

537.622.5

АНГАРМОНИЗМ СМЕШАННЫХ МОД И ГИГАНТСКАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

В. И. Ожогин, В. Л. Преображенский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	593
1. Нелинейность смешанных мод и эффективный ангармонизм упругой подсистемы магнетика	593
2. Нелинейная магнитоупругая динамика антиферромагнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость»	597
3. Связанные магнитоупругие волны в антиферромагнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость»	599
4. Эффективные ангармонические модули упругости антиферромагнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость»	603
5. Экспериментальная нелинейная магнитоакустика гематита	604
6. Акустическая нелинейность вблизи спиновой переориентации	612
7. О квантовой теории нелинейных взаимодействий связанных возбуждений	613
8. За пределами ангармонических приближений	616
Заключение	619
Список литературы	619

ВВЕДЕНИЕ

Существующие в твердом теле элементарные возбуждения различной физической природы, как правило, взаимодействуют между собой. В тех случаях, когда взаимодействие приводит к линейной связи возбуждений, они реализуются в кристаллах в виде смешанных нормальных мод. Круг исследований связанных возбуждений в твердом теле, охватывающий в первую очередь вопросы формирования их «линейных» характеристик (спектров, времен релаксации, параметров связи), в последнее десятилетие значительно расширился в область нелинейных волновых процессов. При этом был предсказан и экспериментально обнаружен ряд неожиданно сильных нелинейных эффектов. Данная статья имеет целью обратить внимание читателя на некоторые ярко выраженные и *весьма общие* особенности формирования нелинейных свойств кристалла, обусловленные связью элементарных возбуждений друг с другом, и проиллюстрировать эти особенности на примере взаимодействия колебаний кристаллической решетки с системой упорядоченных спинов магнетика. Рассматриваемые при этом объекты (непроводящие антиферромагнетики) представляют и самостоятельный интерес — для нелинейной акустики твердого тела и для приложений в области функциональной радиоэлектроники.

1. НЕЛИНЕЙНОСТЬ СМЕШАННЫХ МОД И ЭФФЕКТИВНЫЙ АНГАРМОНИЗМ УПРУГОЙ ПОДСИСТЕМЫ МАГНЕТИКА

Практически любые реальные физические системы при достаточно больших амплитудах тех или иных возбуждений проявляют нелинейные свойства. Характерный масштаб, позволяющий считать амплитуду «большой», зависит от физической природы и индивидуальных особенностей взаимодей-

ствий и системе. В динамике кристаллической решетки естественным масштабом для амплитуды смещения ее узлов служит межатомное расстояние $a_0 \sim \sim 3 \text{ \AA}$. В нелинейной оптике масштаб для амплитуды электрического поля электромагнитной волны определяется напряженностью внутрикристаллических электрических полей $E_0 \sim e/a_0^2 \sim 10^9 \text{ В/см}$. В динамике спиновой системы магнитоупорядоченного кристалла роль масштаба для амплитуды колебаний намагниченности $\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_S$ играет величина равновесной намагниченности насыщения $\mathbf{M}_S \sim \mu_B/a_0^3 \sim 10^3 \text{ Гс}$.

Малость амплитуды возбуждения по сравнению с характерным масштабом — необходимое условие приближения так называемой слабой нелинейности и применимости ангармонических приближений при описании нелинейных процессов. Для динамики решетки это условие означает требование малости деформаций $|\hat{u}| \ll 1$. При его выполнении возможно представление плотности потенциальной энергии F_e деформированного кристалла в виде разложения по степеням компонент тензора деформаций \hat{u} :

$$F_e = \frac{1}{2!} \hat{C}^{(2)}_{iijj} \hat{u}_i \hat{u}_j + \frac{1}{3!} \hat{C}^{(3)}_{iijjj} \hat{u}_i \hat{u}_j \hat{u}_k + \dots$$

Допустимость такого представления оправдывается как малостью практически достижимых деформаций, так и относительно слабым изменением величины ангармонических модулей с ростом их порядка ¹: $\hat{C}^{(n+1)}/\hat{C}^{(n)} \sim \sim 1-10$. Это соотношение констант согласуется с существующими представлениями о механизмах межионных взаимодействий в кристаллах с различными типами связи. Верхней границе области применимости ангармонического разложения соответствует характерная плотность энергии возбуждения порядка 10^{10} эрг/см^3 , поскольку $\hat{C}^2 \sim 10^{12} \text{ эрг/см}^3$. В условиях акустического эксперимента деформации, как правило, настолько малы, что обычно нелинейность упругих волн можно считать слабой ($|\hat{C}^{(3)} \hat{u}|/|\hat{C}^{(2)}| \ll 1$). Напротив, в спиновых системах магнетиков условия сильной нелинейности реализуются сравнительно легко. Поворот намагниченности на большие углы ($\varphi \sim |\Delta \mathbf{M}|/M_S \sim 1$) относительно равновесного направления требует не столь значительных затрат энергии — порядка энергии магнитокристаллической анизотропии ($10^5 - 10^6 \text{ эрг/см}^3$). Более того, в достаточно часто встречающихся слабоанизотропных магнитных материалах разница энергий состояний с сильно отличающимися по направлению намагниченностями определяется взаимодействием иной природы — магнитоупругим и составляет около 10^2 эрг/см^3 . Магнитоупругое взаимодействие в магнитоупорядоченных кристаллах, энергия которого записывается в виде

$$F_{\text{и.у.}} = \hat{B} \hat{u} \mathbf{M} \bar{\mathbf{M}}_S^{-2},$$

где \hat{B} — тензор магнитоупругих модулей, приводит к связи спиновых и звуковых волн, в результате чего реализуется наиболее интересная с точки зрения нелинейной динамики ситуация, когда в твердом теле связанными оказываются возбуждения различной физической природы и разного «уровня» нелинейности.

В любой нормальной моде связанных колебаний одновременно возбуждены, вообще говоря, все степени свободы взаимодействующих «парциальных» (см. ²) подсистем. Если хотя бы одна из подсистем или связь между ними нелинейны, нормальные моды будут также нелинейными. В резонансных условиях, т. е. при пересечении спектров парциальных подсистем, энергия распределена между ними поровну. Очевидно, что при этом основной вклад в нелинейность связанных волн должен вноситься той подсистемой, у которой сильная нелинейность реализуется при меньших плотностях энергии возбуждения.

Вдали от резонанса каждая из нормальных мод в значительной мере сохраняет физическую индивидуальность той парциальной подсистемы, к которой она ближе по частоте. Тем не менее вклад взаимодействия колебаний в нелинейность конкретной смешанной моды может оказаться определяющим. Примером подобной ситуации в простейших динамических системах может служить низкочастотная мода нормальных колебаний двух связанных маятников существенно различной длины ($l_1 \gg l_2$) (рис. 1). Амплитуды колебаний подсистем в рассматриваемой моде связаны соотношением $\varphi_2 = \zeta (\omega_1 l_1 / \omega_2 l_2) \varphi_1$, где $\zeta = K / m \omega_1 \omega_2$ — коэффициент связи ($0 < \zeta < 1$), а ω_1 и ω_2 — «парциальные» частоты, т. е. частоты колебаний каждого из маятников при зафиксированном положении другого; K — жесткость упругой связи. При достаточно сильной связи может реализоваться условие $\varphi_2 \gg \varphi_1$. В результате нелинейность низкочастотной моды окажется существенной уже при сравнительно малой амплитуде возбуждения низкочастотной подсистемы (если $\varphi_2 \approx 1$ при $\varphi_1 \ll 1$).

В известной мере аналогичные особенности проявляются в нелинейных свойствах так называемых звукоподобных магнитоупругих волн в магнетиках, т. е. волн акустической (безщелевой) ветви спектра связанных возбуждений. Если магнитная анизотропия слаба, звуковые деформации относительно малой амплитуды могут вызывать значительные отклонения магнитных моментов от равновесного направления. Магнитострикционные упругие напряжения, *нелинейно* зависящие от амплитуды спиновых колебаний, оказываются в результате нелинейно зависящими и от амплитуды деформаций в акустической волне. Нелинейность зависимости упругих напряжений от деформаций представляет собой не что иное, как упругий ангармонизм, который в данном случае вносится в акустические колебания взаимодействием звука со спиновой подсистемой кристалла. Такой «эффективный» ангармонизм, отражающий нелинейность смешанных мод, является основным механизмом, определяющим интенсивность целого ряда нелинейных волновых процессов в магнетиках.

Принципиально важным с точки зрения возможных обобщений представляется то, что эффективный ангармонизм существенно меняет обсуждавшийся выше характерный масштаб для амплитуды деформаций в нелинейных акустических колебаниях кристалла. Это изменение легко оценить, пользуясь следующими качественными соображениями. Магнитоупругая волна может считаться слабо нелинейной, если в ней малы как упругие деформации, так и относительные амплитуды магнитных колебаний ($|\Delta \mathbf{M}| / M_S \ll 1$), сопровождающих упругую волну. В первом («гармоническом») приближении амплитуда ΔM равна произведению эффективного магнитострикционного поля

$$h_{me} = - \frac{\partial F_{me}}{\partial \mathbf{M}} = - \frac{\hat{B} u_{\sim} \mathbf{M}_S}{M_S^2},$$

обусловленного переменной деформацией \hat{u}_{\sim} , на низкочастотную динамическую магнитную восприимчивость $\hat{\chi}$. (В дальнейшем при обсуждении общих вопросов можно не акцентировать внимания на тензорном или векторном характере тех или иных величин, поэтому мы будем опускать соответствующие символы в оценочных формулах, имея в виду, что в конкретных соотношениях будут фигурировать соответствующие свертки или существенные

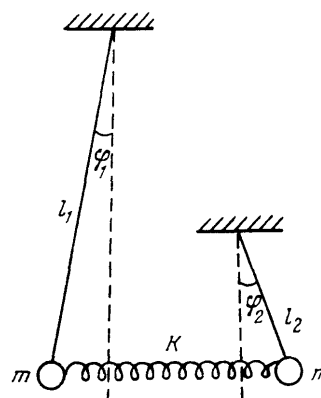


Рис. 1. Простейшая динамическая система с сильной эффективной нелинейностью низкочастотной нормальной моды ($l_1 \gg l_2$)³

компоненты тензоров.) Слабой нелинейности магнитоупругой волны соответствует условие $\chi B u_{\sim} / M_S^2 \ll 1$. Оно может быть выражено через коэффициенты магнитоупругой (магнотон-фононной) связи $\zeta = (\chi B^2 / C^{(2)} M_S^2)^{1/2}$ соотношением $\zeta^2 u_{\sim} C^{(2)} B^{(-1)} \ll 1$. Наконец, замечая, что отношение $B / C^{(2)} \approx u_0$ определяет величину равновесной («спонтанной») магнитострикционной деформации, получаем следующий количественный критерий слабой нелинейности магнитоупругой волны акустической ветви спектра: $\kappa \equiv \zeta^2 |u_{\sim} / u_0| \ll 1$. Величина κ играет роль параметра ангармонического разложения плотности энергии кристалла по динамическим деформациям. Обычно величина κ не превосходит $(10-10^2) |u_{\sim}|$. В магнитострикционных ферродиелектриках с характерными параметрами $\chi \sim \gamma M_S / \omega_{f0}$, где ω_{f0} — частота ферромагнитного резонанса, $\zeta^2 \approx \gamma B^2 / C^{(2)} M_S \omega_{f0} \sim 10^{-2}$, $|u_0| \sim 10^5$ величина κ существенно больше: $\kappa \sim 10^3 |u_{\sim}|$. Однако вплоть до деформаций, близких к пределу разрушения реальных кристаллов, нелинейность оказывается достаточно слабой, и условия применимости ангармонических разложений не нарушаются. Следует обратить внимание на то, что материалы с аномально большой магнитострикцией, такие, как соединения редкоземельных металлов, не представляются удобным объектом исследования нелинейных акустических явлений, поскольку в этих материалах значительная связь достигается за счет увеличения $|u_0|$, а это уменьшает κ при заданных $|u_{\sim}|$.

Воспользовавшись приведенными соотношениями, можно оценить величину эффективных ангармонических модулей, обусловленных связью упругой и магнитной подсистем. В линейном приближении («нулевом» по параметру κ) магнитоупругое взаимодействие проявляется прежде всего в перенормировке скорости акустической волны. Этой перенормировке могут быть поставлены в соответствие эффективные значения модулей упругости:

$$\hat{C}_{\text{эфф}}^{(2)} \equiv \hat{C}^{(2)} + \Delta \hat{C}^{(2)}.$$

Величина

$$\frac{1}{2} \Delta \hat{C}^{(2)} \hat{u}_{\sim} \hat{u}_{\sim} = -\frac{1}{2} \zeta^2 C^{(2)} \hat{u}_{\sim} \hat{u}_{\sim}$$

представляет собой магнитоупругий (точнее — магнитоакустический) вклад в плотность потенциальной энергии. Первый ангармонический член разложения плотности энергии по деформациям, обусловленный магнитоупругим взаимодействием, имеет следующий по параметру κ порядок величины:

$$|\Delta \hat{C}^{(3)} \hat{u}_{\sim} \hat{u}_{\sim} \hat{u}_{\sim}| \sim \kappa |\Delta \hat{C}^{(2)} \hat{u}_{\sim} \hat{u}_{\sim}| \sim C^{(2)} \zeta^4 \left| \frac{u_{\sim}^3}{u_0} \right|.$$

С учетом приведенных выше значений констант магнитострикции и коэффициентов связи для ферродиелектриков получаем оценку $\Delta C^{(3)} / C^{(2)} \sim 10$ близкую к отношению $C^{(3)} / C^{(2)}$ в немагнитных кристаллах (напомним, что коэффициент связи ζ пропорционален величине $|u_0|$ при $\zeta \ll 1$). Таким образом, хотя учет магнитострикционной связи и приводит к относительно более медленной сходимости ангармонического разложения, эффективные ангармонические модули низшего порядка

$$\hat{C}_{\text{эфф}}^{(3)} = \hat{C}^{(3)} + \Delta \hat{C}^{(3)}$$

для ферродиелектриков обычно мало отличаются от соответствующих модулей немагнитных кристаллов.

Иная ситуация возникает в кристаллах с сильной магнотон-фононной связью, к которым относятся, например, антиферромагнетики с магнитной анизотропией типа «легкая плоскость» (АФЛП) и высокой температурой Нееля (T_N) — такие как гематит ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, $T_N = 960$ К; см. ⁴) или борат железа (FeBO_3 , $T_N = 348$ К; см. ⁵). Для определенных типов акустических колебаний величина квадрата коэффициента связи ζ^2 достигает в этих вещества

десятков процентов^{6,7}, хотя магнитоупругое взаимодействие в них вполне обычное (магнитострикция насыщения u_0 порядка 10^{-5}). При этом магнитный вклад в ангармонические модули может составлять $\Delta C^3 \sim (10^3 - 10^4) C^{(2)}$ (см. первые оценки, выполненные в⁷⁶). Столь сильный эффективный ангармонизм, существенно превосходящий собственный энгармонизм кристаллической решетки ($C_{\text{эфф}}^{(3)} \approx \Delta C^{(3)} \gg C^{(3)}$) без преувеличения может быть назван гигантским.

Кристаллы АФЛП начинают играть все более заметную роль в современной нелинейной магнитоакустике, поэтому в следующем разделе мы подробно рассмотрим особенности нелинейной динамики этих веществ (об их линейной динамике см.⁹⁻¹²).

2. НЕЛИНЕЙНАЯ МАГНИТОУПРУГАЯ ДИНАМИКА АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ»

Магнитоупругие колебания в антиферромагнетике в двухподрешеточной модели феноменологически описываются связанной системой нелинейных уравнений прецессии векторов намагниченности подрешеток \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 и уравнений упругости:

$$-\gamma^{-1} \dot{\mathbf{M}}_n = [\mathbf{M}_n \mathbf{H}_n] \quad (n = 1, 2), \quad (1)$$

$$\rho \ddot{U}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где эффективные поля

$$\mathbf{H}_n \equiv - \frac{\delta \int F dV}{\delta \mathbf{M}_n},$$

вектор смещения U_i , тензор упругих напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta F}{\delta (\partial U_i / \partial x_j)};$$

$$F \left(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x_j}, \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$$

— плотность энергии кристалла. В магнитной ее части F_m будем учитывать энергию междоузельного обменного взаимодействия, взаимодействия Дзялошинского, энергию одноосной анизотропии (с эффективными полями соответственно H_E , H_D и H_A) и энергию взаимодействия магнитных моментов с внешним полем H :

$$F_m = 2M_0 \left[\frac{1}{2} H_E m^2 - H_D [\mathbf{m}]_z + \frac{1}{2} H_A l_z^2 - (\mathbf{m} \mathbf{H}) - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial l_i}{\partial x_j} \right)^2 \right],$$

где $\mathbf{m} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)/2M_0$ — ферромагнитный вектор, $\mathbf{l} \equiv (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)/2M_0$ — вектор антиферромагнетизма, $\alpha \equiv v_m^2/4H_E\gamma^2$, v_m — так называемая «предельная» скорость спиновых волн (магнонов), пропорциональная обменному полю и квадрату постоянной решетки.

Эффективное обменное поле $H_E \sim kT_N/\mu_B$ в кристаллах, имеющих достаточно высокую температуру Нееля T_N , значительно превосходит поля релятивистских (H_A) и обменно-релятивистских (H_D) взаимодействий, равно как и используемые в экспериментах внешние поля (H). В кристаллах $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, например, характерные величины полей следующие: $H_E \approx 10^7$ Э, $H_D \approx 2 \cdot 10^4$ Э, $H_A \approx 2 \cdot 10^2$ Э. Учет реально существующей иерархии взаимодействий в спиновой системе во многих случаях позволяет существенно упростить описание нелинейной динамики АФМ. В первом приближении по параметру $\tilde{H}/H_E \ll 1$, где $\tilde{H} = H_D, H_A$ или H , систему уравнений прецессии оказывается возможным привести к уравнению движения только для вектора антиферромагнетизма \mathbf{l} , поскольку $l^2 = 1 - m^2 \approx 1$

и $m \ll l^{13-15}$:

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{l}}\dot{\mathbf{l}}| &= 0, \\ \dot{\mathcal{L}} &\equiv \gamma^{-2} (\dot{\mathbf{l}} - v_s^2 \nabla^2 \mathbf{l}) - \gamma^{-1} \{2[\mathbf{H}\dot{\mathbf{l}}] + [\dot{\mathbf{H}}\mathbf{l}]\} + \\ &+ \mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{l}) + H_D [\mathbf{H}\mathbf{z}] + (2H_E H_A + H_D^2) l_z \mathbf{z} - 2H_E \mathbf{H}_{me}. \end{aligned} \quad (3)$$

В таком приближении в выражении для плотности магнитоупругой энергии достаточно ограничиться учетом инвариантов типа

$$F_{m1}^{(l)} = \mathbf{l} (\hat{B}_l \hat{u}) \mathbf{l}, \quad (4)$$

где \hat{B}_l — соответствующий АФМ-вектору тензор магнитоупругих констант.

Спинволновой вектор АФЛП, который может быть найден из линейаризованного уравнения (3) или, как обычно, непосредственно из линейаризованной системы (1), содержит две ветви. Их частоты *без учета* магнитоупругого взаимодействия даются соотношениями

$$\tilde{\omega}_{ak}^2 = \gamma^2 [2H_E H_A + H_D (H + H_D)] + v_m^2 k^2, \quad (5)$$

$$\tilde{\omega}_{fk}^2 = \gamma^2 H (H + H_D) + v_n^2 k^2. \quad (6)$$

Одна из ветвей («антиферромагнитная», $\tilde{\omega}_{ak}$) имеет относительно высокую активацию $\gamma (2H_E H_A)^{1/2}$. Для $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, например, $\tilde{\omega}_{a0}$ лежит в миллиметровом диапазоне СВЧ¹⁶. Другая ветвь, $\tilde{\omega}_{fk}$ «квазиферромагнитная» представляет собой «мягкую моду» спиновой системы, активация которой мала в меру малости напряженности внешнего поля. Активационной ветви спектра $\tilde{\omega}_{ak}$ соответствуют колебания с выходом вектора \mathbf{l} из базисной плоскости и с изменением угла скоса магнитных подрешеток. Мягкой моде $\tilde{\omega}_{fk}$ соответствуют качания \mathbf{l} в плоскости базиса и прецессия ферромагнитного вектора \mathbf{m} вокруг равновесного \mathbf{m}_s как в ферромагнетике. Взаимодействие упругой подсистемы с мягкой спинволновой модой приводит к наиболее сильной связи. Оно и определяет основные особенности магнитоакустических свойств АФЛП. Можно показать, что в обычных условиях не слишком высоких частот $\tilde{\omega} \ll \omega_{ak}$ и слабых магнестрикционных полей $H_{me} \ll H_A$, где

$$H_{me} = -\frac{1}{2M_0} \frac{\partial F_{me}}{\partial \mathbf{l}},$$

выходом антиферромагнитного вектора из базисной плоскости при описании магнитоупругой динамики можно пренебречь ($l_z \approx 0$). Тогда уравнение движения для l приводится к виду

$$\gamma^{-2} [\mathbf{l} (\dot{\mathbf{l}} - v_s^2 \nabla^2 \mathbf{l})]_z = (\mathbf{H}\mathbf{l}) ([\mathbf{H}\mathbf{l}]_z + H_D) + 2H_E [\mathbf{H}\mathbf{H}_{me}]_z + \gamma^{-1} \dot{H}_z. \quad (7)$$

С учетом условия сохранения модуля $|\mathbf{l}| = 1$ единственной динамической магнитной переменной в уравнении (7) оказывается угол φ поворота вектора \mathbf{l} в плоскости базиса. Переход к этой переменной позволяет записать плотность энергии спиновых возбуждений w_m и магнитоупругого взаимодействия F_{me} в виде

$$w_m = \frac{M_0}{2H_E} [\gamma^{-2} (\dot{\varphi})^2 + \gamma^{-2} v_s^2 (\nabla \varphi)^2 - (H \cos \varphi + H_D)^2], \quad (8)$$

$$F_{me} = (\hat{B}_1(\alpha) \cos 2\varphi + \hat{B}_2(\alpha) \sin 2\varphi) \hat{u}. \quad (9)$$

Явный вид компонент тензоров магнитоупругих постоянных $\hat{B}_n(\alpha)$ ($n = 1, 2$) зависит от конкретной симметрии кристалла и угла α ориентации внешнего поля относительно выделенной кристаллографической оси в базис-

ной плоскости. Для ромбоэдрической симметрии, которой обладают многие из экспериментально исследуемых АФЛП (α -Fe₂O₃, FeBO₃, MnCO₃, CoCO₃ с пространственной группой D_{3d}^6 и выделенной осью $x \parallel U_2$) имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\hat{B}_1(\alpha) &= \hat{B}_1(0) \cos 2\alpha + \hat{B}_2(0) \sin 2\alpha, \\ \hat{B}_2(\alpha) &= -\hat{B}_1(0) \sin 2\alpha + \hat{B}_2(0) \cos 2\alpha, \\ \hat{B}_1(0) \hat{u} &= -\frac{1}{2} (B_{11} - B_{12}) (u_{xx} - u_{yy}) - 2B_{14} u_{yz}, \\ \hat{B}_2(0) \hat{u} &= -(B_{11} - B_{12}) u_{xy} - 2B_{14} u_{xz}.\end{aligned}\quad (10)$$

Таким образом, магнитоупругую динамику АФЛП оказывается возможным феноменологически описать с помощью четырехвектора магнитоупругого смещения (U, φ) , удовлетворяющего системе уравнений движения³⁰

$$\begin{aligned}\rho \ddot{U}_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{c}^{(2)} \hat{u}_{\sim} + \hat{B}_1(\alpha) \cos 2\varphi + \hat{B}_2(\alpha) \sin 2\varphi)_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}, \\ \gamma^{-2} (v_s^2 \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi}) &= \frac{1}{2} (\gamma^{-2} \omega_{f0}^2 - HH_D) \sin 2\varphi + \\ &+ HH_D \sin \varphi + \frac{2H_E}{M_0} [\hat{B}_2(\alpha) \hat{u} \cos 2\varphi - \hat{B}_1(\alpha) \hat{u}_{\sim} \sin 2\varphi],\end{aligned}\quad (11)$$

где $\hat{u}_{\sim} \equiv \hat{u} - \hat{u}_0$, $\hat{u}_0 = -[\hat{c}^{(2)}]^{-1} \hat{B}_1(\alpha)$ — тензор спонтанных магнитоупругих деформаций,

$$\omega_{f0} = \gamma [H(H + H_D) + 2H_E H_{ms}^{(c)}]^{1/2}$$

— частота ферромоды антиферромагнитного резонанса (АФМР), $H_{ms}^{(c)} = -(2/M_0) \hat{B}_1(\alpha) \hat{u}_0$ — величина эффективного поля спонтанной стрикции;

$$\hat{u} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Следует отметить, что использование уравнений (11, 12) не предполагает каких-либо ограничений на амплитуды спиновых колебаний. Они пригодны для описания как слабо-, так и сильнонелинейных эффектов, к которым ангармонические приближения неприменимы. Отметим также, что уравнение (12) можно получить непосредственно из соотношений (8), (9) вариационными методами. Оно имеет вид известного двойного уравнения синус-Гордона (double sine-Gordon equation⁶⁹, дополненного нелинейными динамическими связями. Оно встречается в теории нелинейных спиновых возбуждений в жидком ³He и в теории самоиндуцированной оптической прозрачности. Антиферромагнетики являются еще одним примером физических систем, описание которых может сводиться к уравнению данного типа, при этом нелинейные динамические связи значительно обогащают картину возможных волновых процессов.

3. СВЯЗАННЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ»

Остановимся подробнее на свойствах связанных магнитоупругих возбуждений малой амплитуды. Их спектр Ω_k определяется известным дисперсионным уравнением, которое легко получить из линеаризованной по малым отклонениям $\varphi \ll 1$ системы (11), (12):

$$(\omega_{fk}^2 - \Omega_k^2) + \sum_{s=1}^3 \frac{\zeta_{sk}^2 \omega_{fk}^2 \omega_{sk}^2}{\Omega_k^2 - \omega_{sk}^2} = 0; \quad (13)$$

здесь ω_{Sk} — парциальная частота конкретной ($S = 1, 2, 3$) упругой моды с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией $\mathbf{e}^{(S)}$, ω_{fk} — парциальная частота ферромоды. Прилагательное «парциальная» существенно — оно означает, что входящие в (13) частоты ω_{Sk} , ω_{fk} рассчитаны при зафиксированной подсистеме-партнере (см. выше текст, сопровождающий рис. 1). Например, ω_{fk} вычислена при «застывшей» решетке (подробнее об этом см. ¹²) и потому содержит так называемую магнитоупругую щель: $\omega_{fk} = (\omega_{fk}^2 + 2\gamma^2 H_E H_{mS}^{(0)})^{1/2}$. Коэффициент магнотон-фононной связи ζ_{Sk} определяется соотношением

$$\zeta_{Sk}^2 = \frac{H_E}{M_0} \frac{(2\hat{B}_2 \hat{u}_S)^2}{(\omega_{fk}/\gamma)^2 \hat{C}^{(2)} \hat{u}_S \hat{u}_S},$$

$$(\hat{u}_S)_{ij} = \frac{1}{2k} (e_i^{(S)} k_j + e_j^{(S)} k_i).$$
(14)

Асимптотическая (т. е. при $k \gg k_m \equiv \omega_{f0}/v_m$, рис. 2) линейность по k спинволнового спектра в АФ определяет качественные различия спектров

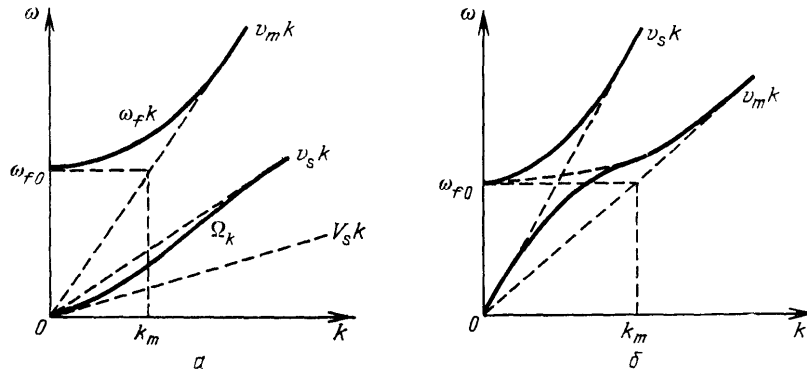


Рис. 2. Спектры связанных магнитоупругих волн в кристаллах АФЛП (сплошные линии) — высокотемпературных ($T_N > T_D$) (а) и низкотемпературных ($T_N < T_D$) (б) ^{7в}

магнитоупругих возбуждений в кристаллах с высокой и низкой температурой Нееля T_N , с которой «предельная» скорость магнонов v_m связана прямой пропорциональностью. В низкотемпературных АФЛП (таких, как MnCO_3 , CoCO_3 , CsMnF_3) T_N меньше температуры Дебая T_D , и скорость спиновых волн меньше скорости звука (см. рис. 2, б). При этом спектры «чистых» (парциальных) спиновых и упругих возбуждений ω_{fk} и ω_{Sk} пересекаются. Условия наиболее сильного взаимодействия реализуются в резонансной области, вблизи пересечения. В высокотемпературных ($T_N > T_D$) АФЛП, для которых $v_m > v_{Sg}$ пересечение «парциальных» спектров не реализуется. В этом случае связанные волны при любых k однозначно разделяются на акустические (точнее — звукоподобные) и спиновые (магноноподобные), а наиболее сильной связи соответствует длинноволновая область спектра ($k \ll \ll \omega_{f0}/v_m$). Для дальнейшего отметим, что в АФЛП типа $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, FeVO_3 выполняется соотношение $V_S^2 \ll v_m^2$, и частоты акустических волн удовлетворяют условию $\Omega_k^2 \ll \omega_{fk}^2$ при любых волновых векторах \mathbf{k} .

Магнитоупругая связь приводит к перенормировке скоростей акустических волн и возникновению их зависимости от напряженности поля. Акустические волны содержат существенную примесь «нерезонансных» возбуждений спинов, вызванных деформациями. Их амплитуда может быть найдена из линейного уравнения (11) с учетом условия $\partial/\partial t \ll \omega_{fk}$:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{2H_E}{M_0} \left(\frac{\gamma}{\omega_{fk}} \right)^2 \hat{B}_2 \hat{u}_{\mathbf{k}}.$$
(15)

Именно эти возбуждения, участвуя в нелинейных взаимодействиях, присущих спиновой системе, вносят ангармонизм в акустические колебания. Нетрудно убедиться, что в слабых магнитных полях, а именно при H ($H + H_D$) $\ll 2H_E H_{ms}$, амплитуды нерезонансных возбуждений оказываются большими ($\varphi \sim 1$) уже при деформациях порядка спонтанных ($u_k \sim u_0$) и нелинейность акустических мод в этих условиях *нельзя считать слабой*.

При $u_k \ll u_0$, $\varphi \ll 1$ тензор упругих напряжений может быть линеаризован и приведен к обычному виду $\hat{\sigma}_k = \hat{C}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) \hat{u}_k$, где эффективные, т. е. перенормированные взаимодействием, модули упругости второго порядка определены соотношениями *)

$$\hat{C}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\mathbf{k}) \equiv \hat{C}^{(2)} + \Delta\hat{C}^{(2)}(\mathbf{k}), \quad (16)$$

$$\Delta\hat{C}^{(2)}(\mathbf{k}) = -\frac{H_E}{M_0} \left(\frac{2\gamma\hat{B}_2}{\omega_{\mathbf{k}}} \right)^2. \quad (17)$$

Спектр и поляризация магнитоупругих волн акустической ветви находятся при этом, как в обычной теории упругости, из уравнения типа уравнения Грина — Кристоффеля:

$$[\rho\Omega_k^2 \hat{I} - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k})] e_k = 0, \quad (18)$$

где

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \hat{C}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} \mathbf{k}\mathbf{k}.$$

Полевая зависимость моделей $\hat{C}_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(H)$ и соответствующих скоростей звука несет непосредственную информацию о величине линейной связи упругих и спиновых волн. В простейшем случае взаимодействия одной упругой моды (S) со спиновой системой полевая зависимость скорости звука описывается соотношением

$$V_{S\mathbf{k}}(H) = v_{S\mathbf{k}} (1 - \zeta_{S\mathbf{k}}^2(H))^{1/2}. \quad (19)$$

Специфическое, характерное именно для АФ¹⁷ участие обменного взаимодействия в формировании амплитуд взаимодействия возбуждений⁹ и магнитоупругой активации спектра спиновых волн¹⁰ приводит к тому, что в широком интервале магнитных полей $0 < H$ ($H + H_D$) $\ll 2H_E H_{ms}^0$, значительно превосходящих поле монодоменизации кристалла, коэффициент связи оказывается порядка единицы. Для гематита характерное поле $H^* = 2H_E H_{ms}^0 / H_D \approx 0,5$ кЭ.

Принципиальный физический и практический интерес представляют акустические моды, удовлетворяющие условию предельно сильной связи $\zeta_{S,\mathbf{k} \rightarrow 0}(H \rightarrow 0) \rightarrow 1$. Существование таких мод в кристалле, изотропном в базисной плоскости по магнитным (но не обязательно магнитоупругим) свойствам, связано с потерей устойчивости равновесного состояния по отношению к медленному повороту намагниченности в плоскости (x, y) на произвольный угол (с соответствующим изменением спонтанной деформации). Ситуация во многом аналогична ориентационному фазовому переходу^{7b,18} и допускает интересные аналогии с системами со спонтанно нарушенной симметрией¹².

Измерение полевой зависимости скорости звука — один из основных методов экспериментального исследования связи акустических волн со спиновыми. На рис. 3 приведены данные измерений скоростей некоторых типов бегущих объемных и поверхностных акустических волн в гематите^{19,20**}).

*) Здесь и в дальнейшем (для сокращения записи) символом $(\hat{B})^n$ обозначен тензор $2n$ -го ранга $\underbrace{B_{ij} B_{kl} \dots B_{pq}}_n$.

**) Аналогичные результаты получены также в работах ^{22, 23}.

Там же показаны результаты измерения собственной частоты акустических колебаний моды «сдвиг по контуру» для резонатора из $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ в форме диска, вырезанного в базисной плоскости²¹. Одновременно представлены результаты расчетов, выполненных методами теории упругости с использованием эффективных модулей $\hat{C}_{\text{эфф}}^{(2)}(k \rightarrow 0, H)$. Различие симметрии тензоров $\hat{C}^{(2)}$ и $\hat{C}_{\text{эфф}}^{(2)}$ приводит к снятию вырождения спектра поперечных волн, распространяющихся вдоль тригональной оси ромбоэдрических АФЛП.

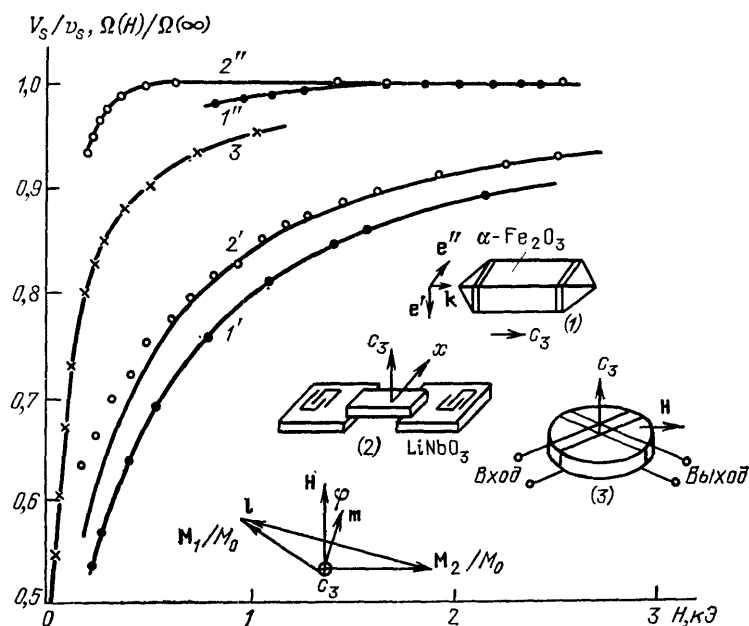


Рис. 3. Зависимости нормированных скоростей (кривые 1 и 2) магнитоупругих волн и частоты акустического резонанса (кривая 3) от напряженности магнитного поля в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$. 1 — объемные поперечные волны ($1' - \mathbf{e}' \parallel \mathbf{x} \parallel \mathbf{H}^{20}$, $1'' - \mathbf{e}'' \parallel \mathbf{x} \parallel \mathbf{H}^{19}$), 2 — поверхностные волны ($2' - \mathbf{H} \times \mathbf{x} = [\pi/4]$, $2'' - \mathbf{H} \parallel \mathbf{x}$)²¹, 3 — резонанс моды сдвига по контуру тонкого диска. Точки — эксперимент²¹, линии — расчет. На вставках — геометрия возбуждения и приема магнитоупругих волн

Одна из нормальных мод характеризуется сильной связью, тогда как другая линейно со спиновой системой не взаимодействует (см. кривые $1'$, $1''$ на рис. 3).

Интерес к свойствам моды контурного сдвига обусловлен тем, что по расчетам²¹ именно она удовлетворяет критерию предельно сильной связи. Полевая зависимость ее частоты описывается соотношением, аналогичным полученному в^{13,18} для бегущих волн:

$$\Omega(H) = \Omega(\infty) \left(1 - \frac{2H_{\mathbf{E}}H'_{\mathbf{MS}}}{\omega_{f0}^2 \gamma^{-2}} \right)^{1/2},$$

где частота

$$\omega_{f0} = \gamma [H(H + H_{\mathbf{D}}) + 2H_{\mathbf{E}}H'_{\mathbf{MS}}]^{1/2}$$

отличается от экспериментально измеряемой частоты АФМР величиной магнитоупругой щели. Из данных, приведенных на рис. 3, следует, что магнитоупругое взаимодействие приводит к изменению частот и скоростей объемных акустических волн практически вдвое (т. е. соответствующих динамических модулей — вчетверо), а изменения скоростей поверхностных акустических волн достигают 35%. Столь существенная перенормировка акустических параметров является прямым экспериментальным свидетельством сильной связи упругих и спиновых волн в кристаллах $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$. Аналогичными свойствами обладают магнитоупругие волны в кристаллах FeBO_3 ⁶. Подоб-

ные сильно связанные моды являются основными объектами экспериментальных исследований в нелинейной магнитоакустике высокотемпературных АФЛП.

Резюме этого раздела, которому без приведенных доказательств поверить было бы трудно, таково: совсем небольшое изменение магнитного поля, например от 0,03 до 2 кЭ, может вчетверо изменить динамическую жесткость антиферромагнетика.

4. ЭФФЕКТИВНЫЕ АНГАРМОНИЧЕСКИЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ»

В низшем порядке теории возмущений ангармонизм возбуждений акустической ветви спектра обусловлен, помимо чисто упругой нелинейности, нелинейностью магнитоупругого взаимодействия¹³. Разложение плотности магнитоупругой энергии (9) по степеням амплитуд φ спиновых колебаний содержит ангармоническое слагаемое

$$F_{\text{ме}}^{(3)} = -2\hat{B}_1 \hat{u} \varphi^2. \quad (20)$$

Соотношение (20) описывает процессы взаимодействия одной звуковой и двух спиновых волн. Учитывая спиновые колебания (15), сопровождающие звуковую волну, легко выделить вклад в плотность энергии акустического возбуждения, пропорциональный кубу деформации. Такому вкладу можно сопоставить тензор ангармонических модулей упругости $\Delta\hat{C}^{(3)}$ ¹³:

$$\Delta w^{(3)} = \frac{1}{3!} \Delta\hat{C}^{(3)} \hat{u} \hat{u} \hat{u}, \quad (21)$$

$$\Delta\hat{C}^{(3)} = -6 \left(\frac{H_E}{M_0} \right)^2 \frac{(2\hat{B}_1)(2\hat{B}_2)^2}{(\omega_{f0}/\gamma)^4}.$$

Для простоты мы ограничились длинноволновой областью спектра, т. е. $\omega \ll \omega_{f0} \approx \omega_{fk}$. Используя характерные значения параметров $B \sim 10^7$ эрг/см³, $H_E/M_0 \sim 10^4$, $(\omega_{f0}/\gamma)^2 \sim 10^7$ эрг/см³, получаем для $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ при $H \sim 1$ кЭ приведенную выше оценку $\Delta\hat{C}^{(3)} \sim 10^4$ C⁽³⁾ $\sim 10^{16}$ эрг/см³.

Соотношение (21) описывает процессы взаимодействия трех акустических (звукоподобных) волн. Ряд экспериментально наблюдаемых нелинейных акустических явлений требует для своего описания учета эффективной нелинейности более высокого порядка. Магнитная и магнитоупругая энергия кристалла содержат ангармонические слагаемые всех порядков по амплитудам магнитоупругих возбуждений. Эффективные модули упругости четвертого порядка формируются тремя основными механизмами: четырехволновым взаимодействием нерезонансно-возбужденных спиновых волн, магнитоупругим взаимодействием с участием звуковой и трех нерезонансных спиновых волн и взаимодействием (20) во втором порядке теории возмущений^{24,25}. Первым двум механизмам соответствуют следующие слагаемые в плотности энергии:

$$w^{(4)} = -\frac{M_0}{2H_E} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\omega_{f0}}{\gamma} \right)^2 - \frac{1}{4} HH_D \right] \varphi^4 - \frac{4}{3} \hat{B}_2 \hat{u} \varphi^3. \quad (22)$$

С учетом всех перечисленных вкладов интересующие нас ангармонические члены разложения плотности энергии приводятся к стандартному виду²⁵:

$$\Delta w^{(4)} = \frac{1}{4!} \Delta\hat{C}^{(4)} \hat{u} \hat{u} \hat{u} \hat{u},$$

где

$$\Delta\hat{C}^{(4)} = 12 \left(\frac{H_E}{M_0} \right)^3 \frac{(2\hat{B}_2)^4}{(\omega_{f0}/\gamma)^6} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\gamma^2 HH_D}{\omega_{f0}^2} \right) - 48 \left(\frac{H_E}{M_0} \right)^3 \frac{(2\hat{B}_2)^2 (2\hat{B}_1)^2}{(\omega_{f0}/\gamma)^6}. \quad (23)$$

По поводу обозначения $(\hat{B})^n$ см. примечание на с. 601. Нетрудно заметить, что разложение плотности энергии акустических возбуждений по степеням деформаций имеет обсуждавшуюся выше структуру ряда по степеням параметра $\kappa = \xi^2 |u/u_0|$. Для $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ при $H \approx 0,5$ кЭ имеет место $\kappa \approx 10^4 |u_0|$ и $\Delta C^{(4)} \sim 10^{20}$ эрг/см³.

Аномально большая величина, специфическая симметрия и сильная зависимость эффективных модулей упругости от величины и направления магнитного поля облегчают экспериментальное обнаружение и идентификацию магнитоупругих механизмов многих нелинейных акустических процессов.

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ МАГНИТОАКУСТИКА ГЕМАТИТА

Монокристаллы $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ в последнее десятилетие стали главным объектом интенсивного исследования нелинейных акустических явлений в магнитоупорядоченных веществах. Сильная связь упругой и магнитной подсистем реализуется в гематите при комнатной температуре в слабых магнитных полях ($H \leq 1$ кЭ) и в интервале частот, перекрывающем практически весь ультразвуковой диапазон. Современная технология позволяет получать крупные высококачественные монокристаллы гематита⁶⁴. Все это в значительной мере способствовало развитию экспериментальной магнитоакустики.

Прямые экспериментальные измерения²⁶ эффективных ангармонических модулей третьего порядка были выполнены на синтетическом монокристалле $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ с размерами 5×4 мм² в базисной плоскости и длиной 13 мм вдоль оси C_3 . Качество кристалла было достаточно высоким: для исследуемой звукоподобной волны с $k \approx 600$ см⁻¹ добротность $Q_k = \omega_k / \Delta\omega_k = k / \alpha_k \sim 3 \cdot 10^3$ при «выключенной» полем $H = 3$ кЭ магнитоупругой связи (α_k — коэффициент затухания по мощности волны). Нелинейные модули определялись по изменению скоростей акустических волн при относительно слабом статическом деформировании кристалла. Отметим, что аномально высокая тензочувствительность скоростей звука в АФЛП предсказывалась еще и работе⁷⁶ — на основе анализа сугубо линейных эффектов влияния статических упругих напряжений на частоту АФМР и магнитоупругую связь. В²⁶ геометрия эксперимента выбрана с учетом сильной магнитоупругой анизотропии гематита, благодаря которой наибольшую величину имеют ангармонические модули ΔC_{455} и ΔC_{155} *) (при H , параллельном оси второго порядка $U_2 \parallel x$). Для определения этих компонент тензора $\Delta C^{(3)}$ можно использовать поперечную волну с поляризацией $e \parallel x$ и волновым вектором $k \parallel z$. При этом надо создать однородные по кристаллу статические напряжения двух типов: растягивающее (σ_{yy}) и сдвиговое (σ_{yz}). Акустическая волна на частоте 30 МГц возбуждалась и принималась пьезопреобразователями. Изменение скорости этого поперечного звука δv_t при деформировании кристалла регистрировалось по изменению фазы сигнала на приемном преобразователе. Обработка результатов осуществлялась с использованием соотношений

$$\begin{aligned} \Delta C_{155} &= \frac{1}{2} [C_{44}(c_{11} - c_{12}) S_{\parallel}(H) + C_{44} C_{44} S_{\perp}(H)], \\ \Delta C_{455} &= \frac{1}{2} [C_{44}^2 S_{\perp}(H) + 2C_{14} C_{44} S_{\parallel}(H)], \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &\equiv - \frac{\rho (\delta v_t^2)_{\parallel}}{C_{44} \sigma_{yy}}, \\ S_{\perp} &\equiv \frac{\rho (\delta v_t^2)_{\perp}}{C_{44} \sigma_{yz}}. \end{aligned}$$

*) Здесь и ниже используются обозначения Фогта: xx — 1, yy — 2, zz — 3, yz — 4, xz — 5, xy — 6.

Индексы \parallel и \perp соответствуют растягивающему и сдвиговому деформированию. Результаты измерений и расчета модуля $\Delta C_{455}(H)$ ²⁶ приведены на рис. 4.

Использование статического деформирования для определения динамических модулей упругости четвертого порядка (например, по его влиянию на удвоение частоты звука) сопряжено с принципиальной трудностью. Статические деформации, вызывающие измерение скорости магнитоупругой волны вследствие ангармонизма четвертого порядка, приводят к изменению направления равновесной намагниченности. Поскольку статическому переманчиванию, в отличие от высокочастотного, не препятствует магнитоэстроическое поле, определяющее щель в спектре спиновых волн, отклонения магнитных моментов (и связанные с ними изменения скоростей звука) при статическом и динамическом деформировании могут существенно различаться. В связи с этим возникает необходимость различать динамические и квазистатические модули. Последние при $H \rightarrow 0$ и вблизи ориентационных фазовых переходов расходятся пропорционально $1/(\omega_{f0}^2 - 2\gamma^2 H_E H_{ms})^n$, где n — порядок разложения плотности энергии по тем компонентам тензора статических деформаций, которые связаны с изменением направления вектора \mathbf{l} в линейном приближении ²⁵.

Измерения полевой зависимости динамических модулей ΔC_{5555} и ΔC_{6666} выполнены с использованием эффекта нелинейного сдвига частоты (НСЧ) магнитоупругих колебаний тонкой пластины ^{24,25}. В эксперименте исследовались акустические колебания монокристаллического резонатора в форме диска толщиной 0,35 мм и диаметром 5,5 мм, вырезанного в базисной плоскости. НСЧ регистрировался по искажению формы резонансной линии при увеличении амплитуды колебаний (запись характерной формы линии акустического резонанса приведена на рис. 5, а). Величина НСЧ акустических колебаний пропорциональна модулям упругости четвертого порядка: ΔC_{5555} для моды сдвига по толщине и ΔC_{6666} для моды сдвига по контуру. На рис. 5, б сопоставлены результаты измерений и расчета полевой зависимости параметров $\Delta C^{(4)}(H)$. Расчеты проводились с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Delta C_{5555} &= 12 \left(\frac{H_E}{M_0} \right)^3 \frac{(2B_{14})^4}{(\omega_{f0}/\gamma)^6} \left(1 + \frac{\gamma^2 H_E H_D}{4\omega_{f0}^2} \right), \\ \Delta C_{6666} &= \frac{3}{2} \frac{[(c_{11} - c_{12})c_{44} - 2c_{14}^2]^2}{M_0 H_{ms}^2 c_{44}^2} \left(\frac{2H_E H_{ms} \gamma^2}{\omega_{f0}^2} \right)^3 \left(1 + \frac{\gamma^2 H_E H_D}{4\omega_{f0}^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

В согласии с теоретическими представлениями об особенностях эффективного упругого ангармонизма эксперимент, выполненный на гематите, демонстрирует аномально большую величину и сильную полевую зависимость ангармонических модулей упругости АФЛП.

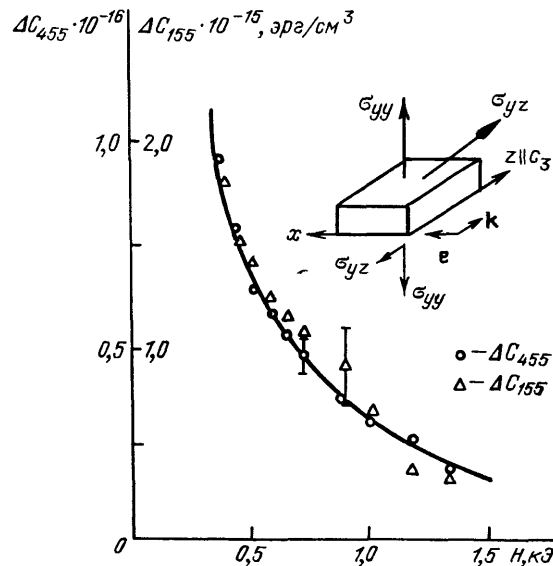


Рис. 4. Зависимости эффективных модулей упругости третьего порядка от напряженности магнитного поля (сплошная кривая — расчет по формулам (21)) ²⁶

Одним из первых подтверждений концепции эффективного упругого ангармонизма явилась обнаруженная в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ сильная полевая зависимость амплитуды второй акустической гармоники, генерируемой бегущей

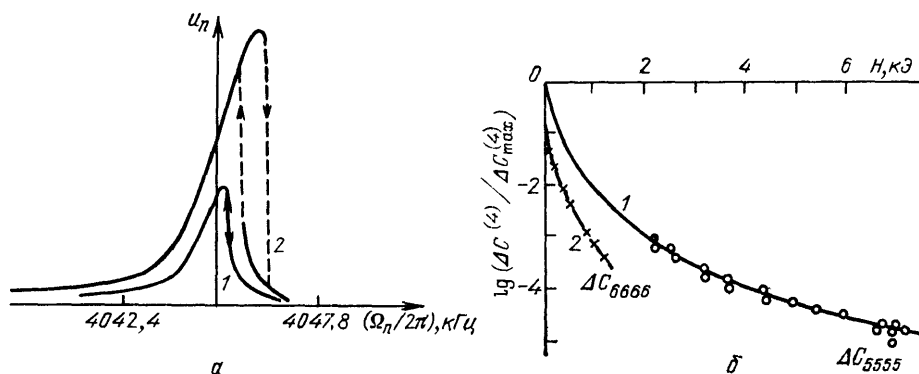


Рис. 5. *a* — Нелинейный сдвиг частоты и гистерезис амплитудно-частотной характеристики акустического резонанса моды сдвига по толщине, наблюдаемые при различных значениях амплитуды возбуждающего переменного поля ($h_2/h_1 = 2$, $H = 2$ кЭ)²⁴. *б* — Полевые зависимости эффективных модулей упругости четвертого порядка (кривые — расчет по формулам (24), (25))²⁴

упругой волной²⁷. Волна на частоте 37 МГц возбуждалась на одном из торцов образца. На противоположном торце осуществлялся прием акустического сигнала резонансным пьезопреобразователем, настроенным на удвоенную частоту. На рис. 6 показаны результаты измерения зависимости мощности сигнала второй гармоники от мощности волны накачки и полевая зависимость эффективности преобразования, пропорциональная в соответствии с теорией¹³, $\omega_{10}^8(H)$. Падение эффективности преобразования с уменьшением

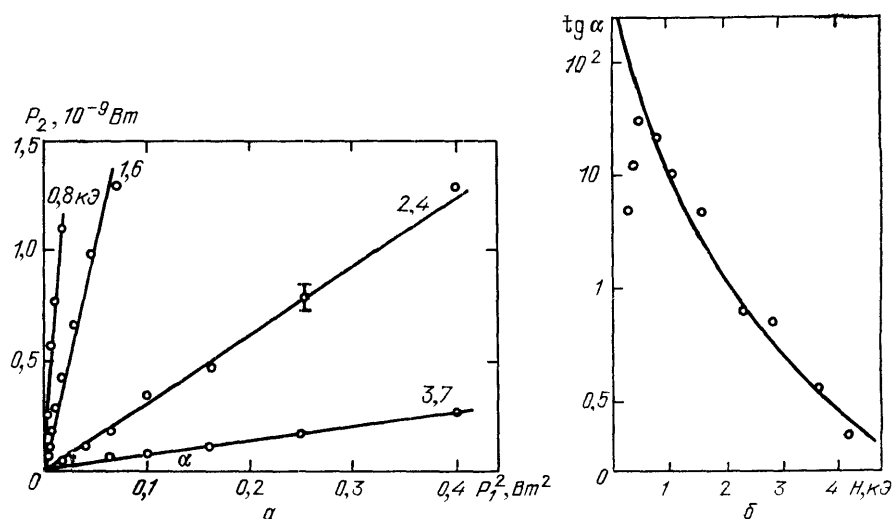


Рис. 6. *a* — Зависимость мощности второй акустической гармоники от квадрата мощности волны накачки в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ²⁷. *б* — Полевая зависимость эффективности преобразования звука во вторую гармонику (линия — расчет)²⁷

поля в слабых полях объясняется ростом затухания акустических волн по мере нарушения однородности распределения намагниченности по объему образца — предположительно из-за дефектности кристаллической структуры поскольку разориентация намагниченности вблизи дефекта увеличивается с уменьшением поля.

Одновременно в гематите был обнаружен эффект акустического детектирования на бегущих волнах^{13,27}. Суть эффекта состоит в генерации звуковой волны на частоте огибающей амплитудно модулированного акустического сигнала. Обнаруженная полевая зависимость мощности продетектированного сигнала была также пропорциональна $\omega_{f0}^8(H)$. Позднее в работе²⁸ была обнаружена и исследована генерация второй акустической гармоники поверхностной магнитоупругой волной — тоже для $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$.

Убедительным свидетельством сильной акустической нелинейности гематита явилось наблюдение предсказанного в работе¹³ эффекта вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) бегущих звуковых волн²⁹. При распространении «чистой» поперечной волны накачки с частотой ω_p и волновым

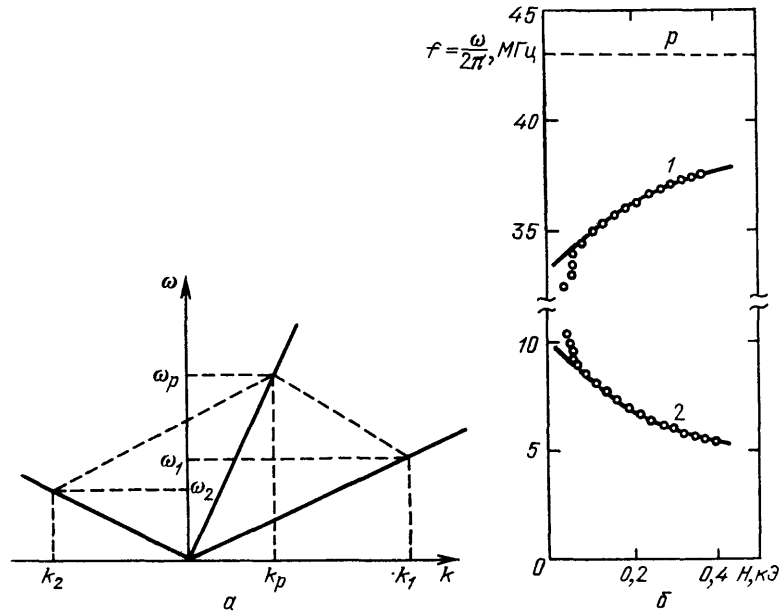


Рис. 7. *a* — Диаграмма условий синхронизма для акустического ВКР¹³. *б* — Полевая зависимость комбинационных частот поперечных магнитоупругих волн в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ($p = \omega_p$, 1 — ω_1 , 2 — ω_2 , линии — расчет)²⁹

вектором \mathbf{k} , параллельным тригональной оси, наблюдался пороговый процесс генерации встречных магнитоупругих волн на комбинационных частотах ω_1 и ω_2 , а именно таких, что $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$.

Условия пространственно-временного синхронизма для этого процесса иллюстрируются на рис. 7, *a*. Так как скорости магнитоупругих волн (с поляризацией $\mathbf{e}_{1,2} \parallel \mathbf{H} \parallel \mathbf{x}$) существенно зависят от напряженности поля (см. рис. 3), комбинационные частоты, соответствующие условию синхронизма, также зависят от поля. На рис. 7, *б* приведены данные измерений и результаты расчета полевых зависимостей частот генерации. Расчет¹³ величины пороговой деформации в рамках теории эффективного ангармонизма для рассматриваемого процесса дает следующее соотношение:

$$u_p^c = \pi \frac{2 |B_{14}|}{C_{44}} \frac{(1 - \zeta^2)^{3/2}}{k_p L \zeta^5}, \quad (26)$$

$$\zeta^2 = \frac{H_E}{M_0} \frac{(2B_{14}\gamma)^2}{\omega_{f0}^2 C_{44}},$$

где L — длина образца.

Расчетная оценка пороговой деформации (u_p^c) $\approx (3,5 \pm 1,5) \cdot 10^{-7}$ при $H \approx 0,5$ кЭ по порядку величины согласуется с результатом измерения (u_p^c) $\approx (8 \pm 4) \cdot 10^{-7}$. В той же геометрии и тоже для $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ в условиях син-

хронизма наблюдался обратный по отношению к ВКР беспороговый процесс слияния магнитоупругих волн в бегущую чисто звуковую волну³⁰.

Гематит и другие антиферромагнетики с гигантской акустической нелинейностью являются уникальными объектами для наблюдения акустических аналогов нелинейных оптических явлений — в том числе тех, которые обсуждаются, например, в обзоре³¹.

При воздействии *однородного* по образцу высокочастотного магнитного поля $h(t)$ в кристалле $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ возможен целый ряд параметрических акустических явлений³². Параметрическая связь звука с переменным полем, так же как и эффективные взаимодействия упругих волн, опосредована возбуждениями спинов. В переменном поле, параллельном подмагничивающему (так называемая параллельная накачка ($h_{\parallel} \ll H$), за параметрическую связь ответственно следующее слагаемое в плотности энергии:

$$w_{p\parallel} = \frac{M_0}{2H_E} (2H + H_D) h_{\parallel} \varphi^2. \quad (27)$$

Подставляя сюда амплитуды нерезонансных колебаний спинов (15), получаем для связи акустических волн с полем:

$$w_{p\parallel} = \left(\frac{2H_E}{M_0} \right) \frac{2H + H_D}{(\omega_{f0}/\gamma)^4} (\hat{B}_2 \hat{u})^2 h_{\parallel}. \quad (28)$$

Магнитоупругое взаимодействие (20) определяет связь звука и с полем поперечной накачки, $h_{\perp}(t)$. С учетом нерезонансных возбуждений спиновой системы, вызываемых поперечным полем ($\varphi_{\perp} = (H + H_D)/(\omega_{f0}/\gamma)^{-2} h_{\perp}$ и звуком (15), находим

$$w_{p\perp} = -8 \frac{H_E}{M_0} \frac{(H + H_D)}{(\omega_{f0}/\gamma)^4} (\hat{B}_1 \hat{u}) (\hat{B}_2 \hat{u}) h_{\perp}. \quad (29)$$

Параметрические взаимодействия (28), (29) допускают наглядную физическую интерпретацию. Эффективные модули упругости $\Delta \hat{C}^{(2)}(H)$ (а значит, и частоты акустического спектра и скорости звука) зависят от величины и направления внешнего магнитного поля. Модуляция внешнего поля по величине или по направлению приводит к модуляции упругих параметров кристалла и параметрическим связям с энергией $w_p = w_{p\parallel} + w_{p\perp}$, где

$$w_p = - \left(\frac{\partial \Delta \hat{C}^{(2)}}{\partial H} \right) \mathbf{h} \frac{\hat{u} \hat{u}}{2}. \quad (30)$$

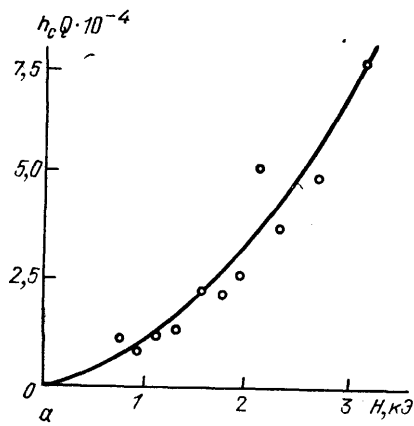
Когда амплитуда переменного поля с частотой ω превосходит критическую, например $h_{\parallel} > h_c = Q^{-1} \Omega / (\partial \Omega / \partial H)$ (Q — добротность акустической моды), в кристаллах $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ возникает параметрическая неустойчивость магнитоупругих акустических мод с частотой $\Omega = \omega/2$. Аналогичный эффект наблюдался ранее в феррите-гранате $\text{Eu}_3\text{Fe}_3\text{O}_{12}$ ³³. В условиях эксперимента амплитуда параметрических взаимодействий, характеризуемых величиной $\partial \Delta \hat{C}^{(2)} / \partial H$, для $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ существенно больше, чем для феррита. Кроме того, в гематите эффект наблюдается в значительно более широком диапазоне магнитных полей.

На рис. 8, а представлены спектрограмма параметрической генерации и полевая зависимость порогового поля для акустической моды сдвига по толщине дискового акустического резонатора из $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ (плоскость диска параллельна плоскости базиса). Накачка и регистрация неустойчивости осуществлялись индукционным способом. Линией на рис. 8, а показан результат расчета зависимости h_c по данным независимых измерений $Q(H)$ и $\Omega(H) = \Omega(\infty) (1 - \zeta^2(H))^{1/2}$ исследуемого образца. При характерных значениях $Q \approx 10^4$, $H \approx 0,5$ кЭ, $\Omega^{-1} / (\partial \Omega / \partial H) \approx 0,2$ кЭ⁻¹ пороговое поле имеет величину $h_c \approx 0,5$ Э.

При выполнении резонансных условий и при достаточно интенсивном внешнем воздействии (накачке) наблюдаются так называемые невырожден-

ные пороговые процессы параметрической генерации магнитоупругих мод — на комбинационных частотах $\Omega_n + \Omega_m = \omega_p$ (см. спектрограмму, рис. 8, б) ³².

За порогом параметрического возбуждения проявляют себя эффекты нелинейного самовоздействия акустических мод. Они обнаруживаются, в частности, по различию тех значений частотной расстройки ($\Delta\omega \equiv \omega_p - 2\Omega_n$) относительно параметрического резонанса, при которых возникает и исчезает генерация звука. Характерная запись гистерезисной зависимости



амплитуды параметрически возбужденного колебания от расстройки показана на рис. 9. Проявлением самовоздействия и нелинейных межмодовых взаимодействий оказывается наблюдаемая в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ³² автомодуляция запороговой амплитуды деформаций при параметрической генерации звука (рис. 10). Эффект возникает при определенных для данной моды колебаний значениях магнитного поля, надкритичности и частотной расстройки.

К параметрическим эффектам на бегущих акустических волнах относится и обнаруженный в гематите сдвиг частоты волны в нестационарном, монотонно меняющемся магнитном поле ¹⁹.

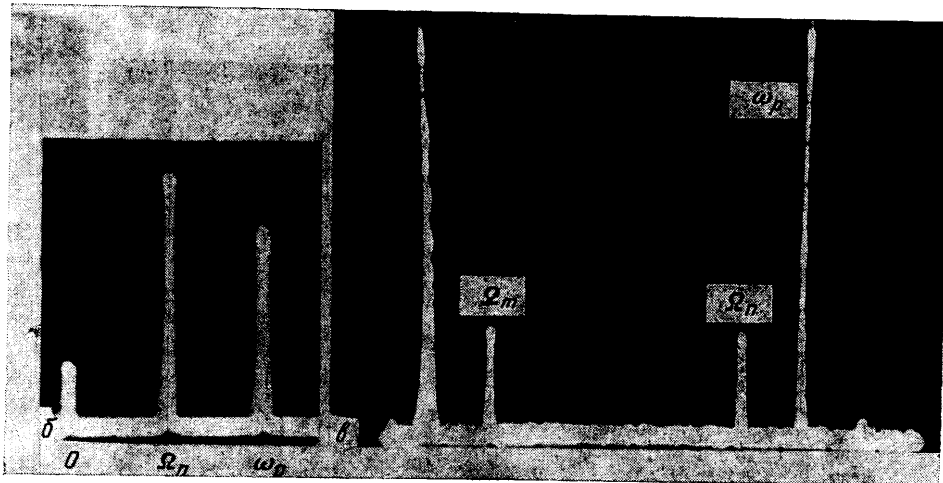


Рис. 8. а — Зависимость амплитуды приведенного порогового поля от постоянного поля подмагничивания: точка приведения $H = 1,6 \text{ кЭ}$ ³². б — Спектрограмма параметрической генерации ($\omega_p = 2\Omega_n$) ³². в — Спектрограмма параметрической генерации магнитоупругих колебаний в невырожденном режиме ($\omega_p = \Omega_n + \Omega_m$) ³²

Недавно в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ наблюдались явления параметрического усиления и обращения фронта бегущих магнитоупругих волн в высокочастотном магнитном поле ³⁴ — это также один из примеров реализации оптико-акустических аналогий в духе представлений, резюмированных в ³¹.

С взаимодействиями (28, 29, 30) связаны экспериментально наблюдаемые явления генерации длинноволновых нерезонансных возбуждений спиновой системы в поле нелинейно взаимодействующих акустических волн ³⁵. Акустические волны вызывают в кристалле колебания намагниченности $\mu(t)$, нелинейно зависящие от упругих деформаций. Квадратичные составляющие переменной намагниченности можно вычислить с помощью (30): $\mu^{(2)}(t) \approx -\partial w_p / \partial h$. При распространении навстречу друг другу гармонических

звуковых волн с одинаковыми по величине волновыми векторами ($\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$) в кристалле возбуждаются пространственно однородные колебания намагниченности на суммарной частоте. В случае амплитудно модулированных волн временная огибающая интеграла от намагниченности по длине L области взаимодействия представляет собой функцию свертки

$$\mu(t) \sim \int u_1(\xi) u_2(\xi - 2vt) d\xi$$

огibaющих взаимодействующих волн (предполагается, что L больше пространственной длительности акустических импульсов). Эффект акустической свертки наблюдался в кристалле $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ³⁵ при взаимодействии поперечных объемных волн, распространяющихся вдоль тригональной оси. Звуковые волны с частотами $\omega_{1,2} \sim 30$ МГц возбуждались с противоположных торцов кристалла пьезопреобразователями из LiNbO_3 . Пространственно интегрирующее детектирование сигнала колебаний намагниченности осуществлялось индукционным способом. На рис. 11⁷⁰ приведены характерные осциллограммы сигналов свертки от одной пары (а) и от двух пар (б) акустических импульсов. В соответствии с теоретическими представлениями об опo-

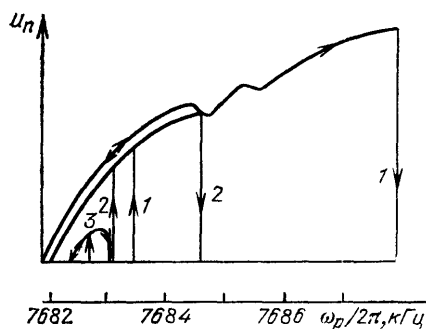


Рис. 9. Зависимость амплитуды параметрических магнитоупругих колебаний от частоты накачки при различной надкритичности h/h_c .
 $h/h_c = 1,63$ (1), $1,27$ (2) и $1,02$ (3)

лось индукционным способом. На рис. 11⁷⁰ приведены характерные осциллограммы сигналов свертки от одной пары (а) и от двух пар (б) акустических импульсов. В соответствии с теоретическими представлениями об опo-

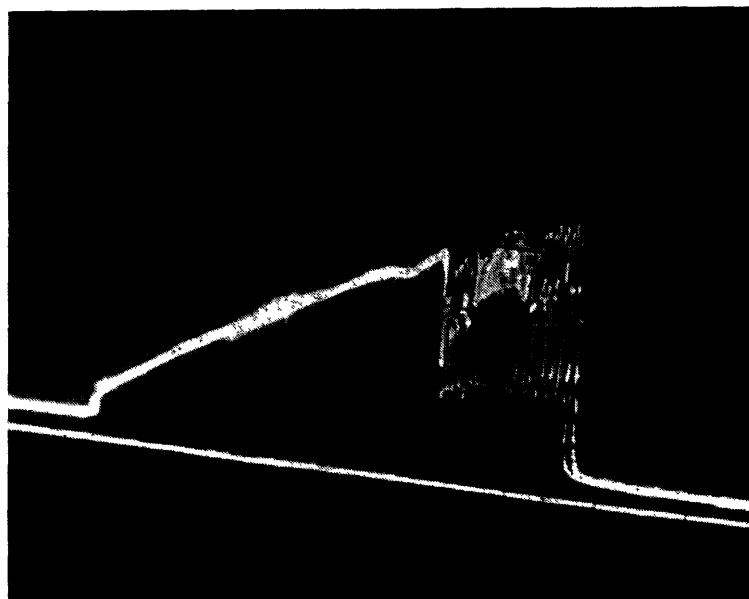


Рис. 10. Характерная зависимость амплитуды параметрической генерации магнитоупругих колебаний от частоты накачки в условиях автомодуляции²⁵

средованных взаимодействиях типа (28, 29), в эксперименте наблюдались внутримодовые взаимодействия связанных волн ($\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{x} \parallel \mathbf{H}$) с возбуждением продольной компоненты намагниченности $\mu_{\parallel} \propto u_{xz}$ и межмодовые взаимодействия связанной и чисто звуковой волн ($\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{x} \parallel \mathbf{H}$; $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_1$) с возбуждением поперечной компоненты $\mu_{\perp} \propto u_{xz}u_{yz}$. Эффективность преобразования (при фиксированных поляризациях излучателей) обнаруживает резкую

зависимость от величины внешнего поля (рис. 12) и его направления (см. ³⁵), причем характер зависимостей описывается рассмотренными механизмами взаимодействий. Экстремум на кривой рис. 12 обусловлен возникновением

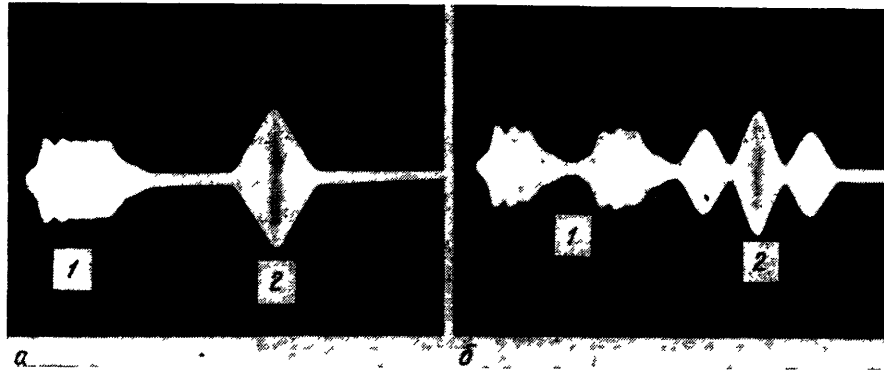


Рис. 11. Осциллограммы сигналов магнитоакустической свертки на объемных волнах в кристалле $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ($L = 13$ мм) ⁷⁰. 1 — импульсы на входе преобразователей (длительность 1 мкс), 2 — импульсы свертки на приемной катушке

расстройки волновых чисел $\Delta k = |k_1| - |k_2|$ при изменении поля. В эксперименте рост амплитуды спиновых колебаний при уменьшении поля ($H < 0,5$ кЭ) ограничивается, кроме того, и ростом затухания звука.

Эффекты акустической свертки в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ наблюдались также при нелинейном взаимодействии поверхностных магнитоупругих волн ^{36,37}. Внутренний билинейный фактор процессов, т. е. отношение выходной электромагнитной мощности к произведению акустических мощностей взаимодействующих сигналов, в полях $H \approx 0,5$ кЭ составил около -30 дБ·м (-10 дБ·м соответствует $0,1$ мВт на выходе при 1 мВт на каждом из двух входов).

В заключение данного раздела отметим экспериментальные результаты в области нелинейной магнитоакустики, полученные на другом высокотемпературном АФЛП — FeVO_3 . При поперечной СВЧ-накачке в условиях антиферромагнитного резонанса в борате железа наблюдалась параметрическая неустойчивость звука ^{38,39}. Теоретически эффект рассмотрен в работе ⁴⁰. Недавно в FeVO_3 обнаружено возбуждение параметрического акустического эха высокочастотным магнитным полем ⁴¹. В прекрасном обзоре по борату железа ⁵ отмечается, и эту точку зрения нельзя не разделить, что FeVO_3 , как и $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, послужит во многих отношениях исключительно удобным объектом для исследования многочисленных эффектов, порождаемых очень сильной динамической связью упругой и магнитной подсистем этого АФЛП.

Уместно обратить внимание на то, что магнитоупругое взаимодействие может существенно модифицировать акустооптические свойства рассматриваемых кристаллов. Колебания магнитных моментов в поле звуковой волны приводят к модуляции магнитооптического двулучепреломления (эффекта Коттона — Мутона), формируя специфические, зависящие от магнитного поля «эффективные» акустооптические параметры кристалла. Такая акусто-

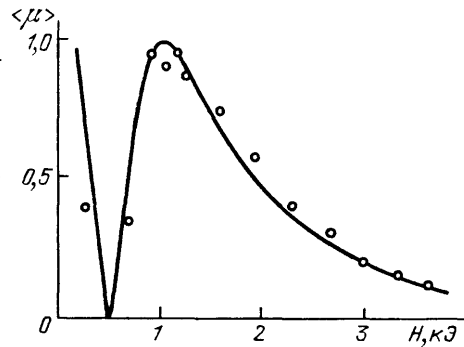


Рис. 12. Зависимость амплитуды длинноволновых спиновых колебаний на частоте $\omega = \omega_1 + \omega_2$ от напряженности магнитного поля ($\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{x} \parallel \mathbf{H}$, $\mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{y}$; $L = 0,75$ мм) ³⁵

магнитооптическая модуляция наблюдалась⁴² в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ в ближнем инфракрасном диапазоне, где гематит оптически прозрачен. Естественно ожидать, что в FeVO_3 должен наблюдаться аналогичный эффект, обусловленный сильным фарадеевским вращением плоскости поляризации света и магнитоупругим взаимодействием, в том числе и в видимом оптическом диапазоне ($\lambda \approx 0,5$ мкм), где борат железа имеет окно прозрачности.

6. АКУСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ ВБЛИЗИ СПИНОВОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ

Благоприятные условия для формирования гигантской магнитоакустической нелинейности реализуются в окрестности тех магнитных ориентационных фазовых переходов, приближение к которым вызывает аномальный рост магнон-фононной связи благодаря уменьшению активации одной из ветвей магнонного спектра.

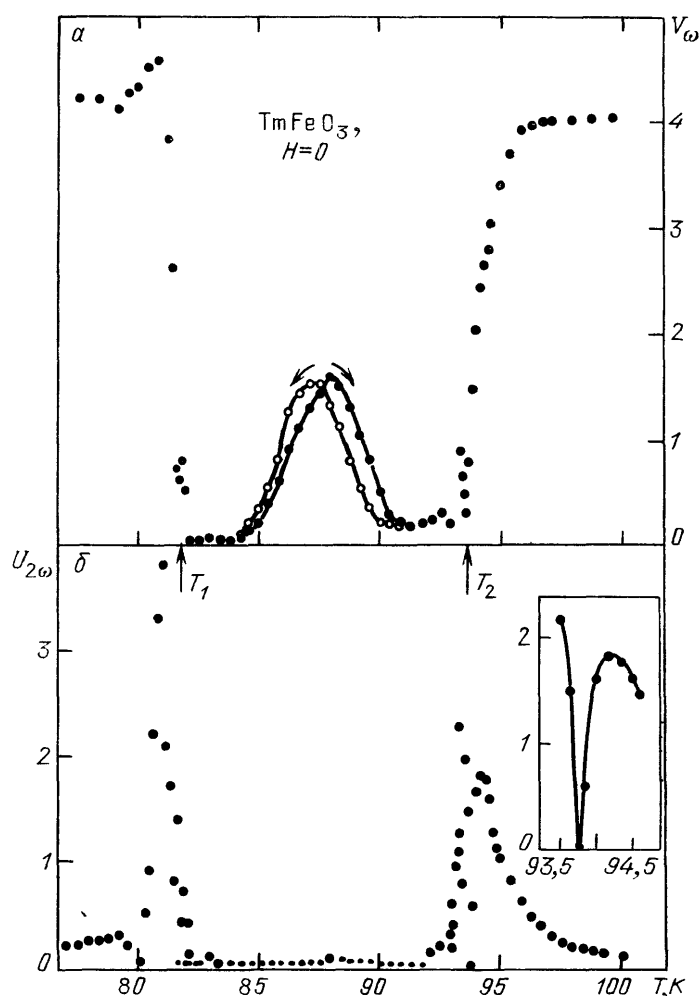


Рис. 13. Температурная зависимость амплитуд первой и второй гармоник звука на выходе кристалла TmFeO_3 вблизи точек спиновой переориентации T_1 и T_2 ⁴⁵

Ориентационный переход в $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ в точке Морина $T_M = 262$ К, см.⁴, обусловленный сменой знака одноосной анизотропии, по-видимому, является переходом первого рода и существенно не проявляется в акустической нели-

нейности. Согласно данным эксперимента⁴³, ответственная за этот переход антиферромагнитная ветвь спиновых волн хотя и смягчается в T_M , но ее энергия активации остается все же еще весьма большой, и потому связь звука с волнами антиферромагнитной ветви проявляется в точке Морины слабо⁴⁴. Ситуация могла бы быть иной, если бы можно было застабилизировать одну из фаз при подходе к точке лабильности по магнитному полю — в этой точке ответственная за переход мода «размягчается» наиболее сильно.

Экспериментально возникновение сильной акустической нелинейности вблизи ориентационного фазового перехода (второго рода!) было продемонстрировано наблюдением эффекта генерации второй акустической гармоники в ортоферрите TmFeO_3 ⁴⁵. Кристалл TmFeO_3 имеет орторомбическую структуру (ось b является «трудной осью» для магнитных моментов подрешеток), температура антиферромагнитного упорядочения $T_N = 630$ К. В отсутствие внешнего магнитного поля изменение температуры приводит к переориентации спинов от оси «а» при $T \geq T_1 = 94$ К к оси «с» при $T \leq T_2 = 82$ К. При $T_1 < T < T_2$ вектор \mathbf{l} плавно поворачивается в плоскости (a, c) от одной оси к другой. Температуры T_1 и T_2 являются точками ориентационного перехода второго рода, вблизи которых активация спинволновой моды понижается (мода становится «мягкой»), что подтверждается экспериментально измерениями частоты АФМР⁴⁶. В окрестностях температур T_1 и T_2 обнаружено резкое увеличение эффективности генерации второй акустической гармоники (рис. 13, 14). По мере увеличения мощности волны накачки выход второй гармоники насыщается и даже уменьшается за счет преобразования энергии падающей волны не только во вторую, но и в множество высших гармоник.

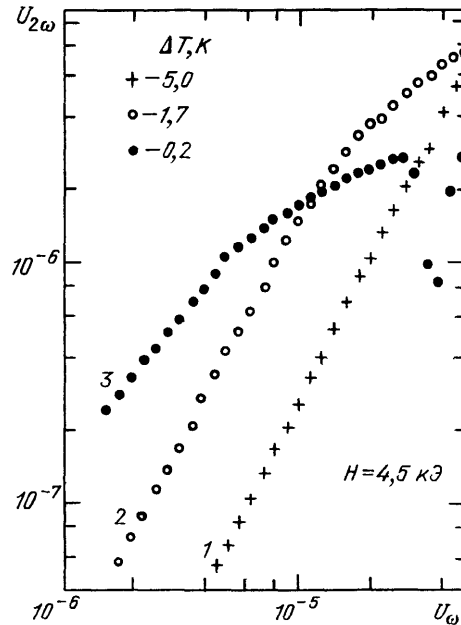


Рис. 14. Зависимость амплитуды второй акустической гармоники от амплитуды волны накачки в TmFeO_3 ($\Delta T = T - T_1$)⁴⁵

7. О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ СВЯЗАННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Взаимодействие элементарных возбуждений определяет многие термодинамические и кинетические свойства кристаллов. Описание этих свойств, как правило, требует привлечения квантово-статистических методов. Связь возбуждений формирует эффективные нелинейные взаимодействия, амплитуды которых могут иметь аномально большую величину и необычные дисперсионные свойства. Правила отбора для таких взаимодействий часто управляются внешними условиями, например ориентацией внешнего поля относительно кристаллографических осей. Все это вносит определенную специфику в целый ряд явлений, возникающих в кристаллах при наличии связи подсистем.

Представление об эффективной нелинейности как о нелинейности смешанных элементарных возбуждений лежит в основе построения ее квантовой теории⁴⁷⁻⁴⁹. В схеме вторичного квантования переход к представлению смешанных мод осуществляется путем диагонализации билинейной части опе-

ратора Гамильтона системы с учетом связи подсистем^{9,47}, которая имеет вид

$$\hat{H}^{(2)} = \sum_{\mathbf{k}, S} [\omega_{S\mathbf{k}} b_{S\mathbf{k}}^\dagger b_{S\mathbf{k}} + \omega_{f\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} + (G_{S\mathbf{k}} b_{S\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} + \text{э. с.})] = \sum_{\lambda=0}^3 \Omega_{\lambda\mathbf{k}} d_{\lambda\mathbf{k}}^\dagger d_{\lambda\mathbf{k}}, \quad (31)$$

где $b_{S\mathbf{k}}^\dagger$, $b_{S\mathbf{k}}$, $c_{\mathbf{k}}^\dagger$, $c_{\mathbf{k}}$ суть операторы рождения и уничтожения фононов и магнонов, $G_{S\mathbf{k}} = \zeta_{S\mathbf{k}} (\omega_{S\mathbf{k}} \omega_{f\mathbf{k}})^{1/2}$. Операторы рождения и уничтожения смешанных возбуждений $d_{\lambda\mathbf{k}}^\dagger$, $d_{\lambda\mathbf{k}}$ связаны с операторами «чистых» возбуждений унитарным преобразованием:

$$c_{\mathbf{k}}^\dagger \pm c_{-\mathbf{k}} = \sum_{\lambda=0}^3 P_{\lambda\mathbf{k}} (d_{\lambda\mathbf{k}}^\dagger \pm d_{\lambda, -\mathbf{k}}), \quad (32)$$

$$b_{S\mathbf{k}} + b_{S, -\mathbf{k}}^\dagger = \sum_{\lambda=0}^3 R_{\lambda\mathbf{k}} (d_{\lambda\mathbf{k}}^\dagger + d_{\lambda, -\mathbf{k}}), \quad (33)$$

где $P_{\lambda\mathbf{k}}$, $R_{\lambda\mathbf{k}}$ — коэффициенты преобразования, приведенные в⁴⁷. Вдали от точки пересечения «чистых» спектров связь слагаемых с $\lambda = 1, 2, 3$ с операторами $c_{\mathbf{k}}^\dagger$, $c_{-\mathbf{k}}$ в равенстве (32), являющаяся квантовым аналогом соотношения (15), определяет нерезонансное (виртуальное) возбуждение магнонов квазифононами. Поэтому всякий нелинейный процесс в системе магнонов является источником нелинейности и в системе квазифононов. Так, рассмотренное феноменологически взаимодействие типа (20) с участием одного фонона и двух магнонов описывается вкладом в гамильтониан вида⁴⁷

$$\mathcal{H}^{(3)} = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \Psi_{m-ph}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (b_{p\mathbf{k}} + b_{p, -\mathbf{k}}^\dagger) (c_{\mathbf{q}}^\dagger + c_{-\mathbf{q}}) (c_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger + c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}). \quad (34)$$

С учетом преобразования (32, 33) такое взаимодействие является источником трехчастичных процессов в системе квазифононов:

$$\Delta \mathcal{H}^{(3)} = N^{-1/2} \times \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{q} \\ l, \lambda, \nu}} \Psi_{l\lambda\nu}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (d_{\lambda\mathbf{k}}^\dagger + d_{\lambda, -\mathbf{k}}) (d_{\nu\mathbf{q}}^\dagger + d_{\nu, -\mathbf{q}}) (d_{l(\mathbf{k}+\mathbf{q})} + d_{l(-\mathbf{k}-\mathbf{q})}^\dagger), \quad (35)$$

где l, λ, ν — индексы поляризации квазифононов, а амплитуда взаимодействия $\Psi_{l\lambda\nu}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ ⁴⁷ выражается через параметры квазифононов и эффективные модули упругости так же, как в обычной динамике решетки:

$$\Psi_{l\lambda\nu}^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\Omega_{\lambda\mathbf{k}} \Omega_{\nu\mathbf{q}} \Omega_{l(\mathbf{k}+\mathbf{q})}}{M_v^3 V_\lambda^2 V_\nu^2 V_l^2} \right) \times \frac{J_0^2}{\omega_{f\mathbf{k}}^3 \omega_{f\mathbf{q}}^2} (\hat{\beta}_2 \hat{u}_{\lambda\mathbf{k}}) (\hat{\beta}_2 \hat{u}_{\nu\mathbf{q}}) (\hat{\beta}_1 \hat{u}_{l, \mathbf{k}+\mathbf{q}}), \quad (36)$$

где J_0 — обменная энергия; $V_\lambda = \Omega_{\lambda\mathbf{k}}/k$; $\hat{\beta}_{1,2} = \hat{B}_{1,2} v_0$; v_0 и M_v — объем и масса элементарной ячейки.

Построению можно придать наглядность, воспользовавшись графическим представлением для вершинных частей фейнмановских диаграмм (рис. 15). Диаграмма рис. 15, а иллюстрирует взаимодействие (34). Прямая и волнистая линии соответствуют магнону и фонону. Переход к представлению связанных волн с образованием эффективной вершины взаимодействия квазифононов (которым соответствует двойная линия) удобно рассматривать как результат присоединения фононной линии к магнонной. Такому соединению ставится в соответствие множитель $(G_{S\mathbf{k}}/\omega_{f\mathbf{k}})$ в аналитическом выражении для вершины с последующей заменой фононных параметров (частот и поляризаций) на квазифононные. Аналогично строится описание любого взаимодействия квазифононов, опосредованное спиновыми возбуждениями. Построение амплитуды взаимодействия четырех квазифононов, соответствующей эффективному ангармонизму четвертого порядка (23), иллюстрируется на рис. 15, б.

Отметим, что рассматриваемые механизмы эффективной нелинейности не являются специфически квантовыми, в то же время обусловленные ими процессы взаимодействия квазичастиц, в том числе с участием тепловых возбуждений, могут носить сугубо квантовый характер, как это имеет место

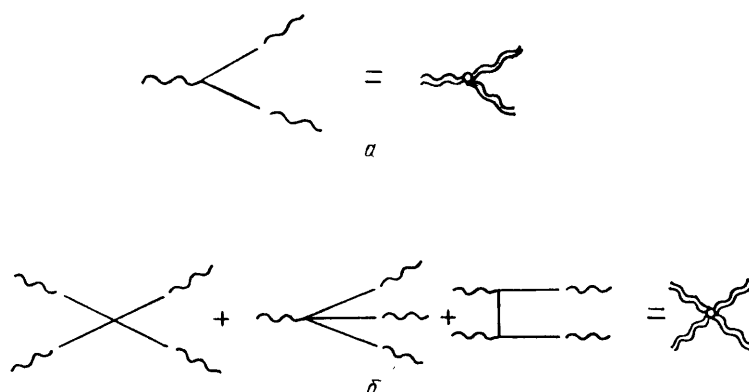


Рис. 15. Диаграммы для вершин, обусловленных эффективным энгармонизмом третьего ⁴⁷ (а) и четвертого ²⁵ (б) порядков

в релаксационно-кинетических явлениях. Учет квантово-статистических свойств спин-фононной системы необходим при описании наблюдаемых температурно-полевых зависимостей самих макроскопических эффективных модулей упругости. Для решения этой задачи применительно к широкому интервалу температур ($T \leq T_N$) в работах ^{48,49} предложена квантовая теория, основанная на диаграммной технике для спиновых операторов ⁶⁵⁻⁶⁷.

Для эффективного энгармонизма характерна специфическая пространственная дисперсия амплитуд взаимодействия (т. е. их зависимость от k), обусловленная дисперсией магнонов. Дисперсия ограничивает фазовый объем взаимодействующих возбуждений областью малых волновых векторов $k_m \leq \omega_{f0}/v_m$, поскольку фононы с волновыми векторами порядка дебаевского линейно практически не взаимодействуют с магнонами ($\zeta_k \rightarrow k_D \rightarrow 0$). В связи с этим эффективный ангармонизм упругой подсистемы, гигантский в длинноволновой области спектра, в коротковолновой области слаб и потому приводит к сравнительно небольшим потерям энергии акустических волн в процессах их рассеяния на коротковолновых (тепловых) возбуждениях.

Вклад эффективного ангармонизма в затухание звука γ_k определяется соотношением

$$\frac{\gamma_k}{\Omega_k} \sim \frac{TT_N\beta^6}{\omega_{f0}^5 (M_v v_s^2)^3}.$$

Для гематита оценка акустической добротности $Q \equiv \Omega_k/2\gamma_k$ дает $Q^1 \sim \sim 10^5 - 10^6$ при $k \ll k_m$. Здесь уместно отметить, что экспериментально измеряемые акустические потери в кристаллах $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ существенно выше ²⁵ (рис. 16). По-видимому, это объясняется дефектностью реальных кристал-

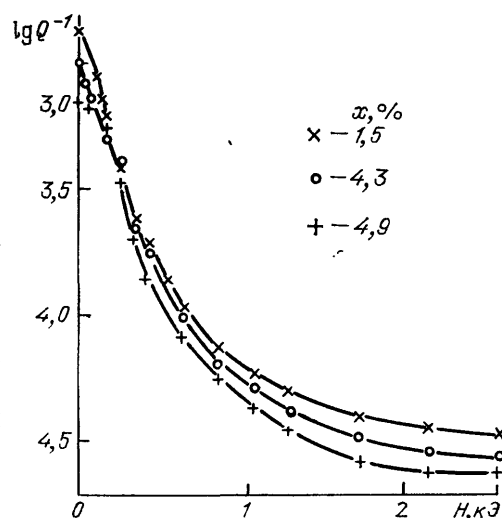


Рис. 16. Полевая зависимость затухания магнитоупругих колебаний на частоте 0,5 МГц в кристаллах $\alpha\text{-(Fe}_{1-x}\text{Al}_x)_2\text{O}_3$ ²⁵

лов, что соответствует результатам сравнения потерь на прохождение звука через образец $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ и времен релаксации звукового поля в экспериментах по обращению волнового фронта звука³⁴. Следует отметить, что кристаллы гематита, содержащие изоморфную трехвалентному железу примесь Al^{3+} , имеют относительно более высокую добротность из-за пониженной концентрации ионов Fe^{2+} , обычно присутствующих в гематите в количестве около 1 %⁶⁸.

8. ЗА ПРЕДЕЛАМИ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Из соображений, приведенных в разделе 1, следует, что для магнетиков с достаточно сильной магнон-фононной связью ($\xi \sim 1$) область применимости ангармонических разложений ограничена упругими деформациями, близкими по величине к деформациям спонтанной магнитострикции. Такие деформации обычно далеки от пределов разрушения реальных кристаллов и сравнительно легко достигаются в условиях акустических экспериментов. В связи с этим представляет интерес исследование магнитоупругих возбуждений, описание которых выходит за рамки ангармонических приближений и связано с необходимостью точного решения сильно нелинейных систем динамических уравнений (11, 12). При определенных условиях нелинейность и дисперсия, вносимые спиновой системой в магнитоупругие возбуждения, могут компенсировать друг друга, в результате возникает возможность формирования уединенных связанных магнитоупругих волн — магнито-акустических солитонов⁷¹. Впервые такие волны применительно к АФЛП были рассмотрены в работе⁵⁰. Различные их модификации, вопросы устойчивости и характер эволюции солитонных решений исследовались в работах^{51–54}.

Условия формирования магнитоакустических солитонов проанализируем с помощью уравнения (7) на примере волн, распространяющихся в ромбоэдрических АФЛП вдоль тригональной оси. Если волна стационарна, т.е. $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\xi)$ и $\varphi = \varphi(\xi)$, где $\xi \equiv z - Vt$, то можно исключить динамические деформации из системы уравнений (11, 12) и свести ее к стационарному уравнению «двойного синус-Гордона»:

$$m_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = A \sin \varphi + \frac{1}{2} D \sin 2\varphi, \quad (37)$$

где

$$m_p \equiv \gamma^{-2} (v_m^2 - V^2), \quad A = HH_D, \\ D = \gamma^{-2} \left(\omega_{f0}^2 \frac{V_{st}^2 - V^2}{v_{st}^2 - V^2} - HH_D \gamma^2 \right),$$

$V_{st} \equiv v_{st} (1 - \xi^2)^{1/2}$ — скорость звукоподобной волны. Интервалы скоростей волн V , соответствующих солитонным решениям, и качественные особенности движения магнитных моментов легко установить, воспользовавшись, следуя⁵⁵, очевидной аналогией уравнения (30) с уравнением движения частицы с массой m_p и импульсом $p = m_p \partial \varphi / \partial \xi$ в поле сил с потенциалом

$$\tilde{f}(\varphi) = A (\cos \varphi - 1) + \frac{1}{4} D (\cos 2\varphi - 1).$$

В кристаллах АФЛП с высокой температурой Нееля ($\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$, FeVO_3), для которых $v_m > v_{st}$, допустимые скорости движения солитонов в направлении z должны удовлетворять условиям: $V^2 < V_{st}^2$ или $v_m^2 > V^2 > v_{st}^2$. В этих случаях эффективный потенциал имеет характерный вид, приведенный на рис. 17, а. Уединенной волне на фоне равновесного состояния кристалла ($\varphi \equiv 0$) соответствует движение «частицы» в потенциальной яме $F(\varphi)$ из точки ($\varphi|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$ при $p|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0$) в точку ($\varphi|_{\xi \rightarrow +\infty} = 2\pi$ при $p|_{\xi \rightarrow +\infty} =$

$= 0$), т.е. непрерывный разворот магнитного момента в волне на угол 2π . Решение данного типа представляет собой известный « 2π -кинк» уравнения «двойного синус-Гордона»⁵⁰:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{D+A}{A} \right)^{1/2} \left(\operatorname{sh} \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{-1}, \quad (38)$$

где характерный размер солитона $\xi_0 = [m_v/(D+A)]^{1/2}$. Для кристалла $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ при $H \approx 0,5$ кЭ и $V \ll V_{st}$ величина $\xi_0 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ см, а максимальные деформации в волне порядка 10^{-5} . Следует обратить внимание, что скорости солитонов принимают те значения, которые не совпадают с фазовыми скоростями линейных магнитоупругих волн. На плоскости (ω, k)

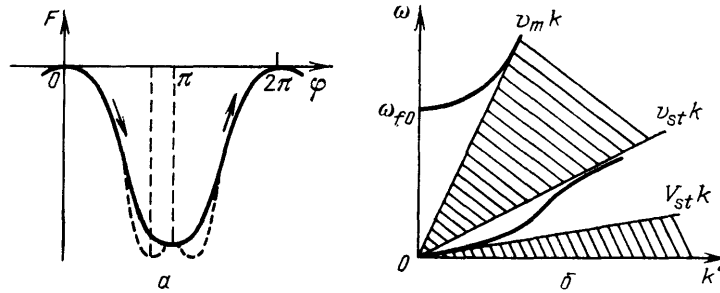


Рис. 17. *a* — Зависимость эффективного потенциала от угла φ отклонения вектора \mathbf{e} от равновесного направления²⁵. *б* — Области существования для скоростей солитонов в высокотемпературном АФЛП ($v_m > v_{st}$)²⁵

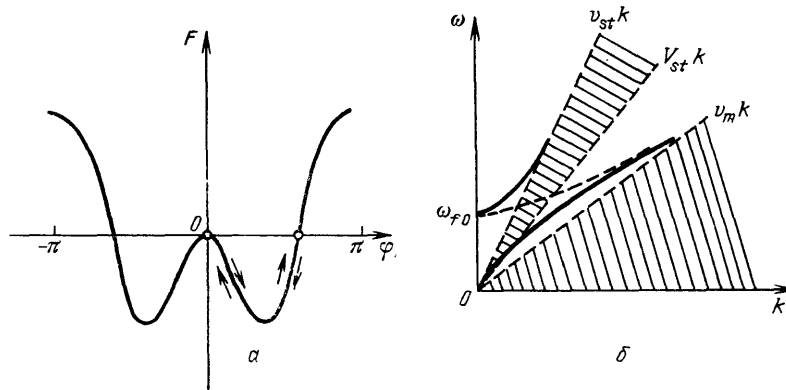


Рис. 18. *a* — Зависимость эффективного потенциала от угла φ отклонения вектора \mathbf{e} от равновесного направления²⁵. *б* — Области существования для скоростей солитонов в низкотемпературном АФЛП ($v_m < v_{st}$)²⁵

каждому значению $v_\phi \equiv \omega/k$ гармонической волны можно поставить в соответствие прямую, проходящую через начало координат с тангенсом угла наклона, равным $\operatorname{tg} \alpha = v_\phi$. Области, в которых могут располагаться эти прямые, оставлены на рис. 17, *б* незаштрихованными. В свою очередь, заштрихованным областям соответствуют допустимые скорости солитонов ($V = \operatorname{tg} \alpha$). Подобное разбиение плоскости (ω, k) справедливо для любых направлений распространения магнитоупругих волн, если отвлечься от релаксации, представляющей собой обобщенный результат действия неучтенных в (11, 12) нелинейных взаимодействий.

В низкотемпературных АФЛП, для которых $v_m < v_{st}$ (MnCO_3 , CoCO_3), солитонам соответствуют скорости $v_{st} > V > V_{st}$, либо $V < v_m$ (рис. 18, *б*). В первом случае солитоны также имеют вид 2π -кинка, а во втором их структура оказывается качественно иной. Характерный вид эффективного потенциала «частицы» с массой $|m_p|$ для диапазона околосвуковых скоростей

$v_{st} > V > V_{st}$ приведен на рис. 18, а. Солитону соответствует движение «частицы» от точки $\varphi = 0$ (при $p = 0$) до точки φ_{\max} с последующим возвратом в точку $\varphi = 0$. Решение уравнения (30) при этом имеет вид⁵⁰

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{|D+A|}{A} \right)^{1/2} \left(\operatorname{ch} \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{-1}. \quad (39)$$

Данный тип солитонов, в отличие от 2π -кинка, может реализоваться при малых отклонениях от равновесия ($\varphi_{\max} \ll 1$). В этом случае результат переходит в известное солитонное решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриса, см.⁵⁵ С экспериментальной точки зрения представляется интересным оценить время τ , в течение которого такой солитон выделяется из начального ступенеобразного магнитоупругого возмущения, движущегося со скоростью V_{st} ⁵¹. Для типичного низкотемпературного АФЛП MnCO_3 $\tau = \xi_0/|V - V_{st}| \sim 10^{-6}$ с и длина образца, необходимого для импульсного эксперимента, не превышает 1 см. Оценки τ для упругого солитона в нелинейной упругой решетке или для магнитоупругого солитона в ферромагнетике с умеренным магнитоупругим взаимодействием дают $\tau \sim 0,1$ с, демонстрируя тем самым преимущества непроводящих АФЛП для прямого наблюдения уединенных магнитоупругих волн. Необходимо отметить, что солитонные решения исходной системы (11, 12) для магнитоупругих волн малой амплитуды с околосвуковыми скоростями существуют и в высокотемпературных АФЛП, но для других направлений распространения⁵¹. Однако, в этих кристаллах такие возбуждения оказываются неустойчивыми относительно поперечных возмущений их фронта^{52,54}. Одним из вариантов развития такой неустойчивости оказывается самофокусировка магнитоупругих возбуждений⁵². Физической ее причиной является уменьшение скорости возбуждения с ростом его амплитуды, что обуславливает накапливающийся прогиб фронта волны в направлении, противоположном направлению распространения. Подробный анализ начальных распределений амплитуды, из которых формируется самофокусирующая волна, выполнен в⁵³.

Очевидные качественные различия солитонов типа (38) и (39) (см. рис. 17, 18) допускают определенную топологическую трактовку. Солитоны (38) имеют отличный от нуля топологический заряд ($1/2\pi \oint \nabla \varphi dl = 1$), где интегрирование ведется по замкнутому на бесконечности контуру, пронизывающему базисную плоскость. По аналогии с вихревыми состояниями в протяженных джозефсоновских структурах такие возбуждения можно отнести к вихревым. Для солитонов (39) топологический заряд равен нулю.

В случае возбуждений (39) кристалл при фиксированных условиях на границах ($\varphi|_{z=\pm L} = 0$) непрерывным преобразованием может быть переведен в равновесное состояние. При тех же условиях для возбуждений вида (38) переход к равновесию связан с преодолением конечного энергетического барьера, обусловленного обменным взаимодействием. В соответствии с этим солитоны (38) топологически устойчивы — в отличие от солитонов (39). Расчет спектров их локализованных возбуждений²⁵ показывает, что данный тип солитонов устойчив не только топологически, но и динамически, что позволяет рассчитывать на возможность их экспериментального наблюдения. Например, представляется возможным создать вихревое солитонное возбуждение путем непрерывного поворота друг относительно друга на угол 2π векторов напряженности внешнего магнитного поля вблизи противоположащих границ образца ($z = \pm L$).

Отметим, что сильно нелинейные спиновые возбуждения являются существенно магнитоупругими даже в кристаллах с относительно слабой магнотон-фононной связью, если скорость их распространения резонансно близка к звуковой. Такая ситуация реализуется, в частности, в ортоферритах при движении доменных границ с околосвуковыми скоростями^{56,57}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в данном обзоре идеи, касающиеся эффективной нелинейности смешанных мод, носят, на наш взгляд, весьма общий характер. В роли смешанных возбуждений могут выступать не только магнитоупругие, но и электрон-ядерно-спиновые и электрон-ядерно-магнитоупругие волны, сегнетомагнитные и сегнето-магнитоупругие волны, поляритоны и другие типы связанных колебаний. Нелинейные процессы в таких системах интенсивно изучаются в последние годы⁵⁸⁻⁶³ — главным образом теоретически. Расширение экспериментальных исследований сильных эффективных взаимодействий в связанных системах способствовало бы дальнейшему развитию представлений о механизмах формирования динамических свойств твердых тел и их функциональных возможностях в технических приложениях.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова, Москва
Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А.//УФН. 1970. Т. 102. С. 549.
2. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972. — С. 214.
3. Ozhogin V. I.//Proc. of 3rd Intern. School of Condensed Matter Physics/Ed. M. Borissov. — Singapore: World Scientific, 1984. — P. 434.
4. Jacobs I. S., Beyerlein R. A., Foner S., Remeika J. P.//J. Magn. and Magn. Mater., 1971. V. 1. P. 193.
5. Dichi R., Jantz W., Nolang B. I., Wettling W.//Current Topics in Materials Science/Ed. E. Kaldis. 1986. V. 11. P. 242.
6. Seavey M. H.//Sol. State Commun. 1972. V. 10. P. 219.
7. Ожогин В. И., Максименков П. П.//а) Digests of Intermag Conference. — Kyoto, 1972. — 49-4; б) IEEE Trans. Magn. 1972. V. Mag-8. P. 130; в) ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 657.
8. Levitin R. Z., Pachomov A. S., Schurov V. A.//Phys. Lett. Ser. A. 1968. V. 27. P. 603.
9. Савченко М. А.//ФТТ. 1964. Т. 6. С. 864.
10. Боровик-Романов А. С., Рудашевский Е. Г.//ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 2095.
11. Туров Е. А., Шавров В. Г.//ФТТ. 1965. Т. 7. С. 217.
12. Туров Е. А., Шавров В. Г.//УФН. 1983. Т. 140. С. 429.
13. Ожогин В. И., Преображенский В. Л.//ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 988.
14. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Сукстанский А. Л.//ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 1509.
15. Андреев А. Ф., Марченко В. И.//УФН. 1980. Т. 130. С. 39.
16. Великов Л. В., Миронов С. В., Рудашевский Е. Г.//ЖЭТФ. 1987. Т. 75. С. 1110.
17. Ожогин В. И.//IEEE Trans. Magn. 1976. V. MAG-12. P. 19; Изв. АН СССР. Сер. физ. 1978. Т. 42. С. 1625.
18. Дикштейн И. Е., Тарасенко В. В., Шавров В. Г.//ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 816.
19. Бережнов В. В., Евтихий Н. Н., Преображенский В. Л., Экономов Н. А.//Радиотехн. и электрон. 1983. Т. 28. С. 376.
20. Кухтин Р. И., Преображенский В. Л., Экономов Н. А.//ФТТ. 1984. Т. 26. С. 884.
21. Андрущак Е. А., Евтихий Н. Н., Погожев С. А., Преображенский В. Л., Экономов Н. А.//Акуст. ж. 1980. Т. 26. С. 328.
22. Алексеев А. И., Ермолов В. А., Бондаренко В. С., Науменко Н. Ф.//ФТТ. 1984. Т. 26. С. 2443.
23. Маматова Т. А., Прокошев В. Г.//Вестн. МГУ. Сер. 3 «Физика и астрономия». 1985. Т. 26. С. 49.
24. Преображенский В. Л., Савченко М. А., Экономов Н. А.//Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 28. С. 93.
25. Преображенский В. Л. Магнитоакустика высокотемпературных антиферромагнитных диэлектриков с анизотропией типа «легкая плоскость»: Автореферат диссертации... доктора физ.-мат. наук. — М.: МИРЭА, 1986.

26. Бережнов В. В., Евтихий Н. Н., Преображенский В. Л., Экономов Н. А.//ФТТ. 1982. Т. 25. С. 1870.
27. Ожогин В. И., Лебедев А. Ю., Якубовский А. Ю.//Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 27. С. 333.
28. Красильников В. А., Маматова Т. А., Прокошев В. Г.//Письма ЖТФ. 1984. Т. 10. С. 1196.
29. Лебедев А. Ю., Ожогин В. И., Якубовский А. Ю.//Письма ЖЭТФ. 1981. Т. 34. С. 22.
30. Бережнов В. В., Преображенский В. Л., Экономов Н. А., Эльяшев Д. Э.//Тезисы докладов XVI Всесоюзной конференции по физике магнитных явлений.— Тула, 1983.— С. 23.
31. Бункин Ф. В., Кравцов Ю. А., Ляхов Г. А.//УФН. 1986. Т. 149. С. 391.
32. Евтихий Н. Н., Преображенский В. Л., Савченко М. А., Экономов Н. А.//Вопр. радиоэлектрон. Сер. общетехн. 1978. № 5. С. 124.
33. Comstock R. L., LeCraw R. C.//Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 219.
34. Красильников В. А., Маматова Т. А., Прокошев В. Г.//ФТТ. 1986. Т. 28. С. 615.
35. Бережнов В. В., Евтихий Н. Н., Преображенский В. Л., Экономов Н. А.//Акуст. ж. 1980. Т. 26. С. 328.
36. Губкин М. К., Маматова Т. А., Прокошев В. Г.//Ibidem. 1985. Т. 35. С. 678.
37. Ермолов В. А., Алексеев А. И., Панкратов В. Г.//Письма ЖТФ. 1985. Т. 11. С. 377.
38. Wettling W., Jantz W., Patton C. E.//J. Appl. Phys. 1979. V. 50. P. 2030.
39. Котюжанский Б. Я., Прозорова Л. А.//ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1567.
40. Лутовинов В. С., Савченко М. А.//Тезисы докладов Всесоюзной конференции по физике магнитных явлений.— Харьков, 1979.— С. 85.
41. Петров М. В., Паугурт А. П., Плешаков И. В., Иванов А. В.//Письма ЖТФ. 1985. Т. 11. С. 1204.
42. Евтихий Н. Н., Мошкин В. В., Преображенский В. Л., Экономов Н. А.//Письма ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 31.
43. Ожогин В. И., Шапиро В. Г.//ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 1737.
44. Евтихий Н. Н., Преображенский В. Л., Шумилов В. Н., Экономов Н. А.//Тезисы докладов Всесоюзной конференции по физике магнитных явлений.— Пермь, 1981.— Ч. 1. С. 63.
45. Лебедев А. Ю., Ожогин В. И., Якубовский А. Ю.//ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 1059.
46. LeCraw R. C., Wolfe R., Gyorgy E. M., Hagedorn F. B., Nessel J. C., Remeika J. P.//J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 101.
47. Лутовинов В. С., Преображенский В. Л., Семин С. П.//ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 1139.
48. Панина Л. В., Преображенский В. Л.//ФММ. 1984. Т. 57. С. 39.
49. Панина Л. В., Преображенский В. Л., Шумилов В. Н., Экономов Н. А.//Акуст. ж. 1984. Т. 30. С. 566.
50. Preobrazhensky V. L., Savchenko M. A.//Proc. of the XXth Congress of AMPERE.— Tallin, 1978.— P. 410.
51. Ozhogin V. I., Lebedev A. Yu.//J. Magn. and Magn. Mater. 1980. V. 15—18. P. 617.
52. Ozhogin V. I., Manin D. Yu., Petviashvili V. I., Lebedev A. Yu.//IEEE Trans. Magn. 1983. V. Mag.-19. P. 1977.
53. Бучельников В. Д., Шавров В. Г.//ФТТ. 1983. Т. 25. С. 90.
54. Турицын С. К., Фалькович Г. Е.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 258.
55. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.— С. 121.
56. Звездин А. К., Попков А. Ф.//ФТТ. 1979. Т. 21. С. 1334.
57. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Четкин М. В.//УФН. 1985. Т. 146. С. 417.
58. Лутовинов В. С., Сафонов В. Л.//ФТТ. 1979. Т. 21. С. 2772.
59. Савченко М. А., Соболев В. П.//Тезисы докладов Всесоюзной конференции по физике магнитных явлений.— Донецк, 1985.— С. 318.
60. Савченко М. А., Хабахпашев М. А.//ФТТ. 1976. Т. 18. С. 2699; 1978. Т. 20. С. 1845.
61. Farias G. A., Maradudin A. A.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 28. P. 1870.
62. Меньшенин В. В., Мирсаев И. Ф., Талуц Г. Г.//ФММ. 1983. Т. 56. С. 1078.
63. Лукомский В. П.//ФТТ. 1978. Т. 20. С. 2797.
64. Мурашов В. А., Розанцев А. В., Сидоров А. Н., Жаринова Т. А., Шумилов В. Н., Мошкин В. В.//Тр. МХТИ. 1984. № 133. С. 21.

65. Вакс В. Г., Ларкин А. И., Пикин С. А.//ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1089.
66. Пикалев Э. М., Савченко М. А., Шойом Й.//ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 1007.
67. Изюмов Ю. А., Касан-Оглы С. А., Скрыбин Ю. Н. Полевые методы в теории ферромагнетизма.— М.: Наука, 1984.— С. 224.
68. Мурашов В. А., Сидоров А. Н., Жаринова Т. А., Сурков В. Н., Мосин Ю. М.//Тезисы докладов III Всесоюзной конференции «Состояние и перспективы развития методов получения монокристаллов».— Харьков, 1985.— С. 86.
69. Блафф Р., Кодри Ф., Гиббс Г.//Солитоны.— М.: Мир, 1983.— С. 122.
70. Бережнов В. В.//Вопр. радиоэлектрон. Сер. общетехн. 1982. № 11. С. 121.
71. Волжан Е. Б., Гиоргадзе Н. П., Патарая А. Д.//ЖЭТФ. 1976. Т. 70. С. 1330.