

530.145

ПРОБЛЕМА КВАНТОВОГО ХАОСА**П. В. Елютин****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение. Стохастичность в классической механике	398
1.1. Регулярное и стохастическое движения. 1.2. Мера стохастической компоненты. 1.3. Основные модели.	
2. Постановка проблемы	403
2.1. Сравнение регулярных и хаотических квантовых систем. 2.2. Квантовые эффекты в динамике наблюдаемых. 2.3. Некоторые приложения.	
3. Свойства энергетического спектра	406
3.1. Чувствительность уровней к возмущению. 3.2. Статистика энергетического спектра.	
4. Свойства волновых функций стационарных состояний	416
4.1. Свойства ВФ в H_0 -представлении. 4.2. Свойства ВФ в координатном представлении.	
5. Свойства операторов, отличных от гамильтониана	422
6. Свойства нестационарных состояний	423
6.1. Автокоррелятор волнового пакета. 6.2. Переход пакета в другое состояние. 6.3. Устойчивость эволюции пакетов.	
7. Квантовый хаос в неавтономных системах	427
7.1. Квантовый нелинейный резонанс. 7.2. Взаимодействие квантовых нелинейных резонансов. 7.3. Квантовый ротатор с толчками. 7.4. Связь с теорией андерсоновской локализации. 7.5. Стохастическая ионизация и квантовые эффекты.	
8. Заключение. Очередные задачи	434
8.1. Какие параметры описывают квантовый хаос? 8.2. Универсальна ли модель ГОА? 8.3. Какова роль σ в квантовом хаосе	
Список литературы	437

Концепция стохастического (хаотического) движения в классических динамических системах с небольшим числом степеней свободы установилась в теоретической физике около четверти века назад, но интерес к изучению связанных с ней явлений продолжает расти. Главной чертой стохастичности является чувствительная зависимость фазовых траекторий движения от начальных условий. Она приводит к практической непредсказуемости поведения системы и требует нового подхода к описанию движения, ставящего в центр внимания изучение самой неустойчивости — ее величины и условий ее возникновения. Сегодня такой подход хорошо развит и строго обоснован.

Проблема квантового хаоса состоит в исследовании проявлений стохастичности динамических систем в их квантовых свойствах. Такие исследования представляют принципиальный интерес: различие в способах описания квантовых и классических систем ставит задачу о практическом воплощении принципа соответствия. Проблема обладает значительной общностью, так как классическая стохастичность присуща почти любым гамильтоновым системам. Поэтому речь идет об изучении квантовых свойств квазиклассических систем общего вида с несколькими степенями свободы. Среди возможных приложений в первую очередь укажем на описание высоковозбужденных состояний атомов (во внешних полях) и многоатомных молекул.

Активность исследований проблемы квантового хаоса быстро увеличивается. Векторные компьютеры стали эффективным инструментом эмпирического изучения квантовых свойств модельных систем. Установлен и теоретически интерпретирован ряд общих закономерностей. Недавно появились первые экспериментальные работы. Цель настоящего обзора — описать современное состояние дел в проблеме квантового хаоса, указать на имеющиеся противоречия и обозначить очередные задачи.

В настоящее время термины «хаос» и «стохастичность» и производные от них используются почти как синонимы для описания неустойчивого, случайного движения в динамических системах. «Термин «хаотический» обычно используется для описания случайного движения в диссипативных системах, тогда как термин «стохастический» чаще относится к гамильтоновым системам»^(130, с. 74). В обзоре рассматриваются только гамильтоновы системы; однако для классических систем мы будем говорить о стохастических свойствах, а для квантовых — о хаотических, имея в виду разностью терминов подчеркнуть различия. Второй аргумент в пользу такого выбора — складывающаяся традиция: в названиях статей сочетание «квантовый хаос» встречается в два раза чаще, чем «квантовая стохастичность».

1. ВВЕДЕНИЕ. СТОХАСТИЧНОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Цель этого раздела — дать краткую сводку определений и понятий классической теории стохастического движения гамильтоновых систем, необходимых в изложении проблемы квантового хаоса. Материал раздела в основном содержится в учебниках^{9,42} и монографиях^{129,130}, на которые мы постоянно ссылаемся. Читатель, знакомый с теорией классической стохастичности, может перейти к разделу 2.

1.1. Регулярное и стохастическое движения

Динамика классической гамильтоновой системы с N степенями свободы определяется каноническими уравнениями движения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1 \leq i \leq N), \quad (1.1)$$

где $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — функция Гамильтона (гамильтониан)^{*}). Функция динамических переменных $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ такая, что $\{F, H\} = 0$, где $\{, \}$ означает скобки Пуассона^(9, § 42), называется интегралом движения; $dF/dt = 0$. Если существуют N независимых интегралов F_i ($1 \leq i \leq N$) таких, что $\{F_i, F_j\} = 0$, то система (1.1) является *интегрируемой*. Для интегрируемой системы можно ввести такие канонические переменные действие — угол (I_i, θ_i) , что гамильтониан будет функцией одних только переменных действия: $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(I)$ (^{9, § 49; 42, § 50}). Движение интегрируемой системы является квазипериодическим: угловые координаты $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ изменяются со временем с постоянной скоростью:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i(I), \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}. \quad (1.2)$$

Величины ω_i называются частотами квазипериодического движения. Траектории в фазовом пространстве интегрируемой системы ограничены N -мерной поверхностью в $2N$ -мерном фазовом пространстве. Частным случаем инте-

^{*}) До п. 1.3.3 мы рассматриваем только автономные системы, для которых $\partial H/\partial t = 0$. Неавтономная система с N степенями свободы формально может быть представлена как автономная с числом степеней свободы $N + 1$ (^{130, § 1.2}).

грируемых систем являются системы с разделяющимися переменными (⁹, § 48). Интегрируемые системы мы будем также называть *регулярными*.

В общем случае система с двумя и более степенями свободы не является интегрируемой и может совершать как квазипериодическое (регулярное) движение, так и стохастическое движение. Отличительным признаком стохастического движения является неустойчивость, проявляющаяся в экспоненциальной расходимости близких траекторий. Если $x(t)$ и $x'(t)$ — две траектории в фазовом пространстве, близкие при $t = 0$, то при стохастическом движении

$$\Delta(t) = |x(t) - x'(t)| \approx \Delta(0) e^{\sigma_1 t} \quad (1.3)$$

при достаточно малом $\Delta(0)$. Величина σ_1 называется максимальным *показателем Ляпунова* и формально определяется так:

$$\sigma_1(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \Delta(0) \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \right) \quad (x = x(0)) \quad (1.4)$$

(почти для всех направлений вектора $w = x(0) - x'(0)$). Систему с D -мерным фазовым пространством характеризует набор D показателей Ляпунова σ_i , которые нумеруются в порядке убывания; их определение дано в ¹³⁰ (§ 5.2). Точки, принадлежащие одной траектории, обладают одинаковыми значениями $\sigma(x)$. Для гамильтоновых систем показатели Ляпунова обладают симметрией: $\sigma_i = -\sigma_j$ при $i + j = 2N + 1$; две из величин σ_i при этом в точности равны нулю.

Движение системы называется *стохастическим*, если на траектории $\sigma_1 > 0$, и *регулярным*, если $\sigma_1 = 0$.

С показателями Ляпунова связана колмогоровская энтропия h (¹²⁹, § 1.6; ¹³⁰, § 5.2). Для данной стохастической траектории h есть сумма положительных показателей Ляпунова:

$$h = \sum_{\sigma_i > 0} \sigma_i. \quad (1.5)$$

При стохастическом движении корреляционная функция динамических величин $f(t) = f(p, q)$ и $g(t) = g(p, q)$, определенная соотношением

$$B(f, g; \tau) = \langle f(t + \tau) g(t) \rangle_T - \langle f(t) \rangle_T \langle g(t) \rangle_T, \quad (1.6)$$

(угловые скобки $\langle \dots \rangle_T$ означают усреднение по времени), стремится к нулю с ростом τ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B(f, g; \tau) = 0. \quad (1.7)$$

Это свойство называется *перемешиванием* (¹²⁹, § 1.5).

Спектр мощности $S(\omega)$ динамической величины $f(t)$ определяется выражением

$$S(f; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(f, f; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.8)$$

Для движения с перемешиванием спектр мощности $S(\omega)$ непрерывен, а для регулярного движения — дискретен:

$$S(f; \omega) = \sum_k A_k \delta(\omega - \Omega_k); \quad (1.9)$$

здесь A_k образуют счетную последовательность, а частоты Ω_k есть комбинации частот квазипериодического движения ω_i .

1.2. Мера стохастической компоненты

Для общей — неинтегрируемой — автономной гамильтоновой системы имеется единственный интеграл движения — энергия: $F_1 = H$. Поэтому любая траектория целиком принадлежит энергетической поверхности — множеству с размерностью $2N - 1$, на котором $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E$. Эта поверхность содержит области регулярного движения, где $\sigma_1 = 0$, и стохастические компоненты — области, в которых $\sigma_1 > 0$. В системе с двумя степенями свободы стохастических компонент может быть несколько (и даже бесконечно много); будем различать их индексом k . Каждая стохастическая компонента обладает, вообще говоря, своим набором показателей Ляпунова $\sigma_k = (\sigma_{1k}, \dots, \sigma_{2N-1,k})$.

Важной характеристикой стохастического движения является *мера* $\mu_k(E)$ — доля объема (компактной) энергетической поверхности, заполненная k -й стохастической компонентой. Далее стохастические компоненты нумеруются в порядке убывания μ . Системы с $\mu_1 = 1$, у которых единственная стохастическая компонента заполняет всю энергетическую поверхность, являются *эргодическими* (¹²⁹, § 1.5; ¹³⁰, § 5.2).

Значение $\mu(E)$ может быть получено разбиением энергетической поверхности на ячейки и подсчетом числа ячеек, в которые попадает траектория стохастического движения, найденная численным интегрированием уравнений (1.1); другой подход использует вычисление показателей Ляпунова для большого числа траекторий со случайно выбранными начальными условиями. Мера $\mu_k(E)$ оценивается как доля траекторий с одинаковыми наборами $\sigma_k(x)$ ($\sigma_1 > 0$).

Если $\mu_1 \ll 1$, то стохастическое движение практически не отличимо от регулярного. Современным компьютерам (таким, как IBM 370/168²⁰², CDC Cyber 172¹²³, HITAC S 810/20¹⁹¹) за разумное время доступно определение μ для системы с двумя степенями свободы с ошибкой $\Delta\mu \approx (1-3) \cdot 10^{-2}$. Поэтому мы будем говорить о заметной стохастичности, если в условиях задачи $\mu_1 \gtrsim 0.1$, и называть область параметров, где это неравенство не выполняется областью регулярного движения. Для оценки $\mu(E)$ часто используют величину $\bar{\mu}(E)$ — долю площади одного из двумерных сечений энергетической поверхности, занятую стохастической компонентой^{8,123}.

Стохастические аспекты движения гамильтоновой системы охарактеризованы, если известны мера $\mu_k(E)$ и значения показателей Ляпунова σ_k для каждой из стохастических компонент. Эти величины мы будем называть параметрами стохастичности.

1.3. Основные модели

Для проблемы квантового хаоса сейчас наиболее важны свойства автономных систем с двумя степенями свободы и неавтономных — с одной степенью свободы. Только такие системы и рассматриваются в обзоре. Для них неустойчивость определяется единственным положительным показателем Ляпунова σ_1 , который дальше будет обозначаться просто σ . Наиболее подробно изучены следующие классы систем.

1.3.1. Бильярды

Это системы, в которых точка совершает свободное движение в двумерной области, ограниченной одной или несколькими замкнутыми кривыми, упруго отражаясь от границ. Примерами бильярдных, в которых движение является стохастическим, являются бильярд Синая^{7,14}, границы которого — квадрат со стороной L и окружность радиуса $R < L/2$ с совпадающими цен-

трами, и бильярд «стадион»^{22,41}, границы которого — параллельные отрезки длины $2a$, сопряженные с полуокружностями радиуса r (рис. 1).

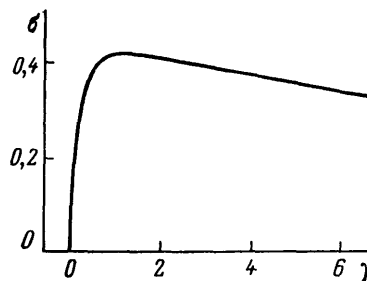
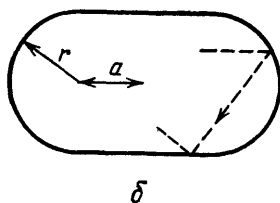
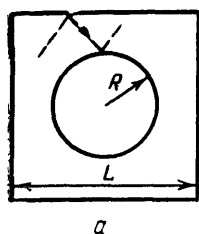


Рис. 1. Бильярды Синая (а) и «стадион» (б). Штриховыми линиями показаны траектории частиц

Рис. 2. Зависимость показателя Ляпунова σ от параметра формы γ для бильярда «стадион»

Эти определения задают однопараметрические семейства систем (с параметрами $\gamma = R/L$ и $\gamma = a/r$ соответственно). При любых γ и E движение в таких бильярдах является эргодическим ($\mu_1 = 1$), а показатель Ляпунова σ зависит от γ (рис. 2).

1.3.2. Нелинейные осцилляторы

Нелинейным осциллятором мы будем называть систему с гамильтонианом $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, который в некоторой области фазового пространства может быть приближен положительно определенной квадратичной формой

$$H_0 = E_0 + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i \omega_i^2}{2} q_i^2 \right), \quad (1.10)$$

но не совпадает с ней. Поскольку гамильтониан нелинейного осциллятора содержит по меньшей мере три параметра независимых размерностей (массу частицы m , частоту малых колебаний ω и длину нелинейности l , которая определяется нелинейным членом $V = H - H_0$), то эти масштабы удобно выбрать в качестве системы единиц. В дальнейшем гамильтонианы нелинейных осцилляторов мы будем записывать в безразмерной форме, а энергию отсчитывать от E_0 .

Примерами нелинейных осцилляторов, используемых в теории стохастичности, являются:

1) Модель Тьеля — Вильсона⁶:

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} [p_i^2 + (1 - e^{-q_i})^2] + \alpha p_1 p_2. \quad (1.11)$$

2) Модель Хенона — Хейлеса⁸ (рис. 3):

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (p_i^2 + q_i^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3. \quad (1.12)$$

Обобщением этой модели является модель Истеса — Маркуса²³:

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) + \lambda (q_1^2 q_2 + \eta q_2^3), \quad (1.13)$$

представляющая трехпараметрическое семейство, к которому принадлежит и система (1.12).

3) Модель Паллена — Эдмондса ⁷⁶:

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} (p_i^2 + q_i^2) + k q_1^2 q_2^2. \quad (1.14)$$

Отличительным свойством (и достоинством по сравнению с примерами 1 и 2) последней модели является финитность движения при любой энергии

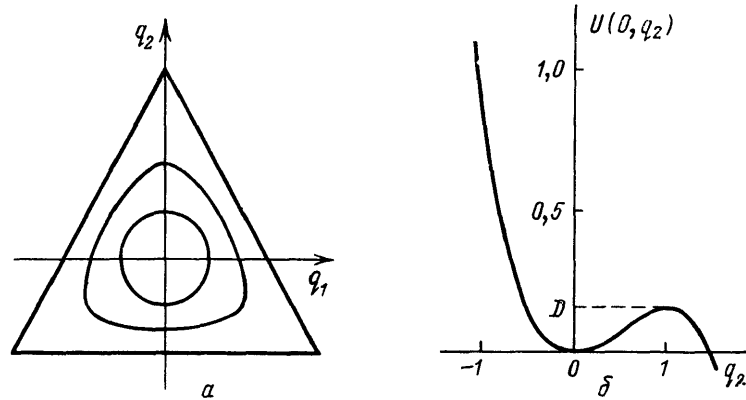


Рис. 3. Линии уровня потенциальной энергии (а) и сечение потенциала (б) для модели Хенона — Хейлеса (1.12).
 D — порог инфинитного движения

Модель Паллена — Эдмондса может быть использована для описания (классических) массивных полей Янга — Миллса, зависящих от одной переменной ⁶⁷. Стохастическим свойствам гамильтониана (1.14) и его обобщений (с потенциалом, не содержащим членов вида q_i^2 и/или содержащим также члены вида q_i^4) посвящено большое число работ ^{68, 141, 203, 216, 220, 228}.

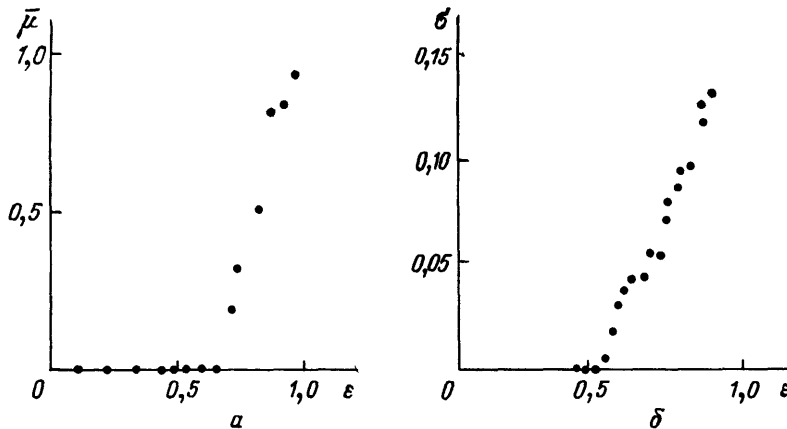


Рис. 4. Зависимости от энергии меры сечения стохастической компоненты $\bar{\mu}$ (а) и показателя Ляпунова σ (б) для модели Хенона — Хейлеса.
Параметр ε — отношение энергии к порогу инфинитного движения: $\varepsilon = E/D$

Из определения нелинейных осцилляторов ясно, что при $E \ll 1$ движение в таких системах близко к регулярному, так как при $E \rightarrow 0$ система интегрируема. Поэтому стохастичность заметна только при больших энергиях $E \sim 1$. Для таких систем в области заметной стохастичности практически наблюдается только одна стохастическая компонента; ее меру будем обозначать просто μ . Как μ , так и σ для нелинейных осцилляторов возрастают с ростом энергии (рис. 4).

1.3.3. Неавтономные системы с толчками

Среди неавтономных систем для дальнейшего важны системы с гамильтонианами, которые в переменных действие — угол имеют вид

$$H = \frac{I^2}{2} + Kv(\theta) \tilde{\delta}(t), \quad (1.15)$$

где

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n), \quad (1.16)$$

а $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Такая система может быть представлена как плоский ротор, на который через постоянные интервалы времени T действует мгновенный импульс момента силы (момент инерции ротора J и период толчков T в (1.15) приняты равными единице). Для модели (1.15) связь между значениями динамических переменных (I, θ) и (I', θ') , взятыми в моменты времени $t = n + 0$ и $t' = n + 1 + 0$, может быть указана аналитически: она имеет вид

$$I' = I + K \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \theta' = \theta + I'. \quad (1.17)$$

Это отображение цилиндра $(-\infty < I < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi)$ на себя содержит всю информацию о движении системы на больших временах. При $v(\theta) = -\cos \theta$ отображение (1.17) называется *стандартным* и весьма подробно изучено⁴⁵. Модель (1.15) при произвольном периодическом $v(\theta)$ будем называть *ротатором с толчками* (РТ), а при $v(\theta) = -\cos \theta$ — стандартным ротатором с толчками (СРТ).

В модели СРТ при малых $K < K_c = 0,9716$ ⁴⁷ последовательные точки (I_n, θ_n) расположены на охватывающих цилиндр линиях или в узких стохастических слоях; изменения I ограничены по величине — $|I_n - I_0| < 4 K^{1/2}$ при всех n . При $K > K_c$ система переходит в режим глобальной стохастичности, где существует стохастическая компонента, не ограниченная по переменной действия I .

В этом режиме поведение функции распределения $f(I, n)$ для ансамбля систем может быть описано уравнением Фоккера — Планка (¹²⁹, § 6.2; ¹³⁰, § 5.2):

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial I} \left(D(I) \frac{\partial f}{\partial I} \right). \quad (1.18)$$

Для модели СРТ при $K \gg 1$ коэффициент диффузии $D \approx K^2/2$ ⁴⁵; диффузия в пространстве действий приводит к увеличению средней энергии ротора $E = I^2/2$ со временем:

$$\langle E(t) \rangle \approx \frac{K^2 t}{4}. \quad (1.19)$$

Этот вид зависимости $\langle E(t) \rangle$ называется диффузионным ростом.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Для какого вопроса ответом является 9W?

Г. Дж. Морган

Проблема квантового хаоса состоит в определении специфических свойств квантовых систем, классические аналоги которых обладают неустойчивым (стохастическим) движением.

Если классическая система, заданная функцией Гамильтона $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, интегрируема, то квантовую систему с гамильтонианом $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}, t)$ назовем

регулярной. Во многих случаях интегрируемая классическая система и в квантовой механике останется интегрируемой — будет обладать набором N коммутирующих между собой операторов. Однако если классический интеграл движения F содержит члены вида $p_i^\alpha q_i^\beta$, то из-за некоммутативности \hat{p}_i и \hat{q}_i в квантовой механике оператор \hat{F} , построенный по известным правилам из классического интеграла F , может не коммутировать с гамильтонианом. Пример такого рода рассмотрен в ^{94, 114}.

Если классическая система $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ может совершать стохастическое движение (в фазовом пространстве есть области, где максимальный показатель Ляпунова положителен, $\sigma_1 > 0$), то квантовую систему с гамильтонианом $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}, t)$ будем называть хаотической.

Проблема квантового хаоса имеет два основных аспекта: сравнение свойств квантовых хаотических и регулярных систем и сравнение динамики наблюдаемой классической системы и ее квантового аналога.

2.1. Сравнение регулярных и хаотических квантовых систем

Выявление специфики квантовых хаотических систем по сравнению с квантовыми регулярными системами может быть выражено тремя вопросами:

1. Какие свойства отличают квантовую хаотическую систему (КХС) от квантовой регулярной системы (КРС)?

2. Какими параметрами квантового хаоса ξ описываются эти свойства?

3. Как параметры квантового хаоса ξ связаны с параметрами стохастичности σ и μ соответствующей классической системы?

В этом аспекте рассматриваются, главным образом, свойства автономных систем, совершающих финитное движение. Для них указанные вопросы были впервые поставлены в 1973 г. в работах Заславского и Филоненко¹⁹ и Персиваля²¹. Еще раньше, в 1971 г., Пуховым и Чернавским¹⁷ был поставлен вопрос о возможности неустойчивого инфинитного движения в квантовых системах.

Содержательность первого вопроса вызвана невозможностью буквально-го переноса в квантовую теорию классических параметров стохастичности σ и μ : они определены через свойства траекторий системы в фазовом пространстве, не имеющих точного квантового аналога. По сложившейся традиции, каждое положение, устанавливающее различие в свойствах КРС и КХС, называется *критерием квантового хаоса*.

К настоящему времени таких критериев предложено много, но все они применимы только для квазиклассической области, где для стационарных состояний системы ψ_n выполнено неравенство

$$\xi_n = \left(\frac{\hbar^2}{2mE_n a_n^2} \right)^{1/2} \ll 1; \quad (2.1)$$

здесь E_n — энергия состояния, a_n — характерный размер классически доступной области при энергии E_n . В существенно квантовой области, где $\xi_n \sim 1$, стохастичность соответствующей классической системы в свойствах квантовой системы заметным образом не проявляется.

В дальнейшем размерные величины, входящие в классическую функцию Гамильтона, мы будем использовать в качестве единиц измерения. Если независимых масштабов три (как у нелинейных осцилляторов), то система единиц определяется однозначно, и постоянная Планка \hbar становится безразмерным параметром задачи. Для нелинейных осцилляторов с $\hbar \ll 1$ для нижних состояний ($E_n \ll 1$) $\xi_n \sim 1$, а для сильно возбужденных состояний ($E_n \sim 1$) $\xi_n \sim \hbar^{1/N}$, где N — число степеней свободы. Если независимых масштабов в классическом гамильтониане только два (как для бильярдов

и однородных степенных потенциалов⁹, § 10), то в качестве третьего масштаба можно использовать энергию E_n . В этом случае \hbar совпадает с ξ_n и может стать сколь угодно малой.

Второй вопрос — о параметрах квантового хаоса ζ — не тождествен первому, так как далеко не для всех критериев квантового хаоса установлены количественные характеристики. Одни критерии сформулированы полуколичественно (в терминах «большой» — «малый»), другие используют способность читателя к различению регулярных и нерегулярных систем точек и линий. Для некоторых критериев количественные характеристики ζ определены несколькими способами, причем взаимосвязь различных определений не ясна.

Наконец, третий вопрос в настоящее время разработан весьма слабо. Не ясен не только характер связи $\zeta = f(\sigma, \mu)$, но даже и то, какие стохастические характеристики классической системы будут аргументами такого соотношения. Дело в том, что наиболее подробно исследовались свойства нелинейных осцилляторов с двумя степенями свободы. Для таких систем с ростом энергии увеличивается как μ , так и σ (см. рис. 4). Поэтому возрастание силы признака, положенного в основу критерия, с ростом E можно связать с увеличением «степени стохастичности», но нельзя соотнести однозначно с зависимостью от μ или σ . Впрочем, большинство авторов склоняется к тому, что для квантового хаоса важна величина μ , но не σ (см. разделы 3 и 8).

Критерии квантового хаоса для автономных систем можно разделить на 4 группы, в основу которых положены свойства: 1) энергетического спектра; 2) стационарных состояний; 3) операторов, отличных от \hat{H} ; 4) состояний, отличных от стационарных. Именно в этом порядке они будут рассмотрены в разделах 3–6. Предварительно заметим следующее. Любой критерий должен разрешить альтернативу, если выбрать одно из следующих утверждений:

1. Квантовый хаос является свойством одного стационарного состояния.
2. Квантовый хаос является свойством группы близких по энергии стационарных состояний.

Персиваль²¹ предложил первое решение альтернативы, постулировав на основе принципа соответствия существование в КХС стационарных состояний двух типов:

— регулярных (принадлежащих регулярному спектру), связанных с квазипериодическим движением классической системы. Они обладают набором квантовых чисел по числу степеней свободы; для регулярных состояний матричные элементы операторов ограничены правилами отбора;

— нерегулярных (принадлежащих нерегулярному спектру), связанных со стохастическим движением классической системы. Они не обладают определенным набором N квантовых чисел; для нерегулярных состояний нет правил отбора для операторов. Такая схема определила парадигму, в рамках которой шло развитие теории квантового хаоса. Сейчас универсальность такого деления представляется сомнительной: большая часть критериев использует второе решение альтернативы.

2.2. К в а н т о в ы е э ф ф е к т ы в д и н а м и к е н а б л ю д а е м ы х

Поскольку квантовый хаос есть явление, присущее квазиклассической области, у проблемы квантового хаоса есть и другой аспект: сравнение динамики наблюдаемой классической системы и ее квантового аналога при малом, но конечном \hbar .

Для автономных систем качественное отличие в динамике вытекает уже из дискретности энергетического спектра: свойство перемешивания (1.7) и связанная с ним непрерывность спектра мощности $S(\omega)$ для таких систем

отсутствуют по определению. С другой стороны, плотный дискретный спектр $S(\omega)$ можно отличить от непрерывного только наблюдением в течение очень большого времени. Поэтому существует характерное время $\tau(\hbar)$ ($\tau \rightarrow \infty$ при $\hbar \rightarrow 0$) такое, что при $t \ll \tau(\hbar)$ классические и квантовые наблюдаемые близки, а при $t \gtrsim \tau(\hbar)$ между ними возникает существенное отличие. Так, в проблеме квантового хаоса появляются задачи отыскания $\tau(\hbar)$ и определения динамики квантовой системы при $t \gtrsim \tau(\hbar)$.

Еще важнее вопрос о влиянии квантовых эффектов на динамику для неавтономных систем. Для них в классической теории возможны качественно различные типы движения — с ограниченным изменением переменных действия при регулярном и локально стохастическом движении и с неограниченным диффузионным ростом этих переменных при глобально стохастическом движении (см. раздел 1.3.3). Качественные изменения, вносимые в эту картину учетом квантовых эффектов, были обнаружены Казати, Чириковым, Израйлевым и Фордом в 1977 г.⁴⁶ и с тех пор служат предметом активных исследований. Работы этого направления рассматриваются в разделе 7.

2.3. Некоторые приложения

Кто заказывал хаос? Конкретнее: для чего он годится?

М. К. Гутцвиллер

Стохастичность является общим свойством динамических систем, а интегрируемость — редким исключением, связанным с очень высокой симметрией, которую легко разрушить возмущением. Правда, чтобы стохастичность стала заметной, возмущение должно быть достаточно сильным; но это условие ограничивает параметры, а не тип системы. Практически любая квазиклассическая ($\hbar \ll 1$) квантовая система с небольшим числом степеней свободы и известным видом гамильтониана $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}, t)$ может при определенных значениях параметров проявлять признаки квантового хаоса. Наиболее важными реальными примерами таких систем являются:

1. Атомы в сильно возбужденных (ридберговских) состояниях ($n = \hbar^{-1} \sim 100$) в присутствии внешних полей — магнитного^{65,199} или переменного электрического^{142,176,192,213}.

2. Трехатомные молекулы ($\hbar^{-1} \sim 100$). Нелинейные осцилляторы (см. п. 1.3.2), составляющие предмет большинства работ в теории квантового хаоса, рассматриваются с целью описания колебательных спектров молекул в области сильного возбуждения, где существенны ангармонизм колебаний и взаимодействие мод.

Другие примеры включают электроны, скользящие вдоль поверхности металла в магнитном поле¹⁹, атом или группу атомов, взаимодействующих с резонансной модой квантованного электромагнитного поля^{43,149,193}, электроны полупроводников с анизотропным тензором масс в кулоновском поле примеси⁹¹, электроны над поверхностью жидкого гелия в переменном электрическом поле¹⁵⁹, магнитный момент в переменном магнитном поле¹⁸⁹, электроны в слоистых структурах¹⁹⁵. В этих задачах сравнение теории с экспериментом пока не проведено.

3. СВОЙСТВА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА

Использование энергетического спектра для установления критериев квантового хаоса обладает двумя достоинствами. Во-первых, спектр не зависит от выбора представления, а потому критерии свободны от произвола. Во-вторых, спектр доступен экспериментальному определению.

3.1. Чувствительность уровней к возмущениям

В работе Персиваля²¹ было высказано предположение:

A1. Уровни спектра КХС более чувствительны к величине наложенного на систему возмущения, чем уровни спектра КРС. $\#$ *)

Эта гипотеза была проверена в компьютерных экспериментах²⁵. Гамильтониан модели Хенона — Хейлеса (1.12) был записан в виде

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (p_i^2 + q_i^2) + \alpha \left(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 \right) = H_0 + \alpha V \quad (3.1)$$

(в системе, единицами которой являются масштабы классического гамильтониана, $\hbar = \alpha^2$). Вычислялись величины восприимчивости собственных значений $E_n(\alpha)$ к изменениям параметра α :

$$\chi_\alpha(n) = \frac{d^2 E_n}{d\alpha^2}. \quad (3.2)$$

При $\hbar^{-1} = 129$ было обнаружено, что в области энергий $\varepsilon \geq 0,73$, где классическая система обладает заметной стохастичностью ($\bar{\mu} > 0,2$) наряду с малыми значениями χ_α , монотонно продолжающими зависимость от энергии

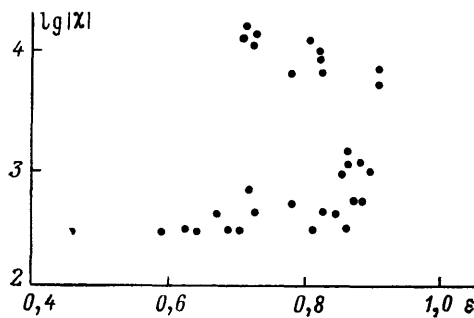


Рис. 5. Зависимость восприимчивости уровней к изменению параметра в гамильтониане χ_α от нормированной энергии уровней $\varepsilon = E/D$ для модели Хенона — Хейлеса²⁵

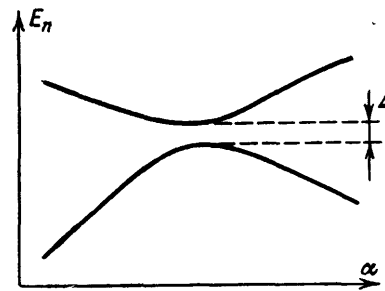


Рис. 6. Квазипересечение уровней энергии при изменении параметра в гамильтониане: Δ — величина расщепления

восприимчивости из области регулярного движения, встречаются и превосходящие их, примерно на порядок большие (по модулю) значения χ_α . Их появление было истолковано как подтверждение критерия A1 (рис. 5).

Величина χ_α может быть вычислена по теории возмущений. Она выражается через матричные элементы V_{nm} оператора \bar{V} между собственными функциями H и значения энергии E_n так:

$$\chi_\alpha(n) = 2 \sum'_m \frac{V_{nm}^2}{E_n - E_m}. \quad (3.3)$$

Сам Персиваль связывал возрастание χ_α с наличием большого числа членов, дающих вклад в сумму (3.3). Подробное исследование системы (3.1) при $\hbar^{-1} = 80$ показало, что на самом деле верно противоположное^{62,75}. Большие значения χ_α возникают за счет и в окрестности квазипересечения уровней (avoided crossing) при изменении α и определяются единственным, аномально большим членом в правой части (3.3) (рис. 6). Результаты этих работ были подвергнуты критике на основе новых компьютерных расчетов для системы (3.1) с $\hbar^{-1} = 138$ ^{80,102}. Однако критика эта представляется неубедительной. Во-первых, ее авторы ограничились изучением первой производной $dE_n/d\alpha$,

*) Здесь и далее знак $\#$ означает конец формулировки критерия.

которая, как видно из рис. 6, вблизи квазипересечения не аномально велика, а, напротив, аномально мала. Во-вторых, точность компьютерных расчетов этих авторов представляется вообще недостаточной для суждения о тонких характеристиках спектра, что было отмечено в ⁸⁷.

Для значений $\hbar^{-1} \sim 100$ значения регулярных («малых») восприимчивостей и положения квазипересечений (но не величины расщеплений Δ_{mn}) могут быть достаточно точно определены в низших порядках теории возмущений ^{77,87}.

Критерий A1 проверялся компьютерными расчетами и для отличных от модели Хенона — Хейлеса систем с двумя ^{76,193} и тремя ^{196,221} степенями свободы. Во всех случаях в области значений энергии, соответствующих стохастическому движению, были обнаружены большие значения χ_α , проявлявшиеся как редкие выбросы над фоном типичных значений.

Критерий A1 разрешает альтернативу раздела 2.1 во втором варианте: квантовый хаос проявляется как свойство группы уровней, ибо большой восприимчивость χ_α становится только по сравнению с соседними малыми значениями.

В качестве параметров, характеризующих чувствительность уровней к величине возмущения, в ¹⁹⁶ предложено использовать статистические характеристики значений χ для уровней из заданного интервала энергий $E_l < E < E_h$ — математическое ожидание модуля восприимчивости $|\bar{\chi}|$ и дисперсию $D\chi = \bar{\chi}^2 - (\bar{\chi})^2$. По утверждению авторов ^{196,221}, большие величины $|\bar{\chi}|$ и $D\chi$ сами по себе не являются признаками квантового хаоса; ими предложено модифицировать критерий A1 так:

A1₁. Чувствительность к возмущению спектров КРС и КХС различается зависимостью от \hbar относительной величины флуктуации восприимчивости в заданном диапазоне энергий:

$$g(E_1, E_2; \hbar) = (D\chi)^{1/2} |\bar{\chi}|^{-1}. \quad (3.4)$$

Эта функция при $\hbar \rightarrow 0$ возрастает для КХС и убывает для КРС. $\#$

Это утверждение проверено пока только для одной модели в области $\hbar^{-1} \lesssim 20$, причем обнаружена зависимость $g(\hbar) \sim \hbar^{-\nu}$. Заметим, что разли-

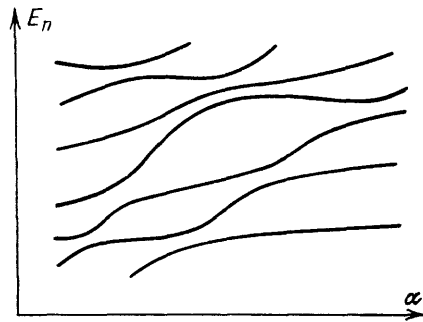


Рис. 7. Картина уровней E_n однопараметрического семейства гамильтонианов $H(\alpha)$ в области перекрывающихся квазипересечений

чие малых и больших восприимчивостей в этом примере является рекордным (превышая три порядка по величине), в то время как значение \hbar остается сравнительно большим. Это заставляет предполагать исключительность рассмотренного примера и сдержанно оценивать общность критерия A1₁.

Наличие больших значений χ в КХС при $\hbar^{-1} \lesssim 100$ несомненно. Однако связь этих значений с классической стохастичностью нельзя считать однозначно установленной. В работе Нойда и др. ⁶¹ было отмечено, что изолированное квазипересечение уровней может иметь своим аналогом не стохастическую компоненту с большим μ , а резонанс — регулярное движение

с соизмеримыми частотами. Связь квазипересечений с классическими резонансами была прослежена в ^{119,122}. Согласно Нойду ⁶¹, отличительной чертой КХС является не наличие квазипересечений, а их высокая плотность:

A1₂. Картина зависимости уровней семейства гамильтонианов $H(\alpha)$ от параметра α обладает изолированными (квази)пересечениями уровней для КРС и перекрывающимися квазипересечениями для КХС (рис. 7). $\#$

Качественно этот критерий подтверждается числовыми расчетами; количественные характеристики для него не установлены. В частности, нет определения ширины квазипересечения по α . Предположенная в ¹²⁷ связь между перекрытием квазипересечений и перекрытием резонансов (приводящим, согласно критерию Чирикова ⁴⁵, к появлению глобальной стохастичности), видимо, не очень глубока. Перекрытие резонансов может наступить при фиксированных параметрах гамильтониана (и изменении, например, энергии), в то время как перекрытие квазипересечений принципиально зависит от переменности α . Далее, ограничением **A1**₂ является то, что он относится не к заданному гамильтониану, а к семейству, и не может ответить на вопрос о степени квантового хаоса для заданного $\hat{H}(\alpha_0)$. Наконец, отметим прямое противоречие **A1**₁ и **A1**₂: для картины перекрывающихся квазипересечений в пределе $\hbar \rightarrow 0$ остается $g(\hbar) \sim 1$.

Правдоподобно, что по мере перекрытия квазипересечений типичное расстояние между соседними уровнями увеличивается (см. следующий раздел 4), в результате чего «большие» восприимчивости уменьшаются. Поэтому с ростом степени стохастичности классической системы величина $|\bar{\chi}|$ для интервала энергий заданной ширины сначала растет, а затем убывает. Такой ход зависимости $|\bar{\chi}|$ от степени стохастичности был указан в ¹⁷⁹; он совместим с данными ²⁵, но требует дополнительного подтверждения.

Таким образом, наиболее вероятно, что возрастание чувствительности собственных значений квантовой системы к величине возмущения в области классической стохастичности является переходным свойством, которое исчезает в квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$. Это лишает **A1** ценности критерия, но не физического интереса. Область $\hbar^{-1} \sim 100$ типична для доступных экспериментально систем. Поэтому аномально большими значениями может обладать и восприимчивость к физически реализуемым возмущениям (например, поляризуемость).

3.2. Статистика энергетического спектра

Основой исследования статистики энергетического спектра квантовых хаотических систем явилась статистическая теория спектров, развитая для описания структуры спектра сложных ядер. Библиография основных работ по статистической теории спектров содержится в обзоре Заславского ⁴³, посвященном статистике энергетического спектра в связи с проблемой квантового хаоса; см. также обзор ⁷². Названная теория исследует свойства распределения собственных значений для матриц со случайными элементами, принадлежащих определенным статистическим ансамблям. В последние годы было установлено, что выводы статистической теории справедливы также для спектров сложных атомов ¹⁰⁸ и трехатомных молекул ¹¹⁰.

Основной предпосылкой применения методов и моделей статистической теории спектров к описанию КХС является представление о сложном, псевдослучайном строении энергетического спектра. Это качественно согласуется и с представлениями, развитыми в разделе 3.1: если положение уровней сложным образом меняется при изменении параметров гамильтониана, то детальное описание системы уровней не представляет физического интереса. Важнее оказываются устойчивые усредненные характеристики системы уровней. Таким образом, исследование статистики энергетического спектра использует второе решение альтернативы, трактуя квантовый хаос как свойство группы состояний.

3.2.1. Распределение междууровневых расстояний

Простейшей характеристикой структуры энергетического спектра является функция распределения относительной величины междууровневых расстояний S_n :

$$S_n = (E_n - E_{n-1}) \rho(E_n), \quad (3.5)$$

где $\rho(E)$ — плотность уровней. Предполагается, что $\rho(E)$ мало меняется на расстояниях порядка междуровневого: $d \ln \rho(E)/dE \ll 1$; это условие выполняется в квазиклассическом случае. Функция распределения $P(S)$ случайной величины S нормирована условиями

$$\int_0^{\infty} P(S) dS = 1, \quad \int_0^{\infty} S P(S) dS = 1. \quad (3.6)$$

Если положение уровней не коррелировано, то $P(S)$ дается распределением Пуассона

$$P_P(S) = \exp(-S). \quad (3.7)$$

В этом случае при $S \rightarrow 0$ предел $P(S) \neq 0$; такое поведение $P(S)$ называют группировкой уровней.

Для гамильтонианов со случайными матричными элементами H_{ij} вероятность найти два близких уровня ($S \ll 1$) мала вместе с S . Происхождение

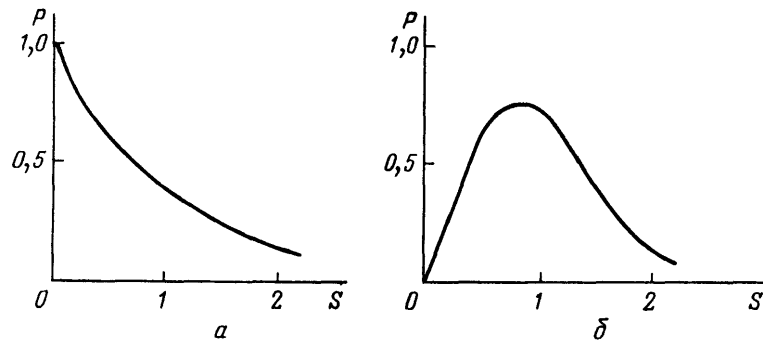


Рис. 8. Предельные формы распределения междуровневых расстояний $P(S)$: распределения Пуассона (а) и Вигнера (б)

этого *отталкивания уровней* понятно из простейшего примера с гамильтонианом \hat{H} — матрицей второго порядка. Расстояние Δ между уровнями такого гамильтониана определяется формулой $\Delta^2 = (H_{11} - H_{22})^2 + 4 |H_{12}|^2$. Если система инвариантна при обращении времени, то можно выбрать базис, в котором матрица \hat{H} вещественна: $H_{12} = H_{21}$. Тогда распределение Δ будет определяться статистическими свойствами переменных $z_1 = H_{12}$ и $z_2 = (H_{11} - H_{22})/2$. Если считать z_i независимыми случайными величинами, у которых плотность распределения вероятностей $W_i(z)$ при $z \rightarrow 0$ отлична от нуля: $W_i(0) \neq 0$, то при $\Delta \rightarrow 0$ получается $P(\Delta) \sim \Delta$. Если считать z_i нормально распределенными величинами с одинаковыми дисперсиями, то нормированное расстояние между уровнями $S = \Delta/\bar{\Delta}$ (где $\bar{\Delta}$ — среднее расстояние между уровнями) имеет распределение Вигнера (рис. 8)

$$P_W(S) = \frac{\pi}{2} S \exp\left(-\frac{\pi}{4} S^2\right). \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) хорошо описывает свойства серий уровней сложных систем с фиксированными точными интегралами движения (в случае атомов и ядер — полным угловым моментом J и четностью π).

Центральное место в статистической теории спектров занимает понятие об ансамбле матриц — гамильтонианов, обладающих статистически независимыми компонентами, статистические свойства которых остаются инвариантными при произвольных преобразованиях, совместимых с дискретными симметриями гамильтониана. Для моделей, упомянутых в разделе 1, описывающих движение бесспиновых частиц в отсутствие магнитного поля, гамиль-

тониан инвариантен при обращении времени. Такому классу систем ставится в соответствие ансамбль вещественных симметричных матриц, инвариантный при произвольных ортогональных преобразованиях, — *гауссов ортогональный ансамбль* (ГОА).

Хотя распределение $P(S)$ для ГОА формально отличается от распределения Вигнера¹², но отличие это количественно мало и при современных объемах данных может игнорироваться. Как показано в¹²⁰, для надежного различения этих распределений нужен массив из $\mathcal{N} \sim 10^5$ уровней, в то время как сейчас для КХС доступны серии из нескольких сотен уровней. Однако модель ГОА позволяет установить кроме $P(S)$ и другие характеристики спектра (см. разделы 3.2.2 и 3.2.3).

Впервые вопрос о свойствах распределения междууровневых интервалов для квантовых хаотических систем был поставлен в работе Заславского и Филоненко¹⁹, где была предложена зависимость $P(S)$ от колмогоровской энтропии h модельной системы, позже обобщенная в³¹ на случай произвольных квазиклассических стохастических систем. Мы не останавливаемся на этих работах по двум причинам. Во-первых, теория Заславского изложена в литературе подробно и неоднократно:^{31,43,81,129}. Во-вторых, предложенная зависимость (при $S \rightarrow 0$ $P(S) \sim S^\nu$, где $\nu \sim h^{-1}$) не нашла подтверждения в численных расчетах. Заметим, что вопрос о зависимости свойств спектров КХГ от степени неустойчивости классической системы (т.е. от σ_1 или h) сейчас не вполне ясен (см. п. 8.3).

Результаты численного исследования распределения $P(S)$ для спектров разнообразных квантовых систем, инвариантных при обращении времени, совместимы (по крайней мере, полуколичественно) с критерием

A2. Распределение междууровневых интервалов $P(S)$: а) для интегрируемых систем общего вида в квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ является пуассоновским, (3.7); б) для сильно стохастических систем ($\mu \approx 1$) является вигнеровским, (3.8). $\#$

Положение A2-а было выдвинуто Берри и Табором, подтверждено численными расчетами (для двух моделей) и обосновано рассмотрением квазиклассического квантования³⁵.

Качественно наличие группировки уровней для интегрируемых систем подтверждается большинством работ. Количественно сходимость $P(S)$ к пуассоновскому распределению может быть довольно медленной. Так, численные расчеты для прямоугольного бильярда показали, что и при числе уровней $\mathcal{N} \sim 10^5$ в поведении $P(S)$ при $S < 0,1$ имеются статистически значимые отклонения от (3.7)¹⁸⁰, которые ослабевают с дальнейшим ростом \mathcal{N} и становятся пренебрежимыми при $\mathcal{N} \approx 2,5 \cdot 10^6$ ¹⁸⁶. Такой медленный выход на асимптотику, видимо, специфичен для прямоугольного бильярда²²⁶. Обнаруженные для некоторых интегрируемых²⁰⁴ и близких к интегрируемым¹⁹³ систем значительные отклонения $P(S)$ от пуассоновского распределения, вероятно, можно объяснить малой степенью квазиклассичности соответствующих моделей.

К системам общего вида не принадлежат многомерные гармонические осцилляторы, у которых из-за эквидистантности спектра парциальных колебаний возникает эффективное отталкивание уровней, зависящее от арифметических свойств отношения частот. Характер $P(S)$ в таких системах исследовался в^{35,198}.

Положение A2-б было выдвинуто в работе Казати и др.⁵⁵. Оно подтверждено численными расчетами для эргодических систем — бильярда «стадион»^{50,55} и бильярда Синая^{71,139}. Результаты показывают сходство $P(S)$ с распределением Вигнера; особенно хорошее согласие получено в¹³⁹. Такой же вид имеет $P(S)$ для псевдоинтегрируемых⁷⁸ и близких к ним бильярдов — многоугольников. Сильное отталкивание уровней наблюдалось во многих случаях и для нелинейных осцилляторов. Наиболее распространенной моделью для исследования статистических свойств энергетиче-

ского спектра стала модель Паллена — Эдмондса — два гармонических осциллятора со связью потенциалом 4-го порядка (1.14) ^{153,161,174,203} и ее обобщения, включающие в потенциал члены типа q_1^4 и q_2^4 . ^{184,200,232} В некоторых работах авторы ограничились констатацией факта отталкивания уровней: ^{160,185,203}. Подходы к количественному описанию отталкивания рассмотрены ниже.

Для ряда систем при изменении параметров происходит изменение движения от почти регулярного ($\mu \approx 0$) до почти эргодического ($\mu \approx 1$). При таком изменении вид $P(S)$ должен непрерывно переходить от пуассоновского распределения к вигнеровскому. Для интерполяции перехода предложено несколько способов. Хронологически первым был критерий

A2₁. Распределение $P(S)$ для квантовой хаотической системы может быть описано распределением Броди ²⁰

$$P_B(\beta; S) = AS^\beta \exp(-BS^{1+\beta}), \quad (3.9)$$

причем $\beta \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и $\beta \approx 1$ при $\mu \approx 1$. \ddagger

Константы A и B , входящие в (3.9), определяются условиями нормировки (3.6):

$$A = (1 + \beta) B, \quad B = \Gamma^{1+\beta} \left(\frac{2+\beta}{1+\beta} \right), \quad (3.10)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. При $\beta = 0$ распределение Броди совпадает с пуассоновским, а при $\beta = 1$ — с вигнеровским. Распределение Броди

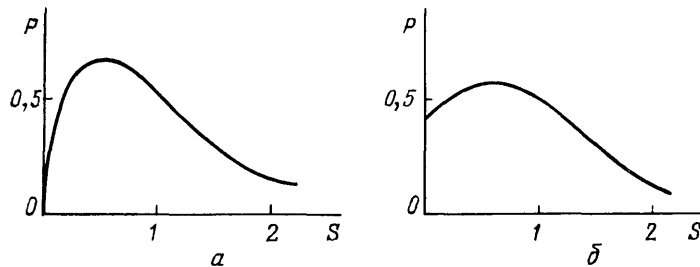


Рис. 9. Интерполяционные формы распределения междууровневых расстояний $P(S)$. a — Распределение Броди при $\beta = 0,5$. b — Распределение Берри — Робника P_2 при $\mu_q = 0,25$

для описания статистики междууровневых интервалов в КХС было введено в ^{86,110} (рис. 9). Естественное допущение о монотонной зависимости $\beta(\mu)$ согласуется с результатами расчетов ^{153,205}, но универсальность связи $\beta(\mu)$ сомнительна (см. раздел 8) (рис. 10).

Другой способ интерполяции был предложен в ^{135,174}:

A2₂. Распределение $P(S)$ для квантовой хаотической системы дается выражением $P_M(S)$, зависящим от значений мер μ_i для всех M компонент регулярного и стохастического движений при данной энергии. \ddagger

При выводе выражения для $P_M(S)$ используются три постулата: 1) плотность уровней $\rho(E)$ представляет суперпозицию парциальных плотностей $\rho_i(E)$ для всех областей регулярного и стохастического движения,

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^M \rho_i(E), \quad (3.11)$$

где M — число таких областей, причем $\rho_i \sim \mu_i$, где μ_i — мера области фазового пространства, соответствующая данной компоненте; 2) положение уровней, принадлежащих различным компонентам $\rho_i(E)$, не коррелировано; 3) в стохастических компонентах $P(S)$ дается распределением Вигнера, а в регулярных — распределением Пуассона.

Из этих постулатов в предположении о наличии одной только области регулярного движения с мерой μ_r следует выражение для $P_M(S)$:

$$P_M(S) = \frac{d^2}{dS^2} \left(e^{-\mu_r S} \prod_{i=2}^M \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \mu_i S \right) \right), \quad (3.12)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt. \quad (3.13)$$

Положение $A2_2$ допускает возможность количественной проверки. Такая проверка, проведенная для разных моделей в работах^{161,191,200}, показала,

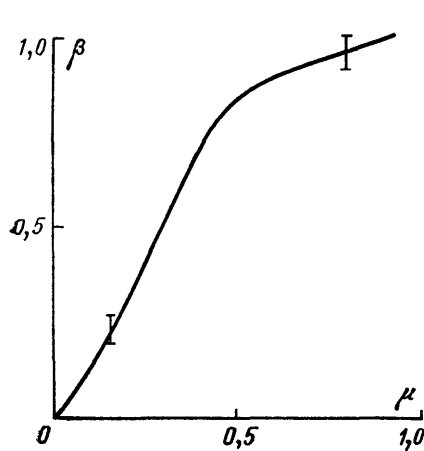


Рис. 10. Зависимость параметра Броди β от меры стохастической компоненты μ для модели Падлена — Эдмондса (сглаженная)^{153,161}.
Вертикальным отрезком указана величина ошибки

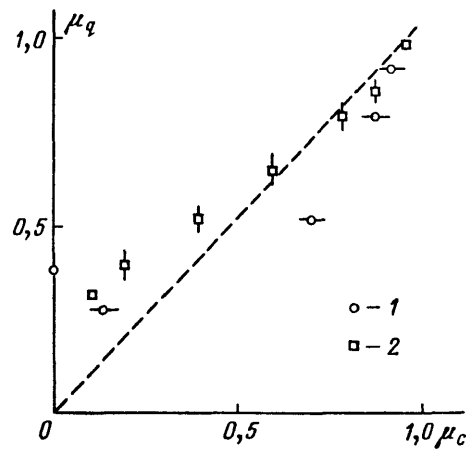


Рис. 11. Зависимость параметра μ_q , найденного из подгонки $P(S)$ распределением Берри — Робника P_2 , от меры стохастической компоненты μ_c .
1 — для овального бильярда¹⁹¹, 2 — для нелинейного осциллятора⁸³

что величина μ_q меры (единственной) стохастической компоненты, полученная из наилучшей подгонки $P(S)$ распределением $P_2(S)$, отличается от μ_c , найденной числовыми расчетами для классической системы, причем различие особенно велико при малых μ_c (рис. 11). Таким образом, для изученных моделей критерий $A2_2$ справедлив только полуквантитативно. Ограниченная точность может быть связана с недостаточной квазиклассичностью рассмотренных систем²³². С другой стороны, могло сказаться то, что в^{161,191} в качестве μ рассматривалась суммарная мера стохастических компонент без анализа возможности разделения стохастической области на несколько компонент.

Предпринимались попытки теоретически описать эффект отталкивания уровней, используя изоморфизм между поведением уровней системы с гамильтонианом $H = H_0 + \varepsilon V$ при изменении ε и динамикой (со временем $t \equiv \varepsilon$) одномерного газа классических частиц, взаимодействующих зависящим от времени потенциалом отталкивания^{120,163,208,231}. Хотя авторам этих работ удалось путем различных допущений приблизить исходную задачу к задаче о термодинамическом равновесии одномерного «кулоновского» газа, которая эквивалентна модели ГОА¹², и декларировать на этом основании вигнеровский вид $P(S)$ при достаточно больших ε , однако использованная процедура представляется не очень убедительной. В^{120,163} свойства матричных элементов возмущения \hat{V} постулировались, а в^{208,231} они не конкретизировались

вообще, из-за чего результаты оказываются применимы и к интегрируемым системам. В настоящее время теоретические расчеты $P(S)$ для конкретного вида гамильтониана, допускающие сравнение с числовыми расчетами, не проделаны.

3.2.2. Спектральная жесткость

Характеристикой степени упорядоченности уровней в спектре на больших по сравнению с междуровневым расстоянием масштабах является спектральная жесткость $\Delta_3(L)$, которая определяется ниже.

Для последовательности уровней ε_n , нормированных на единичную плотность ($\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + S_n$), вводится ступенчатая функция $n(\varepsilon)$, равная числу уровней с $\varepsilon_n \leq \varepsilon$. По построению $n(\varepsilon)$ имеет вид лестницы с единичным в среднем наклоном. Функция $\Delta_3(x, L)$ определяется как минимум квадратичного отклонения $n(\varepsilon)$ на интервале $(x, x+L)$ от прямой линии:

$$\Delta_3(x, L) = \frac{1}{L} \min_{A, B} \int_x^{x+L} (n(\varepsilon) - A\varepsilon - B)^2 d\varepsilon. \quad (3.14)$$

Значение $\langle \Delta_3(x, L) \rangle_x$, усредненное по значениям x из области, в которой характер флуктуации спектра можно считать неизменным, зависит только от L и обозначается $\Delta_3(L)$.

Функция $\Delta_3(L)$ описывает упорядоченность спектра на больших участках: чем медленнее растет $\Delta_3(L)$ с ростом L , тем менее вероятны в спектре

тесные кластеры уровней и лакуны с пониженной плотностью уровней. Для эквидистантной последовательности уровней $\Delta_3(L) = 1/12$. Для случайно распределенных, некоррелированных уровней (рис. 12)

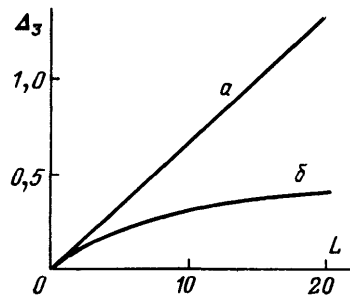
$$\Delta_3(L) = \frac{L}{15}. \quad (3.15)$$

Для гауссова ортогонального ансамбля $\Delta_3(L)$ при $L \gg 1$ имеет асимптотический вид

$$\Delta_3(L) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln L - 0,00687. \quad (3.16)$$

Рис. 12. Вид функции спектральной жесткости $\Delta_3(L)$.

a — Для регулярной системы. b — Для гамильтониана, принадлежащего ГОА



Использование $\Delta_3(L)$ в качестве характеристики КХС было впервые предложено в ¹¹⁰. Соответствующий критерий таков:

А3. Спектральная жесткость $\Delta_3(L)$: а) для интегрируемых систем имеет вид (3.15), свойственный последовательности некоррелированных уровней; б) для сильно стохастических ($\mu \approx 1$) КХС описывается выражением (3.16), свойственным матрицам ГОА. $\#$

Характер установления зависимости (3.15) с ростом L для интегрируемых систем был исследован в работах ^{180,186}. Для хаотических систем с $\mu \approx 1$ — бильярда Синая ¹³⁹ и нелинейного осциллятора ¹¹⁰ — было найдено хорошее согласие с выражением (3.16).

Переход между предельными формами спектральной жесткости был исследован в работах ^{168,202}, для чего был введен новый способ параметризации статистики спектра в промежуточных случаях, использующий модель ГОА в качестве отправного пункта. Матрицам \hat{X} , принадлежащим ГОА и обладающим матричными элементами X_{ij} , сопоставляются матрицы $\hat{Y}(a, k)$ с элементами

$$Y_{ij} = X_{ij} \exp \left[- \left(\frac{|i-j|}{a} \right)^k \right], \quad (3.17)$$

где a, k — параметры. При $a \rightarrow 0$ ансамбль $\{\hat{Y}\}$ превращается в набор диагональных матриц со случайными элементами и пуассоновской статистикой спектра; при $a \rightarrow \infty$ ансамбль $\{\hat{Y}\}$ совпадает с ГОА. Расчеты^{168,202} показывают, что значения a , полученные подгонкой $\Delta_3(L)$ к результатам числовых расчетов, приводят к хорошему согласию гистограмм $P(S)$ с распределением $P_{\text{Г}}(S)$, вычисленным для матриц \hat{Y} с тем же a (в исследованных случаях $3,5 \leq a \leq 7,5$ и $k = 2$; изменение k заметно не влияло на результаты). Это дает критерий

A2₃ — A3₁. Спектральные свойства КХС — распределение междууровневых интервалов $P(S)$ и спектральная жесткость $\Delta_3(L)$ — совпадают со свойствами спектров ансамбля матриц $\{\hat{Y}\}$, причем $a \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и $a \rightarrow \infty$ при $\mu \approx 1$. #

Конкретный вид зависимости $a(\mu)$ для этого критерия не определялся. Другой способ параметризации перехода спектральной жесткости между предельными формами, основанный на предпосылках критерия A2₂, был введен в²⁰⁰. Полученная таким способом функция $\Delta_3(L)$ при $L \leq 25$ совпадает с результатами числовых расчетов с относительной ошибкой $\delta\Delta_3 \leq 0,05$.

3.2.3. Корреляции междууровневых интервалов

Еще один набор параметров, характеризующих структуру энергетического спектра, дается коэффициентами корреляции $C(n)$ величин энергетических интервалов, разделенных фиксированным числом уровней:

$$C(n) = \frac{\sum_i (S_{i+n} - 1)(S_i - 1)}{[\sum_i (S_{i+n} - 1)^2 \sum_i (S_i - 1)^2]^{1/2}}. \quad (3.18)$$

Простейшая из этого набора — величина $C(1)$: неравенство $C(1) < 0$ означает тенденцию соседних интервалов быть последовательно больше и меньше среднего, а $C(1) > 0$ означает, что величина соседних интервалов отклоняется от средней преимущественно в одном направлении. Для матриц ГОА $C(1) = -0,271$. Подсчеты для КХС дали: $-0,14 \geq C(1) \geq -0,32$ ¹¹⁰ и $C(1) \approx -0,30$ ¹³⁹. Хотя отсутствие корреляций для интегрируемых систем не исследовалось, по аналогии с A2 и A3 естественно допустить критерий.

A4. Коэффициент корреляции соседних междууровневых интервалов $C(1)$: а) для интегрируемых систем равен нулю; б) для сильно стохастических ($\mu \approx 1$) КХС совпадает со значением для спектров ГОА: $C(1) = -0,271$. #

Характер перехода $C(1)$ между предельными значениями не исследован.

В работе¹⁵⁶ предложено использовать для анализа структуры спектра график $y(x)$, изображающий точки с координатами $x_n = \Delta_n$, $y_n = \Delta_{n+1}$, где $\Delta_n = E_{n+1} - E_n$ *). Предполагалось, что

A4₁. График зависимости $\Delta_{n+1}(\Delta_n)$ представляет регулярное расположение точек для спектров интегрируемых систем и случайное распределение — для спектров КХС. #

Этот подход был опровергнут работами^{134,147}, где на разных примерах была продемонстрирована неупорядоченность графика для полностью интегрируемых систем. Однако заметим, что такой график (при соответствующей нормировке) содержит всю информацию, использованную в критерии A4.

*) В качестве курьеза отметим применение таких графиков в искусствоведении для анализа музыкальных произведений; в качестве Δ_n берется частотный интервал между последовательными нотами²³³. Для произведений Баха график выглядит хаотическим.

3.2.4. Системы, не инвариантные при обращении времени

Все примеры, рассмотренные в разделах 3.2.1—3, относились к случаю, когда гамильтониан был инвариантен при обращении времени. Системам, не обладающим такой инвариантностью, в статистической теории спектров сопоставляется гауссов унитарный ансамбль (ГУА) гамильтонианов — ансамбль эрмитовых матриц с независимыми элементами, статистические свойства которых остаются инвариантными при произвольных унитарных преобразованиях. Распределение междууровневых интервалов для ГУА $P_U(S)$ дается (приближенно) выражением

$$P_U(S) \approx \frac{32}{\pi^2} S^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} S^2\right), \quad (3.19)$$

а спектральная жесткость при $L \gg 1$ имеет асимптотику

$$\Delta_3(L) \approx \frac{1}{2\pi^2} \ln L + 0.058. \quad (3.20)$$

В работе ²⁰¹ для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_1 - a q_2^3)^2 + \frac{1}{2} (p_2 + a q_1^3)^2 + \alpha_1 q_1^6 + \alpha_2 q_2^6 - \alpha_{12} (q_1 - q_2)^6 \quad (3.21)$$

было показано, что в области значений параметров, соответствующих сильно стохастическому движению ($\mu = 0,98 \pm 0,02$), статистика спектра может обладать свойствами как ГОА (при $\alpha_{12} = 0$, когда гамильтониан допускает представление в виде действительных симметричных матриц), так и ГУА (при $\alpha_{12} \neq 0$).

Условия перехода статистики спектра от ГОА к ГУА при нарушении инвариантности гамильтониана при обращении времени исследованы в работе ²¹⁰ для сильно стохастического бильярда, пронизанного нитью, несущей магнитный поток Φ . Преимуществом такой модели является независимость классической динамики от величины потока, в то время как спектр и волновые функции квантовой системы зависят от Φ (эффект Ааронова — Бома). Показано, что статистика нижних уровней с номерами $n \ll \mathcal{N}_0 = 0,44 (e\Phi/\hbar c)^{-4}$ (e — заряд электрона, c — скорость света) сохраняет характер ГОА, но переходит в статистику ГУА с дальнейшим ростом n .

Типы статистики спектра при наличии у системы комбинированных симметрий, включающих операцию обращения времени в качестве одного из элементов, рассматривались в ²²⁴.

4. СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

В предыдущем разделе показано, что свойства спектров гамильтонианов квантовых хаотических систем схожи со спектральными свойствами определенных классов случайных матриц. Поэтому и для волновых функций *) стационарных состояний таких систем естественно ожидать проявления свойств случайности — в противоположность регулярным свойствам ВФ интегрируемых систем. Выбор ВФ стационарного состояния в качестве объекта исследования предопределяет первое решение альтернативы раздела 2.1: понятие квантовой хаотичности относится к одному состоянию.

В отличие от спектра, вид ВФ зависит от базиса, в котором она определяется. Наиболее важными для проблемы квантового хаоса являются следующие два представления:

1. Во многих задачах гамильтониан имеет вид $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где \hat{H}_0 — гамильтониан интегрируемой системы. Для таких систем естественно исполь-

*) Далее используются аббревиатуры: ВФ — волновая функция, СФ — собственная функция.

зовать (счетный) базис $\{\varphi\}$ — полную (ортонормированную) систему СФ гамильтониана \hat{H}_0 и исследовать свойства коэффициентов a_{nm} в разложении ψ — нормированной СФ гамильтониана \hat{H} :

$$\psi_n = \sum_m a_{nm} \varphi_m. \quad (4.1)$$

Мы будем называть эту форму ВФ H_0 -представлением.

2. Координатное представление — так как в нем поведение $\psi(\mathbf{q})$ допускает наглядное сопоставление с картиной орбит классического движения частицы в координатном пространстве¹⁵⁷.

Кроме названных представлений в проблеме квантового хаоса используется описание состояний с помощью функции Вигнера $W(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ^{1,104}. Последняя обладает рядом свойств, общих с классической функцией распределения $W_c(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ в фазовом пространстве. Сходство W и W_c было указано в³⁴ и подтверждено числовыми расчетами в^{59, 229}. Такое сходство при $\hbar \rightarrow 0$ естественно следует из принципа соответствия. В частности, доказано¹⁹⁰, что в пределе $\hbar \rightarrow 0$ СФ гамильтониана локализованы в областях фазового пространства, содержащих инвариантные множества — поверхности регулярного движения или стохастические компоненты.

4.1. Свойства ВФ в H_0 -представлении

Впервые свойства ВФ квантовых хаотических систем в H_0 -представлении были исследованы в работе Нордхольма и Райса²⁴. Для нескольких нелинейных осцилляторов (в том числе для модели Хенона — Хейлеса) численно были определены коэффициенты разложения ВФ стационарных состояний $\psi_n(q_1, q_2)$ по базису $|kl\rangle = \varphi_k(q_1) \varphi_l(q_2)$, где $\varphi_m(q)$ — ВФ m -го уровня гармонического осциллятора:

$$\psi_n(q_1, q_2) = \sum a_{n; kl} \varphi_k(q_1) \varphi_l(q_2). \quad (4.2)$$

В качестве характеристики свойств набора коэффициентов $\{a\}$ использовалась степень *распределенности* ψ между разными базисными функциями, ранжированная качественно от локальности (только один из коэффициентов a велик) до глобальности (все коэффициенты a из области квантовых чисел $k + l = \text{const}$ имеют одинаковый порядок величины) (рис. 13). Расчеты позволили сформулировать критерий

В1. Вместе со степенью стохастичности классического движения в среднем возрастает степень распределенности ВФ соответствующей КХС. \neq

В²⁴ параметры, количественно определяющие степень распределенности ВФ, введены не были. Такие параметры можно заимствовать из теории неупорядоченных систем в физике твердого тела — например, отношение участия¹⁵

$$P_n = \sum_m |a_{nm}|^4 \quad (4.3)$$

или энтропию⁶⁴

$$S_n = - \sum_m |a_{nm}|^2 \ln |a_{nm}|^2. \quad (4.4)$$

Близкий подход — описание степени распределенности ψ энтропией, вычисленной в базисе когерентных состояний — был использован в¹³³. Сложность

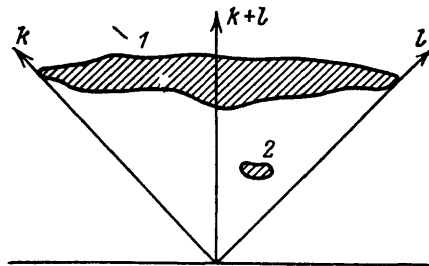


Рис. 13. К определению распределенности волновой функции ψ . Заштрихованы области квантовых чисел k и l , дающих существенный вклад в ψ . 1 — глобальное состояние; 2 — локальное состояние

C_n состояния ψ_n — эффективное число состояний базиса, образующих ψ_n , можно определить как $C_n = P_n^{-1}$ или как $C_n = \exp S_n$. Хотя большая величина C и не дает достаточного условия квантовой хаотичности, она является важной характеристикой ψ в данном базисе.

Один из подходов к исследованию степени распределенности СФ системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_1(p_1, q_1) + \hat{H}_2(p_2, q_2) + \hat{V}(q_1, q_2) \quad (4.5)$$

основан на превращении стационарных состояний \hat{H}_1 в нестабильные квазистационарные и выяснение зависимости скорости Γ распада состояния ψ_n от энергии E_n . Если $\Gamma(E)$, вычисленная для квазистационарных состояний

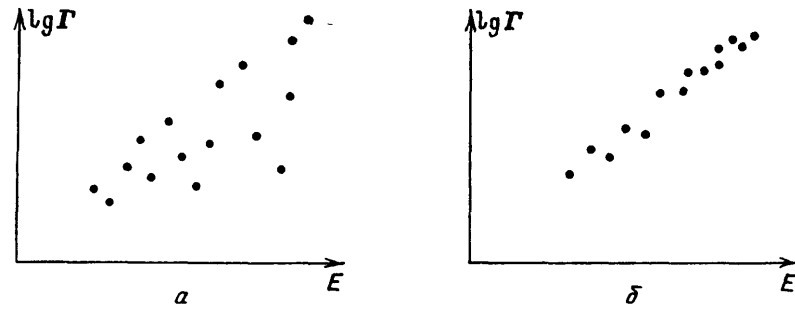


Рис. 14. Качественный вид зависимости скорости распада квазистационарного состояния Γ от энергии E .

a — При наличии модовой специфичности (СФ \hat{H} сильно различаются по своему составу). b — В отсутствие модовой специфичности (все состояния глобальные)

H , будет монотонной функцией, то это — признак глобальности состояний в рассматриваемой области (рис. 14). Напротив, значительная немонотонность $\Gamma(E)$ указывает на сильное различие состояний по степени концентрации энергии в данном парциальном осцилляторе (модовая селективность).

Расчеты зависимости $\Gamma(E)$ для разных моделей^{63,77} показали, что при изменении константы связи осцилляторов происходит переход от локального к глобальному поведению ВФ одновременно во всей области энергий. Наличие и положение области перехода системы к заметной классической стохастичности не играет роли в поведении $\Gamma(E)$. Аналогичный подход был использован в работе¹⁰¹, где рассматривалась система Хенона — Хейлеса с добавленным в гамильтониан членом, описывающим необратимые переходы в континуум под действием постоянного возмущения. Основным вывод из числовых расчетов — время распада Γ^{-1} увеличивается с ростом E приблизительно экспоненциально, не испытывая никаких аномалий при переходе к заметной стохастичности в окрестности $\varepsilon = 0,6$. Дальнейшие исследования показали, что в зависимости от выбора \hat{H}_0 скорость распада локальных состояний может быть как меньше, так и больше скорости распада глобальных состояний¹⁰⁵. Поэтому зависимость $\Gamma(E)$ не очень удобна для определения степени распределенности ψ .

Итог выполненных исследований — отсутствие причинной связи между стохастическим поведением и распределенностью ВФ в \hat{H}_0 -представлении: глобальность выступает как необходимое, но не достаточное условие квантовой хаотичности. Это понятно: глобальность ВФ свидетельствует лишь о том, что СФ \hat{H} и \hat{H}_0 непохожи, а этого можно добиться и для интегрируемых систем. Для примера возьмем в качестве \hat{H} и \hat{H}_0 гамильтонианы линейных осцилляторов, различающихся частотами, направлениями нормальных колебаний и положениями равновесия (смещенные осцилляторы).

Близким к **B1** является предложенный в ⁵¹ критерий, исследующий распределенность ψ в базисе естественных орбиталей, — при выборе функций $\varphi_m(q_i)$ в разложении (4.2) такими, чтобы обеспечивалась быстрая сходимость разложения. Это требование приводит к диагональному представлению

$$\psi(q_1, q_2) = \sum_m w_m^{1/2} \theta_m(q_1) \varphi_m(q_2), \quad (4.6)$$

для которого устанавливается положение

B1₁. В разложении **СФ** ψ по естественным орбиталам (4.6) последовательность w_m при переходе от регулярного к стохастическому движению классической системы становится сходящейся медленнее — $C(\psi)$ возрастает. $\#$

Критерий **B1₁** подтвержден числовым расчетом. Этот подход преодолевает контрпример смещенных осцилляторов. Однако последовательность w_m не универсальна, а зависит от переменных q_i , в которых описывается система. Переход, скажем, от декартовых к полярным координатам изменит w_m , а следовательно, и степень квантовой хаотичности данного состояния.

Предположение, что для квантового хаоса важно не отличие от нуля большого числа коэффициентов a_{nm} , а их псевдослучайное поведение, конкретнее —

B2. Для волновой функции ψ_n хаотического состояния коэффициенты a_{nm} являются случайными, распределенными по нормальному закону величинами. $\#$

— выдвинуто в работе ⁸⁶, где для нелинейного осциллятора было численно исследовано статистическое поведение a_{nm} . Отмечено удовлетворительное согласие их распределения $W(a)$ с нормальным в условиях, когда классическое движение близко к эргодическому.

Близость распределения $W(a)$ к гауссову тоже не может быть достаточным условием квантового хаоса, так как она возможна и для интегрируемых систем (пример: пусть H_0 и H — гамильтонианы одномерных линейных осцилляторов со смещенными положениями равновесия). Однако псевдослучайность a_{nm} в области сильной стохастичности, видимо, имеет место.

В работе ⁹⁸² показано, что вычисленные в предположении нормального распределения случайных коэффициентов a_{nm} значения максимальных коэффициентов $w_1 = \max(|a_{nm}|^2)$ для группы близких состояний при известном C находятся в согласии с количественными расчетами для одной серии уровней сложной системы (серия $J^\pi = 1^+$ нейтрального атома Се). Заметим, что в таком подходе изучаются свойства группы состояний, образующих ансамбль, в котором вычисляется распределение w_1 , а следовательно, используется второе решение альтернативы. К сожалению, рассмотренная квантовая система не имеет простого классического аналога.

Вопрос о переходе от регулярного к стохастическому движению квантовой системы с целью выделения условий «квантовой интегрируемости» рассматривался для гамильтонианов вида $H = H_0 + V$ в работах ^{96,112,158}. По мнению этих авторов, критерий хаотичности может быть основан на величине квадрата максимального скалярного произведения невозмущенной и возмущенной ВФ, $\eta_n = \max |\langle \psi_n | \varphi_m \rangle|^2$.

B3. Для регулярных состояний КХС $\eta_n > 1/2$, а для хаотических состояний $\eta_n < 1/2$. $\#$

По существу, критерий **B3** устанавливает количественную границу между локальными и глобальными состояниями. Выполнение условия

$$\eta_n > \frac{1}{2} \quad (4.7)$$

обеспечивает возможность однозначно приписать состоянию возмущенной системы N квантовых чисел и сходимость итерационных решений теории возмущений Бриллюэна — Вигнера для ψ и E ¹¹³.

Постулированный в ВЗ пороговый характер возникновения квантового хаоса для данного состояния представляется сомнительным: в ¹¹⁸ было отмечено, что при изменении η от 0,51 до 0,49 в системе H не происходит никаких качественных изменений физических свойств. Критерий ВЗ представляется неадекватным еще по двум причинам: 1) условие (4.7) может нарушаться для многих состояний, а система будет оставаться интегрируемой (пример — те же осцилляторы H_0 и H со смещенными положениями равновесия); 2) условие (4.7) может выполняться случайно и в том случае, когда классическая система сильно стохастична ¹¹². Даже для случайных a_{nm} при не очень сложных ψ_n ($C_n \lesssim 10$) имеется заметная вероятность выполнения условия (4.7).

Таким образом, характер связи коэффициентов a_{nm} , описывающих ВФ в H_0 -представлении, с параметрами классической стохастичности не установлен. Рост сложности C необходим, но не достаточен для возможности классифицировать состояние как хаотическое, а ввести объективное определение степени случайности набора чисел $\{a_{nm}\}$ не удалось.

4.2. Свойства ВФ в координатном представлении

4.2.1 Интегральные свойства ВФ

Различие свойств регулярных и хаотических состояний для ВФ в координатном представлении $\psi(\mathbf{q})$ было впервые отмечено Берри ³³ на основе полуклассического подхода. Из рассмотрения регулярного квантового состояния как аналога классического движения на N -мерном торе получен вывод

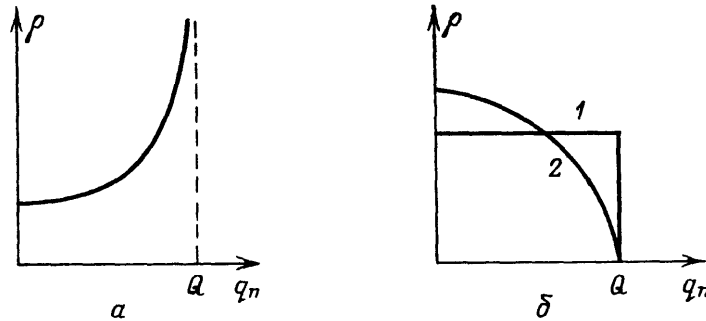


Рис. 15. Поведение $\rho(\mathbf{q})$ вблизи границы Q классически доступной области, q_n — расстояние по нормали к границе. *a* — Для регулярного состояния. *б* — Для эргодического состояния; 1 — при $N = 2$; 2 — при $N = 3$

о сингулярном (в пределе $\hbar \rightarrow 0$) поведении $\psi(\mathbf{q})$ вблизи каустик — границ области классического движения в координатном пространстве. Согласно ¹⁰⁷ интегралы

$$I_m = \int |\psi(\mathbf{q})|^{2m} d\mathbf{q} \quad (4.8)$$

(m — целое) при $m \geq 2$ для регулярных состояний неограниченно растут при $\hbar \rightarrow 0$. Напротив, для хаотических состояний в условиях, соответствующих эргодическому классическому движению, при котором классическая плотность $W_c(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ в фазовом пространстве однородно заполняет энергетическую поверхность ($W_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sim \delta[E - H(\mathbf{p}, \mathbf{q})]$), плотность вероятности $\rho(\mathbf{q}) = |\psi(\mathbf{q})|^2$ вблизи границы классически доступной области при $\hbar \rightarrow 0$ обращается в нуль (при $N > 2$; она является постоянной при $N = 2$), а интегралы (4.8) остаются конечными (рис. 15).

В4. Вблизи границ классически доступной области плотность вероятности $\rho(\mathbf{q}) \rightarrow \infty$ для регулярных и остается ограниченной для сильно хаотических состояний. $\#$

Этот критерий относится к случаю $\hbar \rightarrow 0$. Поэтому его трудно проверить численно; попыток такого рода не было.

На основе качественной интерпретации ВФ хаотического состояния как суперпозиции большого числа плоских волн с некоррелированными фазами Берри³³ высказал гипотезу о том, что в таких состояниях $\psi(\mathbf{q})$ будет случайной функцией \mathbf{q} с гауссовым распределением ψ . Отметим сходство этого допущения с критерием В2.

Попытка проверить это утверждение была предпринята в работе¹⁶⁹, где для стационарного состояния ψ_n бильярда «стадион» ($n \sim 10^3$) была вычислена функция распределения значений ВФ $W(\psi)$. Она оказалась колоколообразной с максимумом вблизи $\psi = 0$, что качественно подтверждает гипотезу Берри. Однако информацию о виде $W(\psi)$ сейчас нельзя использовать в качестве критерия квантового хаоса, так как неизвестен вид такого распределения для ВФ интегрируемых систем.

4.2.2. Локальные свойства ВФ

Благодаря наглядности представления большое распространение получил критерий, основанный на топографии линий постоянного уровня $\psi(\mathbf{q})$, и в первую очередь — узловых линий, на которых $\psi(\mathbf{q}) = 0$ *). Узловые линии ВФ двумерной эргодической системы (бильярда «стадион») были вычислены впервые в⁵⁰, где была отмечена нерегулярность в направлениях узловых линий (рис. 16). Соответствующий критерий —

В5. Для регулярных состояний ψ_n система узловых линий $\psi_n(\mathbf{q})$ представляет решетку квазиортогональных кривых (или близка к ней — обладает узкими квазипересечениями узловых линий), а для хаотического состояния не допускает такого представления. \ddagger

— был предложен в⁵¹ и иллюстрирован примерами для нелинейных осцилляторов. Свойства картины узловых линий хаотического состояния описывают как «случайное поведение линий узлов».

Критерий В5 выполняется не для всех систем. Регулярность линий узлов не является исключительным свойством регулярных систем. Даже для бильярда «стадион», в котором классическое движение является эргодическим, расчеты^{126,170} обнаружили регулярную картину линий уровня $\psi_n(\mathbf{q})$. Причины такой регулярности рассмотрены в¹⁷⁵. Другой тип регулярных характеристик $\psi_n(\mathbf{q})$ этой системы — шрамы (scars), области аномально высокой плотности вероятности вдоль контуров замкнутых классических траекторий — был обнаружен в¹⁵⁴. Итак, и для классической эргодической системы в квантовом случае $\psi(\mathbf{q})$ может обладать регулярными чертами.

С другой стороны, сложная узловая структура ВФ может быть связана не только со стохастичностью. В частности, в¹⁴⁵ часть состояний, отнесенных в⁵¹ к хаотическим, была интерпретирована как соответствующая квазипериодическому классическому движению.

Картина узловых линий есть форма представления свойств $\psi(\mathbf{q})$, связь которой с другими характеристиками системы изучена довольно слабо.

*) Подразумевается, что $\psi(\mathbf{q})$ могут быть выбраны действительными. Для комплексных ВФ систем, не инвариантных при обращении времени, аналогом узловых линий являются точки дислокаций ВФ, в которых $|\psi(\mathbf{q})| = 0$. Рост числа таких точек с номером уровня n для КХС был установлен в²¹¹.

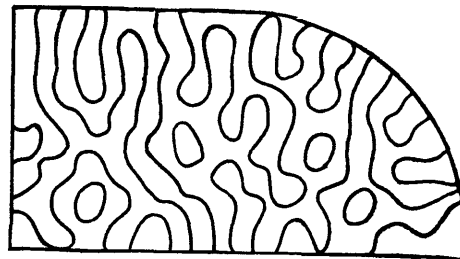


Рис. 16. Линии узлов для одного квадрата $\psi_n(\mathbf{q})$ ($n \sim 600$) в бильярде «стадион»⁵⁰

Отметим, однако, установленную в ¹¹⁶ связь перестройки узловых линий при изменении параметра в гамильтониане с квазипересечением уровней. Единственным преимуществом такой картины является наглядность, да и то только в случае двумерного конфигурационного пространства. Похоже обстоит дело с силовыми линиями в электростатике *). Поэтому развитие критериев, основанных на свойствах узловых линий, представляется менее перспективным.

Общие недостатки всех критериев, основанных на изучении ВФ, очевидны. Во-первых, ψ не есть наблюдаемая, а поэтому такие критерии не приложимы к экспериментальным данным (хотя могут быть применены в числовых расчетах). Во-вторых, выбор представления содержит элемент произвола. В-третьих, количественная мера степени хаотичности данной СФ не установлена ни для одного из приведенных критериев. Достоинство наглядности не искупает этих недостатков.

5. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ, ОТЛИЧНЫХ ОТ ГАМИЛЬТОНИАНА

Критерий, основанный на поведении матричных элементов операторов, отличных от \hat{H} , вытекает из отмеченного Персивалем ²¹ отсутствия правил отбора для операторов в КХС.

С1. Если движение классической системы в данной области энергий является регулярным (квазипериодическим), то матричные элементы A_{mn} «хорошего» оператора \hat{A} , вычисленные между СФ ψ_m и ψ_n состояний с энергиями, принадлежащими этой области, равны нулю — за исключением

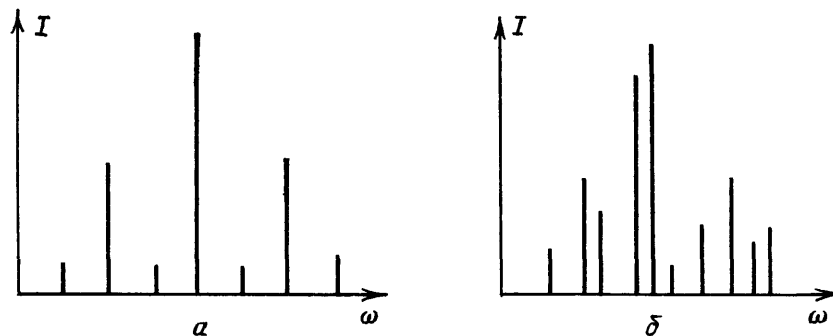


Рис. 17. Спектр излучения $I(\omega)$ КХС в регулярном (а) и хаотическом (б) состояниях

немногих сочетаний m и n . Если классическое движение сильно стохастическое, то $A_{mn} \neq 0$ почти для любых состояний, и значения A_{mn} случайно изменяются с m и n . \ddagger

Критерий **С1** является прямым следствием **В2** (если \hat{A} — оператор проектирования на одно из состояний базиса $\{\phi\}$, то **С1** совпадает с **В2**). Однако **С1** более тесно связан с экспериментальными данными. Понятие хорошего оператора включает, например, полиномы от p_i и q_i , и в частности — дипольный момент $\mathbf{d} = e\mathbf{q}$. О величине матричных элементов дипольного момента можно судить по интенсивности линий в спектре излучения. При переходе от регулярного движения к стохастическому в спектре излучения появится много линий с нерегулярно меняющейся интенсивностью. Этот вывод был подтвержден числовым расчетом для нелинейного осциллятора в ⁵¹ (рис. 17).

*) «К тому же понятие о линиях поля не содержит глубочайшего из принципов электродинамики — принципа суперпозиции» ²³⁴. Это *mutatis mutandis* применимо и к узловым линиям $\psi(\mathbf{q})$.

Одним из следствий **C1**, полученных в ¹⁶⁵, является вывод о малости флуктуации во времени средних значений $\langle A(t) \rangle$ некоммутирующих с \hat{H} операторов в стохастической области. Переход от регулярного к случайному поведению диагональных матричных элементов простого оператора при изменении степени стохастичности классического движения был прослежен в ¹⁶⁴. Близкие свойства обнаружены и для функции Грина G_{mn} , где m и n — индексы функций базиса ¹⁸⁸. Характер распределения матричных элементов $W(A)$ исследовался в ¹⁴⁸. В согласии с **C1**, в области регулярного движения такое распределение обладает при $A = 0$ резким пиком, который размывается при переходе системы в область стохастического движения.

В ¹¹⁵ высказано предположение, что для близких по энергии хаотических состояний ψ_m и ψ_n и почти любых операторов \hat{A} выполняются неравенства $|A_{mn}| \ll |A_{mm}|, |A_{nn}|$. Это предположение еще не проверено.

Критерий **C1** пока остается качественным, так как не установлены параметры, позволяющие описать степень хаотичности данного набора матричных элементов.

6. СВОЙСТВА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Важную информацию о свойствах КХС дает исследование эволюции нестационарных состояний — волновых пакетов. Локализованный в малой области фазового пространства ($\Delta p_i \Delta q_i \sim \hbar$) волновой пакет является ближайшим аналогом точки в фазовом пространстве, которая описывает состояние системы в классической теории.

В классической системе при переходе от регулярного к стохастическому движению появляется непрерывный спектр мощности динамических переменных, приводящий к затуханию корреляций. Для квантовой системы с дискретным энергетическим спектром это уже не так. Любое состояние $\Psi(0)$ в такой системе обладает квазипериодическим поведением²: для любого малого δ найдется такое время возврата (рекурренции) $t_\Psi(\delta)$, что в момент t_Ψ система вернется в исходное состояние с точностью, лучшей δ :

$$1 - |\langle \Psi(t_\Psi) | \Psi(0) \rangle| < \delta. \quad (6.1)$$

Правда, такая квазипериодичность имеет во многом формальный характер. Времена возврата для достаточно сложных пакетов оказываются чрезвычайно велики. Одна из оценок была дана в работе ⁹⁹ для пакета вида

$$\Psi(t) = \frac{1}{C^{1/2}} \sum_{n=1}^C \psi_n(q) e^{-i\omega_n t}, \quad (6.2)$$

составленного из C стационарных состояний ψ_n с равными весами. В этом случае время возврата имеет порядок величины

$$t_\Psi(\delta) \sim (\bar{\omega})^{-1} \delta^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^{C/2}, \quad (6.3)$$

где

$$\bar{\omega} = (C^{-1} \sum_n \omega_n^2)^{1/2}$$

— среднеквадратичная частота, а γ — константа порядка единицы ($\gamma = 2\pi \exp(-1) = 2,31$). Для примера с $\delta = 0,1$, $C = 50$ и $\bar{\omega} = 10^{15} \text{ с}^{-1}$ время возврата $t_\Psi(\delta) \sim 10^{18} \text{ с}$ оказывается больше времени существования Вселенной. Аналогичные оценки были получены в ^{119, 212}.

На практике интерес представляют только времена возврата, лежащие внутри области применимости модели гамильтоновой системы с немногими степенями свободы, при $t_\Psi \ll \tau$, где τ — время релаксации. Это условие ограничивает значения C , для которых возможно наблюдение рекурренций, несколькими единицами: в условиях данного выше числового примера $C \leq$

$\leq 1,46 \lg(\bar{\omega}\tau)$. Таким образом, на физически интересных интервалах времени пакет, составленный из достаточно большого числа стационарных состояний, может эволюционировать практически необратимо.

Следствием квазипериодичности эволюции состояний для систем с дискретным спектром являются квазипериодичность энтропии⁵ и огрубленных наблюдаемых²¹⁹. Однако оценки для времен рекурренции $t_A(\delta)$ значений наблюдаемых $\hat{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ неизвестны: из общих соображений времена $t_A(\delta)$ могут быть много меньше времен возврата состояния $t_\Psi(\delta)$.

Критерии квантового хаоса могут быть основаны на свойствах движения волновых пакетов на малых по сравнению с t_R интервалах времени. Пакеты, занимающие малый объем в фазовом пространстве, при $\hbar \ll 1$ составлены из многих СФ гамильтониана, $C \gg 1$. Поэтому такие критерии используют второе решение альтернативы раздела 2.1, приписывая квантовый хаос группе состояний.

6.1. Автокоррелятор волнового пакета

Возможность использовать автокоррелятор пакета

$$P(t) = |\langle \Psi(t) | \Psi(0) \rangle|^2 \quad (6.4)$$

для установления критерия квантового хаоса была отмечена в⁵⁴. Поведение $P(t)$ наиболее подробно изучено для гауссова волнового пакета — состояния с ВФ

$$\Psi(q_1, q_2, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_{i=1}^2 \exp \left[-\frac{1}{2\hbar} (q_i - \bar{q}_i)^2 + \frac{i}{\hbar} \bar{p}_i q_i \right]. \quad (6.5)$$

Точку в фазовом пространстве с координатами $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2)$ далее будем называть центром пакета. Выбор формы (6.5) не случаен. Во-первых, в ряде

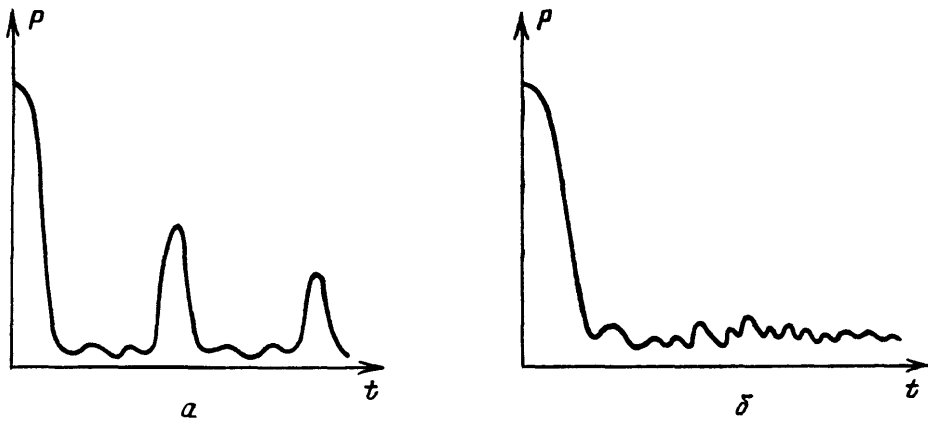


Рис. 18. Поведение автокоррелятора волнового пакета $P(t)$. a — Центр пакета принадлежит регулярной области. b — Центр пакета принадлежит стохастической области

систем такой пакет может быть приготовлен экспериментально (например, в молекулах — при электронных переходах из основного колебательного состояния⁹²). Во-вторых, именно форма (6.5) доставляет минимум произведению $\Delta p_i \Delta q_i$. Автокоррелятор гауссова пакета был исследован в⁵⁶ для модели Хенона — Хейлеса с $\hbar^{-1} = 80$. Оказалось, что даже при сравнительно больших размерах начального пакета в фазовом пространстве поведение автокоррелятора резко меняется в зависимости от того, принадлежит ли центр пакета регулярной или стохастической области (рис. 18).

D1. Автокоррелятор $P(t)$ гауссова волнового пакета: а) обладает сильными флуктуациями типа затухающих рекурренции, если центр пакета при-

надлежит области, где доминируют регулярные траектории; б) обладает малыми и нерегулярными флуктуациями, если центр принадлежит стохастической компоненте. \nmid

Эти выводы были подтверждены в работах ^{74,102}. Качественный анализ выявил зависимость вида $P(t)$ в регулярной области от отношения частот квазипериодического движения для траекторий, на которых лежит центр пакета. Различие в динамике гауссовых пакетов в квантовой системе и их классических аналогов — гауссовых распределений плотности в фазовом пространстве — исследовалось в ¹⁴⁴.

Совершенно другие результаты получаются, если задать начальный вид пакета разложением

$$\Psi(\mathbf{q}, 0) = \sum a_n \psi_n(\mathbf{q}), \quad (6.6)$$

где ψ_n — СФ гамильтониана \hat{H} , а a_n — регулярно зависящий от E ^{54,100} или случайный ⁹⁸ набор коэффициентов. Однако физически такой случай малоинтересен. Во-первых, как показано в ⁹³, для КХС пакет вида (6.6) с регулярной огибающей $a_n = a(E_n)$ имеет при значении E из области сильной стохастичности весьма сложное, псевдослучайное распределение плотности в конфигурационном пространстве $\rho(\mathbf{q}) = |\Psi(\mathbf{q})|^2$ и уже является в некотором смысле хаотическим состоянием. Во-вторых, способ приготовления состояний вида (6.6) в эксперименте неизвестен.

6.2. Переход пакета в другое состояние

Дополнительную информацию о свойствах КХС можно получить, рассматривая эволюцию перекрытия гауссова пакета с состояниями Φ , отличными от $\Psi(0)$. Впервые один из аспектов такой задачи был рассмотрен в ⁴⁸, где показано, что средняя по времени величина перекрытия состояний Φ и Ψ

$$P(\Psi | \Phi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \Psi(t') | \Phi(0) \rangle|^2 dt' \right) \quad (6.7)$$

различна, если в качестве Φ взять начальное состояние пакета $\Psi(0)$ или функцию $\Psi' = \hat{R}\Psi(0)$, полученную из $\Psi(0)$ применением одной из операций симметрии \hat{R} , оставляющих гамильтониан инвариантным:

$$P(\Psi | \Psi) > P(\Psi | \hat{R}\Psi). \quad (6.8)$$

Неравенство (6.8) означает отсутствие эргодичности (равенства средних по времени средним по фазовому пространству) для движения пакета в квантовой системе с симметрией и в том случае, когда классическая система эргодична. Динамика переходов пакета (6.5) между заданными областями фазового пространства исследовалась также в ⁶⁰.

В работах ^{57,58,92} в роли Φ рассматривались стационарные состояния $\psi_n(\mathbf{q})$. В этом случае вероятности перекрытия

$$p_n = \|\langle \Psi(\mathbf{q}, t) | \psi_n(\mathbf{q}) \rangle\|^2 \quad (6.9)$$

будут постоянны во времени (рис. 19). Был предложен критерий

D2. Для гауссова волнового пакета коэффициенты перекрытия p_n при изменении n : а) изменяются сильно и немонотонно, если пакет принадлежит области регулярного движения; б) изменяются слабо и монотонно, если пакет принадлежит области стохастического движения. \nmid

Отметим, что критерий **D2** близок к **D1**, ибо представляет информацию о поведении автокоррелятора $P(t)$, выраженную на спектральном

языке:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{i\omega t} dt = \sum p_n \delta(\omega - \omega_n). \quad (6.10)$$

Содержащий немного сильных линий спектр $S(\omega)$ приведет к сильным рекурренциям $P(t)$, в то время как для плотного спектра хаотического движения флуктуации $P(t)$ будут невелики.

В качестве меры сложности последовательности p_n предлагалось^{92,171} использовать энтропию

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n.$$

Однако величина S говорит о сложности пакета, но не о характере зависимости p_n от n . К тому же предположение о медленности изменения p_n плохо

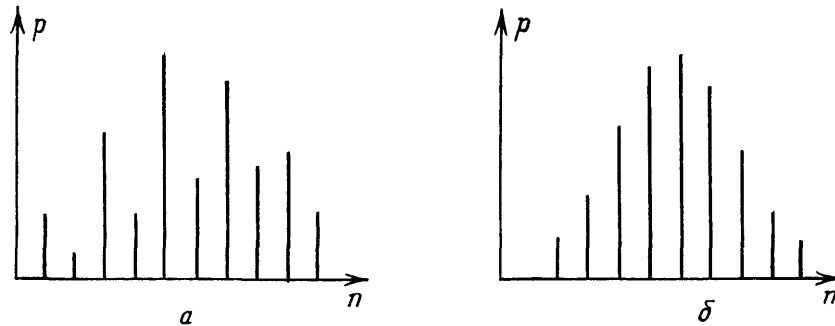


Рис. 19. Предполагаемый вид коэффициентов перекрытия p_n для гауссова пакета в регулярной (а) и стохастической (б) областях

совместимо с результатами работ^{183,214}, где установлена специфичность состава гауссова пакета в эргодической КХС (в бильярде «стадион»). В этих работах показано, что пакет, совершающий при малых t движение по нормали к прямолинейным участкам границы, состоит в основном из ВФ $\psi_n(\mathbf{q})$ псевдoreгулярной структуры (см. раздел 4.2). В целом критерий **D2** представляется не очень убедительно обоснованным и не имеет видимых преимуществ перед **D1**.

Иной подход к описанию перехода гауссова пакета в другие состояния был предложен в¹¹⁷. Для состояния, имеющего в начальный момент форму (6.5), вычисляется параметр

$$\Omega(t) = \prod_{i=1}^2 \Delta q_i(t) \Delta p_i(t), \quad (6.11)$$

где $\Delta z(t)$ — среднеквадратичное отклонение величины \hat{z} от своего среднего значения в момент t . Величина Ω может рассматриваться как огрубленный фазовый объем, занимаемый гауссовым пакетом в момент t . Соответствующий критерий таков:

D3. Величина огрубленного фазового объема $\Omega(t)$ в стохастической области возрастает существенно быстрее, чем в регулярной. $\#$

Проведенные в¹¹⁷ числовые расчеты подтвердили **D3** для модели Хеннона — Хейлеса на малом интервале времени ($t \leq 30$, т.е. около 5 периодов).

6.3. Устойчивость эволюции пакетов

Выше были рассмотрены особенности эволюции волновых пакетов, составленных из СФ гамильтониана H . Вопрос о том, как изменится характер этой эволюции при наложении на систему малого возмущения, был рассмот-

рен в ¹⁶⁶, где вместе с H рассматривалась система с гамильтонианом $H' = H + V$. В качестве параметра использовалась величина

$$R_V(t) = |\langle \Psi_H(t) | \Psi_{H'}(t) \rangle|^2, \quad (6.12)$$

где $\Psi_H(t)$ и $\Psi_{H'}(t)$ — решения уравнений Шрёдингера с гамильтонианами H и H' соответственно и одинаковым начальным условием $\Psi(0)$. Предположение о различии поведения величины $R_V(t)$ в регулярном и стохастическом случаях основано на том, что из-за отсутствия правил отбора в КХС возмущение V примешает к исходному пакету ВФ многих состояний, а более богатая по спектральному составу $R_V(t)$ будет слабее флуктуировать.

D4. Для состояния, принадлежащего регулярной области, при заданном V среднее значение $\langle R(t) \rangle$ будет больше, а флуктуации $R(t)$ сильнее, чем для состояния, принадлежащего стохастической области. \pm

Этот критерий качественно подтвержден расчетами для модели ротаторов с нелинейной связью.

Рассмотрение эволюции волновых пакетов оказывается достаточно тонким методом, чтобы не только установить отличие в свойствах КРС и КХС, но и структуру разных областей фазового пространства КХС в узком интервале энергий. Полученная в таком подходе информация дополняет представление о структуре ВФ стационарных состояний КХС, изложенные в разделе 4. С другой стороны, исследование нестационарных состояний связано и со вторым аспектом проблемы квантового хаоса — сравнением динамики классической и квантовой системы с одинаковыми гамильтонианами.

7. КВАНТОВЫЙ ХАОС В НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

Неавтономные системы с одной степенью свободы и периодическим возмущением

$$H = H_0(I) + V(I, \theta) f(t), \quad (7.1)$$

где $f(t) = f(t + T)$, $T = 2\pi/\omega$, являются весьма удобными моделями для изучения возникновения и развития стохастического движения. В классической теории можно выделить три задачи:

- 1) о движении в стохастическом слое вблизи сепаратрисы изолированного нелинейного резонанса (¹²⁹, гл. 5, ¹³⁰, § 3.5);
- 2) о стохастическом движении, возникающем при перекрытии двух нелинейных резонансов (¹³⁰, § 4.5);
- 3) о переходе к глобальному стохастическому движению, возникающему при перекрытии бесконечного числа резонансов, охватывающих неограниченную область переменной действия (¹²⁹, § 4.2; ¹³⁰, гл. 4).

Эти задачи имеют свои аналоги и в квантовой теории.

Для систем с периодическим по времени гамильтонианом (7.1) существует полный набор квазиэнергетических состояний — решений уравнения Шрёдингера, имеющих вид

$$\psi_\varepsilon(q, t) = \exp\left(-i \frac{\varepsilon t}{\hbar}\right) \varphi_\varepsilon(q, t), \quad (7.2)$$

где $\varphi_\varepsilon(q, t) = \varphi_\varepsilon(q, t + T)$, а величина ε называется квазиэнергией ¹⁶. Квазиэнергии ε и квазиэнергетические ВФ φ_ε во многом близки энергетическому спектру и СФ автономных гамильтоновых систем. В частности, дискретность спектра квазиэнергий означает квазипериодичность эволюции произвольного состояния $\Psi(q, 0)$ и исключает возможность неограниченного роста переменных действия и энергии ^{95,111}.

Установление факта дискретности спектра квазиэнергий позволило бы использовать для неавтономных квантовых систем критерии, сформулированные в разделах 3—6 для систем автономных. Первые две из названных выше задач могут быть рассмотрены в моделях с гамильтонианом \hat{H} , обладающим

конечным числом уровней дискретного спектра, что гарантирует дискретность спектра квазиэнергий. Для моделей, допускающих постановку третьей задачи, тип спектра квазиэнергий известен только в частных случаях.

Изучению хаотических свойств квантовых неавтономных систем с непериодическим возмущением посвящено сравнительно немного работ. Существование движения с перемешиванием в таких системах было обнаружено впервые в ^{109,125} и исследовалось для разных моделей в ^{152,162,225}. Непрерывным спектром мощности и затуханием корреляций обладает, по-видимому, даже очень простая и отнюдь не квазиклассическая система — двухуровневый атом в бихроматическом поле ²²². Далее в этом разделе рассматриваются только системы с периодическим возмущением.

7.1. К в а н т о в ы й н е л и н е й н ы й р е з о н а н с

Для слабо ангармонической системы (нелинейного осциллятора), спектр которого локально может быть представлен в виде

$$E_n = \hbar\omega_0 (n + \beta n^2) \quad (n \gg 1, |\beta| \ll 1), \quad (7.3)$$

квантовый нелинейный резонанс состоит в приближенном совпадении частот действующего на систему поля ω и одной из частот переходов в системе:

$$\omega_n = \frac{dE_n}{\hbar dn} = \omega_0 (1 + 2\beta n). \quad (7.4)$$

Условие $\omega_r = \omega$ определяет резонансный уровень r . Свойства квазиэнергетических состояний ангармонического осциллятора (7.3) при наличии такого резонанса для модели с возмущением вида

$$\hat{V}(q, t) = \hat{v}(q) \cos \omega t \quad (7.5)$$

были впервые рассмотрены Берманом и Заславским ³². В такой системе возможно существование локализованного в энергетическом пространстве пакета состояний, захваченных в квантовый нелинейный резонанс *). Если возмущение V обладает отличными от нуля матричными элементами $v_{mn} = v_0 = \text{const}$ только для переходов между соседними уровнями n и $n \pm 1$, то сведением задачи к одномерному уравнению Шрёдингера в энергетическом представлении можно определить вид квазиэнергетических решений ³². Существует около $(v_0/\beta)^{1/2}$ различных решений $\varphi_e(n, t)$, локализованных вблизи резонанса, т. е. составленных из функций с номерами, близкими к r . Число уровней C , дающих существенный вклад в эти состояния (захваченных в нелинейный резонанс), меняется от минимального $C_{\min} \sim (v_0/\beta)^{1/4}$ ¹²⁸ до максимального $C_{\max} \sim (v_0/\beta)^{1/2}$ ³².

Исследованные к настоящему времени решения соответствуют регулярному движению классической системы внутри резонанса, далеко от сепаратрисы. Решения, соответствующие движению вблизи сепаратрисы — где только и имеется стохастическое движение в классической системе, — практически не изучены. Единственная попытка такого исследования предпринималась в ¹⁹⁷.

7.2. В з а и м о д е й с т в и е к в а н т о в ы х н е л и н е й н ы х р е з о н а н с о в

Задачу о взаимодействии квантовых нелинейных резонансов удобно изучать на двухрезонансной модели, гамильтониан которой в переменных действие — угол имеет вид

$$H = \frac{I^2}{2J} + V [\cos(\theta + \nu\tau) + \cos(\theta - \nu\tau)] \quad (7.6)$$

*) Задача о возбуждении нелинейного осциллятора из основного состояния в окрестность квантового нелинейного резонанса изучена весьма подробно ^{27,28,30,37,38}.

(далее полагаем $J = 1$, $\nu = 1$). К исследованию (7.6) приводит и задача о поведении слабо ангармонической системы (7.3) при бихроматическом возмущении⁶⁶. Степень взаимодействия резонансов определяется безразмерным параметром $s = 2(V)^{1/2}$ (в исходных единицах $s = 2(V/J\nu^2)^{1/2}$). В классической теории стохастические слои вблизи сепаратрис главных резонансов ($\omega(I) = \pm 1$) перекрываются при $s = s_c = 0,70$. В области перекрытия резонансов для системы (7.6) числовыми расчетами были исследованы:

- 1) распыление пакетов, приготовленных из стационарных состояний, локализованных между резонансами^{66,84};
- 2) поведение корреляционных функций коэффициентов в разложении

$$\Psi(\theta, t) = \sum_n A_n(t) e^{i\nu\theta} \quad (7.7)$$

и характер затухания корреляций при различных s ^{66,84,194};

- 3) спектр мощности двухрезонансной системы^{84,106}.

Качественно результаты этих исследований сводятся к констатации возрастания сложности динамики квантовой системы при перекрытии квантовых нелинейных резонансов, что естественно вытекает и из принципа соответствия. Количественные характеристики степени сложности не установлены. Аналогичные результаты для взаимодействия резонансов в другой модели (частица между жесткими стенками, возмущение — гармоническое поле) были получены в²²³.

Качественной особенностью квантовой двухрезонансной системы является возможность перехода из состояния, локализованного в окрестности одного резонанса, в окрестность другого за счет «*туннелирования через сепаратрису*» — процесса с участием большого числа (порядка $2/\hbar$) квантов внешнего поля. Этот процесс возможен при любых $s < s_c$, хотя и маловероятен. Вероятность перехода экспоненциально мала: при $s \ll 1$

$$W \sim \exp\left[-\frac{4}{\hbar}\left(1 - \frac{s}{2}\right) \ln \frac{4}{s^2}\right], \quad (7.8)$$

такой же порядок величины имеет отношение плотностей вероятности вблизи второго и первого резонансов. Туннелирование между резонансами при $s \lesssim s_c$ было обнаружено в числовых расчетах в работе²⁰⁶.

7.3. К в а н т о в ы й р о т а т о р с т о л ч к а м и

Особенности динамики квантовой неавтономной системы при переходе ее классического аналога к глобальному стохастическому движению наиболее подробно изучены для модели ротатора с толчками (см. раздел 1.3.3). В основном их три: ограничение диффузионного роста энергии конечным интервалом времени; возможность неограниченного роста энергии в отсутствие классической глобальной стохастичности при специальном выборе параметров и неустойчивость режима ускоряющих мод в квантовом случае.

7.3.1. Ограничение роста энергии

Компьютерные расчеты динамики квантового стандартного ротатора с толчками (КСРТ)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{I}^2 - K \cos \hat{\theta} \cdot \tilde{\delta}(t), \quad (7.9)$$

впервые выполненные в работах^{36,46}, показали, что свойственный классической системе рост энергии $\langle E \rangle \sim t$ в квантовой системе имеет место только

на ограниченном интервале времени $t \ll \tau_1$: при $t \sim \tau_1$ скорость диффузии по уровням падает, а при $t \gg \tau_1$ рост энергии практически полностью прекращается (рис. 20). Оценка времени перехода от классического к квантовому режиму⁶⁹

$$\tau_1 \approx \left(\frac{K}{\hbar}\right)^2 \quad (7.10)$$

была удовлетворительно подтверждена числовыми расчетами для интервала $5 \leq K/\hbar \leq 100$ ¹²⁵. Выражение (7.10) относится к случаю $K \gg 1$; вблизи порога глобальной стохастичности, при $K \geq K_c = 0,9716$ время перехода имеет порядок величины $\tau_1 \sim \hbar^{-\gamma}$, где $\gamma = 3,04$ ¹⁵⁰. Квантовое кинетическое уравнение для систем с толчками рассматривалось в^{40,44}. В общем случае для КСРТ корреляторы динамических величин убывают не быстрее, чем по степенному закону: $B(\tau) \geq (K\tau/\hbar)^{-1/2}$ ⁷⁰. Аналогичный результат для системы с малой нелинейностью при импульсном возмущении был получен в⁸³. Отметим, что вопрос о насыщении роста E остается до настоящего времени открытым: в компьютерных расчетах¹⁴⁶

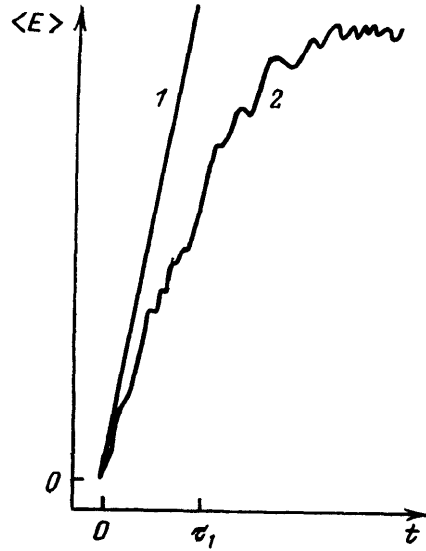


Рис. 20. Рост средней энергии в модели квантового стандартного ротатора с толчками со временем.

1 — согласно классической теории; 2 — по данным числовых расчетов¹²⁵

тенденция к медленному росту E (на фоне сильных флуктуаций) сохранялась до самых больших исследованных времен, $t \sim 10^3$.

7.3.2. Квантовый глобальный резонанс

Уже в первых работах^{36,46} было отмечено, а в дальнейшем подробно исследовано^{52,146} явление сверхдиффузионного роста энергии КСРТ,

$$E(t) \sim \eta t^2, \quad (7.11)$$

возникающее при выполнении условия глобального резонанса $\hbar = 4\pi(b/a)$, где a и b — взаимно простые целые числа. Такое значение \hbar ведет к соизмеримости энергии кванта возбуждения $\hbar\omega = \hbar \cdot 2\pi$ и любых разностей уровней энергии ротатора $E_n = \hbar^2 n^2 / 2J = \hbar^2 n^2 / 2$ и к возникновению непрерывного спектра квазиэнергий. Значение коэффициента η в (7.11) зависит как от величины K , так и от порядка резонанса a : в⁵² получены оценки

$$\eta \approx \left(\frac{K}{a\hbar}\right)^{2a} \quad \left(a \gg \frac{K}{\hbar}\right), \quad \eta \approx 0,2a \left(\frac{K}{a\hbar}\right)^2 \quad \left(a \ll \frac{K}{\hbar}\right), \quad (7.12)$$

подтвержденные числовыми расчетами^{52,138}.

Квантовый глобальный резонанс в КСРТ создает возможность неограниченного роста энергии системы и при $K < K_c$, т. е. в условиях, когда классическая система может изменять свою энергию только в ограниченном диапазоне значений. Однако квантовый глобальный резонанс есть специфическое свойство системы (7.9), связанное с точной кратностью всех междуровневых интервалов. Простейшим примером квантового глобального резонанса является неограниченный рост энергии линейного осциллятора в резонансном поле¹⁶. Таким же свойством обладает модель с эквидистантным, но не ограниченным снизу спектром, рассмотренная в¹³³. Эти примеры показывают, что квантовый глобальный резонанс возможен и для регулярных систем, а потому не связан с проблемой квантового хаоса.

7.3.3. Туннелирование из ускоряющих мод

При $K \gg 2\pi$ в классической модели СРТ при специальных начальных условиях ($I_0 \approx 0$, $\theta_0 \approx \pm\pi/2$) возникает линейный по времени рост действия ($|I| \approx Kt$) и квадратичный — энергии ($\langle E \rangle \approx (Kt)^2/2$). Такой режим движения, устойчивый к малым возмущениям, называется движением в ускоряющей моде. В работе ¹⁴⁷ показано, что в квантовой модели туннелирование через сепаратрису из ускоряющей моды в другие состояния приводит к затуханию вероятности пребывания в ускоряющей моде $P_a(t)$ по закону

$$P_a(t) = P_a(0) e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \exp\left(-\frac{C(K)}{\hbar}\right). \quad (7.13)$$

7.4. Связь с теорией андерсоновской локализации

Насыщение роста энергии в модели КСРТ заставляет предположить, что в отсутствие квантового глобального резонанса спектр квазиэнергий этой модели дискретен, а все квазиэнергетические состояния в H_0 -представлении локализованы, т. е. их амплитуды убывают экспоненциально вне некоторого интервала значений n . Последнее обстоятельство может быть иллюстрировано отмеченной в работах ^{86,87} аналогией с андерсоновской локализацией в одномерных цепочках *).

Локализация — возникновение дискретного спектра у квантовой системы, представляющей частицу в случайном потенциале $U(\mathbf{q})$, заполняющем бесконечную область пространства. Для модели сильной связи (частица на решетке со случайными, распределенными по известному закону энергиями узлов E_i с характерной шириной распределения W и постоянными матричными элементами перехода V между соседними узлами) возможность такой локализации была указана Андерсоном ³. В такой одномерной цепочке все состояния локализованы при сколь угодно слабом беспорядке (малом W/V) ⁴. Теории андерсоновской локализации посвящены обзоры ^{26,39}.

Пусть $\bar{\varphi}(\theta)$ есть полусумма значений периодической части квазиэнергетического решения для КРТ перед толчком и после него:

$$\bar{\varphi}(\theta) = \frac{1}{2} [\varphi(\theta, -0) + \varphi(\theta, +0)]. \quad (7.14)$$

Фурье-амплитуды u_n — амплитуды $\bar{\varphi}(\theta)$ в H_0 -представлении,

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int \bar{\varphi}(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad (7.15)$$

удовлетворяют уравнению

$$T_n u_n + \sum_{k \neq 0} U_k u_{n+k} = \bar{E} u_n, \quad (7.16)$$

где

$$U_k = U_{-k} = \int U(\theta) e^{ik\theta} d\theta, \quad U(\theta) = -\text{tg} \frac{Kv(\theta)}{2\hbar}, \quad (7.17)$$

$$T_m = \text{tg} \left(\frac{\varepsilon}{2\hbar} - \frac{\hbar m^2}{4} \right), \quad \bar{E} = U_0.$$

Уравнение (7.16) может быть интерпретировано как уравнение для амплитуд ВФ в приближении сильной связи в одномерной цепочке с энергиями узлов T_m и матричным элементом перехода на k -го соседа U_k . Теория андерсоновской локализации рассматривает модели со случайными T_m . В уравнении (7.16) T_m псевдослучайны, хотя во многих отношениях подобны значениям, полученным от датчика случайных чисел ¹⁵¹.

*) В другом контексте связь между стохастичностью классической системы и андерсоновской локализацией исследовалась в работе ⁸².

В отсутствие глобального резонанса, при $\hbar/2\pi$ иррациональном, значения «энергий» T_m на узлах обладают распределением Коши

$$W(T) = \frac{1}{\pi(1+T^2)}. \quad (7.18)$$

Для модели (7.16) с таким распределением диагональных матричных элементов и матричным элементом перехода, отличным от нуля только для ближайших соседей,

$$U_k = \kappa \delta_{l, k} \quad (7.19)$$

(так называемая модель Ллойда¹³), известно явное выражение для показателя локализации $\gamma(\bar{E}, \kappa)$, определяющего скорость экспоненциального спада ВФ на больших расстояниях¹⁸:

$$\gamma = \text{Arch} \left[\frac{1}{2\kappa} \{[(\bar{E} + \kappa)^2 + 1]^{1/2} + [(\bar{E} - \kappa)^2 + 1]^{1/2} \} \right]. \quad (7.20)$$

Специальным выбором $\nu(\theta)$ в модели ротатора с толчками можно обеспечить выполнение равенства (7.19). Тогда выражение (7.20) удовлетворительно описывает найденный в компьютерном эксперименте закон спада ВФ в H_0 -представлении^{89,90} (рис. 21).

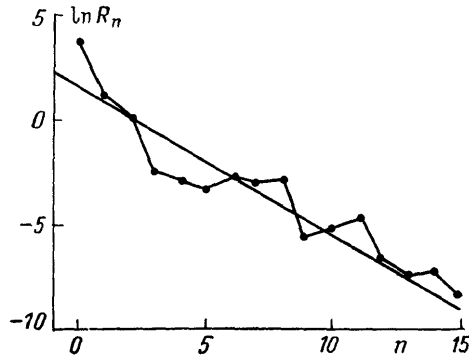


Рис. 21. Зависимость нормированной амплитуды $R_n = |\text{Re } u_n u_0^*|$ квазиэнергетического состояния в модели квантового ротатора с толчками от n .

Прямая линия — теоретическая зависимость, ломаная — соединяет точки, найденные численным расчетом⁸⁹

Случай разрывного $\nu(\theta)$ приводит к дальнедействующему взаимодействию узлов ($|U_k| \geq \text{const} \cdot |k|^{-1}$), делокализации состояний и неограниченному росту энергии ротатора¹²⁴. При $\gamma \ll 1$ показатель локализации связан с классическим коэффициентом диффузии D_c соотношением $\gamma \approx 2\hbar^2/D_c$ ^{142,227}, которое подтверждается числовыми расчетами. Структура ВФ при глобальном резонансе исследовалась в¹⁸¹.

Хотя аналогия КРТ и одномерных цепочек и не является математически строгой (некоторые моменты, связанные со специфическими отличиями квазиэнергий от энергий,

обсуждаются в¹⁴⁶), а строгое доказательство дискретности спектра отсутствует (некоторые ограничения на тип спектра установлены в^{143,178}), практически все имеющиеся данные свидетельствуют в пользу дискретности спектра квазиэнергий в модели КСРТ в отсутствие глобального резонанса.

Статистика квазиэнергетических уровней этой системы исследовалась в¹⁸⁷. Было показано, что функция распределения междууровневых интервалов $P(S)$ не обнаруживает в общем случае отталкивания уровней и схожа с пуассоновской, как и для модели Андерсона. В случае глобального резонанса при дополнительном условии периодичности по I статистика уровней меняется от пуассоновской до вигнеровской²¹⁷. Аналогичный переход для другой модели (бесконечно глубокая потенциальная яма периодически изменяющейся ширины) был установлен в²¹⁸.

7.5. Стохастическая ионизация и квантовые эффекты

Большой интерес с точки зрения возможности сравнения выводов теории квантового хаоса с экспериментом представляет задача о поведении атома водорода в монохроматическом внешнем поле. Такая система описывается

ГАМИЛЬТОНИАНОМ

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{r} + \mathcal{E} z \cos \omega t \quad (7.21)$$

(в этом разделе используется система единиц $e, \hbar, m = 1$). Возможность рассматривать высоковозбужденный атом водорода (главное квантовое число $n \gg 1$) как классическую систему, а процесс ионизации в поле частоты $\omega \ll \ll n^{-2}$ — как следствие диффузии по энергетическим уровням (по переменной действия $I = n\hbar$) была впервые отмечена Леопольдом и Персивалем⁴⁹ и использовалась во многих работах (см. обзор¹⁰³).

Многие важные особенности (7.21) сохраняются и для более простой системы с одной степенью свободы у H_0 :

$$H = \frac{1}{2} p_z^2 - \frac{1}{z} + \mathcal{E} z \cos \omega t \quad (z \geq 0). \quad (7.22)$$

Такая модель может описывать эволюцию системы (7.21), если начальное состояние обладает параболическими квантовыми числами $n_1 \gg n_2 \sim 1$, $m = 0$.

Классическая теория предсказывает^{103,159}, что для системы (7.22) при значении напряженности поля \mathcal{E} , превосходящем критическое значение \mathcal{E}_c ,

$$\mathcal{E}_c \approx \frac{1}{50} n_0^{-5} \omega^{-1/3} \quad (7.23)$$

(n_0 — главное квантовое число начального состояния), возникает диффузия по уровням с зависящим от n коэффициентом

$$D \approx 2\mathcal{E}^2 n^3 \omega^{-7/3}, \quad (7.24)$$

приводящая к ионизации атома за время порядка $\tau_I \sim (n_0^2 D)^{-1}$ (формулы (7.23) и (7.24) получены в предположении $\tilde{\omega} \equiv \omega n_0^3 \geq 1$). Возникающее в квантовой механике ограничение по времени на применимость классических законов эволюции средних (см. раздел 2.2) естественно приводит к вопросу: при каких условиях процесс ионизации в модели (7.22) можно описывать классической теорией? Вопрос о квантовых поправках к стохастической ионизации был поставлен в⁹⁷.

Качественно ситуация ясна. С одной стороны, в описанной системе диффузия по уровням возможна (при $\tilde{\omega} \geq 1$), если амплитуда переменного поля \mathcal{E} превосходит квантовый порог локализации^{142,213}

$$\mathcal{E}_q \approx 0,4 n_0^{-1} \omega^{7/6} \quad (7.25)$$

С другой — в системе описанного типа ионизация в квантовом случае возможна, во-первых, за счет прямых многофотонных переходов в континуум, а во-вторых, за счет многофотонных переходов из n_0 в состояния с n достаточно большими, чтобы обеспечить глобальную стохастичность и последующую классическую ионизацию (ср. «туннелирование через сепаратрису» в разделе 7.2). Роль многофотонных переходов в динамике ионизации системы (7.22) рассматривалась в^{142,176,192}. В зависимости от сочетания параметров доминирующим механизмом ионизации могут стать как диффузия по уровням (допускающая классическое описание), так и чисто квантовые способы возбуждения.

Первые экспериментальные данные по возбуждению СВЧ-полем атомов водорода, поляризованных дополнительным постоянным электрическим полем \mathcal{E}_s (что приводило к эффективно одномерной геометрии движения электрона), были получены Бейфилдом и Пиннадуваге в 1984 г.¹⁷⁷. При значениях параметров $n_0 = 60$, $\tilde{\omega} = 0,19 - 0,26$ и $\mathcal{E} \gtrsim 10\mathcal{E}_c$ распределение по уровням атомов, возбуждавшихся полем в течение времени $T = 3,7 \cdot 10^{-7}$ с, имело гладкий, нерезонансный характер, что было истолковано как признак

диффузии по уровням. Порог ионизации в два раза отличался от найденного в классическом подходе: расхождение может быть приписано вкладу 4- и 5-фотонных переходов¹⁷⁶. Последующие эксперименты ван Леевена и др.²⁰⁷

($n_0 = 32 - 74$, $\tilde{\omega} = 0,05 - 0,6$; $\mathcal{E} \gtrsim 10\mathcal{E}_c$) показали хорошее согласие значения порога ионизации (соответствующего ионизации за фиксированное время 10% атомов) с результатами расчетов по классической модели¹⁵⁹. Такое согласие может быть объяснено близостью порогов классической глобальной стохастичности и существенной делокализации квазиэнергетических ВФ в условиях таких экспериментов²⁰⁹. При других значениях параметров квантовые эффекты могут быть существенны.

Другим объектом, к которому приложимо описание гамильтонианом (7.22), является электрон над поверхностью жидкого гелия⁵³ в переменном поле. Возможность использования такой системы для изучения квантового хаоса была указана в⁹⁷. Поведение электрона над поверхностью жидкого гелия при импульсном возбуждении (в (7.22) $\cos \omega t$ заменяется на $\tilde{\delta}(t)$) теоретически исследовалось в^{137,138}. Дополнительной по сравнению с атомом водорода чертой является возможность наложения статического электрического поля (добавление в гамильтониан (7.22) члена $V_s = \mathcal{E}_s z$), прижимающего электроны к поверхности и ограничивающего возможность ионизации. Классические и квантовые расчеты свойств такой системы проведены в^{132,173}. Показано, что в доступной эксперименту области параметров возможно появление нелинейных резонансов, захватывающих большое число уровней ($C \sim 10^3$), что позволяет изучать свойства квантового хаоса в сильно квазиклассическом режиме. Соответствующие эксперименты, однако, еще не проделаны.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОЧЕРЕДНЫЕ ЗАДАЧИ

Проблема квантового хаоса в настоящее время далеко не исчерпана. Число N , посвященных этой проблеме статей, публикуемых за год, растет со времени ее постановки по закону $N \sim \exp(\lambda t)$, где $\lambda = 0,23 \text{ год}^{-1}$. Такое значение λ много больше показателя роста всего массива научных публикаций ($\lambda = 0,046 \text{ год}^{-1}$,¹⁰), но близко к показателю роста дешевизны компьютерных расчетов ($\lambda = 0,25 \text{ год}^{-1}$,¹⁷²). Это не удивительно: большая часть (около 70 % цитированных в обзоре) работ посвящена изучению КХС в числовых экспериментах. Быстрое накопление числовых данных имеет в основном экстенсивный характер (рассматриваются все новые модели КХС) и отчасти обесценивается наиболее распространенной формой представления результатов, апеллирующей к глазомеру и фиксирующей лишь качественные характеристики. Достаточно сказать, что до 1985 г. в статьях по проблеме квантового хаоса для проверки гипотез не привлекались статистические критерии: критерий χ^2 в контексте проблемы был впервые использован в^{180,201}. Поэтому ближайшей очередной задачей должен стать переход от качественного к количественному описанию свойств КХС, а это требует ответа на вопрос:

8.1. Какие параметры описывают квантовый хаос?

Дальнейшее продвижение в численном исследовании свойств КХС требует введения хороших параметров. Обратимся к примеру функции распределения междууровневых интервалов $P(S)$, которая является наиболее подробно исследованной характеристикой спектра КХС. При $\mu \ll 1$ параметры β , μ_q и a (см. раздел 3.2.1) хорошо коррелируют с долей фазового пространства μ , занятой стохастическими траекториями. Но ни в одном случае нельзя установить функциональной связи $\xi(\mu)$, ибо эти величины получаются сравнением $P(S)$ с функциями определенного семейства, в то время как вопрос о принадлежности $P(S)$ этому семейству не решен.

Для свободной от гипотез параметризации $P(S)$ нужна величина, которая должна: 1) быть имманентной характеристикой массива числовых значений энергетических уровней; 2) иметь интегральный характер и допускать вычисление с высокой точностью при современных объемах серий \mathcal{N} ; 3) быть чувствительной к отталкиванию уровней.

Использование в качестве параметров $P(S)$ моментов M_n .

$$M_n = \int_0^\infty S^n P(S) dS, \quad (8.1)$$

предложенное в ^{131,167,191}, неэффективно. Моменты полностью удовлетворяют первому требованию, с трудом — второму (поскольку M_n , особенно высшие — до M_8 в ¹⁹¹ — будут определяться максимальными S , имеющими флуктуационный характер), и совершенно не удовлетворяют третьему.

Поставленным требованиям лучше удовлетворяет величина Λ , определенная для заданного $P(S)$ выражением

$$\Lambda = \int_0^\infty \ln S \cdot P(S) dS + C. \quad (8.2)$$

Отметим сходство Λ с параметром $Q(n)$ в статистической теории спектров ⁷². Постоянная Эйлера $C = 0,5772$ добавлена в правую часть (8.2) для того, чтобы для пуассоновского распределения получалось $\Lambda = 0$. Для распределения Вигнера $\Lambda = 0,409$. При $\mathcal{N} = 500$ величина Λ будет определяться с абсолютной ошибкой $\Delta\Lambda \leq 10^{-2}$. Для сравнения укажем, что при таком же \mathcal{N} параметр Броди β вычисляется с ошибкой, на порядок большей ^{153,205}.

Не решена задача параметризации свойств волновых функций. Как отмечалось в разделе 4, сложность C_n недостаточна для описания свойств СФ ψ_n : нужна еще характеристика степени случайности коэффициентов a_{nm} . Так же обстоят дела и с параметризацией свойств матричных элементов произвольных операторов и эволюцией волновых пакетов.

Ясно, что до установления в этих подходах хороших параметров не может быть и речи о выявлении количественной связи квантового хаоса и классической стохастичности. В рамках же наиболее продвинутого на сегодняшний день подхода к проблеме квантового хаоса, основанного на изучении структуры энергетического спектра, где параметры так или иначе определены, очередным представляется вопрос:

8.2. Универсальна ли модель ГОА?

Как показано в разделе 3, многие числовые расчеты подтверждают близость свойств спектров сильно стохастических КХС и спектров матриц ГОА. Однако имеются контрпримеры, не позволяющие считать такую близость универсальным свойством КХС.

Не вполне ясен вопрос и о структуре спектра атома водорода в сильном магнитном поле \mathcal{H} . Найденная в работе ⁶⁵ зависимость $E_n(\mathcal{H})$ в области стохастического классического движения представляет регулярную картину уровней с экспоненциально малыми расщеплениями при квазипересечениях ($\Delta \sim \exp(-\alpha n)$, где n — главное квантовое число), схожую с картиной спектра интегрируемых систем ^{88,230}. Распределение $P(S)$ при этом и в стохастическом случае схоже с пуассоновским ¹⁹⁹.*) Попытка связать величину расщеплений со свойствами стохастичности классической системы принималась в ⁷³.

*) В более поздней работе ²³⁵ было показано, что с ростом квазиклассичности системы эти особенности исчезают. Расчеты с числом уровней $\mathcal{N} \geq 10^3$ доказали переход $P(S)$ от пуассоновского распределения к вигнеровскому и, кроме того, совпадение Δ , и $C(1)$ в эргодическом пределе со значениями модели ГОА.

В работе¹⁸⁴ для сильно стохастического нелинейного осциллятора было найдено распределение $P(S)$, имеющее большой пик при $S \rightarrow 0$. Этот результат основан на недоразумении: утверждение о вигнеровском характере

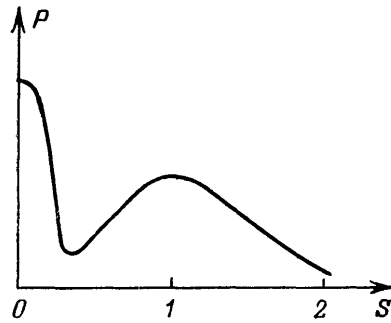


Рис. 22. Качественный вид функции распределения междууровневых расстояний $P(S)$ в стохастической системе при слабом нарушении дискретной симметрии

$P(S)$ относится к серии уровней с одинаковыми *точными* квантовыми числами, а при построении $P(S)$ авторы¹⁸⁴ ошибочно учли двукратно вырожденные состояния, относящиеся к разным сериям. Однако сколь угодно малое возмущение, разрушающее точную симметрию гамильтониана, приведет к малому расщеплению вырожденных уровней и двугорбому виду $P(S)$. В то же время параметры стохастичности классического движения существенно не изменятся (рис. 22).

Возможность избытка близких уровней при экспоненциально малом расщеплении, связанном с туннелированием между классически изолированными областями, обсуждалась в¹²¹.

С другой стороны, можно указать интегрируемые системы, которым свойственно отталкивание уровней. Например, для гамильтониана с двумя степенями свободы

$$H = \frac{\omega}{2} \{I_1 + I_2 + [(I_1 + I_2)^2 + 4\hbar I_1]^{1/2}\} \quad (8.3)$$

(I_i — переменные действия) квазиклассический спектр, полученный заменой $I_i = n_i \hbar$, $n_i \geq 0$, имеет вид

$$E(n_1, n_2) = \frac{\hbar \omega}{2} \{n_1 + n_2 + [(n_1 + n_2)^2 + 4n_1]^{1/2}\}. \quad (8.4)$$

Этот спектр обладает абсолютным отталкиванием уровней *):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(S) = \delta(S - 1). \quad (8.5)$$

Представленные контрпримеры показывают, что всеобщая связь между видом $P(S)$ и стохастичностью движения классической системы отсутствует. Способ борьбы с контрпримерами известен: они должны быть сделаны локальными (противоречащими отдельным леммам доказательства) и исключены оговорками в условиях теоремы¹¹. Применительно к проблеме структуры энергетического спектра КХС этот способ ставит задачу определения условий, в которых справедливы критерии **A2**, **A3** и **A4**. У этой задачи есть и другой аспект, связанный с вопросом:

8.3. Какова роль σ в квантовом хаосе?

В настоящее время принято считать, что переход структуры спектра КХС между предельными формами связан с изменением μ , но не σ . Главным аргументом против зависимости от σ является близость спектра многих систем с $\mu \approx 1$ к спектрам ГОА²⁰². Против этого аргумента есть два возражения. Во-первых, как отмечалось выше, такая близость не является всеобщим свойством КХС. Во-вторых, в работах^{153,167} изменение структуры энергетического спектра КХС (рост параметра Броди β распределения $P(S)$) отмечалось и в области, где классическое движение оставалось эргодическим ($\mu = 1$), но показатель Ляпунова σ продолжал расти.

*) Этот результат не противоречит положению **A2**-а, так как при $\hbar \rightarrow 0$ гамильтониан (8.3) выходит из класса систем общего вида. Заметим также, что в⁹⁸ спектр со свойством (8.5) рассматривался как атрибут предельно хаотической квантовой системы.

Выявление зависимости (или доказательство независимости) спектральных свойств КХС от σ требует исследования спектров однопараметрических семейств эргодических ($\mu = 1$) биллиардов и двухпараметрических семейств нелинейных осцилляторов, в которых возможно независимое изменение μ и σ . Весьма удобной представляется также модель КСРТ при дополнительном условии периодичности по I ^{181,217}, так как для нее показатель σ ведет себя как $\sigma \approx \ln(K/2)$ при $K \gg 1$ и может быть сделан сколь угодно большим. Такие расчеты до настоящего времени не проделаны.

* * *

В настоящее время изучение проблемы квантового хаоса концентрируется вокруг большого массива данных компьютерных расчетов, относящихся к разнообразным физическим системам и в целом взаимно согласующихся. Характер отличий квантовых свойств хаотических и регулярных систем (в особенности свойств их энергетических спектров) установлен этими расчетами весьма основательно. В целом сегодня лучше поняты свойства эргодических систем, чем характер изменения параметров при переходе от регулярного к эргодическому движению. В будущем от компьютерных расчетов можно ожидать наряду с «квантификацией» описания результатов и продвижением к более квазиклассическим ($\hbar \leq 10^{-3}$) системам возрастания активности в исследовании систем с числом степеней свободы $N \geq 3$.

В теоретическом подходе можно констатировать наличие качественного понимания большинства основных свойств КХС. Многое достигнуто на уровне полуколичественных оценок, удовлетворительно согласующихся с результатами числовых расчетов. Важную роль при этом играет эвристика случайности волновых функций и матричных элементов простых операторов для сильно стохастических систем, позволяющая привлечь идеи и методы теории случайных матриц. Однако описание количественное, тем более основанное на первых принципах, пока доступно только для небольшого числа разрозненных параметров особо простых моделей. Возможность продвижения в теоретическом описании КХС представляется связанной с параллельным развитием методов вычисления характеристик стохастического движения (σ и μ) в классических системах.

Наконец, экспериментальное исследование свойств квантового хаоса значительно отстает от численного и теоретического и находится, по существу, на начальном этапе. Трудности на этом пути кажутся техническими, но имеют источником принципиальный момент: квантовый хаос является асимптотическим свойством, поэтому его изучение сводится к определению квантовых характеристик систем, сугубо близких к классическим, — откуда вытекают высокие требования к точности эксперимента. Имеющийся теоретический задел позволяет предположить, что в ближайшем будущем усилия экспериментаторов будут сосредоточены на исследовании стохастической ионизации, динамики системы левитирующих электронов и свойств высоковозбужденных состояний атомов в сильном магнитном поле.

Автор благодарит Л. В. Келдыша и Д. Н. Клышко за полезные обсуждения и Н. С. Маслову за помощь в информационном обеспечении настоящего обзора.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ *)

1. Wigner E. P. // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
2. Bocchieri P., Loinger A. // Ibidem. 1957. V. 107. P. 337.
3. Anderson P. W. // Ibidem. 1958. V. 109. P. 1492.

*) Обзор литературы доведен до июня 1986 г. включительно. Источники идут по годам публикации.

4. Mott N. F., Twose M. D.//Adv. Phys. 1961. V. 10. P. 107.
5. Percival I. C.//J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 235.
6. Thiele E., Wilson D. J.//J. Chem. Phys. 1961. V. 35. P. 1256.
7. Синай Я. Г.//ДАН СССР. 1963. Т. 153. С. 1261.
8. Непон М., Heiles C.//Astron. J. 1964. V. 69. P. 73.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.— М.: Наука, 1965.
10. Прайс Д.//Наука о науке/Пер. с англ. под ред. В. Н. Столетова.— М.: Прогресс, 1966.— С. 236.
11. Лакатос И. Доказательства и опровержения.— М.: Наука, 1967.
12. Mehta M. L. Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels.— New York; London: Academic Press, 1967.
13. Lloyd P.//J. Phys. Ser. C. 1969. V. 2. P. 1717.
14. Синай Я. Г.//УМН. 1970. Т. 25, вып. 2. С. 141.
15. Bell R. J., Dean P.//Disc. Faraday Soc. 1970. V. 50. P. 55.
16. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.— М.: Наука, 1971.— Гл. VI.
17. Пухов Н. М., Чернавский Д. С.//ТМФ. 1971. Т. 7. С. 219.
18. Thouless D. J.//J. Phys. Ser. C. 1972. V. 5. P. 77.
19. Заславский Г. М., Филоненко Н. Н.//ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 643.
20. Brody T. A.//Lett. Nuovo Cimento. 1973. V. 7. P. 482.
21. Percival I. C.//J. Phys. Ser. B. 1973. V. 6. P. L229.
22. Бунимович Л. А.//Функц. анал. прил. 1974. Т. 8. С. 73.
23. Eastes W., Marcus R. A.//J. Chem. Phys. 1974. V. 61. P. 4301.
24. Nordholm K. S. J., Rice S. A.//Ibidem. P. 203. 768.
25. Pomphrey N.//J. Phys. Ser. B. 1974. V. 7. P. 1909.
26. Thouless D. J.//Phys. Rep. 1974. V. 13. P. 93.
27. Сазонов В. Н., Финкельштейн В. Ю.//ДАН СССР. 1976. Т. 231. С. 78.
28. Шурык Э. В.//ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 2039.
29. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M.//Phys. Rev. Ser. A. 1976. V. 14. P. 2338.
30. Акулин В. М., Алимпиев С. С., Карлов Н. В., Сартаков Б. Г.//ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 88.
31. Заславский Г. М.//Ibidem. Т. 73. С. 2089.
32. Berman G. P., Zaslavsky G. M.//Phys. Lett. Ser. A. 1977. V. 61. P. 295.
33. Berry M. V.//J. Phys. Ser. A. 1977. V. 10. P. 2083.
34. Berry M. V.//Phil. Trans. Roy. Soc. A. 1977. V. 287. P. 237.
35. Berry M. V., Tabor M.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1977. V. 365. P. 375.
36. Израйлев Ф. М., Шепелянский Д. Л.//Препринт ОЯФ СО АН СССР 78-97.— Новосибирск, 1978.
37. Сазонов В. Н.//ТМФ. 1978. Т. 35. С. 361.
38. Соколов В. В.//Препринт ИЯФ СО АН СССР 78-50.— Новосибирск, 1978.
39. Эфрос А. Л.//УФН. 1978. Т. 126. С. 41.
40. Berman G. P., Zaslavsky G. M.//Physica Ser. A. 1978. V. 91. P. 450.
41. Benettin G., Strelcyn J.-M.//Phys. Rev. Ser. A. 1978. V. 17. P. 773.
42. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1979.
43. Заславский Г. М.//УФН. 1979. Т. 129. С. 211.
44. Berman G. P., Zaslavsky G. M.//Physica. Ser. A. 1979. V. 97. P. 367.
45. Chirikov B. V.//Phys. Rept. 1979. V. 52. P. 263.
46. Casati G., Chirikov B. V., Izrailev F. M., Ford J.//Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems/Eds G. Casati, J. Ford.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979.— P. 334.
47. Greene J. M.//J. Math. Phys. 1979. V. 20. P. 1183.
48. Heller E. J.//Chem. Phys. Lett. 1979. V. 60. P. 338.
49. Leopold J. G., Percival I. C.//J. Phys. Ser. B. 1979. V. 12. P. 709.
50. McDonald S. W., Kaufman A. N.//Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1189.
51. Stratt R. M., Handy C. N., Miller W. H.//J. Chem. Phys. 1979. V. 71. P. 3311.
52. Израйлев Ф. М., Шепелянский Д. Л.//ТМФ. 1980. Т. 43. С. 413.
53. Эдельман В. С.//УФН. 1980. Т. 130. С. 675.
54. Brumer P., Shapiro M.//Chem. Phys. Lett. 1980. V. 72. P. 528.
55. Casati G., Valz-Gris F., Guarneri I.//Lett. Nuovo Cimento. 1980. V. 28. P. 279.
56. Davis M. J., Stechel E. B., Heller E. J.//Chem. Phys. Lett. 1980. V. 76. P. 21.
57. Heller E. J.//J. Chem. Phys. 1980. V. 72. P. 1337.

58. Heller E. J., Stechel E. B., Davis M. J.//*Ibidem*. V. 73. P. 4720.
59. Hutchinson J. S., Wyatt R. E.//*Chem. Phys. Lett.* 1980. V. 72. P. 378.
60. Kay K. G.//*J. Chem. Phys.* 1980. V. 72. P. 5955.
61. Noid D. W., Koszykowski M. L., Marcus R. A.//*Chem. Phys. Lett.* 1980. V. 73. P. 269.
62. Noid D. W., Koszykowski M. L., Tabor M., Marcus R. A.//*J. Chem. Phys.* 1980. V. 72. P. 6169.
63. Waite B. A., Miller W. H.//*Ibidem*. V. 73. P. 3713.
64. Yonezawa F.//*J. Non-Cryst. Sol.* 1980. V. 35—36. P. 29.
65. Zimmerman M. L., Kash M. M., Kleppner D.//*Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 1092.
66. Берман Г. П., Заславский Г. М., Коловский А. Р.//*ЖЭТФ*. 1981. Т. 81. С. 506.
67. Матинян С. Г., Саввиди Г. К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н. Г.//*Письма ЖЭТФ*. 1981. Т. 34. С. 613.
68. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л.//*Ibidem*. С. 171.
69. Шепелянский Д. Л.//*ДАН СССР*. 1981. Т. 256. С. 586.
70. Шепелянский Д. Л.//*ТМФ*. 1981. Т. 49. С. 117.
71. Berry M. V.//*Ann. of Phys.* 1981. V. 131. P. 163.
72. Brody T. A., Flores J., French J. B. et. al.//*Rev. Mod. Phys.* 1981. V. 53. P. 385.
73. Delande D., Gay J. C.//*Phys. Lett. Ser. A*. 1981. V. 82. P. 393.
74. Hutchinson J. S., Wyatt R. E.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1981. V. 23. P. 1567.
75. Pullen R. A., Edmonds A. R.//*J. Phys. Ser. A*. 1981. V. 14. P. L319.
76. Pullen R. A., Edmonds A. R.//*Ibidem*. P. L477.
77. Ramaswamy R., Marcus R. A.//*J. Chem. Phys.* 1981. V. 74. P. 1379.
78. Richens P. J., Berry M. V.//*Physica. Ser. D*. 1981. V. 2. P. 495.
79. Waite B. A., Miller W. H.//*J. Chem. Phys.* 1981. V. 74. P. 3910.
80. Weissman Y., Jortner J.//*Chem. Phys. Lett.* 1981. V. 78. P. 224.
81. Zaslavsky G. M.//*Phys. Rept.* 1981. V. 80. P. 157.
82. Апенко С. М., Киржниц Д. А., Лозовик Ю. Е.//*Письма ЖЭТФ*. 1982. Т. 36. С. 172.
83. Berman G. P., Zaslavsky G. M.//*Physica. Ser. A*. 1982. V. 111. P. 17.
84. Berman G. P., Zaslavsky G. M., Kolovsky A. R.//*Phys. Lett. Ser. A*. 1982. V. 87. P. 152.
85. Bixon M., Jortner J.//*J. Chem. Phys.* 1982. V. 77. P. 4175.
86. Buch V., Gerber R. B., Ratner M. A.//*Ibidem*. V. 76. P. 5397.
87. Edmonds A. R., Pullen R. A., Percival I. C.//*Chem. Phys. Lett.* 1982. V. 91. P. 273.
88. Farrelly D., Reinhardt W. P.//*J. Chem. Phys.* 1982. V. 78. P. 606.
89. Fishman S., Grempe D. R., Prange R. E.//*Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. P. 509.
90. Grempe D. R., Fishman S., Prange R. E.//*Ibidem*. P. 833.
91. Gutzwiller M. C.//*Physica. Ser. D*. 1982. V. 5. P. 183.
92. Heller E. J., Davis M. J.//*J. Phys. Chem.* 1982. V. 86. P. 2118.
93. Heller E. J., Stechel E. B.//*Chem. Phys. Lett.* 1982. V. 90. P. 484.
94. Hietarinta J.//*Phys. Lett. Ser. A*. 1982. V. 93. P. 55.
95. Hogg T., Huberman B. A.//*Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 711.
96. Hose G., Taylor H. S.//*J. Chem. Phys.* 1982. V. 76. P. 5356.
97. Jensen R. V.//*Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. P. 1365.
98. Pechukas P.//*Chem. Phys. Lett.* 1982. V. 86. P. 553.
99. Peres A.//*Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. P. 1118.
100. Shapiro M., Brumer P.//*Chem. Phys. Lett.* 1982. V. 90. P. 481.
101. Shapiro M., Child M. S.//*J. Chem. Phys.* 1982. V. 76. P. 6176.
102. Weissman Y., Jortner J.//*Ibidem*. V. 77. P. 1469, 1486.
103. Делоне Н. Б., Крайнов В. П., Шепелянский Д. Л.//*УФН*. 1983. Т. 140. С. 355.
104. Татарский В. И.//*Ibidem*. Т. 139. С. 587.
105. Bai Y. Y., Hose G., McCurdy C. W., Taylor H. S.//*Chem. Phys. Lett.* 1983. V. 99. P. 342.
106. Berman G. P., Kolovsky A. R.//*Phys. Lett. Ser. A*. 1983. V. 95. P. 15.
107. Berry M. V., Hannay J. H., Ozorio de Almeida A. M.//*Physica. Ser. D*. 1983. V. 8. P. 229.
108. Camarda H. S., Georgopoulos P. D.//*Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 50. P. 492.
109. Casati G., Guarneri I.//*Ibidem*. P. 640.

110. Haller E., Köppel H., Cederbaum L. S.//Chem. Phys. Lett. 1983. V. 101. P. 215.
111. Hogg T., Huberman B. A.//Phys. Rev. Ser. A. 1983. V. 28. P. 22.
112. Hose G., Taylor H. S.//J. Chem. Phys. 1983. V. 78. P. 5845.
113. Hose G., Taylor H. S.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 947.
114. Inozemtsev V. I.//Phys. Lett. Ser. A. 1983. V. 96. P. 447.
115. Kay K. G.//J. Chem. Phys. 1983. V. 79. P. 3026.
116. Korsch H. J.//Phys. Lett. Ser. A. 1983. V. 97. P. 77.
117. Moiseyev N., Peres A.//J. Chem. Phys. 1983. V. 79. P. 5945.
118. Mukamel S.//Ibidem. V. 78. P. 5843.
119. Noid D., Koszykowski M. L., Marcus R. A.//Ibidem. P. 4018.
120. Pechukas P.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 943.
121. Pechukas P.//J. Chem. Phys. 1983. V. 78. P. 3999.
122. Ramaswamy R.//Chem. Phys. 1983. V. 76. P. 15.
123. Robnik M.//J. Phys. Ser. A. 1983. V. 16. P. 3971.
124. Schuster H. G.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 28. P. 443.
125. Shepelyansky D. L.//Physica. Ser. D. 1983. V. 8. P. 208.
126. Taylor R. D., Brumer P.//Farad. Disc. Chem. Soc. 1983. V. 75. P. 170.
127. Uzer T., Noid D. W., Marcus R. A.//J. Chem. Phys. 1983. V. 79. P. 4412.
128. Елютин П. В. Препринт физического ф-та МГУ № 24/1984.— Москва, 1984.
129. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
130. Лухтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.
131. Benjamin I., Buch V., Gerber R. B., Levine R. D.//Chem. Phys. Lett. 1984. V. 107. P. 515.
132. Berman G. P., Kolovsky A. R., Zaslavsky G. M.//Phys. Lett. Ser. A. 1984. V. 105. P. 483.
133. Berry M. V.//Physica. Ser. D. 1984. V. 10. P. 369.
134. Berry M. V.//Phys. Lett. Ser. A. 1984. V. 104. P. 306.
135. Berry M. V., Robnik M.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 2413.
136. Berry M. V., Wilkinson M.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1984. V. 392. P. 15.
137. Blumel R., Smilansky U.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 137.
138. Blumel R., Smilansky U.//Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 30. P. 1040.
139. Bohigas O., Giannoni M. J., Schmit C.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1.
140. Brickmann J., Schmidt P. C.//Chem. Phys. Lett. 1984. V. 104. P. 591.
141. Carnegie A., Percival I. C.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 801.
142. Casati G., Chirikov B. V., Shepelyansky D. L.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 2525.
143. Casati G., Guarneri I.//Comm. Math. Phys. 1984. V. 95. P. 121.
144. Davis M. J., Heller E. J.//J. Chem. Phys. 1984. V. 80. P. 5036.
145. De Leon N., Davis M. J., Heller E. J.//Ibidem. P. 794.
146. Dorizzi B., Grammaticos B., Pomeau Y.//J. Stat. Phys. 1984. V. 37. P. 93.
147. Farrelly D.//Phys. Lett. Ser. A. 1984. V. 104. P. 63.
148. Feingold M., Moiseyev N., Peres A.//Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 30. P. 509.
149. Graham R., Höhnnerbach M.//Phys. Lett. Ser. A. 1984. V. 101. P. 61.
150. Grempe D. R., Fishman S., Prange R. E.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1212.
151. Grempe D. R., Prange R. E., Fishman S.//Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 29. P. 1639.
152. Guarneri I.//Lett. Nuovo Cimento. 1984. V. 40. P. 171.
153. Haller E., Köppel H., Cederbaum L. S.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1665.
154. Heller E. J.//Ibidem. V. 53. P. 1515.
155. Hanson J. D., Ott E., Antonsen T. M., Jr. //Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 29. P. 819.
156. Hirooka H., Yotsuya Y., Kobayashi Y., Saito N.//Phys. Lett. Ser. A. 1984. V. 101. P. 115.
157. Hose G., Taylor H. S., Bai Y. Y.//J. Chem. Phys. 1984. V. 80. P. 4363.
158. Hose G., Taylor H. S., Tip A.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 1209.
159. Jensen R. V.//Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 30. P. 386.
160. Matsushita T., Terasaka T.//Chem. Phys. Lett. 1984. V. 105. P. 511.

161. Meyer H.-D., Haller E., Köppel H., Cederbaum L. S.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L831.
162. Ott E., Antonsen T. M., Jr., Hanson J. D.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 2187.
163. Pechukas P.//J. Phys. Chem. 1984. V. 88. P. 4823.
164. Peres A.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1711.
165. Peres A.//Phys. Rev. Ser. A. 1984. V. 30. P. 504.
166. Peres A.//Ibidem P. 1610.
167. Robnik M.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 1049.
168. Seligman T. H., Verbaarschot J. J. M., Zirnbauer M. R.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 215.
169. Shapiro M., Goelman G.//Ibidem. P. 1717.
170. Shapiro M., Taylor R. D., Brumer P.//Chem. Phys. Lett. 1984. V. 106. P. 325.
171. Thiele E., Stone J.//J. Chem. Phys. 1984. V. 80. P. 5187.
172. Андрианов А. Н., Бабенко К. И., Забродин А. В. и др.//Вычислительные процессы и системы /Под ред. Г. И. Марчука.— М.: Наука, 1985.— Вып. 2. С. 13.
173. Берман Г. П., Заславский Г. М., Коловский А. Р.//ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 1551.
174. Богомольный Е. Б.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 55.
175. Bai Y. Y., Hose G., Stefanski K., Taylor H. S.//Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 31. P. 2821.
176. Bardsley J. N., Sundaram B.//Ibidem. V. 32. P. 689.
177. Bayfield J. E., Pinnaduwa L. A.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 313.
178. Berman G. P., Kolovsky A. R.//Physica. Ser. D. 1985. V. 17. P. 183.
179. Brickmann J., Levine R. D.//Chem. Phys. Lett. 1985. V. 120. P. 252.
180. Casati G., Chirikov B. V., Guarneri I.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1350.
181. Chang S.-J., Shi K.-J.//Ibidem. V. 55. P. 269.
182. Chirikov B. V.//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 108. P. 68.
183. Christoffel K. M., Brumer P.//Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 31. P. 3466.
184. Deng Z., Hioe F. T.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1539.
185. Farantos S. C., Tennyson J.//J. Chem. Phys. 1985. V. 82. P. 800.
186. Feingold M.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2626.
187. Feingold M., Fishman S., Greppe D. R., Prange R. E.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 6852.
188. Feingold M., Peres A.//Ibidem. Ser. A. 1985. V. 31. P. 2472.
189. Frahm H., Mikeska H. J.//Zs. Phys. Kl. B. 1985. Bd 60. S. 117.
190. Helton J. W., Tabor M.//Physica. Ser. D. 1985. V. 14. P. 409.
191. Ishikawa T., Yukawa T.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1617.
192. Jensen R. V.//Ibidem. P. 2057.
193. Kus M.//Ibidem. P. 1343.
194. Lanza E. G., Kwong N. H., Ibarra R. H.//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 107. P. 149.
195. Mayer I. L., Miranda L. C. M., Tong B. Y., Galvao R. M. O.//J. Phys. Ser. B. 1985. V. 18. P. 3835.
196. Nakamura K., Nakahara Y., Bishop A. R.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 861.
197. Petrosky T. Y., Schieve W. C.//Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 31. P. 3907.
198. Razavy M.//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 113. P. 297.
199. Reinhardt W. P.//Chaotic Behavior in Quantum Systems. Theory and Applications/Ed. G. Casati.— New York: Plenum Press, 1985.— P. 235.
200. Seligman T. H., Verbaarschot J. J. M.//J. Phys. Ser. A. 1985. V. 18. P. 2227.
201. Seligman T. H., Verbaarschot J. J. M.//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 108. P. 183.
202. Seligman T. H., Verbaarschot J. J. M., Zirnbauer M. R.//J. Phys. Ser. A. 1985. V. 18. P. 2751.
203. Steeb W.-H., Villet C. M., Kunick A.//Ibidem. P. 3269.
204. Steeb W.-H., Villet C. M., Kunick A.//Phys. Rev. Ser. A. 1985. V. 32. P. 1232.
205. Terasaka T., Matsushita T.//Ibidem. P. 538.
206. Toda M., Ikeda K.//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 110. P. 235.
207. Van Leeuwen K. A. H., Oppen G. v., Renwick S. et. al.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2231.
208. Yukawa T.//Ibidem. V. 54. P. 1883.

209. Bardsley J. N., Sundaram B., Pinnaduwa L. A., Bayfield J. E.//*Ibidem*. 1986. V. 56. P. 1007.
210. Berry M. V., Robnik M.//*J. Phys. Ser. A*. 1986. V. 19. P. 649.
211. Berry M. V., Robnik M.//*Ibidem*. P. 1365.
212. Bhattacharya K., Mukherjee D.//*J. Chem. Phys.* 1986. V. 84. P. 3212.
213. Casati G., Chirikov B. V., Guarneri I., Shepelyansky D. L.//*Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 2437.
214. Christoffel K. M., Brumer P.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1986. V. 33. P. 1309.
215. Furusawa T.//*Prog. Theor. Phys.* 1986. V. 75. P. 59.
216. Hioe F. T., Deng Z.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1986. V. 34. P. 3539.
217. Izrailev F. M.//*Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 541.
218. Jose J. V., Cordero R.//*Ibidem*. P. 290.
219. Lozada A., Torres P. L.//*J. Phys. Ser. A*. 1986. V. 19. P. L237.
220. Meyer H.-D.//*J. Chem. Phys.* 1986. V. 84. P. 3147.
221. Nakamura K., Bishop A. R.//*Phys. Rev. Ser. B*. 1986. V. 33. P. 1963.
222. Pomeau Y., Dorizzi B., Grammaticos B.//*Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 681.
223. Reichl L. E., Lin W. A.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1986. V. 33. P. 3598.
224. Robnik M., Berry M. V.//*J. Phys. Ser. A*. 1986. V. 19. P. 669.
225. Samuelides M., Fleckinger R., Touzillier L., Bellisard J.//*Europhys. Lett.* 1986. V. 1. P. 203.
226. Seligman T. H., Verbaarschot J. J.//*Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 2767.
227. Shepelyansky D. L.//*Ibidem*. P. 677.
228. Steeb W.-H., Louw J. A., Villet C. M.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1986. V. 34. P. 3489.
229. Takahashi K.//*J. Phys. Soc. Japan*. 1986. V. 55. P. 1443.
230. Wintgen D., Friedrich H.//*J. Phys. Ser. B*. 1986. V. 19. P. 1261.
231. Yukawa T.//*Phys. Lett. Ser. A*. 1986. V. 116. P. 227.
232. Zimmerman Th., Meyer H.-D., Köppel H., Cederbaum L. S.//*Phys. Rev. Ser. A*. 1986. V. 33. P. 4334.
233. Моль А., Фукс В., Касслер М. Искусство и ЭВМ.— М.: Мир, 1975.— С. 303—309.
234. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике.— М.: Мир, 1966.— Вып. 5. С. 25.
235. Delande D., Gay J. C.//*Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 57. P. 2006.