удовлетворить ковариантному условию консервативности $G_{\mu\nu}^{;\nu} = 0$. Однако если изменение метрики за счет источников электромагнитного поля приводит к существенно меньшим эффектам, нежели действие самого электромагнитного поля, им можно пренебречь.

2.1. Постоянное однородное осесимметричное магнитное поле вблизи вращающейся черной дыры. Фарадеевская индукция. Существует интересная внутренняя связь между кулоновскими «волосами» черной дыры и однородным внешним магнитным полем, состоящая в том, что оба эти поля могут быть получены, если выбрать в качестве 4-потенциала A_μ определенную линейную комбинацию векторов Киллинга пространства-времени Керра⁴⁶. Можно показать, что в случае вакуумного пространства-времени, $R_{\mu\nu} = 0$, векторные поля Киллинга удовлетворяют уравнению, совпадающему с уравнением для 4-потенциала электромагнитного поля в этом пространстве-времени¹⁰⁰.

Действительно, в общем случае ($R_{\mu\nu} \neq 0$) однородные уравнения Максвелла в ковариантной калибровке Лоренца $A^\mu_{;\mu} = 0$ имеют вид

$$A^\mu_{;\nu}{}^\nu - R^\mu_\nu A^\nu = 0. \quad (2.8)$$

С другой стороны, из уравнений Киллинга

$$\mathcal{K}^\mu_{;\nu} + \mathcal{K}^\mu_{\nu} = 0 \quad (2.9)$$

путем ковариантного дифференцирования и коммутации производных можно получить

$$\mathcal{K}^\mu_{;\nu}{}^\nu + R^\mu_\nu \mathcal{K}^\nu = 0. \quad (2.10)$$

Сопоставление (2.8) и (2.10) и доказывает сделанное утверждение.

Пространство-время Керра является стационарным и аксиально-симметричным, что выражается в существовании двух коммутирующих векторных полей Киллинга $\mathcal{K}^\mu_{(t)} = \{1, 0, 0, 0\}$, $\mathcal{K}^\mu_{(\phi)} = \{0, 0, 0, 1\}$. Оказывается, что использование их в качестве A_μ порождает нетривиальные электромагнитные поля, представляющие собою суперпозицию кулоновского и асимптотически однородного магнитного поля. Воспользовавшись тем, что любой вектор Киллинга можно представить в виде линейной комбинации других векторов Киллинга, выберем вектор-потенциал A^μ в виде

$$A^\mu = \alpha \mathcal{K}^\mu_{(t)} + \beta \mathcal{K}^\mu_{(\phi)}. \quad (2.11)$$

Используя формулы ¹¹¹

$$\begin{aligned} 8\pi M &= - \oint_{\infty} \mathcal{K}^\mu_{(t)}{}^\nu d^2\Sigma_{\mu\nu}, \\ 16\pi J &= \oint_{\infty} \mathcal{K}^\mu_{(\phi)}{}^\nu d^2\Sigma_{\mu\nu}, \\ 4\pi Q &= \oint F^{\mu\nu} d^2\Sigma_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

выражающие массу M и момент вращения J черной дыры через поверхностные интегралы от ковариантных производных векторов Киллинга, а также выражение для электрического заряда черной дыры, можно найти следующее соотношение, связывающее параметры α и β :

$$2\alpha M - 4\beta J = -Q. \quad (2.13)$$

При $Q = 0$, полагая $\beta = B/2$ и опуская индекс 4-потенциала, получаем

$$\begin{aligned} A_t &= aB \left[1 - \frac{Mr}{\Sigma} (1 + \cos^2 \theta) \right], \\ A_\phi &= \frac{B \sin^2 \theta}{2\Sigma} [a^2 (4Mr + \Delta \sin^2 \theta) - (r^2 + a^2)^2], \end{aligned} \quad (2.14)$$

что при $a = 0$ совпадает с 4-потенциалом однородного магнитного поля, направленного вдоль оси симметрии. В общем случае при $Q \neq 0$ получаем выражение для 4-потенциала, определяющего суперпозицию кулонова поля и внешнего однородного магнитного поля в пространстве-времени Керра:

$$A^\mu = \frac{B}{2} (\mathcal{K}^\mu_{(\phi)} + 2a \mathcal{K}^\mu_{(t)}) - \frac{Q}{2M} \mathcal{K}^\mu_{(t)}. \quad (2.15)$$

Из этой формулы видно, что кулоновская часть поля порождается времени-подобным вектором Киллинга, причем аналогичный вклад (пропорциональный параметру вращения a) содержит и «магнитная» часть A^μ . Последний можно связать с появлением индукционного электрического поля при вращении черной дыры в однородном магнитном поле. Вращающаяся черная

дыра во внешнем магнитном поле, таким образом, представляет собой динамо-машину, порождающую электростатическую разность потенциалов между горизонтом событий и бесконечно удаленной точкой. Величина этой разности потенциалов определяется нулевой компонентой (2.14) и, как видно из этой формулы, равна

$$\Delta\Phi_{эл} = \frac{Q - 2aMB}{2M}. \quad (2.16)$$

Фарадеевская индукция создает возможность электродинамического механизма извлечения вращательной энергии из черной дыры, который в последнее время привлекается в астрофизических моделях ядер галактик и квазаров^{34–37}.

Действуя аналогичным образом, можно построить «магнитостатический» 4-потенциал B_μ , порождающий дуальный максвелловский тензор

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} F^{\lambda\tau} = 2B_{[\nu; \mu]},$$

описывающий однородное электрическое поле E , направленное вдоль оси симметрии:

$$B^\mu = -\frac{1}{2} E (\mathcal{K}_{(q)}^\mu + 2a\mathcal{K}_{(t)}^\mu), \quad (2.17)$$

причем магнитный заряд черной дыры положен равным нулю.

2.2. Постоянное однородное электромагнитное поле, не обладающее осевой симметрией. Если направления электрического и магнитного полей (по крайней мере одного из них) не совпадают с осью симметрии метрики Керра, то изложенный выше метод получения решений уравнений Максвелла неприменим. В этом случае можно воспользоваться эффективным методом потенциалов Дебая^{6, 112}. Отсылая читателя к подробному изложению в книге⁶, ограничимся кратким пояснением. Если записать метрику пространства-времени в терминах комплексной изотропной тетрады $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, m^{*\mu}\}$ Ньюмена — Пенроуза

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu m_\nu^* - m_\mu^* m_\nu, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} (ln) &= 1, \quad (mm^*) = -1, \quad (ll) = (nn) = (mm) = 0, \\ l_\mu &= \{1, -\Sigma/\Delta, 0, -a \sin^2 \theta\}, \quad n_\mu = 1/2 \Sigma^{-1} \{\Delta, \Sigma, 0, -\Delta a \sin^2 \theta\}, \\ m_\mu &= [V/2 (r + ia \cos \theta)]^{-1} \{ia \sin \theta, 0, -\Sigma, -i \sin \theta (r^2 + a^2)\}, \end{aligned}$$

и разложить самодуальный бивектор электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu}) = \\ &= 2 [\Phi_0 m_{[\mu}^* n_{\nu]} + \Phi_1 (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} m_{\nu]}^*) + \Phi_2 l_{[\mu} n_{\nu]}], \end{aligned} \quad (2.19)$$

то для комплексных проекций Φ_0, Φ_1, Φ_2 из уравнений Максвелла будем иметь

$$\begin{aligned} \rho^2 \mathcal{D}_0 \rho^{-2} \Phi_1 + \frac{1}{V/2} \mathcal{L}_1 \rho \Phi_0 &= 0, \\ \rho^2 \mathcal{L}_0^* \rho^{-2} \Phi_1 - \frac{\Delta}{V/2} \mathcal{D}_1^* \rho \Phi_0 &= 0, \\ \mathcal{D}_0 \rho^{-1} \Phi_2 + \frac{1}{V/2} \rho^2 \mathcal{L}_0 \rho^{-2} \Phi_1 &= 0, \\ \mathcal{L}_1^* \rho^{-1} \Phi_2 - \frac{\Delta}{V/2} \rho^2 \mathcal{D}_0^* \rho^2 \Phi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned}\rho &= -(r - ia \cos \theta)^{-1}, \\ \mathcal{D}_n &= \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \\ \mathcal{L}_s &= \frac{\partial}{\partial \theta} + s \operatorname{ctg} \theta - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \mathcal{D}_n^+ &= \mathcal{D}_n(\varphi \rightarrow -\varphi), \quad \mathcal{L}_s^+ = \mathcal{L}_s(\varphi \rightarrow -\varphi).\end{aligned}\tag{2.21}$$

Эта система подстановкой

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{1}{2} \mathcal{D}_0^2 \psi, \\ \Phi_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\mathcal{D}_0 \frac{\rho}{\rho_*} \mathcal{L}_1 + ia \sin \theta \frac{\rho}{\rho_*} (\rho + \rho^*) \mathcal{D}_0 \right) \rho^* \psi, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{4} \rho^2 \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 \psi\end{aligned}\tag{2.22}$$

сводится к единственному уравнению для потенциала Дебая ψ :

$$(\Delta \mathcal{D}_0^+ \mathcal{D}_0 + \mathcal{L}_0^- \mathcal{L}_1) \psi = 0.\tag{2.23}$$

Чтобы построить решение, которое при $r \rightarrow \infty$ описывало бы постоянное однородное электромагнитное поле, заметим, что при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\Phi_0(r \rightarrow \infty) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (F_\theta + iF_\varphi), \\ \Phi_1(r \rightarrow \infty) &= -\frac{1}{2} F_r, \\ \Phi_2(r \rightarrow \infty) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} (F_\theta - iF_\varphi),\end{aligned}\tag{2.24}$$

откуда нетрудно получить граничное значение потенциала Дебая. Решение уравнения (2.23), удовлетворяющее граничным условиям (2.24), строится методом разделения переменных и имеет простой вид:

$$\psi = -\frac{\Delta}{2\sqrt{2}} \left(F_z \sin \theta - F_{(+)} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\tilde{\varphi}} + F_{(-)} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\tilde{\varphi}} \right),\tag{2.25}$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$, $F_{(\pm)} = F_x \pm iF_y$, $\tilde{\varphi} = \varphi + a(r_+ - r_-)^{-1} \ln [(r - r_+)/(r - r_-)]$. Тензор электромагнитного поля далее восстанавливается по формулам (2.22) и (2.19). При $F_x = F_y = 0$ мы возвращаемся к решению, построенному в предыдущем разделе. В общем случае рассматриваемая конфигурация полей представляет простейший пример электромагнитного поля, не обладающего осевой симметрией. Поскольку, согласно известной теореме Хокинга⁴², стационарная черная дыра должна быть аксиально симметричной, можно ожидать возникновения нетривиальных пондеромоторных эффектов взаимодействия черной дыры с таким полем. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 3

2.3. Н е о д н о р о д н ы е о с е с и м м е т р и ч н ы е с т а ц и о н а р н ы е п о л я . Другой случай, для которого удастся проинтегрировать уравнения Максвелла в пространстве-времени Керра, не прибегая к громоздкому аппарату разложения по спиновым сферическим гармоникам,— это случай аксиально-симметричных и не зависящих от времени конфигураций с произвольной зависимостью от координат r и θ . Для таких конфигураций уравнение (2.23) для потенциалов Дебая принимает вид

$$\Delta \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_{-1} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \right) - (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta)_{-1} \psi = -4\pi \Sigma_{-1} T,\tag{2.26}$$

где введен источник ${}_{-1}T(r, \theta)$, связанный стоком J^μ соотношениями Тьюкольского¹¹³. Переходя к координатам Вейля

$$\xi = \Delta^{1/2} \sin \theta, \quad z = (r - M) \cos \theta,$$

будем иметь

$$\tilde{\Delta} (\sin \theta {}_{-1}\Psi) = -4\pi \Sigma T [\Delta + (M^2 - a^2) \sin^2 \theta]^{-1} \sin \theta, \quad (2.27)$$

где $\tilde{\Delta}$ — обобщенный оператор Лапласа¹¹⁴

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1+2s}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (s = -1). \quad (2.28)$$

Функция Грина этого уравнения

$$\tilde{\Delta} G(z, z_0; \xi, \xi_0) = -\xi^{-3} \delta(z - z_0) \delta(\xi - \xi_0) \quad (2.29)$$

записывается в виде интеграла⁶

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} Z^{-3} (1 - \kappa^2)^{1/2} d\kappa, \quad (2.30)$$

где

$$Z(z, z_0; \xi, \xi_0) = [(z - z_0)^2 + \xi_0^2 + \xi^2 - 2\xi_0 \xi \kappa]^{1/2}.$$

В результате решение уравнения (2.26) принимает вид

$${}_{-1}\Psi = 4\pi \int G \Sigma_0 \sin \theta_0 \xi_0 \xi \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^{1/2} {}_{-1}T_0 d\theta_0 dr_0. \quad (2.31)$$

В качестве примера найдем электромагнитное поле точечного заряда e покоящегося на оси симметрии метрики Керра в точке $\theta_0 = 0$:

$$J^\mu = \frac{e}{2\pi \Sigma} \delta^{\mu 0} \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - 1). \quad (2.32)$$

Используя (2.31) и (2.22), находим

$$\Psi_a^I = -\frac{\sqrt{2} e}{r_0 + ia} \frac{Z}{\sin \theta} + \Psi_{\text{Coul}}, \quad (2.33)$$

где Ψ_{Coul} — решение однородного уравнения (2.26), которое необходимо добавить, чтобы физический заряд системы был равен e . Учитывая асимптотическое разложение

$$Z(r \rightarrow \infty) \approx r - M - (r_0 - M) \cos \theta,$$

найдем, что кулоновский член имеет вид

$$\Psi_{\text{Coul}} = -\frac{\sqrt{2} e}{r_0 + ia} \frac{1}{\sin \theta} [M(1 - \cos \theta) - r - ia \cos \theta]. \quad (2.34)$$

С помощью выражения (2.33) можно найти явные выражения для компонент вектор-потенциала электромагнитного поля точечного заряда, покоящегося на оси симметрии черной дыры⁵⁴:

$$A_t = \frac{e}{(r_0^2 + a^2) \Sigma} \left[(r_0 r + a^2 \cos \theta) \left(M + \frac{(r - M)(r_0 - M) - (M^2 - a^2) \cos \theta}{Z} \right) + \right. \\ \left. + a^2 (r - r_0 \cos \theta) Z^{-1} ((r - M) - (r_0 - M) \cos \theta) \right], \quad (2.35)$$

$$A_\varphi = -\frac{ea}{r_0^2 + a^2} \left[(r - r_0 \cos \theta) \frac{(r - M) - (r - M) \cos \theta}{Z} - \right. \\ \left. - Z - M(1 - \cos \theta) \right] - a \sin^2 \theta A_t. \quad (2.36)$$

Нетрудно видеть, что разность потенциалов между горизонтом событий и бесконечно удаленной точкой равна $\Delta\Phi_{эл} = e/2M$ независимо от положения заряда. Точно такую же разность потенциалов создает и заряженная черная дыра с тем же значением заряда e . Другие примеры построения аксиально-симметричных неоднородных полей можно найти в работах ^{50, 52–54}.

2.4. Влияние внешнего магнитного поля на метрику пространства-времени. Если напряженность магнитного поля в окрестности черной дыры достаточно велика, то необходимо учитывать влияние поля на геометрию пространства-времени. Характерным масштабом напряженности магнитного поля для черной дыры массы M , как уже говорилось, является величина $B_M = 1/M$. При $B \approx B_M$ геометрия пространства-времени вблизи горизонта существенно изменяется. Но и при $B \ll B_M$ учет влияния магнитного поля на метрику представляет большой интерес, так как позволяет проанализировать влияние магнитного поля на параметры эргосферы и термодинамические свойства горизонта.

Точное решение уравнений Эйнштейна—Максвелла, описывающее черную дыру во внешнем магнитном поле, было построено Эрнстом ⁶⁹ с помощью преобразования Гаррисона ^{63, 66} решения Шварцшильда ⁶⁹. Такое решение не является асимптотически плоским, однако его физическая интерпретация достаточно проста благодаря существованию промежуточной асимптотической области $r_+ \ll r \ll B^{-1}$ (r_+ — радиус горизонта событий), в которой пространство-время приближенно шварцшильдово, а магнитное поле однородно (такая область существует при $B \ll B_M$). Аналогичное решение можно построить для заряженной вращающейся черной дыры ¹¹⁵. В этом случае, однако, вопрос физической интерпретации менее тривиален: поле оказывается содержащим электрическую компоненту, появляется коническая особенность метрики и т. д. Кроме того, значения параметров M (масса), a (момент вращения на единицу массы), Q (электрический заряд) затравочного решения оказываются не совпадающими с соответствующими параметрами замагниченных решений.

Рассмотрим интервал стационарного аксиально-симметричного пространства-времени в цилиндрических координатах

$$ds^2 = -f(d\varphi - \omega dt)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(d\xi^2 + dz^2) - \xi^2 dt^2], \quad (2.37)$$

где f , ω , γ — вещественные функции. Введем комплексный электромагнитный потенциал $\Phi = A_\varphi + iB_\varphi$, а также комплексный гравитационный потенциал $\mathcal{E} = f - iH$, где A_φ — компонента 4-потенциала A_μ , B_φ — компонента магнитостатического потенциала, порождающая дуальный тензор электромагнитного поля, существование которого, так же как и потенциала H , следует из соответствующих уравнений Эйнштейна — Максвелла. В результате ряда преобразований можно показать, что полная система уравнений Эйнштейна — Максвелла для аксиально-симметричных стационарных конфигураций сводится к системе двух нелинейных уравнений для потенциалов ⁶⁵ Φ и $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} f\Delta\Phi &= \partial_a\Phi(\partial^a\mathcal{E} - 2\Phi^*\partial^a\Phi), \\ f\Delta\mathcal{E} &= \partial_a\mathcal{E}(\partial^a\mathcal{E} - 2\Phi^*\partial^a\Phi); \end{aligned} \quad (2.38)$$

здесь

$$\begin{aligned} f &= \text{Re } \mathcal{E} - |\Phi|^2, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial\xi}, \\ \partial_a &= \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (a \equiv \xi, z); \end{aligned}$$

поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью двумерного тензора

$$g^{ab} = g_{ab} = \text{diag} (1, 1).$$

Потенциалы B_Φ и H удовлетворяют уравнениям

$$\nabla A_t + \omega \nabla A_\Phi = -i \xi f^{-1} \nabla B_\Phi, \quad (2.39)$$

$$\nabla H - 2i \Phi^* \nabla \Phi = i \xi^{-2} f \nabla \omega, \quad (2.40)$$

где оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial z}.$$

Система уравнений (2.38) инвариантна относительно группы $SU(2, 1)$ преобразований комплексных потенциалов⁶⁶. Используя одно из преобразований этой группы применительно к некоторому «затравочному» решению уравнений Эйнштейна — Максвелла, можно построить новое решение, которое физически соответствует включению однородного магнитного поля B . Соответствующие преобразования имеют вид⁶³

$$\xi' = \Lambda^{-1} \xi, \quad \Phi' = \Lambda^{-1} \left(\Phi - \frac{1}{2} B \xi \right), \quad \Lambda = 1 - B \Phi + \frac{1}{4} B^2 \xi. \quad (2.41)$$

При этом $f \rightarrow f'$, $\omega \rightarrow \omega'$, причем

$$f' = \text{Re} \xi' - |\Phi'|^2 = |\Lambda|^{-2} f, \quad (2.42)$$

$$\nabla \omega' = |\Lambda|^2 \nabla \omega - \xi f^{-1} (\Lambda^* \nabla \Lambda - \Lambda \nabla \Lambda^*); \quad (2.43)$$

остальные величины, входящие в (2.37), остаются неизменными.

Для метрики Керра — Ньюмена, описывающей пространство — время, содержащее черную дыру, потенциалы Φ и ξ , найденные из (2.39) и (2.40), имеют вид

$$\Phi = Q \left(i \cos \theta - \frac{a \sin^2 \theta}{r + ia \cos \theta} \right), \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \xi = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + Q^2 \cos^2 \theta - 2iaM \cos \theta (3 - \cos^2 \theta) + \\ + \frac{2a \sin^2 \theta}{r + ia \cos \theta} (Ma \sin^2 \theta + iQ^2 \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Соответствующая замагниченная метрика записывается в виде

$$ds^2 = \left(\frac{\Lambda}{A} dt^2 - \frac{dr^2}{\Lambda} - d\theta^2 \right) \Sigma |\Lambda|^2 - \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma |\Lambda|^2} (d\varphi - \omega' dt)^2, \quad (2.46)$$

где

$$A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta.$$

Величина ω' , удовлетворяющая уравнению (2.43), при различных значениях параметров M , a , Q , B найдена в работах^{70, 71, 115}.

Интересным свойством замагниченных решений является наличие конической сингулярности на оси симметрии⁷⁵. Избавиться от конической сингулярности можно, разложив величину Λ около точки $\theta = 0$ и вводя новую угловую координату $\tilde{\varphi} = \varphi / |\Lambda_0|^2$, где

$$|\Lambda_0|^2 = \left(1 + \frac{1}{4} B^2 Q^2 \right)^2 + B^2 (Q + aMB)^2. \quad (2.47)$$

С учетом этого площадь поверхности горизонта событий замагниченной черной дыры будет равна

$$S = \int_0^{2\pi |\Lambda_0|^2} d\varphi \int_0^\pi d\theta |g_{22} g_{33}|^{1/2} = 4\pi |\Lambda_0|^2 (r_+^2 + a^2). \quad (2.48)$$

Видно, что сильное магнитное поле увеличивает площадь поверхности горизонта, причем это изменение при $Q \neq 0$ пропорционально квадрату напряженности магнитного поля, а при $Q = 0$ пропорционально $(a/M)^2 (B/B_M)^4$. Для невращающейся черной дыры площадь поверхности горизонта сохраняет шварцшильдово значение.

Возможна и иная интерпретация решений, обладающих конической сингулярностью. Именно, с конической сингулярностью ассоциируется метрика бесконечно тонкой космической струны¹¹⁶. Тогда решение (2.46) при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ можно понимать как пространство-время замагниченной черной дыры, «проткнутой» бесконечно тонкой космической струной. Мы не будем развивать здесь эти рассуждения далее, однако подчеркнем, что преобразование Гаррисона (2.41) в общем случае изменяет коническую структуру пространства-времени. Если затравочное решение не имеет конической точки, то преобразованное, вообще говоря, будет иметь такую особенность. Напротив, для получения преобразованного решения без конической особенности необходимо выбрать затравочное пространство-время имеющим такую особенность.

Рассмотрим вопрос о физическом смысле параметров Q_0 , M , a замагниченных решений.

Вычислим электрический Q и магнитный P заряд черной дыры, описываемой решением (2.46). При этом удобно выразить $F_{\mu\nu}$ через его компоненты в локально-невращающейся системе отчета $B_r^\wedge$, $E_r^\wedge$, что дает

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta A^{1/2} (B_r^\wedge + iE_r^\wedge) = 4\pi (iQ + P). \quad (2.49)$$

Учитывая, что

$$B_r^\wedge + iE_r^\wedge = -(A^{1/2} \sin \theta)^{-1} \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta}, \quad (2.50)$$

находим

$$Q = Q_0 + 2aMB - \frac{1}{4} B^2 Q_0^3, \quad P = 0. \quad (2.51)$$

Таким образом, магнитный заряд замагниченной черной дыры равен нулю, а электрический заряд не совпадает с исходным «затравочным» зарядом Q_0 .

Для выяснения физического смысла параметров M и a можно воспользоваться соотношениями¹¹¹

$$\oint_\infty (2T_\nu^\mu - \delta_\nu^\mu T) \mathcal{K}_{(t)}^\nu d^3 \Sigma_\mu = -\frac{1}{8\pi} \oint_\infty \mathcal{K}_{(t)}^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \oint_{r_+} \mathcal{K}_{(t)}^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu}, \quad (2.52)$$

$$-\oint_\infty T_\nu^\mu \mathcal{K}_{(\Phi)}^\nu d^3 \Sigma_\mu = \frac{1}{16\pi} \oint_\infty \mathcal{K}_{(\Phi)}^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi} \oint_{r_+} \mathcal{K}_{(\Phi)}^{\mu;\nu} d^2 \Sigma_{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

где T_ν^μ — тензор энергии импульса. В асимптотически плоском пространстве-времени поверхностные интегралы по бесконечно удаленной поверхности в правых частях (2.52) и (2.53) определяют массу и момент вращения всей конфигурации, а интегралы по поверхности горизонта событий — соответствующие параметры (M_H , J_H) черной дыры. В нашем случае метрика не является асимптотически плоской, и поверхностные интегралы по удаленной поверхности расходятся. Однако с учетом лишь линейных по B членов полная масса конфигурации оказывается конечной, причем ни M_∞ , ни M_H не совпадают с массой «затравочного» решения Керра — Ньюмена. Что же касается момента вращения, то величина J_∞ при $r \rightarrow \infty$ вообще расходится, что связано с недостаточно быстрым убыванием ω' при $r \rightarrow \infty$, причем затра-

вочный момент вращения aM не совпадает и с величиной J_n . Таким образом, при наличии внешнего магнитного поля параметры Q_0 , M , a уже нельзя интерпретировать как электрический заряд, массу и удельный момент вращения черной дыры¹³⁵.

3. Пондеромоторное воздействие внешнего электромагнитного поля на черную дыру. Можно предположить, что на черную дыру, обладающую электрическим зарядом Q , во внешнем электрическом поле E будет действовать сила QE , как и на точечный электрический заряд. Однако заряд черной дыры спрятан под горизонтом событий, поэтому вопрос требует дополнительного исследования. Более того, черная дыра является нелокальным объектом, характеризующимся параметром размерности длины r_+ — гравитационным радиусом. Поэтому следует ожидать, что точечная сила QE будет получаться лишь в случае, когда электрическое поле мало меняется на расстояниях порядка r_+ , т. е., строго говоря, лишь в пределе однородного поля.

Дополнительное силовое воздействие на черную дыру должно возникать из-за ее вращения. Именно, если вектор Пойнтинга внешнего электромагнитного поля (плотность импульса поля) отличен от нуля, то благодаря асимметрии поглощения импульса поля вращающейся черной дырой должна возникать сила, перпендикулярная моменту вращения⁵⁷. Эта сила уже имеет чисто гравитационное происхождение и не зависит от электрического заряда дыры.

Движение заряженной вращающейся черной дыры в магнитном поле, направление которого составляет некоторый угол с осью вращения, должно сопровождаться прецессией момента вращения, поскольку заряженная вращающаяся дыра имеет собственный магнитный момент $\mu = aQ$. Наконец, в соответствии с теоремой Хокинга, вращающаяся дыра (независимо от наличия электрического заряда), находящаяся во внешнем поле, не обладающем осевой симметрией, должна терять вращательный момент (в случае, если поле является осесимметричным, но ось симметрии не совпадает с осью вращения, то теряется поперечная по отношению к оси симметрии поля компонента вращательного момента).

Все эти закономерности можно без особого труда продемонстрировать, используя найденные выше формулы для внешних полей различных конфигураций. Воспользуемся приемом, использованным Прессом¹¹⁷ для расчета релаксации вращения дыры во внешнем скалярном поле. Будем считать, что найденные в п. 2.1–2.2 решения однородных уравнений Максвелла на фоне пространства-времени вращающейся черной дыры справедливы не во всем пространстве, а лишь внутри сферы радиуса $R \gg r_+$ и обращаются в нуль вне этой сферы. Тогда, воспользовавшись уравнениями Максвелла с источником J^μ , найдем, что по поверхности сферы должны течь токи, вообще говоря, не только электрические, но и (фиктивные) магнитные. Если самодуальный бивектор электромагнитного поля представить в виде

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2[\Phi_0 m_{[\mu}^* n_{\nu]} + \Phi_1 (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} m_{\nu]}^*) + \Phi_2 l_{[\mu} m_{\nu]}] \theta(R - r), \quad (3.1)$$

где θ — функция Хевисайда, то из уравнений Максвелла для плотности комплексного тока найдем

$$J^\mu = J_E^\mu + iJ_M^\mu = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{\mu 1} \delta(r - R), \quad (3.2)$$

где J_E^μ — плотность электрического тока, а J_M^μ — плотность магнитного тока (входящего в уравнение для дуального тензора $\tilde{F}_{\mu\nu}^{\mu\nu} = -4\pi J_M^\mu$). Поле $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ будет действовать на токи, текущие по оболочке с некоторой силой, плотность которой вычисляется стандартным образом. Интегрирование по поверхности сферы приводит к выражениям, которые конечны при $R \rightarrow \infty$,

т. е. не зависят от расположения оболочки. В силу глобального сохранения 4-импульса и момента вращения в асимптотически плоском пространстве, равная и противоположная сила (момент силы) должны быть приложены к черной дыре.

3.1. Заряженная черная дыра в однородном электрическом поле. Суммарное электромагнитное поле черной дыры и внешнее поле можно получить, подставляя в (3.1) выражение

$$\Phi_1 = -\frac{Q\rho^2}{2} + \Phi_{1E},$$

где первое слагаемое описывает кулоновское поле черной дыры (предполагается $Q \ll M$), а второе — произвольно направленное однородное электрическое поле, найденное в п. 2.2. При вычислении силы следует ограничиться членами, пропорциональными произведению Q и E . В результате для плотности силы получим⁵⁷

$$f^\mu = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\rho^2 \Phi_{1E} \left(n^\mu - \frac{\Delta}{2\Sigma} l^\mu \right) - \Phi_{2E} m^\mu - \frac{\Delta}{2\Sigma} \Phi_{0E} m^{*\mu} \right]. \quad (3.3)$$

Выполнив интегрирование по поверхности оболочки в пределе $R \rightarrow \infty$ и учитывая, что на дыру должна действовать противоположно направленная сила, будем иметь

$$\mathbf{f} = QE, \quad (3.4)$$

что и следовало ожидать в пределе однородного поля. Альтернативный вывод этой формулы для черной дыры был дан Бичаком¹¹⁸. Заметим, что если перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью v по отношению к системе, в которой черная дыра покоится, то, совершив преобразование Лоренца над полем $\mathbf{E}$ (в этой системе появится также магнитное поле $\mathbf{B}$), найдем, что на черную дыру будет действовать полная сила Лоренца

$$\mathbf{f} = Q(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]). \quad (3.5)$$

3.2. Дрейф вращающейся черной дыры в электромагнитном поле. Пусть теперь внешнее однородное поле имеет как электрическую, так и магнитную составляющие. В этом случае тетрадные проекции максвелловского тензора Φ_0, Φ_1, Φ_2 следует вычислять по формулам (2.22) с помощью найденного в п. 2.2 потенциала Дебая. Для плотности силы, действующей на оболочку, находим выражение

$$f^\mu = \frac{1}{2\pi} \left\{ |\Phi_1|^2 \left(\frac{\Delta}{2\Sigma} l^\mu - n^\mu \right) + \frac{\Delta}{2\Sigma} |\Phi_0|^2 n^\mu - |\Phi_2|^2 l^\mu + \operatorname{Re} \left[\Phi_1^* \left(2\Phi_2 m^\mu - \frac{\Delta}{\Sigma} \Phi_0 m^{*\mu} \right) \right] \right\}, \quad (3.6)$$

куда следует подставить полученные значения Φ_0, Φ_1, Φ_2 . Интегрируя по сфере и переходя к пределу $R \rightarrow \infty$, получаем полное выражение для силы, действующей на оболочку (бесконечные при $R \rightarrow \infty$ вклады в f^μ исчезают при интегрировании по углам). Противоположная сила, приложенная к черной дыре, равна

$$\mathbf{f} = \frac{16\pi}{3} [\mathbf{SJ}], \quad (3.7)$$

где $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{B}] / 4\pi$ — вектор Пойнтинга внешнего электромагнитного поля, $\mathbf{J}$ — вектор вращательного момента дыры. Происхождение этой силы, как указывалось выше, можно связать с асимметрией поглощения импульса поля вращающейся черной дырой. Аналогичный эффект должен возникать при погружении вращающейся дыры в однородный поток частиц со скоростью v , направление которой не совпадает с вектором момента вращения

$\mathbf{J}$ дыры. Асимметрия поглощения импульса, возникающая вследствие вращения, должна приводить к появлению поперечной силы $\mathbf{f} \sim \mu \mathbf{v} \times \mathbf{J}$, где μ — плотность массы в потоке (считаем $v \ll c$).

3.3. Прецессия момента количества движения заряженной дыры в магнитном поле. Момент силы, действующей на сферическую оболочку, при $R \rightarrow \infty$ можно рассчитать по формуле плоского пространства-времени

$$\mathbf{N} = \oint_{R \rightarrow \infty} [\mathbf{r} \mathbf{f}] r^2 d\Omega, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{f}$ — плотность силы. Повторяя рассуждения п. 3.1, для изменения момента количества движения заряженной черной дыры во внешнем магнитном поле B получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{Q}{M} [\mathbf{J} \mathbf{B}]. \quad (3.9)$$

Это уравнение описывает прецессию магнитного момента $\mu = Q\mathbf{J}/M$ во внешнем магнитном поле с угловой скоростью $\Omega = QB/M$, совпадающей с циклотронной частотой заряда Q .

В реальных астрофизических условиях величина угловой скорости прецессии весьма мала. Однако если само магнитное поле создается более легким аккреционным диском, то прецессию будет испытывать диск с частотой

$$\Omega_{\text{disk}} = \frac{Q}{M} B \frac{J}{J_{\text{disk}}}, \quad (3.10)$$

которая при $J_{\text{disk}} \ll J$ может быть несколько больше. Обсуждение возможности наблюдения эффекта можно найти в работе³⁸. Критическим является значение заряда дыры: для достаточно больших (в принципе допустимых) значений заряда можно получить астрофизически разумные времена прецессии.

3.4. Релаксация вращательного момента в асимметричном поле. В ряде работ^{55, 56, 117, 119} рассматривалось изменение момента вращения дыры в однородном магнитном поле, направленном под углом к оси вращения. Со временем черная дыра теряет компоненту момента, ортогональную полю, и в результате система становится аксиально симметричной (так как момент вращения как бы поворачивается вдоль поля) в согласии с теоремой Хокинга⁴². Если же внешнее поле вообще не обладает осью симметрии, можно ожидать, что черная дыра будет полностью терять момент вращения. Для расчета релаксации вращательного момента достаточно вычислить в рамках предложенного метода момент силы, приложенной к электрически нейтральной дыре со стороны внешнего скрещенного поля, описанного в п. 2.2, в случае произвольной ориентации векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. В результате получаем следующее уравнение для изменения вращательного момента дыры:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -\frac{2}{3} M ([\mathbf{B} [\mathbf{J} \mathbf{B}]] + [\mathbf{E} [\mathbf{J} \mathbf{B}]]). \quad (3.11)$$

Диагонализация матрицы, умноженной на вектор $\mathbf{J}$ в правой части, приводит к системе собственных значений $1/\tau_1, 1/\tau_2, 1/\tau_3$, имеющих смысл обратных времен релаксации проекций вектора $\mathbf{J}$ на собственные векторы $\xi^{(a)}$:

$$J_a = J_{a0} e^{-t/\tau_a}. \quad (3.12)$$

Одним из собственных векторов $\xi^{(3)}$ является вектор Пойнтинга внешнего поля, а соответствующее собственное значение

$$\tau_3 = \frac{3}{2} M \frac{B_M^2}{E^2 + B^2}; \quad (3.13)$$

два других собственных вектора лежат в плоскости, образуемой $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а собственные значения равны

$$\tau_{1,2} = 3MB_M^2 \{ (E^2 + B^2) \pm [(E^2 + B^2)^2 - 4[\mathbf{E}\mathbf{B}]^2]^{1/2} \}^{-1}. \quad (3.14)$$

В случае коллинеарных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ матрица становится вырожденной $1/\tau_2 = 0$, причем два других собственных значения совпадают. Это отвечает сохранению проекции момента на общее направление $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. В случае взаимно перпендикулярных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ $\tau_1 = \tau_2 = 2\tau_3$. При этом черная дыра сначала теряет компоненту момента, ортогональную плоскости, образованной $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а затем компоненты, лежащие в одной плоскости с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. В общем случае релаксация подчиняется правилу⁶

$$\frac{1}{\tau_3} \geq \frac{1}{\tau_1} \geq \frac{1}{\tau_2}. \quad (3.15)$$

4. Движение заряженных частиц. Движение пробных частиц в пространстве-времени Керра, как правило, исследуется с помощью уравнения Гамильтона—Якоби, в котором возможно полное разделение переменных¹²⁰. Оказывается, однако, что непосредственное интегрирование уравнений движения с учетом симметрии задачи не только не является более сложным, но и имеет в ряде случаев технические преимущества. Такой подход позволяет проще исследовать методом последовательных приближений орбиты, близкие к круговым, выбирая в качестве нулевого приближения экваториальные круговые траектории^{84, 106}.

4.1. Круговые орбиты в экваториальной плоскости невращающейся черной дыры в магнитном поле. Запишем уравнение движения частицы с зарядом e и массой μ , движущейся вблизи черной дыры в присутствии электромагнитного поля;

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{e}{\mu} F_{\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (4.1)$$

Из симметрии задачи ясно, что в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ возможно круговое движение

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = u^0 (1, 0, 0, \omega_0).$$

Подставляя в уравнение (4.1) соответствующие значения символов Кристоффеля и тензора электромагнитного поля, для частоты обращения ω_0 находим

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \omega_B \left[\pm \left(1 + 4 \frac{\omega_S^2}{\omega_B^2} \right) - 1 \right], \quad (4.2)$$

где $\omega_S = M^{1/2}/r^{3/2}$ — кеплерова частота, $\omega_B = eB/\mu u^0$ — циклотронная частота в гравитационном поле, два знака перед корнем соответствуют «ларморовым» (сила Лоренца направлена на дыру) и «антиларморовым» (сила Лоренца направлена от дыры) вращениям частицы. Используя условия нормировки для 4-скорости частицы $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$, получим

$$(u^0)^2 \left(1 - \frac{3M}{r} + r^2 \omega_0 \omega_B \right) = 1. \quad (4.3)$$

Сопоставляя уравнения (4.2) и (4.3), нетрудно видеть, что ларморово движение ($\omega_0 < 0$) возможно только при $r > 3M$, в то время как антиларморово движение существует как при $r > 3M$, так и в области $2M < r \leq 3M$. Введем безразмерный параметр $\varepsilon = eBM/\mu$, характеризующий относительное влияние магнитного поля на движение частицы. Заметим, что даже при малых значениях магнитного поля $BM \ll 1$ параметр ε для частиц с большим отношением заряда к массе (для электрона $e/\mu \approx 10^{21}$) может быть не малым.

Решая уравнения (4.2) и (4.3) совместно, для энергии частиц найдем

$$E = \mu u_0 = \frac{\Delta^{1/2}}{r} (1 + \lambda_{(\pm)}^2)^{1/2}, \quad (4.4)$$

где

$$\lambda_{(\pm)} = -\frac{\Delta}{2M(r-3M)} \left\{ \varepsilon \pm \left[\varepsilon + 4 \frac{(r-3M)M^3}{\Delta^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.5)$$

Отсюда видно, что величина λ_+ , соответствующая ларморовым орбитам, при $r = 3M$ имеет особенность, а λ_- такой особенности не имеет. Область существования круговых траекторий, как видно из (4.5), при достаточно больших значениях ε простирается вплоть до горизонта событий. В области $2M < r \leq 3M$ существуют антиларморовы орбиты с радиусами $r \geq M(2 + \varepsilon^{-1})$. Соответственно этому энергия, измеренная в локально-инерциальной системе отсчета, равна $\tilde{E} = \mu/\sqrt{2}$, и гравитационный дефект массы таков:

$$\Delta\mu = \frac{\mu - E}{\mu} = (1 - \varepsilon^{-1/2}), \quad (4.6)$$

который при $\varepsilon \gg 1$ может быть близким к 100%. Отметим, что при $r > 3M$ существуют ультрарелятивистские траектории ($\gamma \gg 1$), причем это не связано с близостью орбиты к замкнутой фотонной орбите. При условии $\varepsilon\Delta/M^2 \gg 2[(r/M) - 3]^{1/2}$ из (4.4) следует

$$\gamma_{(+)}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + \frac{\varepsilon^2 \Delta^2}{M^2(r-3M)^2}\right] \gg 1. \quad (4.7)$$

4.2. Малые колебания около круговых орбит. Для описания орбит, близких к круговым, заменим исходную систему уравнений (4.1) системой уравнений для отклонений $\xi^\mu(s) = x^\mu(s) - z^\mu(s)$. Выделив в левой части члены, линейные по ξ^μ , будем иметь

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{dt^2} + \gamma_\alpha^\mu \frac{d\xi^\alpha}{dt} + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} U^\mu = \mathcal{N}^\mu(\xi), \quad (4.8)$$

где

$$\gamma_\alpha^\mu = \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\beta (u^0)^{-1} - \frac{e}{\mu u^0} F_\alpha^\mu \right]_{\theta=\pi/2}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} U^\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\gamma_\alpha^\mu u^\alpha (u^0)^{-1} - \frac{e}{\mu u^0} F_\alpha^\mu u^\alpha \right]_{\theta=\pi/2} \quad (a \equiv r, \theta).$$

В правой части (4.8) через $N^\mu(\xi)$ обозначены члены, нелинейные по ξ^μ . Если электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ является аксиально-симметричным, то в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$) отличными от нуля являются только компоненты $\gamma_0^1, \gamma_1^0, \gamma_3^1, \gamma_1^3, U^r, U^\theta$ введенных выше величин γ_α^μ, U^μ . Учитывая это и интегрируя уравнения (4.8) с $\mu = 0, 3$, в линейном приближении по ξ^μ получим

$$\frac{d\xi^A}{dt} + \gamma_1^A \xi^r = 0 \quad (A \equiv t, \varphi = 0, 3). \quad (4.10)$$

Подставляя это соотношение в уравнение с $\mu = 1$, получаем, уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \xi^r}{dt^2} + \omega_r^2 \xi^r = 0, \quad (4.11)$$

частота которых задается формулой

$$\omega_r = \left(\frac{\partial U^r}{\partial r} - \gamma_1^r \gamma_1^r \right)^{1/2}. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.8) с $\mu = 2$ дает

$$\frac{d^2 \xi^\theta}{dt^2} + \omega_\theta^2 \xi^\theta = 0, \quad \omega_\theta = \left(-\frac{\partial U^\theta}{\partial \theta} \right)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Полученные уравнения (4.11) и (4.13) описывают радиально-фазовые и аксиальные колебания частицы около круговых орбит, причем аксиальные колебания независимы, в то время как радиальные колебания

$$\xi^r = \text{const} \cdot \sin \omega_r t \quad (4.14)$$

сопровождаются азимутальными и «временными» колебаниями

$$\xi^A = \text{const} \cdot \gamma_1^A \frac{\cos \omega_r t}{\omega_r}. \quad (4.15)$$

Полученные формулы позволяют исследовать устойчивость движения по круговым орбитам. С помощью формул (4.12) и (4.13) получим, что вблизи невращающейся черной дыры

$$\omega_r^2 = \omega_S^2 \left(1 - \frac{6M}{r}\right) + \omega_B^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad \omega_\theta^2 = \omega_S^2. \quad (4.16)$$

Отсюда видно, что движение в вертикальном направлении устойчиво ($\omega_\theta^2 > 0$) независимо от радиуса орбит. Радиальное движение при $r > 6M$ устойчиво независимо от величины магнитного поля. При $r < 6M$ области устойчивости для ларморовых и антиларморовых вращений различны. Для достаточно больших значений ϵ ларморово движение устойчиво вплоть до $r \approx 4,3M$, антиларморово движение — вплоть до горизонта событий⁸³.

4.3. Движение в поле Шварцшильда — Эрнста. В случае произвольной величины напряженности внешнего магнитного поля пространство-время невращающейся черной дыры описывается метрикой Шварцшильда — Эрнста⁶⁹

$$ds^2 = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - r^2 d\theta^2 \right] \Lambda^2 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} d\varphi^2, \quad (4.17)$$

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{4} B^2 r^2 \sin^2 \theta.$$

Движение нейтральных и заряженных частиц в метрике (4.17) исследовалось в работе⁸³. В частности, для нейтральных частиц (в плоскости $\theta = \pi/2$) из условия нормировки 4-скорости получается следующее условие для определения радиусов замкнутых круговых фотонных орбит:

$$(r - 3M) = \frac{1}{4} B^2 r^2 (3r - 5M). \quad (4.18)$$

Анализ этого уравнения показывает, что если при $B = 0$ имеется лишь один корень $r = 3M$, то при больших B в физической области значений радиуса $r > 2M$ круговых орбит вообще нет. Существует критическое значение магнитного поля

$$B_{cr} = 2 \sqrt{3} B_M (169 + 38 \sqrt{19})^{-1/2}, \quad (4.19)$$

соответствующее радиусу одной замкнутой фотонной орбиты $r_{ph} = 1/3 (8 + \sqrt{19}) M$. Таким образом, при $B < B_{cr}$ существуют две замкнутые фотонные орбиты, радиусы которых приближенно равны

$$r_1 \approx 3M + 9M \left(\frac{B}{B_M} \right)^2, \quad r_2 \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{B}. \quad (4.20)$$

Отметим, что фактор Λ в (4.17) в области существования круговых орбит удовлетворяет условию $1 \leq \Lambda \leq 4/3$. Впоследствии аналогичные результаты были получены в работах^{121, 122}.

4.4. Движение в магнитном поле в метрике Керра. Рассмотрим движение заряженных частиц в пробном однородном магнитном поле, задаваемом вектор-потенциалом (2.14) в пространстве-времени Керра^{84, 106}. В этом случае из уравнения (4.1) с $\mu = 1$ для частоты

кругового движения в экваториальной плоскости получим

$$\omega_0 = \beta (1 - a^2 \omega_S^2)^{-1} \{ \pm [1 + \beta^{-2} \omega_S^2 (1 - a^2 \omega_S^2) (1 + a \omega_B)]^{1/2} - 1 \}, \quad (4.21)$$

$$\beta = \frac{\omega_B}{2} (1 + a^2 \omega_S^2) + a \omega_S^2;$$

здесь два знака соответствуют прямому и обратному вращениям частицы в поле Керра, причем возможны также ларморово и антиларморово движения.

С другой стороны, нетрудно показать, что

$$(u^0)^2 \left[1 - \frac{3M}{r} (1 - a \omega_0)^2 - \omega_0^2 a^2 + r^2 \omega_0 \omega_B (1 + a^2 \omega_S^2) - \frac{M a \omega_B}{r} \right] = 1. \quad (4.22)$$

В данном случае совместное точное решение уравнений (4.21) и (4.22) для определения $\gamma(r, \epsilon)$ и $\omega_0(r, \epsilon)$ получить не удастся. Однако, считая, что $\omega_S \ll \omega_B$, т. е. электромагнитная сила преобладает, и сопоставляя (4.21) и (4.22), можно показать, что особенности движения заряженных частиц остаются теми же, что и в однородном магнитном поле в метрике Шварцшильда; области существования круговых орбит смещаются в сторону горизонта событий, возможно ультрарелятивистское движение вдали от замкнутой фотонной орбиты. Явные выражения для частот радиально-фазовых и аксиальных колебаний около круговых орбит имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_r^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{6M}{r} - \frac{3a^2}{r^2} - 8a^2 \omega_S^2 \right) + \omega_0 \omega_B \left(1 - \frac{6M}{r} + \frac{3a^2}{r^2} \right) + \\ + 4a \omega_S^2 (2\omega_0 + \omega_B) + \omega_B^2 \left(1 - \frac{2M}{r} - r^2 a^2 \omega_S^4 + 2a^2 \omega_S^2 \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\omega_\theta^2 = \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} + 4a^2 \omega_S^2 \right) \omega_0^2 + \omega_0 \omega_B \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) - 2a \omega_S^2 (2\omega_0 + \omega_B). \quad (4.24)$$

Отсюда следует, что границы области радиальной устойчивости смещаются в сторону горизонта событий в зависимости от величины напряженности магнитного поля. Эти выводы согласуются с результатами численного анализа эффективного потенциала радиального движения в уравнении Гамильтона — Якоби⁸⁵.

5. Спонтанное и вынужденное излучение при негеодезическом движении частиц. Постановка задачи об излучении в искривленном пространстве-времени требует уточнения условий, где и как производится наблюдение. Рассеяние излучения, испускаемого частицей, на кривизне пространства-времени делает процесс существенно нелокальным. Если длина волны в рассматриваемом участке спектра много меньше характерной длины, на которой заметно изменяется гравитационное поле, то в принципе можно отделить эффекты вторичного рассеяния, если же обе длины одного порядка, то такого различия провести уже нельзя. В асимптотически плоском пространстве-времени энергию излучения можно рассчитывать на бесконечности, при такой глобальной постановке задачи эффекты рассеяния и изменения частоты в гравитационном поле учитываются автоматически. Для нерелятивистской частицы, движущейся вдоль геодезической, длина волны излучения всегда одного порядка с масштабом неоднородности гравитационного поля. В этом случае имеет смысл лишь глобальная постановка задачи на излучение. При негеодезическом движении, в особенности для ультрарелятивистских частиц, характерная длина волны может быть значительно меньше масштаба неоднородности; в этом случае возможно исследование излучения в локально-геодезической системе координат. Ниже мы рассмотрим обе постановки задачи, преследуя цель расчета излучения ультрарелятивистской частицы, движущейся в основном под действием электромагнитных сил.

5.1. Модель скалярных волн. Чтобы избежать усложнений, связанных с векторным характером электромагнитного излучения, рассмотрим сначала глобальную постановку задачи об излучении на модельном примере скалярных волн. Будем считать, что частица массы μ , движущаяся в пространстве-времени Керра вдоль мировой линии $x^\mu(s)$, взаимодействует с безмассовым вещественным скалярным полем $\Phi(x)$, имея скалярный заряд q . Создаваемое зарядом поле определяется запаздывающим решением уравнения Даламбера в искривленном пространстве-времени

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right] = 4\pi q \int ds \delta^4(x - x(s)), \quad (5.1)$$

где δ — функция определена соотношением $\int \delta^4(x) d^4x = 1$. Полная потеря энергии E на излучение частицы складывается из двух частей — излучения, уходящего на бесконечность E_{out} , и излучения, поглощаемого черной дырой E_{in} . Соответствующие интенсивности определяются формулами

$$P_{\text{out}} = \frac{dE_{\text{out}}}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint (r^2 + a^2) T^{\mu 1} \mathcal{K}_\mu d\Omega, \quad (5.2)$$

$$P_{\text{in}} = \frac{dE_{\text{in}}}{dt} = \lim_{r \rightarrow r_+} \oint (r_+^2 + a^2) T^{\mu 1} \mathcal{K}_\mu d\Omega, \quad (5.3)$$

где $\mathcal{K}_\mu$ — времениподобный вектор Киллинга. Решение уравнения (5.1) строится с помощью разложения по сфероидальным функциям¹²³ $Z(\theta, \varphi)$:

$$\Phi(x) = \sum_{l, m} R_{lm}(r) Z_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (5.4)$$

Радиальные функции R_{lm} удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR_{lm}}{dr} \right) + \left(\frac{K^2}{\Delta} - \lambda_{lm} \right) R_{lm} = - \frac{4\pi q}{u^0} Z_{lm}^* \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \delta(r - r_0); \quad (5.5)$$

здесь $K = (r^2 + a^2)\omega - am$, $\lambda = E - 2am\omega + a^2\omega^2$, E — постоянная разделения. Индексы u радиальных функций далее везде опускаются. С помощью следующей замены функции $R(r)$ и аргумента r

$$R(r) = u(r) (r^2 + a^2)^{-1/2},$$

$$r^* = r + \frac{M}{(M^2 - a^2)^{1/2}} \left(r_+ \ln \frac{r - r_+}{r_-} - r_- \ln \frac{r - r_-}{r_+} \right) \quad (5.6)$$

перейдем от (5.5) к уравнению без первой производной. Соответствующее однородное уравнение имеет вид уравнения Шрёдингера

$$\frac{d^2 u}{dr_*^2} - V_{\text{eff}} u = 0 \quad (5.7)$$

с эффективным потенциалом

$$V_{\text{eff}} = -(r^2 + a^2)^{-2} (K^2 - \Delta \lambda) + \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^3} [2(Mr - a^2) + 3\Delta a^2 (r^2 + a^2)^{-1}]. \quad (5.8)$$

При $r^* \rightarrow \infty$ потенциал $V_{\text{eff}} \rightarrow -\omega^2$, в то время как вблизи горизонта событий, $r^* \rightarrow -\infty$, V_{eff} принимает значение $k = (\omega - m\Omega_H)^2$. В соответствии с этим можно ввести две пары линейно-независимых решений уравнения (5.7) $\chi^\pm(r^*)$ и $v^\pm(r^*)$, имеющих асимптотическое поведение

$$\chi^\pm \sim e^{\pm i\omega r^*}, \quad v^\pm \sim e^{\pm ikr^*}. \quad (5.9)$$

С помощью этих функций построим «правое» u_R и «левое» u_L решения, первое из которых описывает уходящее на бесконечность волну при $r^* \rightarrow \infty$, а второе — падающее на дыру при $r^* \rightarrow -\infty$:

$$u_R \approx (2|\omega|)^{-1/2} e^{i\omega r^*}, \quad u_L \approx (2|k|)^{-1/2} \tau e^{-ikr^*}, \quad (5.10)$$

где постоянная τ имеет смысл коэффициента прохождения через потенциальный барьер. Используя эти решения, получим радиальную функцию, соответствующую запаздывающему решению уравнения (5.1), в виде

$$R(r) = 4\pi q (r^2 + a^2)^{-1/2} (r_0^2 + a^2)^{-1/2} Z_l^{*m} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \times \\ \times \frac{i|\omega|}{\omega u^0} [u_R(r) u_L(r_0) \theta(r - r_0) + u_L(r) u_R(r_0) \theta(r_0 - r)]. \quad (5.11)$$

Подставляя это в (5.2) и (5.3), находим следующие выражения для интенсивности излучения P_{out} , уходящего на бесконечность, и P_{in} , падающего на черную дыру:

$$P_{\text{out}} = 4\pi \sum_{l, m > 0} m \omega_0 q^2 (u^0)^{-2} (r_0^2 + a^2)^{-1} \left| Z_l^m \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right|^2 |u_L(r_0)|^2, \quad (5.12)$$

$$P_{\text{in}} = 4\pi \sum_{l, m > 0} m \omega_0 q^2 \frac{|\omega k|}{\omega k} (u_0)^{-2} |\tau|^2 (r_0^2 + a^2)^{-1} \left| Z_l^m \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right|^2 |u_R(r_0)|^2. \quad (5.13)$$

Из формулы (5.13) видно, что при $\omega_0 < \Omega_H$ мощность P_{in} становится отрицательной, что соответствует режиму супerradiации в поле Керра^{30,31}.

При ультрарелятивистском движении скалярной частицы величина P_{in} экспоненциально мала из-за малости коэффициента прохождения τ . Поскольку в этом случае излучаются высокие гармоники частоты обращения, то для нахождения мощности излучения P_{out} достаточно найти радиальную функцию в приближении высоких частот. Для этого воспользуемся квазиклассическим приближением, считая в уравнении (5.7) $l \gg 1$, $|m| \gg 1$. При движении частицы вдали от замкнутой фотонной орбиты $\omega_0 (r - r_{\text{ph}}) \gg 1$, сшиваение квазиклассических решений уравнения (5.7) следует проводить в точке r_t пересечения спадающего участка кривой (5.8) с осью абсцисс. Координата r_0 , определяющая положение круговой орбиты ультрарелятивистской частицы, отличается от r_t на малую величину, поскольку потенциальная кривая V_{eff} для скалярного безмассового поля в приближении ВКБ близка к потенциальной кривой для массивной частицы при $\gamma \gg 1$. Ввиду этого значение радиальной функции в точке r_0 может быть получено из решения приближенного уравнения, справедливого в малой окрестности точки r_t , которое возникает в результате разложения V_{eff} в (5.7) в окрестности точки r_t :

$$\frac{d^2 u}{dq^2} - qu = 0, \quad (5.14)$$

$$q = - \left\{ \frac{m^2 \Delta r}{(r^2 + a^2)^3} [\omega_0^2 (3r^2 + a^2) - 1] \right\}^{1/3}_{r=r_t} (r^* - r_t^*).$$

Решением этого уравнения, которое сшивается квазиклассическим решением типа u_l при $r \neq r_0$, является функция Эйри $\Phi(q)$. Переходя от функции Эйри к функции Макдональда $K_{1/3}$ и принимая при этом во внимание, что

$$r_t - r_0 \approx \frac{\Delta}{r} g^{-1} \left[\frac{r_0^2 \Omega_0^2}{\gamma^2} + 2 \frac{l - |m|}{|m|} (1 - a^2 \Omega_0^2)^{1/2} \right], \quad (5.15)$$

$$\Omega_0 = \frac{2Ma \mp (\Delta_0)^{1/2} r_0}{r_0^3 + a^2 r_0 + 2Ma^2},$$

где

$$g = \Omega_0^2 (3r_0^2 + a^2) - 1, \quad (5.16)$$

для $u_L(r_0)$ окончательно получим ⁸⁴

$$u_L(r_0) = \left[\frac{2}{3\pi} \frac{r_0 \Omega_0^2}{\gamma^2} g^{-1} (r_0^2 + a^2) (1 + \psi^2) \right]^{1/2} K_{1/3}(z), \quad (5.17)$$

$$z = \frac{2|m|}{3\gamma^3} g^{-1} \Omega_0^3 r_0^2 \Delta_0^{1/2} (1 + \psi^2)^{3/2},$$

$$\psi^2 = \frac{2\gamma^2}{r_0^2 \Omega_0^2} \frac{l - |m|}{|m|} (1 - a^2 \Omega_0^2)^{1/2}. \quad (5.18)$$

Поскольку функция Макдональда при больших значениях аргумента экспоненциально спадает, то, как видно из (5.18), основной вклад в излучение дают гармоники

$$m \lesssim m_{\max} = \frac{g\gamma^3}{2r_0^2 \Delta_0^{1/2} \Omega_0^3}. \quad (5.19)$$

Мы видим, что максимальный номер изучаемых гармоник, как и в случае плоского пространства-времени, пропорционален третьей степени энергии и, кроме того, зависит от параметров гравитационного поля. Однако по мере приближения к замкнутой фотонной орбите зависимость γ^3 сменяется квадратичной γ^2 . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произведение γg . С помощью формул (4.21) и (4.22) нетрудно показать, что при $r \rightarrow r_{\text{ph}}$ ($g \rightarrow 0$) для заданного ε

$$\gamma g \rightarrow \varepsilon \cdot \text{const}_g \quad (5.20)$$

т. е. является конечной величиной, в то время как $\gamma \rightarrow \infty$. Интересно сопоставить также распределение по l в спектре СИ и ГСИ при заданной частоте $\omega = m\omega_0$, определяемой номером гармоники m . Поскольку эффективная область изменения параметра ψ простирается от нуля до единицы, то $l - |m| \lesssim m/\gamma^2$, при фиксированном m вклад в СИ дает большое число мультиполей $l \sim \gamma$, в то время как основной вклад в ГСИ дают члены с $l = |m|$ и $l = |m| + 1$. Это согласуется с выводом других работ ^{124, 125}, сделанных на основании численных оценок. Приближенная формула для сферических гармоник $Z_l^m(\pi/2, 0)$ при $l \gg 1$, $|m| \gg 1$ найдена в работе ¹²⁴. В наших обозначениях она имеет следующий вид:

$$\left| Z_l^m \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right|^2 = \frac{1 + (-1)^{l-|m|}}{2} \frac{1}{\pi^2} \frac{\gamma}{\psi} \frac{(1 - a^2 \Omega_0^2)^{1/2}}{r_0 \Omega_0}. \quad (5.21)$$

Подставляя (5.17) и (5.21) в (5.12) и переходя, ввиду квазинепрерывности спектра, от суммирования по l и m к интегрированию по ψ и по параметру

$$y = \frac{4|m|}{3\gamma^3} g^{-1} r_0^2 \Delta_0^{1/2} \Omega_0^3, \quad (5.22)$$

для спектрального распределения излучения найдем

$$\frac{dP_{\text{out}}}{dy} = \frac{3\sqrt{3}}{32\pi} \left(\frac{q^2 \gamma^2}{r_0^2} \right)^2 \frac{g^2 y}{r_0^2 \Delta_0^{1/2} \Omega_0^3} \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx. \quad (5.23)$$

При малых y интенсивность излучения растет как $y^{5/3}$, а при больших y — экспоненциально спадает. Спектральная кривая имеет максимум, соответствующий критической гармонике (5.19). Полная интенсивность излучения скалярных волн равна

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{12} \frac{q^2 \gamma^4 g^3}{\Delta_0^{1/2} \Omega_0^3}. \quad (5.24)$$

Отметим, что эта величина в γ^2 раз превосходит интенсивность скалярного ГСИ ¹²⁴ и, кроме того, зависит от степени близости радиуса орбиты частицы r_0 к радиусу замкнутой фотонной орбиты r_{ph} . При $a = 0$ эти формулы переходят в полученные в работе ⁸³ для пространства-времени Шварцшильда.

5.2. Синхротронное излучение ультрарелятивистских частиц. Для расчета электромагнитного излучения ультрарелятивистской заряженной частицы в метрике Керра удобно воспользоваться формализмом Ньюмена — Пенроуза — Тьюкольского^{113,126,127}. Поток излучения, уходящего на бесконечность, выражается формулой

$$\frac{d^2 E_{\text{out}}}{dt d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |\Phi_2|^2, \quad (5.25)$$

где Φ_2 — скаляр Ньюмена — Пенроуза, определяемый соотношением (2.22). Разделение переменных в уравнении Тьюкольского для Φ_2 приводит к разложению по сфероидальным функциям спинного веса $s = -1$:

$$\Phi_2 = \rho^2 \int d\omega \sum_{l, m} {}_{-1}R(r) {}_{-1}Z_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (5.26)$$

Радиальные функции ${}_{-1}R(r)$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta \frac{d^2}{dr^2} {}_{-1}R - {}_{-1}V {}_{-1}R = - {}_{-1}T, \quad (5.27)$$

где

$${}_{-1}V = -\frac{K^2}{\Delta} + \lambda - i\Delta \left(2\Delta \frac{dK}{dr} - K \frac{d}{dr} \Delta \right). \quad (5.28)$$

Источник в правой части (5.27) для рассматриваемого случая кругового движения имеет вид

$$\begin{aligned} {}_{-1}T = & -\frac{e\Delta}{\sqrt{2}r} \int dt \exp[i(\omega - m\omega_0)t] \left\{ \left(-i\omega \frac{r^2 + a^2}{\Delta} + \frac{iam}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{iK}{m} - \right. \\ & \left. - (1 - a\omega_0) \left[m(1 - a\omega_0) + \frac{ia}{r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} {}_{-1}Z_l^{*m}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \delta(r - r_0). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Потенциал (5.28) является комплексным, что затрудняет процедуру сшивания квазиклассических решений. Однако с помощью формализма, предложенного в работе¹²⁸, можно обойти эту трудность, преобразовав уравнение (5.27) в уравнение с вещественным потенциалом. В результате задача о нахождении радиальной функции в высокочастотном приближении $l \gg 1$, $|m| \gg 1$ может свестись к описанному выше скалярному случаю. Повторяя рассуждения предыдущего раздела и переходя от сфероидальных гармоник при $s = -1$ к функциям с $s = 0$, для двух независимых состояний поляризации уходящего на бесконечность электромагнитного излучения (σ и π — компоненты) получим⁸⁴:

$$P_{\text{out}}^{(\sigma)} = \sum_{l, m > 0} \frac{8}{3} \frac{e^2}{\gamma^4} m g^{-1} r_0 \Delta_0 \Omega_0^5 (1 + \psi^2)^2 \left| Z_l^m\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right|^2 K_{2/3}^2(z), \quad (5.30)$$

$$P_{\text{out}}^{(\pi)} = \sum_{l, m > 0} \frac{8}{3} \frac{e^2}{\gamma^2 m} g^{-1} r_0^{-1} \Delta_0 \Omega_0^3 (1 + \psi^2) \left| \frac{dZ_l^m(\pi/2, 0)}{d\theta} \right|^2 K_{1/3}^2(z). \quad (5.31)$$

Заменяя суммирование по l, m интегрированием по ψ и u и используя асимптотическое представление

$$\left| \frac{dZ(\pi/2, 0)}{d\theta} \right|^2 = \frac{1 - (-1)^{l-m}}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \frac{\psi}{\gamma} r_0 \Omega_0 m^2 (1 - a^2 \Omega_0^2)^{1/2}, \quad (5.32)$$

для спектрального распределения излучения найдем

$$\frac{dP_{\text{out}}^{\sigma, \pi}}{dy} = \frac{3\sqrt{3}}{32\pi} \frac{e^2 \gamma^4}{r_0^4 \Delta_0^{1/2} \Omega_0^3} g^2 y \left(\int_y^\infty K_{5/3}(x) dx \pm K_{2/3}(y) \right). \quad (5.33)$$

Нетрудно видеть, что особенности спектрального распределения электромагнитного излучения ультрарелятивистского заряда повторяют особенно-

сти, отмеченные в предыдущем разделе для изучения скалярных волн. В частности, остаются справедливыми выводы об изменении граничной частоты в спектре и о наборе мультиполей, дающих основной вклад в излучение при переходе от режима СИ к режиму ГСИ. Полная интенсивность излучения равна

$$P = \frac{1}{6} \frac{e^2 \gamma^4}{r_0^4 \Delta_0^{1/2} \Omega_0^3} g^2. \quad (5.34)$$

Степень поляризации излучения

$$\Pi = \frac{P^{(\sigma)} - P^{(\pi)}}{P} = \frac{4}{3} \quad (5.35)$$

не зависит от присутствия гравитационного поля. Эти формулы обобщают известные результаты^{88–90} для спектра и поляризации синхротронного излучения в плоском пространстве-времени на случай сильного гравитационного поля вращающейся черной дыры.

5.3. Локальное описание синхротронного излучения в гравитационном поле. Учитывая, что высокочастотная часть спектра излучения ультрарелятивистских частиц формируется на малом участке траектории, для описания спектра можно применить метод локальных координат. Введем нормальные римановы координаты⁷⁹ ξ^α , в которых метрика пространства-времени имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + \dots \quad (5.36)$$

и все символы Кристоффеля обращаются в нуль в начале координат $\xi^\alpha = 0$. Запишем уравнение Максвелла в этих координатах с учетом линейных по ξ^α членов:

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} + \frac{2}{3} \left[R_\tau^\lambda \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi^\lambda} + (R_{\lambda\tau}^{\mu\nu} + R_{\tau\lambda}^{\mu\nu}) \frac{\partial A^\lambda}{\partial \xi^\nu} \right] + \frac{4}{3} R_\nu^\mu A^\nu = -4\pi J^\mu, \quad A_{;\mu}^\mu = 0. \quad (5.37)$$

Основной оператор в левой части уравнения совпадает с обычным оператором Даламбера в пространстве-времени Минковского. Дополнительные члены, пропорциональные кривизне пространства-времени, имеют относительный порядок $\xi\lambda/L^2$, где L — масштаб неоднородности гравитационного поля, λ — характерная длина волны в спектре. Для синхротронного излучения $\lambda_{\text{syn}} \sim \Delta l/\gamma^2$, где $\Delta l \sim \rho/\gamma$ — длина формирования излучения ультрарелятивистской частицы, движущейся по траектории с мгновенным радиусом кривизны ρ , γ — лоренцев фактор частицы в этой системе отсчета, причем волновая зона начинается на расстояниях, малых по сравнению с ρ . Таким образом, при $\xi \ll L$ относительная величина членов, пропорциональных кривизне пространства-времени, мала в существенной области длин волн даже в случае $\rho \sim L$.

Ограничиваясь высокочастотной частью излучения и опуская, с учетом сказанного выше, члены, пропорциональные ξ^μ в (5.37) в свободно падающей системе, для спектрального распределения излучения можно использовать формулу плоского пространства-времени

$$\frac{d\hat{P}}{dy} = -\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} e^2 \dot{u}^2 y \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx, \quad (5.38)$$

где

$$y = \frac{2}{3} (k\ddot{u}) (-\dot{u}^2)^{-3/2}, \quad \dot{u}^2 = \dot{u}_\mu \dot{u}^\mu. \quad (5.39)$$

Для ультрарелятивистских частиц с точностью до γ^{-2} выполняется соотношение $k\dot{u} = -\omega\dot{u}^2/u^0$. Если для 4-импульса фотона $k_\lambda = (\omega, -\mathbf{k})$ принять закон преобразования к произвольной системе отсчета $k_\mu \Lambda_\nu^\mu = k_\nu$, где $\Lambda_\nu^\mu = \partial \xi^\mu / \partial x^\nu$ — матрица преобразования координат в точке мгновенного положения частицы, то выражение (5.38) можно переписать в терминах общеквариантных величин. При этом обозначенные точкой производные от 4-скорости переходят в ковариантные производные: $\dot{u} \rightarrow Du/ds$ и т. д. Полная интенсивность соответственно принимает вид

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\mu^2} F_{\mu\nu} \hat{F}^{\nu\lambda} u^\mu u_\lambda. \quad (5.40)$$

Рассмотрим СИ ультрарелятивистских частиц, движущихся в однородном магнитном поле в метрике Керра.

Переходя от локальной системы координат ξ^μ к произвольной системе координат с началом в точке мгновенного положения частицы X^μ стандартным способом¹²⁹

$$\xi^\mu = \Lambda_\nu^\mu(X) \left[(x - X)^\nu + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu(X) (x - X)^\alpha (x - X)^\beta + \dots \right], \quad (5.41)$$

нетрудно показать, что полная интенсивность излучения, отнесенная к временной координате в системе координат Бойера — Линдквиста, совпадает с (5.34), полученной в рамках формализма Ньюмена — Пенроуза — Тьюкольского.

Приведенные выше рассуждения остаются справедливыми и для уравнения Дирака, записанного в локально-инерциальных координатах. Поэтому квантовый спектр СИ в свободно падающей системе отсчета определяется соответствующими выражениями, найденными для случая плоского пространства-времени¹³⁰. В результате для полной интенсивности излучения с учетом квантовых поправок к классическому спектру в метрике Керра получим⁹⁷

$$P = P_{\text{кл}} \left(1 - \frac{55}{32} \frac{\gamma^2}{\mu} g r_0^{-2} \Delta_0^{-1/2} \Omega_0^{-2} + \dots \right), \quad (5.42)$$

где величина $P_{\text{кл}}$ совпадает с (5.34). В этой формуле радиус орбиты r_0 является функцией γ . Таким образом, зависимость квантовых поправок от энергии является более сложной, чем в случае плоского пространства-времени, где эта зависимость линейна. При $a = 0$ выражение (5.42) переходит в полученное в работе⁹⁶ в пространстве-времени Шварцшильда.

5.4. Вынужденное излучение. Взаимодействие заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле в пространстве-времени Керра, с излучением может приводить к эффекту отрицательной реабсорбции излучения. Рассмотрим вынужденные колебания заряженной частицы, движущейся по круговой орбите под действием слабых электромагнитных волн, описываемых тензором поля $f_{\mu\nu}$. С этой целью введем в правую часть уравнений (4.10), (4.11), (4.13), описывающих свободные радиально-фазовые и аксиальные колебания частицы около круговой орбиты, возмущающую силу $f^\mu = f_{\nu}^\mu u^\nu (u^0)^{-1}$. В результате, переходя к фурье-разложениям для величин f^μ и возмущений ξ^μ

$$f^\mu(t, r, \theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^\mu(r, \theta, \omega, m) \exp(-i\omega t + im\varphi), \quad (5.43)$$

$$\xi^\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \xi^\mu(\omega) \exp(-i\omega t), \quad (5.44)$$

будем иметь

$$\xi^A(\omega, m) = \frac{1}{i\omega_m} \gamma_1^A \xi^r(\omega, m) - \frac{e}{\mu u^0} \frac{f^A(\omega, m)}{\omega_m^2}, \quad (5.45)$$

$$\xi^r(\omega, m) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega_m^2} \frac{e}{\mu u^0} \left(f^r(\omega, m) - \frac{i}{\omega_m} \gamma_1^A f^A(\omega, m) \right), \quad (5.46)$$

$$\xi^\theta(\omega, m) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega_m^2} \frac{e}{\mu u^0} f^\theta(\omega, m), \quad (5.47)$$

где

$$\omega_m = \omega - m\omega_0, \quad f^\mu(r, \theta, \omega, m) \equiv f^\mu(\omega, m).$$

Из вида этих решений следует, что в случае, когда в спектре возмущающей силы присутствуют частоты

$$\omega = m\omega_0, \quad \omega = \Omega_r^\pm = m\omega_0 \pm \omega_r, \quad \omega = \Omega_\theta^\pm = m\omega_0 \pm \omega_\theta, \quad (5.48)$$

вынужденные колебания будут иметь резонансный характер. Чтобы придать физический смысл выражениям (5.45)–(5.47) в условиях резонанса, лужно учесть диссипативные процессы путем сдвига полюса в комплексную плоскость $\omega \rightarrow \omega - i\nu$, предполагая частоту столкновений ν малой по сравнению с ω . Если искривленное пространство-время допускает существование времениподобного вектора Киллинга $\mathcal{K}_{(t)}^\mu$, то работу, производимую полем $f_{\mu\nu}(x)$ над током $J^\nu(x)$, ковариантным образом можно определить так:

$$A = \int f_{\mu\nu}(x) J^\nu(x) \mathcal{K}_{(t)}^\mu (-g)^{1/2} d^4x. \quad (5.49)$$

Предполагая, что корреляции между частицами отсутствуют, мощность поглощения волн системой можно вычислить интегрированием соответствующей величины для одной частицы по распределению частиц. Подставляя в (5.49) ток

$$J^\nu(x) = e \int u^\nu(x) \delta^4(x^\alpha - x^\alpha(s)) \frac{ds}{(-g)^{1/2}}, \quad (5.50)$$

получим

$$A = e \int f_{\mu\nu}(x(s)) u^\nu(s) \mathcal{K}_{(t)}^\mu ds, \quad (5.51)$$

где

$$x^\alpha(s) = z^\alpha(s) + \xi^\alpha(s).$$

Разлагая подынтегральное выражение по ξ^α , в низшем неисчезающем порядке теории возмущений для усредненной по фазам мощности поглощения волн можно получить

$$P = e \left\langle \xi^\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial t} \right\rangle. \quad (5.52)$$

Введем корреляционный тензор, характеризующий электромагнитное поле со случайными фазами:

$$\langle f_\mu(\omega, m) f_\nu^*(\omega', m') \rangle = I_{\mu\nu} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'). \quad (5.53)$$

Очевидно, что тензор $I_{\mu\nu}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$I_{\mu\nu}(\omega, m) = I_{\nu\mu}^*(\omega, m) = I_{\nu\mu}(-\omega, -m). \quad (5.54)$$

Используя приведенные выше формулы для усредненной по фазам мощности поглощения, получим выражение¹⁰⁶

$$P = \int_0^\infty d\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=\pm 1} P_r^\lambda(\omega, m) \frac{v}{(\omega - \Omega_r^\lambda)^2 + v^2} + \sum_{\lambda=\pm 1} P_\theta^\lambda(\omega, m) \frac{v}{(\omega - \Omega_\theta^\lambda)^2 + v^2} + \frac{v}{(\omega - m\omega_0)^2 + v^2} P_0(\omega, m) \right]. \quad (5.55)$$

Входящие сюда спектральные функции имеют вид

$$\begin{aligned} P_r^\pm(\omega, m) &= \pm \frac{e^2}{\mu u^0} \frac{\Delta_0}{r_0^2} \frac{\omega}{\omega_r} \left(I_{11} + \frac{\kappa^2}{\omega_r^2} I_{33} \pm \frac{2\kappa}{\omega_r} \operatorname{Im} I_{13} \right), \\ P_\theta^\pm(\omega, m) &= \pm \frac{e^2}{\mu u^0} \frac{1}{r_0^2} \frac{\omega}{\omega_\theta} I_{22}, \\ P_0(\omega, m) &= -\frac{2e^2}{\mu u^0} \left\{ \frac{1}{\Delta_0} \left[1 - \frac{2M}{r_0} (1 - a\omega_0) - \omega_0^2 (r_0^2 + a^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\Delta_0^2}{r_0^2} \frac{\kappa^2}{\omega_r^2} \right] \frac{d}{d\omega} (\omega I_{33}) + \frac{2\omega}{\omega_r^2} \kappa \frac{\Delta_0}{r_0^2} \operatorname{Im} I_{13} \right\}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

где

$$\kappa = \gamma_1^3 - \omega_0 \gamma_1^0.$$

Аналогичные выражения для мощности поглощения волн при движении заряда в поле Шварцшильда — Эрнста (4.17) получены в работе¹⁰⁵, а в поле Шварцшильда — в работе¹⁰⁴. Характерной особенностью этих выражений, является неположительность величины $P_{r,\theta}^-$ и неотрицательность величины $P_{r,\theta}^+$. Таким образом, оказывается, что на комбинационных частотах Ω_r^- и Ω_θ^- мощность поглощения отрицательна, имеет место мазерный механизм усиления волн, а на частотах Ω_r^+ и Ω_θ^+ положительна. Знак выражения P_0 , описывающего резонансное взаимодействие на гармониках частоты обращения $\omega = m\omega_0$, зависит от более детальной структуры корреляционных функций и в принципе также может быть отрицательным. Интересно отметить, что условие усиления волн в нашей модели аналогично условию супerrрадиации в поле Керра. В самом деле, отрицательное поглощение имеет место при $\omega < m\omega_0$ ($\Omega_{r,\theta}^- = m\omega_0 - \omega_{r,\theta}$), а условием супerrрадиации является неравенство $\omega < m\Omega_H$.

6. Воздействие магнитного поля на квантовые процессы в черных дырах. Интерес к квантовым процессам в сильном гравитационном поле черной дыры связан с возможностью существования реликтовых микроскопических черных дыр, которые могли образовываться в ранней Вселенной (см. обзор современного состояния проблемы в¹¹). Исторически, первым квантовым эффектом, обнаруженным в теории черных дыр, стало предсказанное Зельдовичем³⁰ и Мизнером³¹ на классическом языке явление «супerrрадиации». С классической точки зрения супerrрадиация есть усиление волн различной природы при рассеянии их на вращающейся черной дыре. Супerrрадиация имеет место для тех мультиполей, для которых частота ω и азимутальное квантовое число m удовлетворяют соотношению

$$\omega < m\Omega_H, \quad (6.1)$$

где $\Omega_H = a/2Mr_+$ — угловая частота вращения горизонта событий черной дыры. С точки зрения квантовой теории супerrрадиация есть индуцированное рождение квантов поля вращающейся черной дыры. Соответствующий спонтанный процесс представляет собой рождение пар частиц с противоположными значениями проекции орбитального момента, обусловленное взаимодействием орбитального момента с моментом вращения дыры, зависящим от их взаимной ориентации. Для мод, удовлетворяющих условию (6.1), это взия-

модействие имеет характер отталкивания, что и делает возможным процесс суперрадиации.

Несколько позже Хокингом¹⁰ был предсказан процесс квантового испарения черной дыры, который обусловлен рождением пар в гравитационном поле дыры (в том числе и невращающейся) за счет приливных сил. Благодаря этому процессу черная дыра теряет энергию (массу), причем эта потеря соответствует излучению черного тела при температуре $T = (1/2\pi) (r_+ - M)/(r_+^2 + a^2)$. Для шварцшильдовой черной дыры в обычных единицах будем иметь

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M} \approx 10^{-9} \frac{M_\odot}{M} \text{ К.} \quad (6.2)$$

Потеря массы (углового момента) описывается уравнением (в случае бозонов)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M}{J} \right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{lm} \int_0^\infty d\omega \frac{\Gamma_{lm}^\omega \left(\frac{\omega}{m} \right)}{\exp[(\omega - m\Omega_H)/T] - 1}, \quad (6.3)$$

причем «барьерный фактор» Γ_{lm}^ω обусловлен гравитационным взаимодействием испускаемых квантов с черной дырой. Температура черной дыры является чисто квантовой величиной. В классическом пределе $T \rightarrow 0$ планковский множитель в (6.3) превращается в функцию Хевисайда $\theta(m\Omega_H - \omega)$ (одновременно $\Gamma_{lm}^\omega \rightarrow -1$), и формула (6.2) описывает эффект спонтанной суперрадиации в поле Керра.

Величина $m\Omega_H$ в показателе экспоненты в (6.3) играет роль химического потенциала горизонта μ_H в бозевском распределении рождающихся частиц. В случае заряженной черной дыры (с зарядом Q) рождение частиц, обладающих зарядом e , будет определяться химическим потенциалом горизонта

$$\mu_H = m\Omega_H + eV_H, \quad (6.4)$$

где $V_H = Q/2M$ — электростатический потенциал горизонта.

Массивные частицы могут образовывать квазистационарные состояния вокруг черной дыры, которые распадаются за счет туннелирования частиц под горизонт событий. При условии малости гравитационного радиуса дыры r_+ по сравнению с комптоновской длиной волны частицы λ_c эти массивные состояния оказываются долгоживущими^{6,131,132,134}. Вещественная часть энергии этих состояний в пренебрежении релятивистскими поправками имеет водородоподобный характер:

$$\xi_n = \mu \left[1 - \frac{(\mu M - eQ)^2}{2n^2} \right], \quad (6.5)$$

где μ — масса частицы, n — главное квантовое число $n = l + n_r + 1$. В этом приближении вращение дыры не оказывает влияния на положение уровней. Комплексная энергия квазиуровней равна

$$\xi_{lmn_r} = \xi_n - \frac{1}{2} i \Gamma_{lmn_r}, \quad (6.6)$$

причем декремент затухания Γ , зависящий от квантовых чисел l, m, n_r , удовлетворяет условию

$$\Gamma \ll \xi_n - \xi_{n-1}, \quad (6.7)$$

которое говорит о том, что уровни являются долгоживущими. В случае вращающейся черной дыры имеются «суперрадиантные» квазистационарные состояния, для которых $\xi_n < \mu_H$ и которые не затухают, а возбуждаются вследствие явления суперрадиации. При условии $\lambda_c \gg r_+$ наиболее эффективно возбуждается суперрадиантный уровень $l = 1, m = 1, n_r = 0$ (при

$a \ll M$); для него

$$\Gamma_{110} = -\frac{2a\mu}{3M} \left(\frac{r_+}{2\sqrt{2}\lambda_c} \right)^8. \quad (6.8)$$

Существенным отличием суперрадиации на квазисвязанных уровнях от «обычной» суперрадиации является экспоненциальный характер развития неустойчивости; число частиц на квазистационарных уровнях (в случае бозонов) растет как $\exp(|\Gamma|t)$. В этом процессе происходит последовательная передача момента вращения дыры на все более высокие уровни, причем масса дыры теряется значительно медленнее, чем угловой момент⁶.

Замечательным фактом является возможность «управления» описанными выше квантовыми процессами с помощью внешнего магнитного поля. Обсудим это подробнее.

6.1. Изменение химического потенциала горизонта. Значение химического потенциала горизонта определяется поведением эффективного потенциала в радиальном уравнении (5.7) в окрестности горизонта событий черной дыры. Если магнитное поле достаточно слабое, чтобы его можно было рассматривать как пробное, то применимы результаты, полученные в п. 5.1. Как было отмечено, вращение черной дыры в однородном магнитном поле создает фарадеевскую разность потенциалов между горизонтом событий и бесконечно удаленной точкой. Нетрудно убедиться в том, что соответствующая величина как раз войдет в эффективный потенциал радиального уравнения, в результате чего на горизонте будем иметь следующее значение химического потенциала:

$$\mu_H = m\Omega_H + \frac{e}{2M} (Q - 2aMB). \quad (6.9)$$

Рождение частиц вследствие суперрадиации будет создавать тенденцию к уменьшению химического потенциала до нуля, причем уменьшение второго слагаемого происходит при $Q \rightarrow 2aMB$. Если магнитное поле становится настолько сильным, что вблизи горизонта индуцируемое электрическое поле превышает швингеровское значение μ^2/e , то вступает в действие электродинамический механизм рождения пар¹³³. Этот процесс также прекращается, когда дыра приобретает электрический заряд $Q = 2aMB$. Обсуждение термодинамических соотношений для вращающейся черной дыры во внешнем магнитном поле можно найти в работе⁷².

Аналогичным образом изменяется химический потенциал горизонта и во внешнем поле более общего вида, при этом

$$\mu_H = m\Omega_H + \frac{1}{2}e(A_t + \Omega_H A_\phi), \quad (6.10)$$

где A_t и A_ϕ — значения компонент 4-потенциала внешнего поля на горизонте, при условии выбора калибровки, в которой $A_t \rightarrow 0$ на бесконечности.

6.2. Магнитная эргосфера. В случае, когда магнитное поле достаточно сильное, так что необходимо учитывать его влияние на метрику пространства-времени, возникает новое любопытное явление. Как отмечалось в работе¹⁰⁷, эргосфера заряженной дыры в сильном магнитном поле не исчезает даже при $a = 0$. Значение функции ω' в (2.46) на горизонте событий, имеющее смысл угловой скорости увлечения инерциальных систем отсчета, с точностью до членов, линейных по B , равно

$$\omega'_H = \Omega_H - \frac{2QB r_+}{r_+^2 + a^2}. \quad (6.11)$$

В результате даже для нейтральных частиц значение химического потенциала изменяется¹³⁶:

$$\mu_H = m(\Omega_H - 2BQ r_+ (r_+^2 + a^2)^{-1}). \quad (6.12)$$

В случае заряженных частиц необходимо дополнительно учесть изменение электростатического потенциала горизонта.

6.3. Изменение спектра квазистационарных состояний массивных заряженных частиц. Если предположить, что внешнее магнитное поле однородно вплоть до области локализации финитных орбит массивных частиц, то влияние поля на спектр квазистационарных состояний заряженных частиц будет следующим. Во-первых, возникает зеемановский сдвиг уровней, который можно описать переходом к эффективной массе

$$\mu^2 \rightarrow \mu^2 - eBm, \quad (6.13)$$

где m — магнитное квантовое число. Во-вторых, вследствие изменения химического потенциала горизонта (согласно (6.9)) появится асимметрия порога возбуждения квазистационарных состояний по знаку заряда. В результате при развитии бозонной неустойчивости будет возбуждаться электрический ток.

7. Заключение. Рассмотренные выше эффекты интересны в том отношении, что их возникновение связано с одновременным существованием гравитационного и электромагнитного полей. Более того, в силу универсальности гравитационного взаимодействия и закона тяготения Эйнштейна электромагнитное поле подвергается воздействию гравитационного поля и, с другой стороны, само воздействует на него. В результате возникают эффекты, которые не являются простой «суммой» эффектов электродинамики и гравитации, но представляют собой проявление их синтеза и внутренней взаимосвязи.

Сюда относятся классические эффекты, такие как возникновение индукционной разности потенциалов при вращении черной дыры в магнитном поле, дрейф вращающейся черной дыры в электромагнитном поле с отличным от нуля вектором Пойнтинга, спонтанные и индуцированные радиационные процессы при движении заряженных частиц в электромагнитном поле в метрике Керра. Имеются и характерные квантовые эффекты, связанные с изменением химического потенциала горизонта вращающейся черной дыры внешним магнитным полем, возникновением эффективной эргосферы заряженной дыры в магнитном поле.

«Гравимагнитные» явления, вероятно, играют определенную роль в астрофизике. Так, в последнее время привлекла большое внимание гипотеза о том, что извлечение энергии из черных дыр (в частности, сверхмассивных дыр в ядрах галактик и квазаров) обусловлено именно электродинамическим механизмом, связанным с обсуждавшимися выше индукционными эффектами (подробнее об этом см. ^{5,34–37}).

Эти явления представляют, на наш взгляд, интересный в методическом отношении пример возникновения новых закономерностей в результате синтеза и взаимного влияния двух областей физики, электромагнетизма и гравитации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- ¹ Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971.
- ² Рис М., Руффини Р., Уилер Дж. Черные дыры, гравитационный коллапс и космология. — М.: Мир, 1977.
- ³ Black Holes/Eds C. DeWitt, B.S. DeWitt. — New York: Gordon and Breach, 1973.
- ⁴ Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. — М.: Мир, 1986.
- ⁵ Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. — М.: Наука, 1986.
- ⁶ Гальцов Д.В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. — М.: Изд-во Моск ун-та, 1986.
- ⁷ Черные дыры/Под ред. В.П. Фролова. — М.: Мир, 1978.
- ⁸ Фролов В.П.//Тр. ФИАН СССР. 1986. Т. 169. С. 3.

- ⁹ Бирелл Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени.—М.: Мир, 1983.
- ¹⁰ Hawking S.W.//Comm. Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199.
- ¹¹ Полнарев А.Г., Хлопов М.Ю.//УФН. 1985. Т. 145. С. 369.
- ¹² Лайтман А., Сюняев Р.А., Шакура Н.И.//УФН. 1978. Т. 126. С. 515.
- ¹³ Cowley A.P., Crampton D., Hutchings J.B. et al.//Astrophys. J. 1983. V. 272. P. 118.
- ¹⁴ Hutchings J.B., Crampton D., Cowley A.P.//IAU Circ. 1983. No. 2791.
- ¹⁵ White N.E.//Adv. Space Res. 1984. V. 3, No. 10—12. P.9.
- ¹⁶ Watson M.G.//Nature. 1986. V. 321. P. 16.
- ¹⁷ McClintock J.E., Remillard R.A.//Astrophys. J. 1986. V. 308. P. 110.
- ¹⁸ Caraveo P.A., Bignamic G.F., Vigreux L. et al.//Adv. Space Res. 1984. V. 3, No. 10—12. P. 77.
- ¹⁹ Бисноватый-Коган Г.С.//Астрофизика. 1985. Т.22. С. 369.
- ²⁰ Margon B.//Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1984. V. 22. P. 507.
- ²¹ Метлицкая З.Ю., Гончарский А.В., Черепашук А.М.//Астрон. ж. 1984. Т. 61. С. 124.
- ²² Антохина Э.А., Черепашук А.М.//Письма Астрон. ж. 1985. Т. 11. С. 10.
- ²³ Блэндфорд Р. Д., Торн К.С.//Общая теория относительности. — М.: Мир, 1983. — С. 163.
- ²⁴ Begelman M.G., Blandford R.D., Rees M.J.//Rev. Mod. Phys. 1984. V. 56. P. 255.
- ²⁵ Rees M.J.//Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1984. V. 22. P. 471.
- ²⁶ Young P.J., Westphal J.A., Kristian J. et al.//Astrophys. J. 1978. V. 221. P. 721.
- ²⁷ Sargent W.L.W., Young P.L., Bocksenberg A. et al.//Ibidem. P. 731.
- ²⁸ Penrose R.//Riv. Nuovo Cimento. 1969. V. 1. P. 252.
- ²⁹ Bardeen J.M., Press W.H., Teukolsky S.A.//Astrophys. J. 1972. V. 178. P.247.
- ³⁰ Зельдович Я.Б.//Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 14. С. 270.
- ³¹ Misner S.W.//Bull. Amer. Phys. Soc. 1972. V. 17. P. 472.
- ³² Старобинский А.А.//ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 48.
- ³³ Дымникова И.Г.//УФН. 1986. Т. 148. С. 393.
- ³⁴ Blandford R.D., Znajek P.L.//Mon. Not. RAS. 1977. V. 179. P. 433.
- ³⁵ Znajek P.L.//Ibidem. 1978. V. 185. P. 833.
- ³⁶ Macdonald D., Thorne K.S.//Ibidem. 1982. V. 185. P. 833.
- ³⁷ Thorne K.S., Price R.H., Macdonald D. Black Holes: the Membrane Paradigm.— New Haven; Yale Univ. Press, 1986.
- ³⁸ Гинзбург В.Л., Озерной Л.М.//ЖЭТФ. 1965. Т. 20. С. 689.
- ³⁹ Anderson R., Cohen J.M.//Astrophys. and Space Sci. 1970. V. 9. P. 146.
- ⁴⁰ Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.//ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 170.
- ⁴¹ Carter B.//Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26. P. 331.
- ⁴² Hawking S.W.//Comm. Math. Phys. 1972. V. 25. P. 152.
- ⁴³ Ruffini R., Wilson J.R.//Phys. Rev. Ser. D. 1975. V. 12. P. 2959.
- ⁴⁴ Lovelace R.V.E.//Nature. 1976. V. 262. P. 649.
- ⁴⁵ Bisnovaty i-Kogan G.S.//Riv. Nuovo Cimento. 1979. V. 2, No. 1.
- ⁴⁶ Wald R.M.//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 1680.
- ⁴⁷ King A.R., Lasota J.P., Kundt W.//Ibidem. 1975. V. 12. P. 3037.
- ⁴⁸ Peterson J.A.//Ibidem. P. 2218.
- ⁴⁹ Chitre D.M., Vishveshwara C.V.//Ibidem. P. 1538.
- ⁵⁰ Bicak J., Dvorak L.//Gen. Relat. and Grav. 1976. V. 7. P. 959.
- ⁵¹ Linet B.//Phys. Lett. Ser. A. 1977. V. 60. P. 395.
- ⁵² Misra R.M.//Prog. Theor. Phys. 1977. V. 58. P. 1205.
- ⁵³ Znajek P.L.//Mon. Not. RAS. 1978. V. 182. P. 634.
- ⁵⁴ Linet B.//J. Phys. Ser. A. 1979. V. 12. P. 839.
- ⁵⁵ Pollock M.D., Brinkmann W.P.//Proc. Roy Soc. London. Ser. A. 1977. V. 356. P. 351.
- ⁵⁶ King A.R., Lasota J.P.//Astron. and Astrophys. 1977. V. 58. P. 175.
- ⁵⁷ Gal'tsov D.V., Petukhov V.I., Aliev A.N.//Phys. Lett. Ser. A. 1984. V. 105. P. 346.
- ⁵⁸ Aliev A.N., Gal'tsov D.V.//Astrophys. and Space Sci. 1987. V. 135. P. 81.
- ⁵⁹ Алиев А.Н., Гальцов Д.В., Петухов В.И.//Тезисы докладов 6-й Советской гравитационной конференции. — М.: МГПИ, 1984. — С. 107.
- ⁶⁰ Зельников А.И., Фролов В.П.//ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 321.

- 61 Leaute B., Linet B.//J. Phys. Ser. A. 1982. V. 15. P. 1821.
- 62 Ehlers J.//Les theories relativistes de la gravitation. — Paris, 1959. — P. 275.
- 63 Harrison B.K.//J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1744.
- 64 Ernst F.J.//Phys. Rev. 1968. V. 167. P. 1175.
- 65 Ernst F.J.//Ibidem. V. 168. P. 1415.
- 66 Kinnersley W.//J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 651.
- 67 Kinnersley W., Chitre D.M.//Ibidem. 1977. V. 18. P. 1538.
- 68 Алексеев А.Г.//Тр. МИАН СССР. 1987. Т. 176. С. 211.
- 69 Ernst F.J.//J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 54.
- 70 Ernst F.J., Wild W.J.//Ibidem. P. 182.
- 71 Алиев А.Н., Гальцов Д.В., Соколов А.А.//Изв. вузов СССР. Сер. «Физика». 1980. № 3. С. 7.
- 72 Гальцов Д.В.//Теоретико-групповые методы в физике.— М.: Наука, 1980.
- 73 Wild W.J., Kerns R.M.//Phys. Rev. Ser. D. 1980. V. 21. P. 332.
- 74 Wild W.J., Kerns R.M., Drish W.J.//Ibidem. 1981. V. 23. P. 829.
- 75 Hiscock W.A.//J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1828.
- 76 Krori K.D., Chaudhury S., Dowerah S.//Can. J. Phys. 1983. V. 61. P. 1192.
- 77 Krori K.D., Barua M.//Ibidem. 1984. V. 62. P. 889.
- 78 Bicak J., Janis V.//Mon. Not. RAS. 1985. V. 212. P. 899.
- 79 Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация.— М.: Мир, 1977.
- 80 Шапиро С., Тюколски С. Черные дыры, белые карлики, нейтронные звезды.— М.: Мир, 1985.
- 81 Иваницкая С.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения.— Минск: Наука и техника, 1979.
- 82 Sharp N.A.//Gen. Relat. and Grav. 1979. V. 10. P. 659.
- 83 Гальцов Д.В., Петухов В.И.//ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 801.
- 84 Aliiev A.N., Gal'tsov D.V.//Gen. Relat. and Grav. 1981. V. 13. P. 899.
- 85 Prasanna A.R., Vishveshwara C.V.//Pramana J. 1978. V. 11. P. 359.
- 86 Wagh S.M., Dhurandeur C.V., Dadhich N.//Astrophys. J. 1985. V. 290. P. 12.
- 87 Prasanna A.R.//Riv. Nuovo Cimento. 1980. V. 3. P. 1.
- 88 Иваненко Д.Д., Соколов А.А.//ДАН СССР. 1948. Т. 59. С. 1551.
- 89 Schwinger J.//Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1912.
- 90 Ginzburg V.L., Syrovatskii S.I.//Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1965. V. 3. P. 295.
- 91 Алексеев Г.А.// Классическая и квантовая теория гравитации.— Минск: Изд-во Бел. ун-та, 1976.—С. 144.
- 92 Соколов А.А., Гальцов Д.В., Петухов В.И.//Изв. вузов СССР. Сер. «Физика», 1978. № 12. С. 102.
- 93 Соколов А.А., Алиев А.Н., Гальцов Д.В.//Тезисы докладов 5-й Советской гравитационной конференции.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.—С. 94.
- 94 Гальцов Д.В., Матюхин А.А.//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 894.
- 95 Хриплович И.Б., Шуряк Э.В.//ЖЭТФ. 1973. Т. 45. С. 2137.
- 96 Соколов А.А., Алиев А.Н., Гальцов Д.В.//Вести. Моск. ун-та. Сер. 3 «Физика, астрономия». 1982. Т. 23, № 5. С. 88.
- 97 Соколов А.А., Тернов И.М., Алиев А.Н., Гальцов Д.В.//Изв. вузов СССР. Сер. «Физика». 1983. Т. 26. С. 37.
- 98 Sokolov A.A., Aliiev A.N., Gal'tsov D.V.//10th Intern. Conference on General Relativity and Gravitation.— Padova, Italy, 1983. — P. 727.
- 99 Гапонов А.В.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика», 1959. Т. 2. С. 450.
- 100 Гапонов А.В., Петелин М.В., Юлпатов В.К.//Изв. вузов СССР. Сер. «Радиофизика». 1967. Т. 10. С. 1414.
- 101 Тернов И.М., Михайлин В.В., Халилов В.Р. Синхротронное излучение и его применения.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
- 102 Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1981.
- 103 Gal'tsov D.V.//Ann. Inst. H. Poincaré. 1968. Т. 9. P. 35.
- 104 Gal'tsov D.V., Petukhov V.I.//Phys. Lett. Ser. A. 1978. V. 66. P. 346.
- 105 Алиев А.Н., Гальцов Д.В., Соколов А.А.//Вести. Моск. ун-та. Сер. 3 «Физика, астрономия». 1980. Т. 21, № 4. С. 10.
- 106 Aliiev A.N., Gal'tsov D.V., Petukhov V.I.//Astrophys. and Space Sci. 1986. V. 124. P. 137.
- 107 Соколов А.А., Тернов И.М., Гальцов Д.В., Алиев А.Н.//⁵⁹ — С. 107.
- 108 Newman E.T., Couch E., Chinnapared K. et al.//J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 918.
- 109 Boyer R.H., Lindquist R.W.//J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 265.
- 110 Papapetrou A.//Ann. Inst. H. Poincaré. 1966. Т. 4. P. 83.

- ¹¹¹ Bardeen J.M., Carter B., Hawking S.W.//Comm. Math. Phys. 1973. V. 31. P. 161.
- ¹¹² Cohér J.H., Kegeles L.S.//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 1070.
- ¹¹³ Teukolsky S.A.//Astrophys. J. 1973. V. 185. P. 635.
- ¹¹⁴ Weinstein A.//Bull. Am. Math. Soc. 1953. V. 59. P. 20.
- ¹¹⁵ Diaz J.A.//J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 155.
- ¹¹⁶ Vilenkin A.//Phys. Rep. 1985. V. 121. P. 263.
- ¹¹⁷ Press W.H.//Astrophys. J. 1972. V. 175. P. 243.
- ¹¹⁸ Bick J.//Proc. Roy. Soc., London. Ser. A. 1980. V. 371. P. 420.
- ¹¹⁹ Damour T.//Phys. Rev. Ser. D. 1978. V. 18. P. 2598.
- ¹²⁰ Carter B.//Phys. Rev. 1968. V. 174. P. 1559.
- ¹²¹ Dadhich N., Hoenselaers C., Vishveshwara C.V.//J. Phys. Ser. A. 1979. V. 12. P. 215.
- ¹²² Esteban E.P.//Nuovo Cimento. Ser. B. 1984. V. 79. P. 76.
- ¹²³ Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.— М.: Наука, 1976.
- ¹²⁴ Chrzanowski P.L., Misner S.W.//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 1701.
- ¹²⁵ Тернов И.М., Халилов В.Р., Чижов Г.А., Маглеванный И.И.//ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 377.
- ¹²⁶ Press W.H., Teukolsky S.A.//Astrophys. J. 1974. V. 193. P. 443.
- ¹²⁷ Фролов В.П.//Тр. ФИАН СССР. 1977. Т. 96. С. 72.
- ¹²⁸ Detweiler S.//Proc. Roy. Soc., London. Ser. A. 1976. V. 349. P. 217.
- ¹²⁹ Вейнберг С. Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.
- ¹³⁰ Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон.— М.: Наука, 1980.
- ¹³¹ Zouros J.M.T., Eardley D.M.//Ann. of Phys. 1979. V. 118. P. 139.
- ¹³² Гаина А. В., Чижов Г.А.//⁹³ — С. 193.
- ¹³³ Gibbons G.W.//Mon. Not. RAS. 1976. V. 177. P. 37.
- ¹³⁴ Гальцов Д.В., Ершов А.А.//Вести. Моск. ун-та. Сер. 3 «Физика, астрономия». 1987. Т. 28, № 2. С. 28.
- ¹³⁶ Алиев А.Н., Гальцов Д.В.//ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 15.
- ¹³⁶ Aliiev A.N., Gal'tsov D.V.//Astrophys. and Space Sci. 1988. V. 143. № 2. P. 301.