

538.941

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ГЕЛИЯ II ВБЛИЗИ λ -ТОЧКИ*)

В. Л. Гинзбург. А. А. Собянин

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	545
2. Основы Ψ -теории сверхтекучести (покоящийся гелий, чисто сверхтекучее течение)	547
2.1. Макроскопическая волновая функция. 2.2. Неполный термодинамический потенциал. 2.3. Основное уравнение. 2.4. Точность Ψ -теории и ее связь с теорией группы перенормировок.	
3. Равновесные задачи (включая чисто сверхтекучее течение)	550
3.1. Размерные эффекты. 3.2. Поверхностное натяжение. 3.3. Влияние внешних полей. 3.4. Вклад ионов и примесей в термодинамические функции гелия II. 3.5. Сверхтекущие течения (при $v_n = 0$).	
4. Общая Ψ -теория сверхтекучести (учет нормального течения, диссипации и нестационарности)	558
4.1. Уравнение движения для макроскопической волновой функции. 4.2. Сила взаимного трения. 4.3. Пограничное тепловое сопротивление. 4.4. Подвижность ионов в гелии II вблизи λ -точки. 4.5. Поперечный акустический импеданс.	
5. Заключительные замечания	562
Список литературы	562

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение сверхтекучести гелия II вблизи λ -точки продолжает привлекать большое внимание в силу целого ряда причин. Одна из таких причин состоит в особенно благоприятных условиях для изучения в жидком ^4He в области вблизи λ -перехода критических флуктуационных явлений. Фактически именно это обстоятельство было основной движущей силой при проведении экспериментальных и теоретических исследований свойств гелия II вблизи λ -точки на протяжении двух последних десятилетий (см., например, ¹⁻³ и цитируемую в этих обзораах литературу).

Вторая причина неослабевающего интереса к λ -переходу в жидком ^4He заключается в том, что в области вблизи λ -точки теория сверхтекучести Ландау (включая обе ее составные части: концепцию газа элементарных возбуждений и феноменологическую двухжидкостную гидродинамику) становится неприменимой, и при решении различного рода стационарных и нестационарных задач необходимо с самого начала учитывать пространственную неоднородность и релаксацию параметра порядка — макроскопической волновой функции $\Psi = \eta e^{i\Phi}$, описывающей сверхтекучее состояние ^{4,5}.

Наконец, в самое последнее время исследования сверхтекучести гелия II вблизи λ -точки приобрели дополнительную актуальность в связи с широко

*) Доклад, сделанный на 18-й Международной конференции по физике низких температур (LT-18). Киото, Япония, август 1987 г.

обсуждаемыми сейчас механизмами высокотемпературной сверхпроводимости. Дело в том, что в металле при некоторых специфических условиях могут существовать сильно связанные двухэлектронные образования — так называемые локальные пары, отличные от обычных куперовских пар. Быть может, по крайней мере в некоторых высокотемпературных сверхпроводниках именно такие сконденсировавшиеся локальные пары переносят сверхпроводящий ток (см., например, ^{6,7}). Если это действительно так, то свойства сверхпроводников с таким механизмом сверхпроводимости должны быть очень похожи на свойства жидкого ^4He . В частности, для описания поведения сверхпроводников с локальными парами при температурах, близких к критической, обычная Ψ -теория сверхпроводимости ⁸ может оказаться неприменимой, и нужно пользоваться ее обобщенным вариантом*), аналогичным обобщенной Ψ -теории сверхтекучести жидкого ^4He ^{9,10}. Изложению состояния последней как раз и посвящена настоящая статья.

Обсуждаемая ниже обобщенная Ψ -теория сверхтекучести сочетает в себе простоту и наглядность классической (самосогласованной) теории фазовых переходов Ландау с результатами новейшей флуктуационной теории фазовых переходов, базирующейся на концепции масштабной инвариантности критических явлений и теоретико-полевом подходе с использованием группы перенормировок. При этом если соответствующий теоретико-полевой подход ¹⁻³ развит пока, в основном, лишь применительно к тем задачам, в которых параметр порядка является однородным или слабонеоднородным в пространстве, то Ψ -теория сверхтекучести ^{9,10} предназначена в первую очередь для решения задач, к которым предположение о слабости пространственных изменений параметра порядка неприменимо (распределение параметра порядка вблизи твердой стенки или у свободной поверхности гелия II, особенности λ -перехода гелия в пленках, щелях и капиллярах, вихревая нить, размытие λ -перехода в поле сил тяжести и т. п.). Таким образом, и это нам хотелось бы подчеркнуть с самого начала, флуктуационная теория ¹⁻³ и Ψ -теория сверхтекучести ^{9,10} отнюдь не противоречат, а скорее взаимно дополняют и обогащают друг друга.

Правда, в экспериментальном плане исследование эффектов, в которых неоднородность пространственного распределения параметра порядка играет существенную роль, фактически еще только начинается. Это связано как с трудностью изготовления однородных по толщине капилляров и щелей, так и с относительной малостью эффектов и необходимостью работать очень близко к T_λ . Но сейчас в этом направлении уже произошли некоторые существенные сдвиги. Так, можно упомянуть, например, об очень точных измерениях поверхностного натяжения гелия II вблизи λ -точки ^{11,12}, о количественных исследованиях λ -перехода гелия в пленках ¹³ и плоско-параллельных щелях ^{14,15}, об измерении температурной зависимости вблизи λ -точки силы взаимного трения ¹⁶ и об обнаружении ¹⁷ предсказанного теорией ^{9,10} аномального вклада в пограничное тепловое сопротивление Капицы.

Ниже, в разделе 2, мы кратко изложим основы обобщенной Ψ -теории сверхтекучести гелия II вблизи λ -точки ^{4,9,10,18} для стационарного случая при $v_n = 0$ и обсудим границы ее применимости. Далее, в разделе 3, мы приведем результаты решения ряда пространственно-неоднородных равновесных задач (таких, например, как вычисление зависимости температуры T_λ от толщины пленки d) и сопоставим их с имеющимися экспериментальными данными. Затем в разделе 4 коснемся кратко основ Ψ -теории сверхтекучести для общего случая ($v_n \neq 0$, нестационарность) и описания на ее основе некоторых неравновесных и диссипативных эффектов. Наконец, раздел 5 посвящен резюме и перечислению задач дальнейших исследований.

*) Это замечание уже было сделано одним из нас (В. Л. Г.) во время обсуждения (8 июля 1987 г.) на конференции по высокотемпературной сверхпроводимости в Триесте, Италия (см. также ⁶).

Большинство затронутых в настоящей статье вопросов систематически освещено, причем в значительно более полной форме, в обзоре¹⁹. Вместе с тем ниже отражены и некоторые последние результаты, которые не могли быть включены в¹⁹.

2. ОСНОВЫ Ψ -ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ (ПОКОЯЩИЙСЯ ГЕЛИЙ, ЧИСТО СВЕРХТЕКУЧЕЕ ТЕЧЕНИЕ)

2.1. Макроскопическая волновая функция

Основную роль в обсуждаемой теории играет одиночественная макроскопическая волновая функция

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \eta(\mathbf{r}, t) \exp[i\phi(\mathbf{r}, t)]. \quad (1)$$

Эта функция получается путем усреднения точной микроскопической волновой функции основного состояния системы по всем координатам частиц, находящихся в физически малом объеме с характерными размерами

$$L = \frac{\xi_m}{Q},$$

где ξ_m — длина корреляции Ψ и $Q \gg 1$ — универсальный численный фактор, служащий параметром теории (см. ^{10,19} и ниже, раздел 2.3).

Фаза ϕ волновой функции (1) связана со скоростью сверхтекучего движения:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi, \quad (2)$$

где $m \equiv m_{He}$ — масса атома ^4He . Квадрат амплитуды функции (1) характеризует плотность числа атомов ^4He , находящихся в многочастичном основном состоянии,

$$|\Psi|^2 = \eta^2 = n_{gr} = n - n_{ex}; \quad (3)$$

здесь n — полная плотность числа частиц жидкого ^4He , а n_{ex} — суммарная концентрация частиц, находящихся в возбужденных состояниях. Амплитуду функции Ψ можно также связать с плотностью сверхтекучей компоненты:

$$\rho_s = m^* |\Psi|^2, \quad (4)$$

где масса m^* отличается, вообще говоря, от массы m_{He} атома ^4He и может быть функцией от температуры и (или) давления. В самосогласованном варианте Ψ -теории⁴, т. е. достаточно далеко от λ -точки, соответствующая температурная зависимость несущественна, и массу m^* можно положить равной m . В области же вблизи T_λ можно написать

$$m^* = m\tau^{-\sigma}, \quad (5)$$

где $\tau = (T_\lambda - T)/T_\lambda$ и σ — некоторый критический показатель, связанный соотношением $\sigma = \eta^\nu$ с критическим индексом ν корреляционной длины ($\xi_m \propto \tau^{-\nu}$) и критическим показателем η корреляционной функции $\langle \Psi(\mathbf{r}) \Psi^*(0) \rangle \propto r^{-1-\eta}$ при $\tau = 0$.

Современные теоретико-полевые расчеты значений экспонент $\hat{\eta}$ и $\hat{\nu}$ показывают (см. ¹⁻³), что для λ -перехода в ^4He значение экспоненты $\hat{\eta}$, а вместе с ним и произведения $\hat{\eta}^\nu$, не превосходит $2 \cdot 10^{-2}$. Столь слабая температурная зависимость массы m^* для всех практических целей несущественна. Поэтому ниже мы, как правило, не будем ее учитывать, полагая, что, как и в самосогласованной Ψ -теории, $m^* \equiv m_{He}$.

2.2. Неполный термодинамический потенциал

Важнейшим в Ψ -теории сверхтекучести является выражение для плотности неполного (т. е. непронтегрированного по флюктуациям Ψ с масштабом L , большим или порядка ξ_m/Q) термодинамического потенциала

$$\tilde{\Omega} = \int \Omega(\Psi, \nabla\Psi; \mu, T) dV, \quad (6)$$

зависящего от Ψ , $\nabla\Psi$ и двух обычных термодинамических переменных (например, химического потенциала μ и температуры T). Мы записываем выражение для плотности потенциала (6) в следующей простой форме:

$$\Omega \equiv \Omega_{II} = \Omega_I(\mu, T) + \frac{3\Delta C_\mu(\mu) T_\lambda(\mu)}{3+M} \left(-\tau |\tau|^{1/3} \left| \frac{\Psi}{\Psi_{00}} \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1-M}{2} |\tau|^{2/3} \left| \frac{\Psi}{\Psi_{00}} \right|^4 + \frac{M}{3} \left| \frac{\Psi}{\Psi_{00}} \right|^6 \right) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2; \quad (7)$$

здесь $\tau = (T_\lambda(\mu) - T)/T_\lambda(\mu)$, $\Omega_I(\mu, T)$ — плотность термодинамического потенциала равновесного гелия I (сюда включена регулярная часть и слагаемое, пропорциональное $\tau^2 \ln |\tau|$, ответственное за логарифмическую аномалию теплоемкости), ΔC_μ — скачок теплоемкости $C_\mu \approx C_p$ при λ -переходе, т. е. разность значений теплоемкости C_μ на одинаковом относительном расстоянии от λ -точки, $\Psi_{00}(\mu)$ — коэффициент при температурной зависимости равновесного значения Ψ ниже λ -точки ($\Psi_e = \Psi_{00}\tau^{1/3}$), M — универсальный (т. е. не зависящий от T , μ и, скажем, концентрации ^3He) численный параметр, характеризующий относительный вклад в (7) члена с $|\Psi|^6$.

Выражение (7) справедливо для области температур $|\tau| \lesssim 10^{-2}$, где применима теория подобия, причем критические экспоненты α и η для теплоемкости $C_\mu \propto |\tau|^{-\alpha}$ и корреляционной функции параметра порядка $\langle \Psi(r)\Psi^*(0) \rangle \propto r^{-1-\eta}$ при $\tau = 0$ мы положили равным нулю, поскольку эти экспоненты для гелия очень малы ($|\alpha| \sim \eta \lesssim 10^{-2}$).

Из сказанного ясно, что выражение (7) не является точным. Однако оно правильно передает температурные зависимости $C_\mu(\tau)$ и $\Psi_e(\tau)$. Кроме того, оно удовлетворяет всем требованиям теории подобия как при малых, так и при больших значениях отношения $\Psi/\Psi_e(\tau)$, а также (с точностью до малой критической экспоненты η) правильно описывает закон спадания корреляционной функции $\langle \Psi(r)\Psi^*(0) \rangle$ как при больших, так и при малых r . Поэтому мы считаем выражение (7) не противоречащим экспериментальным данным, а с теоретической точки зрения его можно рассматривать как приемлемое интерполяционное выражение, пригодное для описания пространственных изменений Ψ на масштабах, сравнимых и даже несколько меньших корреляционного радиуса ξ_m ниже λ -точки (см. ^{9,10}):

$$\xi_m \equiv \xi_m^- = \xi_0 \left(\frac{3+M}{6+6M} \right)^{1/2}, \quad \xi_0 = \xi_{00} |\tau|^{-2/3}, \quad (8)$$

$$\xi_{00} = \left(\frac{\hbar^2 \Psi_{00}^2}{2m \Delta C_\mu T_\lambda} \right)^{1/2} = 1,63 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Наряду с $\xi_m^-(\tau)$ можно ввести корреляционную длину $\xi_m^+(\tau)$ выше λ -точки, причем

$$\xi_m^+(\tau) = \xi_0(\tau) \left(1 + \frac{M}{3} \right)^{1/2}. \quad (8')$$

Выбор в (7) коэффициента перед $|\nabla\Psi|^2$ в виде $\hbar^2/2m$ и пренебрежение более высокими производными и степенями производных Ψ отвечает уже упоминавшейся выше нормировке Ψ :

$$m |\Psi|^2 = m\eta^2 = \rho_s(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

где ρ_s — плотность сверхтекучей части жидкости. Действительно, в силу (1), (2), (9) последний член в (7) при $|\Psi| = \text{const}$ имеет вид $\rho_s v_s^2/2$. Заметим, однако, что в более общих ситуациях (например, при отличной от нуля экспоненте η или при наличии в (7) членов типа $|\nabla\Psi|^4$ или $|\Delta\Psi|^4$) нормировка (9) уже не будет иметь места³⁰.

2.3. Основное уравнение

Уравнение равновесия для Ψ получается варьированием (6) по Ψ^* и имеет вид

$$\xi_{00}^2 \nabla^2 \Psi = \left[-\tau |\tau|^{1/3} + (1 - M) |\tau|^{2/3} \left| \frac{\Psi}{\Psi_{00}} \right|^2 + M \left| \frac{\Psi}{\Psi_{00}} \right|^4 \right] \Psi. \quad (10)$$

Весьма важен вопрос о граничных условиях к уравнению (10). При общем феноменологическом подходе к вопросу о граничных условиях^{22,23} к функционалу (6) следует добавить поверхностную энергию

$$\tilde{\Omega}_s = \int \Omega_s (|\Psi_s|^2) dS; \quad (11)$$

здесь dS — элемент площади поверхности, ограничивающей данный объем, Ψ_s — значение параметра порядка на этой поверхности. Суммарный функционал $\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}_s$ нужно минимизировать одновременно по $\Psi(\mathbf{r})$ и Ψ_s . Вблизи λ -точки, где $|\Psi|$ и $|\Psi_s|$ малы, функцию Ω_s можно разложить в ряд по степеням $|\Psi_s|^2$, ограничиваясь первым неисчезающим членом:

$$\Omega_s = \Omega_{s0} + \frac{\hbar^2}{2ml_s} |\Psi_s|^2 + \dots, \quad (12)$$

где параметр l_s , имеющий размерность длины, характеризует свойства границы и часто называется длиной экстраполяции²³. Варьирование (6) и (11) по Ψ^* и по Ψ_s^* приводит в этом случае к следующему довольно общему граничному условию:

$$\Psi = l_s \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \text{на границе}, \quad (13)$$

где ось z направлена по нормали к поверхности от границы вглубь гелия II.

В случае границы гелия с твердым телом длина l_s мала ($l_s \ll a$, где $a \approx 3 \cdot 10^{-8}$ см — межатомное расстояние), и условие (13) переходит в условие⁴

$$\Psi = 0 \quad \text{на границе}. \quad (13')$$

(Подробнее об этом условии на границе с твердым телом см. конец раздела 3.3.)

Однако для свободной границы гелия (границы с паром) длина l_s составляет около 20 Å, и учет отличия l_s от нуля заметно сказывается на температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения при $\tau \geq 10^{-3}$ (см.²⁴ и ниже, раздел 3.2).

2.4. Точность Ψ -теории и ее связь с теорией группы перенормировок

Точность выводов, получаемых на основе выражения (7) для плотности неполного термодинамического потенциала, определяется, с одной стороны, уже отмечавшейся малостью критических экспонент α и η , а с другой — малостью не учитываемого в (7) вклада длинноволновых фурье-компонент $\Psi_{\mathbf{k}}$ флюктуации $\delta\Psi = \sum_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ с волновыми векторами $|\mathbf{k}| \leq k_m = Q/\xi_m$. Критерием малости вклада длинноволновых флюктуаций при $T < T_{\lambda}$ может

служить условие ^{9,19,25}

$$\frac{\langle (\delta \eta)^2 \rangle}{\eta_e^2} = \frac{\sum_{|k| < k_m} \langle |\eta_k|^2 \rangle}{\eta_e^2} = \frac{k_B T_\lambda m^2}{2\pi^2 \hbar^2 \rho_{se}(\tau) \xi_m(\tau)} (Q - \arctg Q) \ll 1. \quad (14)$$

Легко видеть, что в силу равенства критических экспонент плотности сверхтекучей части и корреляционной длины левая часть неравенства (14) не зависит от τ , а ее численное значение при давлении насыщенных паров есть

$$0,15 \left(\frac{3+3M}{3+M} \right)^{1/2} (Q - \arctg Q) = 3 \cdot 10^{-2}$$

при $Q = 1$ и $M = 0$. Поскольку отличие показателей α и η от нуля также не превышает $3 \cdot 10^{-2}$, то мы можем рассчитывать на описание экспериментальных данных на основе Ψ -теории сверхтекучести с точностью не хуже нескольких процентов.

В теории группы перенормировок равновесные статические и динамические свойства гелия вблизи λ -точки находятся ¹⁻³ путем вычисления вклада также лишь наиболее существенной части флуктуации Ψ с масштабами, начиная от некоторого микроскопического масштаба $\xi_0(0)$ (порядка межатомного расстояния) и вплоть до масштабов порядка корреляционного радиуса $\xi_0(\tau)$. При этом точность этих расчетов определяется малостью так называемой безразмерной перенормированной константы связи $u \sim \frac{\langle |\delta \Psi|^2 \rangle}{|\Psi_e|^2}$, аналитическое выражение для которой практически не отличается от левой части неравенства (14) (согласно ³ $u \rightarrow u^* = 0,0362$ при $\tau \rightarrow 0$).

Таким образом, как уже подчеркивалось нами во введении, расчеты на основе Ψ -теории сверхтекучести и на основе теории группы перенормировок отнюдь не находятся в противоречии друг с другом. Фактически результаты теории группы перенормировок ¹⁻³ можно было бы использовать для нахождения температурной зависимости коэффициентов плотности неполного термодинамического потенциала (6) в области не только вблизи, но и отступив от λ -точки, где они стремятся к своим исходным (неперенормированным) значениям, соответствующим теории фазовых переходов Ландау. В результате область применимости обсуждаемой теории можно было бы значительно расширить, особенно при повышенных давлениях, где, согласно ^{3,26}, температурная ширина области применимости теории подобия, на которой базируется выражение (7), значительно сужается и составляет лишь $\sim 10^{-4} T_\lambda$ (вместо $10^{-2} T_\lambda$ при давлении насыщенных паров).

Ниже мы ограничимся рассмотрением всех эффектов в области подобия, т. е. на базе конкретного выражения (7) и вытекающего из него уравнения (10).

3. РАВНОВЕСНЫЕ ЗАДАЧИ (ВКЛЮЧАЯ ЧИСТО СВЕРХТЕКУЧЕЕ ТЕЧЕНИЕ)

Имея уравнение для Ψ и соответствующие граничные условия, можно решать различные задачи. К их числу относятся размерные эффекты: сдвиг λ -точки $\Delta T_\lambda(d) = T_\lambda - T_\lambda(d)$ в зависимости от толщины пленки d (о пленке говорим лишь для определенности, речь может идти также о щели, капилляре, капельке и т. д.), изменение плотности ρ_s и других термодинамических величин в зависимости от размеров, т. е. для пленок — в зависимости от d . К числу размерных эффектов можно отнести также вычисление температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения на границах Не II — пар и Не II — твердый гелий ^{24,27}.

Второй круг равновесных неоднородных задач образуют задачи, в которых плотность ρ_s и другие величины изменяются под влиянием внешних полей (гравитационного, электрического, магнитного, поля сил Ван-дер-Ваальса) ^{9,28,29}. Сюда же можно отнести вопрос о характере изменения плотности ρ_s вблизи ядра положительного и отрицательного ионов ^{10,19}.

Наконец, третий класс задач, рассматриваемых на основе выражений (7) и (10), касается зависимости ρ_s от скорости чисто сверхтекущего течения v_s , вычисления максимальной (критической) скорости сверхтекущего движения гелия II в пленках и щелях³⁰, распределения плотности ρ_s вблизи оси вихревой нити^{1,31}, связи между λ -переходом гелия в пленке или щели и переходом Березинского — Костерлица — Таулесса¹⁹ и т. п.

Ниже мы прокомментируем кратко некоторые из перечисленных выше эффектов, отсылая за подробностями и соответствующим списком литературы к статьям^{9,10,19}.

3.1. Размерные эффекты

Неоднородность распределения параметра порядка вблизи границ (условия (13), (13)) приводит к сдвигу $\Delta T_\lambda(d) = T_\lambda - T_\lambda(d)$ температуры λ -перехода гелия в пленках, щелях и капиллярах. Экспериментально этот эффект известен очень давно (см., например,³²), но его количественное изучение осложняется тем обстоятельством, что для гелия в пленках или в щелях имеется, вообще говоря, не один, а два близко расположенных фазовых перехода. Первый (термодинамический) переход, который нас, собственно, и интересует, связан с появлением отличного от нуля равновесного значения Ψ , т. е. с появлением макроскопического числа частиц на основном энергетическом уровне^{*}). Однако если фигурирующий в (7) параметр $M < M_c \approx 2$ (см.¹⁹), то данный термодинамический λ -переход еще не приводит к сверхтекучести из-за спонтанного появления в пленке вихрей, приводящих к диссипации сверхтекущего течения³³⁻³⁵. Соответствующие вихри соединяются в пары и диссипация исчезает только в результате второго («топологического») фазового перехода (перехода Березинского — Костерлица — Таулесса), проходящего при более низкой температуре $T_{\text{ВКТ}}(d) < T_\lambda(d)$, определяемой из условия^{34,35}

$$\bar{\rho}_s(T)d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{m}{\hbar} \right)^2 k_B T, \quad (15)$$

где $\bar{\rho}_s = d^{-1} \int \rho_s(z) dz$ — среднее по сечению пленки значение плотности сверхтекущей части.

В случае достаточно толстых пленок (с $d \gg \xi_M$) можно написать¹⁹

$$\bar{\rho}_s d = \rho_{s0}(T) d - \Delta = \rho_{s0} d \tau^{3/2} - \Delta, \quad (16)$$

^{*}) Подчеркнем, что речь здесь идет о конденсате частиц именно на основном уровне, а не в состоянии с импульсом $\mathbf{p} = 0$ (последнее означает, что фурье-разложение микроскопической Ψ -функции основного состояния содержит член $n_0 \delta(\mathbf{p})$). Однако такой член $n_0 \delta(\mathbf{p})$ в случае квазидвумерных (а тем более квазиномерных) систем, как хорошо известно, отсутствует. Другими словами, состояние (фурье-компоненты) с $\mathbf{p} = 0$ для квазидвумерных систем не является макроскопически заполненным вплоть до $T = 0$. Что же касается основного уровня, то даже в строго двумерном случае во взаимодействующей системе бозе-частиц на нем обязательно появляется макроскопическое число частиц уже при некоторой отличной от нуля температуре $T_\lambda(0)$. Дело в том, что во взаимодействующей системе бозе-частиц (в отличие от невзаимодействующей) начальный участок спектра возбужденных состояний является линейным ($\varepsilon = u_p$, где u — скорость звука), а при этом интеграл

$$N_{\text{ex}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{\exp(\varepsilon/k_B T) - 1},$$

определяющий полное число частиц в возбужденных состояниях, не расходится в длинноволновом пределе и, более того, стремится к нулю при $T \rightarrow 0$. Следовательно, в двумерной бозе-системе при низких температурах в возбужденных состояниях может находиться лишь относительно малая доля полного числа частиц, а это и значит, что в ней имеется конденсат частиц, находящихся на основном уровне³³.

где Δ — не зависящая от τ величина, характеризующая поверхностный дефицит сверхтекучей массы. Из этих двух формул находим

$$T_\lambda - T_{\text{ВКТ}} = k_1 d^{-3/2}, \quad (17)$$

где при использовании нулевого граничного условия (13) для Ψ численное значение коэффициента k_1 составляет $k_1 = 3,82 \cdot 10^{-11} \text{ K} \cdot \text{см}^{3/2}$ при $M = 0$ и $k_1 = 3,57 \cdot 10^{-11} \text{ K} \cdot \text{см}^{3/2}$ при $M = 1$.

По такому же точно закону при малых $M < 1$ зависит от толщины пленки d и смещение точки интересующего нас «термодинамического» λ -перехода (отвечающего появлению в пленке спонтанного, отличного от нуля, значения Ψ):

$$T_\lambda - T_\lambda(d) = k_2 d^{-3/2}, \quad (18)$$

где постоянная k_2 , конечно, уже другая:

$$k_2 = 2,53 \cdot 10^{-11} \left(\frac{3+M}{3} \right)^{3/4} \text{ K}/\text{см}^{3/2} \text{ при } M < 1. \quad (19)$$

При $M > 1$ λ -переход гелия в пленках оказывается фазовым переходом I рода^{9,10}. При этом наряду с температурой (18) (определенной теперь точку абсолютного переохлаждения нормальной фазы) интерес представляют также

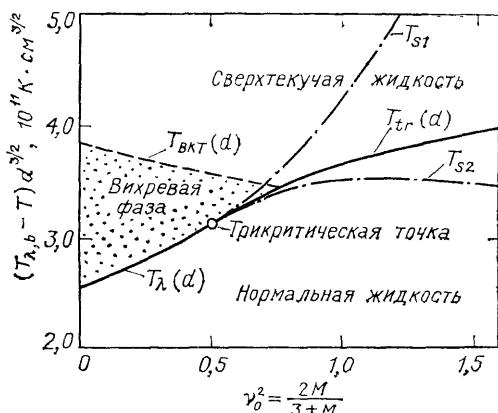


Рис. 1. Зависимости температур фазовых переходов в пленках гелия от величины параметра M .

Сплошная кривая — линия равновесных фазовых переходов из гелия II в гелий I. Штриховая кривая — линия переходов Березинского — Костерлиза — Таулееса. Штрихпунктирные кривые — линии абсолютного перегрева и переохлаждения, соответственно, фазы гелия I и фазы гелия II при $M > 1$. Значение $M = 1$ на линии равновесных фазовых переходов отвечает трикритической точке

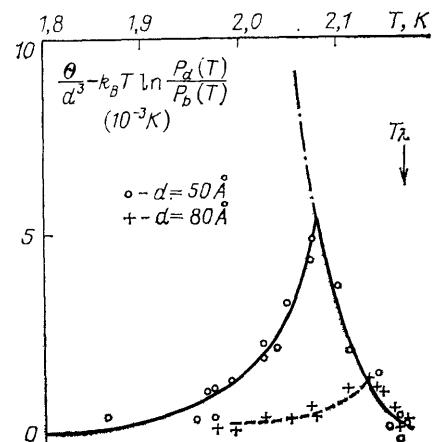


Рис. 2. Температурная зависимость разности давлений паров над пленкой гелия с фиксированной толщиной d и над массивным гелием. Кружочки и плюсы — экспериментальные данные¹³. Сплошная и штриховая линии — результаты теоретических расчетов, выполненных в¹⁴ на основе Ψ -теории сверхтекучести

две другие характеристические температуры: температура $T_{\text{tr}}(d)$ равновесного λ -перехода (точка равенства термодинамических потенциалов нормальной и сверхтекучей фаз) и температура $T_{S2}(d)$ абсолютного перегрева сверхтекучей фазы (рис. 1). Ниже, однако, мы не будем останавливаться на некоторых любопытных эффектах, которые могли бы иметь место для случая $M > 1$, поскольку подавляющее большинство имеющихся экспериментальных данных говорит о том, что λ -переход в пленках остается фазовым переходом II рода и, стало быть, $M < 1$ (это не касается растворов ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$, где при достаточно высоких концентрациях ${}^3\text{He}$ параметр $M > 1$; см. ⁴⁴).

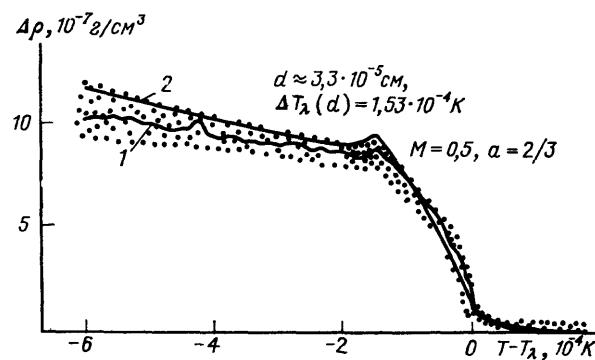
Экспериментально температура $T_{\text{ВКТ}}(d)$ определяется по началу бездиссипативного сверхтекучего течения, тогда как термодинамический λ -переход пленки (из фазы гелия I в фазу гелия II) ярче всего сказывается на поведении разности $\Delta C_{\mu} = C_{\mu,d}(T) - C_{\mu,b}(T)$ теплоемкостей пленки гелия

с толщиной d и массивного (bulk) объема, а также на поведении соответствующей разности равновесного давления паров $\Delta p = p_d(T) - p_b(T)$ и разности средних равновесных значений полной плотности $\Delta \rho = \rho_d(T) - \rho_b(T)$ (напротив, в точке T_{λ} (d) термодинамические величины пленок гелия практически не испытывают аномалий; см. ³⁵).

На рис. 2 приведены примеры температурных зависимостей разности давления паров над пленкой и над массивным гелием, измеренных в работе ¹³. Видно, что эти зависимости имеют резкий максимум при $T = T_{\lambda}(d)$. Происхождение этого максимума легко понять, так как именно при $T = T_{\lambda}(d)$ отличие свойств гелия в пленке от свойств массивного гелия должно быть максимальным ³⁶). Сплошные линии на рис. 2 отвечают результатам теоретических расчетов ¹³ на основе уравнения (10) с $M = 0$ и при дополнительном учете сил Ван-дер-Ваальса (по поводу учета этих сил см. также

Рис. 3. Температурная зависимость вблизи λ -точки разности плотностей гелия в узкой ($d = 3,3 \cdot 10^{-5}$ см) и широкой ($d_0 = 5,2 \cdot 10^{-3}$ см) щелях ¹⁴.

1 — одна из записей экспериментального сигнала, 2 — результаты теоретических расчетов на основе Ψ -теории сверхтекучести, выполненных в предположении, что для гелия в щели логарифмически расходящаяся часть коэффициента теплового расширения обрезается в интервале температур от $T_{\lambda} - a\Delta T_{\lambda}(d)$ до $T_{\lambda} + a\Delta T_{\lambda}(d)$, где $a = 2/3$. Точками показана характерная полоса ошибок, внутрь которой попадает 80 % всех экспериментальных кривых



^{28,36} и ниже раздел 3.3). К сожалению, несмотря на хорошее согласие опытных и расчетных кривых, данные экспериментов ¹³ нельзя использовать для детальной количественной проверки теории, поскольку они относятся в основном к области температур $T_{\lambda} - T > 10^{-3}$ К, где предположение о простой степенной температурной зависимости коэффициентов в выражении (7) для плотности термодинамического потенциала уже неприменимо.

Детальная количественная проверка предсказаний λ -теории сверхтекучести была предпринята недавно в работах ¹⁴, где измерялась разность $\Delta \rho_d$ средних значений полной плотности гелия, содержащегося в узкой (с толщиной $d = 0,28 - 0,54$ мкм) и широкой щелях с хорошо контролируемой геометрией. Здесь мы приведем два заимствованных из ¹⁴ рисунка (рис. 3 и 4). Из этих рисунков видно, что расчеты на основе уравнения (10) воспроизводят все особенности экспериментальной кривой, включая наличие слабо выраженного максимума на зависимости $\Delta \rho_d(T)$ при $T = T_{\lambda}(d)$ и увеличение $\Delta \rho_d$ в сверхтекучей фазе. В совокупности данные экспериментов ¹⁴ дают для параметра M значение

$$M = 0,6 \pm 0,3, \quad (20)$$

причем согласно второй из ссылок ¹⁴ наиболее вероятное значение M близко к 0,5.

Эксперименты ^{13,14} являются, насколько нам известно, единственными, в которых использовалась только одна щель или пленка с хорошо известным, заданным значением толщины. Во всех остальных случаях эксперименты проводились с системами, содержащими очень большое число пленок, каналов

³⁵) Действительно, в интервале $T_{\lambda} > T > T_{\lambda}(d)$ разность $p_d(T) - p_b(T)$ возрастает пропорционально разности термодинамических потенциалов нормальной и сверхтекучей фаз: $\Delta p_d = \Omega_1 - \Omega_{11} = T_{\lambda} \Delta C_{\mu} \tau^2$, тогда как при $T < T_{\lambda}(d)$ она вновь начинает убывать ввиду уменьшения отношения $2\xi_M(\tau)/d$, характеризующего эффективную долю объема гелия вблизи границ, остающегося в нормальной фазе.

или пор с неизвестным распределением их по размерам. Соответствующие экспериментальные результаты могут иметь поэтому лишь весьма ограниченное значение. По-видимому, не являются исключением из этого правила и недавние эксперименты¹⁵, в которых изучались динамические свойства жидкого ${}^4\text{He}$, размещенного в зазорах между витками свернутой в рулон длинной миляровой ленты. Расстояние между витками ленты контролировалось в

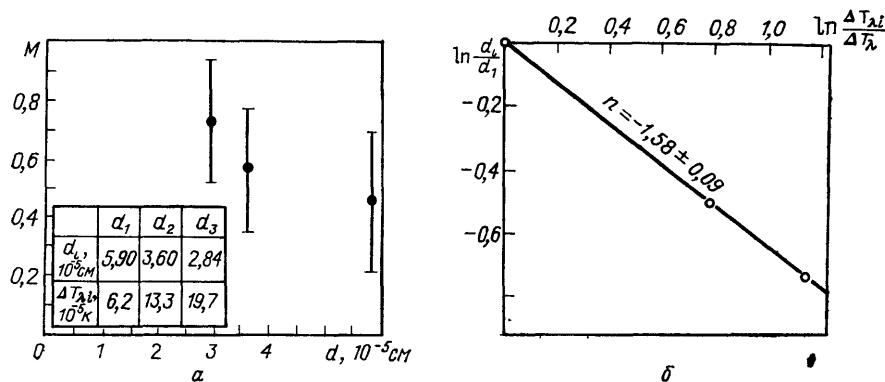


Рис. 4. Зависимости параметра M (а) и сдвига λ -точки (б) ΔT_{λ} (д) от ширины щели d по данным¹⁵

этих опытах лишь в среднем и, по-видимому, оно не было одинаковым, о чем свидетельствует наличие «хвоста» на температурной зависимости плотности сверхтекучей части (собственного периода колебаний системы) при $T > T_{\text{вк}}(d)$ (см. рис. 1 в статье¹⁵). Это обстоятельство в сочетании с неправильным, на наш взгляд, способом нормировки зависимости $\bar{\rho}_s(d, T)$ путем привязки ее к зависимости $\rho_s(T)$ в большом объеме делает преждевременным заключение о якобы обнаруженных в¹⁵ нарушениях предсказаний Ψ -теории и теории масштабной инвариантности (по этому поводу см. также замечания в работах³ и³⁶).

3.2. Поверхностное натяжение

В хорошем согласии с выводами Ψ -теории сверхтекучести^{24,28} и данными предыдущих экспериментов¹¹ находятся результаты недавних очень

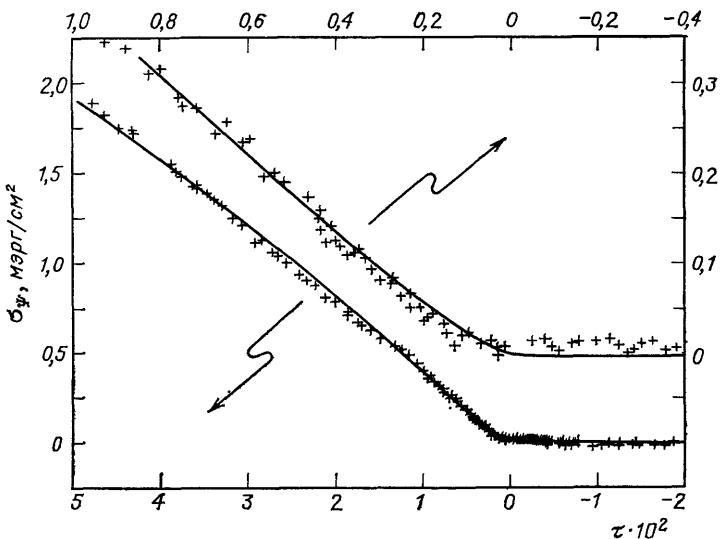


Рис. 5. Температурная зависимость поверхностного натяжения жидкого ${}^4\text{He}$ вблизи λ -точки, за вычетом регулярной (квадратичной) функции от $\tau = (T_{\lambda} - T)/T_{\lambda}$.
Сплошные кривые — теоретический расчет²⁴, крестики — экспериментальные данные¹²

точных исследований¹² температурной зависимости поверхностного натяжения жидкого ${}^4\text{He}$ в области ниже и вблизи λ -точки. Степень этого согласия

ясна из рис. 5, заимствованного из работы²⁴. Кривые на рис. 5 — результат решения уравнения (10) для полупространства при $M = 1/2$ и граничном условии (13), в котором длина экстраполяции l_s была принята равной

$$l_s = 22 \pm 2 \text{ \AA}. \quad (21)$$

Это значение l_s , найденное в²⁴ из экспериментальных данных^{11,12}, представляется вполне разумным, так как оно приблизительно равно среднему расстоянию между атомами⁴He в насыщенном паре и лишь втрое больше, значения тепловой де-бройлевской длины волны $l_T = (2\pi\hbar^2/mk_B T) \approx 6 \text{ \AA}$ при $T = T_\lambda$.

3.3. Влияние внешних полей

Следующий класс задач, решаемых на основе Ψ -теории сверхтекучести, составляют задачи, связанные с изучением влияния на λ -переход гелия различных внешних полей: гравитационного, электрического, магнитного и поля сил Ван-дер-Ваальса.

В выражении (7) и уравнении (10) наличие внешнего поля с потенциалом $V(\mathbf{r})$, действующего на единицу массы гелия, можно учесть путем учета зависимости от поля $V(\mathbf{r})$ температуры λ -перехода:

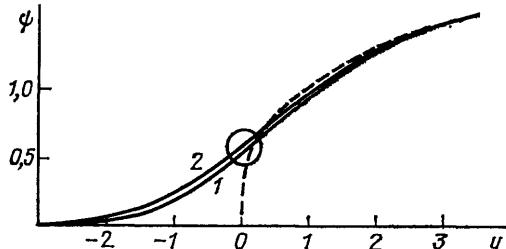
$$T_\lambda(\mu_0 - V(\mathbf{r})) \approx T_\lambda(\mu_0) - \frac{dT_\lambda}{d\mu} V(\mathbf{r}), \quad (22)$$

где μ_0 — химпотенциал гелия в отсутствие поля и $dT_\lambda/d\mu \approx \rho_\lambda^{-1} dT_\lambda/dp$ — наклон λ -кривой.

Вследствие корреляционных эффектов, называемых часто эффектами близости (члены с пространственными производными в (7) и (10)), граница

Рис. 6. Распределение параметра порядка $\psi = \Psi/\Psi_g$, где $\Psi_g = \Psi_{00} (\xi_{00}/l_g)^{1/2}$, в поле силы тяжести²⁸.

Сплошные кривые получены путем численного решения уравнения (10) с $M = 0$ (кривая 1) и $M = 1$ (кривая 2). Штриховой линией показано распределение $\psi(y) = y^{1/5}$, которое имело бы место в отсутствие корреляционных эффектов (членов с пространственными производными в уравнении (10)). Кружком выделена область, где член с $|\Psi|^{16}$ в уравнении (10) играет существенную роль



раздела He I — He II в поле оказывается размытой. В случае, например, гравитационного поля ($V = -gz$) характерный масштаб этого размытия есть

$$l_g = \xi_{00}^{3/5} \left(\left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| g \right)^{-2/5} \approx 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \quad (23)$$

а форма распределения функции $\Psi(z)$ в переходном слое (точнее, ее вторая производная $d^2\Psi/dz^2$) непосредственно определяется правой частью уравнения (10) (рис. 6). Иными словами, измеряя форму распределения $\Psi(z)$ в гравитационном поле, можно получать непосредственную информацию о виде плотности термодинамического потенциала $\Omega(|\Psi|^2)$ (см. (7)). Успешных попыток измерить ширину границы раздела He I — He II в поле сил тяжести, не говоря уже о нахождении функции $\Psi(z)$, до сих пор не было предпринято. Вместе с тем такие исследования, в принципе, вполне возможны, например, методом рефракции волн второго звука^{29,37}.

Влияние на λ -переход в гелии электрического и магнитного полей рассматривается аналогичным образом, для чего в формулу (22) в качестве $V(\mathbf{r})$ достаточно подставить соответствующий электрический или магнитный стикционный потенциал

$$V_E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \alpha_E E^2(\mathbf{r}), \quad V_H(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \alpha_H H^2(\mathbf{r}), \quad (23')$$

где $\alpha_E = 3,1 \cdot 10^{-2}$ см³/г — поляризуемость гелия в расчете на 1 г, $\alpha_H = -0,47 \cdot 10^{-6}$ см³/г — диамагнитная восприимчивость.

Применение электрического и магнитного полей расширяет возможности эксперимента, поскольку, варьируя напряженность и конфигурацию этих полей, можно изменять (сужать или растягивать) ширину переходной области между гелием I и гелием II, создавать локальные области с пониженной или повышенной концентрацией сверхтекущей части, играющие роль собирающих или рассеивающих линз для второго звука и т. д.^{28,29}. Обратим также внимание на то, что с помощью градиента электрического и, в особенности, магнитного поля можно компенсировать неоднородность столба жидкости в поле тяжести и, таким образом, избежать использования для этой цели спутников. В то же время, как хорошо известно, в земных условиях именно наличие силы тяжести препятствует исследованиям критических явлений вблизи λ -точки при $|\tau| \lesssim 10^{-7}$.

Влияние ван-дер-ваальсовских сил с потенциалом

$$V_{\text{v-d-w}} = -\theta/z^3, \quad \theta = 10^{-13} \div 10^{-14} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 \text{г}^{-1} \quad (24)$$

вызывает дополнительное искажение функции Ψ вблизи границы между НеII и твердым телом. Эффективно это проявляется в том, что поверхность, на которой Ψ обращается в нуль, смещается на некоторое расстояние b от поверхности твердого тела вглубь гелия^{28,36}. Величина сдвига b , как показано в^{28,36}, практически не зависит от τ и составляет от 2 до 10 Å, в зависимости от величины параметра θ . Тем не менее при удалении от T_λ (и, следовательно, при уменьшении ξ_M) эффекты, связанные с влиянием ван-дер-ваальсовских сил, становятся, вообще говоря, существенными^{13,28,36}.

3.4. Вклад ионов и примесей в термодинамические функции гелия II

Электрострикционный потенциал (23) и граничное условие (13) приводят к уменьшению параметра порядка вблизи границы ядра положительного иона и на границе пузырька в случае отрицательного иона или электрона. С этим уменьшением связаны вклад иона в массу нормальной компоненты^{28,10,19}

$$\Delta M_n = 8\pi \rho_{sb} \xi_M^2 R \frac{1+(R/\xi_M)}{1+(l_s/R)+(l_s/\xi_M)} \propto \tau^{-2/3} \quad (25)$$

и дополнительная энергия

$$\Delta \tilde{\Omega} = 2\pi \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \rho_{sb} R \frac{1+(R/\xi_M)}{1+(l_s/R)+(l_s/\xi_M)} \propto \tau^{2/3}, \quad (26)$$

где R — радиус ядра или радиус пузырька, ξ_M — корреляционная длина (8) и l_s — длина экстраполяции, фигурирующая в граничном условии (13). При этом появляется также дополнительный вклад в энтропию и теплоемкость гелия II. Кроме того, наличие энергии (26) несколько изменяет равновесный радиус ядра иона или пузырька и увеличивает их эффективную массу:

$$\Delta m_{\text{eff}} \approx \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \rho_{sb} R \frac{1}{T_\lambda - T} \left| \frac{dT_\lambda}{d\mu} \right| \frac{1}{1+(l_s/R)} \propto \tau^{-1/3}. \quad (27)$$

Последний эффект, по-видимому, легче всего заметить, так как при $\tau = 10^{-6}$ увеличение эффективной массы отрицательного иона составляет уже около 60 m_{He} .

Если положить $R \approx a$, где a — межатомное расстояние, то формулы (25) — (27) можно применять для оценок вклада в термодинамические функции гелия микроскопических примесных частиц, таких, как атомы ^3He . При этом, однако, их концентрация n_3 должна удовлетворять условию

$$3n_3 a^2 \xi_M^2 l_s^{-1} \ll 1. \quad (28)$$

Иными словами, формулами (25) — (27) можно пользоваться лишь для очень слабых растворов. В случае больших концентраций примесей (в том числе ионов) нужно пользоваться результатами работы ⁵⁴.

3.5. Сверхтекучие течения (при $v_n = 0$)

Третий класс задач, для которых применение **Ψ -теории** является эффективным, связан с рассмотрением течения и вращения гелия. Соответствующий круг вопросов очень обширен (см., например, ^{9,19,38}). Здесь мы сможем коснуться лишь некоторых из них.

Появление течения (как и присутствие границ) изменяет равновесное значение ρ_s и других термодинамических величин. Для постоянного во времени (стационарного) чисто сверхтекучего течения относительная величина этих изменений пропорциональна квадрату отношения $v_s/v_0(T)$, где

$$v_0(T) = \frac{\hbar}{m\xi_0(T)} = 9,74 \cdot 10^3 T^{2/3} \text{ см/с.} \quad (29)$$

В частности, при $v_s > v_{s,c2} \approx v_0(T)/\sqrt{3}$ ламинарное сверхтекущее состояние вообще становится неустойчивым ^{9,10,19}. Более точные выражения для максимально возможных (критических) скоростей ламинарного сверхтекущего течения в пленках и массивном гелии, зависящие от d и M , приведены в ^{9,19,30}. В ³⁰ рассмотрена также зависимость ρ_s от v_s^2 и d .

Для вращающегося гелия II простейшим и в то же время важнейшим объектом является изолированная вихревая нить. Задача о структуре вихревой нити в гелии II вблизи λ -точки рассматривалась на основе **Ψ -теории** сверхтекучести еще в работе ⁴, а с учетом последующей модификации этой теории она решена в ³¹. В ³¹ вычислен, кроме того, вклад единицы длины нити в энтропию, теплоемкость, плотность гелия и в дефицит массы сверхтекущей компоненты, а также оценены сечения рассеяния света и второго звука на отдельных вихревых нитях. Все это интересно с точки зрения возможных экспериментов.

Еще одной важной задачей, упоминавшейся в ⁹ и имеющей принципиальное значение для понимания природы критических скоростей вихреобразования, является задача о движении в гелии II квантованного вихревого кольца с радиусом R , сравнимым с $\xi_m(T)$.

Недавно в ^{39,40} (см. и ⁴¹) на пути решения задачи был сделан существенный шаг, состоящий в получении точного локализованного (солитоноподобного) решения уравнения движения для Ψ в отсутствие диссипации (см. ниже уравнение (30) с $\Lambda = 0$). Этот шаг принес интересные и довольно неожиданные результаты. Оказалось, что при малых скоростях U соответствующего осесимметричного солитона его энергия \mathcal{E} , радиус R и импульс p уменьшаются с ростом U , как это и должно быть в случае вихревого кольца. Однако после достижения скоростью U некоторого критического значения $U_c = 0,62 v_0(T)$, где $v_0(T)$ определяется формулой (29), энергия и импульс солитона вновь начинают возрастать (рис. 7, *a*). Причина этого, как было установлено в ⁴⁰, состоит в том, что при $U \rightarrow U_c$ вихревое кольцо (т. е. окружность, на которой $|\Psi| = 0$) стягивается в точку, а при $U > U_c$ оно «сбрасывает» с себя циркуляцию и превращается в безвихревое возбуждение, для которого амплитуда функции Ψ уже не обращается в нуль ни в одной точке пространства.

Аналогичное поведение обнаруживает, как показано в ⁴⁰, и пара постепенно движущихся параллельных квантованных вихревых нитей с противоположным знаком циркуляции («вихревая пара»). При этом, однако, в отличие от вихревого кольца, энергия и импульс вихревой пары продолжают уменьшаться ниже точки $U = U_c \approx 0,43 v_0(T)$, в которой она сбрасывает с себя циркуляцию (рис. 7, *б*).

Описанная картина весьма поучительна, но нам хотелось бы подчеркнуть, что учет диссипации и релаксации Ψ может внести в нее принципиальные изменения *).

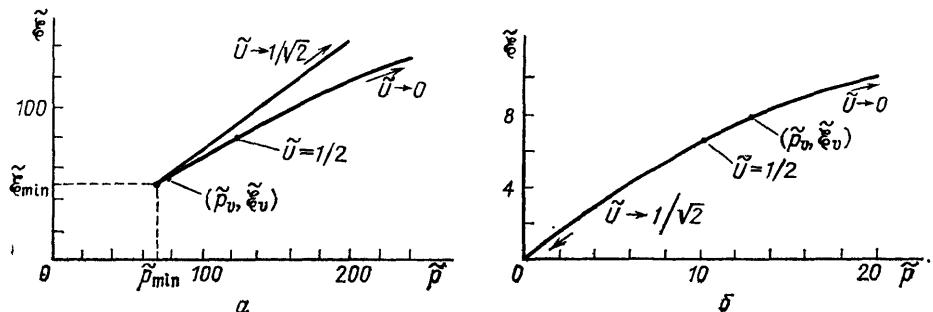


Рис. 7. *a* — Зависимость безразмерной энергии вихревого кольца $\tilde{\xi} = \xi / (\Omega_I - \Omega_{II})$ от его безразмерного импульса $\tilde{p} = p / mv_0 (T)$ и скорости поступательного движения $\tilde{U} = U / v_0 (T)$ (по данным работы^{39, 40}); в точке $(\tilde{p}_v, \tilde{\xi}_v)$, где $\tilde{U} \approx 0,62$, кольцо теряет циркуляцию и превращается в безвихревое возбуждение с $|\Psi|^2 \neq 0$ ни в одной точке пространства; безвихревым возбуждениям отвечает участок нижней ветви (слева от точки $(\tilde{p}_v, \tilde{\xi}_v)$) и вся верхняя ветвь спектра. *б* — То же для вихревой пары; участок кривой от начала координат до точки $(\tilde{p}_v, \tilde{\xi}_v)$ с $\tilde{U} \approx 0,43$ отвечает безвихревым возбуждениям

К сожалению, экспериментальные исследования термодинамических свойств движущегося гелия II вблизи λ -точки, не говоря уже об исследованиях в этой области структуры и свойств отдельных вихревых нитей и вихревых колец, на сегодняшний день почти полностью отсутствуют. Поэтому мы и не смогли проиллюстрировать изложенные выше результаты экспериментальными данными.

4. ОБЩАЯ Ψ -ТЕОРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ (УЧЕТ НОРМАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ, ДИССИПАЦИИ И НЕСТАЦИОНАРНОСТИ)

4.1. Уравнение движения для макроскопической волновой функции

В стационарном случае при заданной отличной от нуля скорости нормального течения v_n и постоянной полной плотности ($\nabla \rho = 0$) обобщение выражения (7) и уравнения равновесия (10) однозначно⁹. Оно достигается заменой

$$\nabla \rightarrow \nabla - \frac{im}{\hbar} v_n.$$

В общем нестационарном случае для Ψ было предложено уравнение⁵ (см. также^{9, 10, 19})

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + (\mu + \mu_s) m \Psi - i\Lambda \left[\frac{1}{2} \left(\frac{i\hbar}{m} \nabla + v_n \right)^2 + \mu_s \right] m \Psi, \quad (30)$$

уже упоминавшееся в предыдущем разделе 3.5; здесь $\mu_s = m^{-1} (\partial \Omega / \partial |\Psi|^2)$ — химический потенциал сверхтекучей компоненты и Λ — безразмерный кинетический коэффициент, определяющий время релаксации Ψ , т. е. плот-

*) Заметим, что широко используемая в литературе, в частности в^{39, 40}, Ψ -теория неидеального бозе-газа⁴¹ фактически является частным случаем развиваемой нами Ψ -теории сверхтекучести гелия II. Конкретно, в теории⁴¹, относящейся к $T = 0$, не учитывается температурная зависимость коэффициентов в выражениях типа (7), (10), а также не учитываются релаксация и диссипация Ψ .

ности ρ_s :

$$t_\Psi = \frac{\hbar}{2\Lambda m} \left(\frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right)_{\mu, T}^{-1} = \frac{2m \xi_m^2}{\hbar \Lambda}. \quad (31)$$

Полная система гидродинамических уравнений гелия II вблизи λ -точки получена в⁵ и приведена также в^{9,10,19}. Она включает в себя, наряду с уравнением (30), уравнения сохранения массы, импульса и уравнение теплового баланса. Кроме того, сходные, хотя и несколько отличающиеся системы уравнений получены в^{42,43}. Мы не будем приводить здесь соответствующие уравнения ввиду их громоздкости. Заметим лишь, что помимо Λ они содержат ряд дополнительных кинетических коэффициентов, из которых наиболее важную роль вблизи λ -точки играют теплопроводность κ и вязкость нормальной компоненты η_n .

Температурная зависимость коэффициентов Λ , κ и η_n должна быть, как и в статическом случае (см. раздел 2), определена из опытных данных или заимствована из расчетов методом теории группы перенормировок¹⁻³. Сделать это можно, главным образом, путем анализа на основе Ψ -теории распространения в Не II вблизи λ -точки различных звуков. К сожалению, такой анализ полностью еще не проведен. Из сравнения^{9,10} с экспериментальными данными о поглощении первого и второго звука можно лишь заключить, что в некотором узком интервале ($10^{-5} \leq \tau \leq 10^{-3}$) температурную зависимость Λ при давлении насыщенных паров можно приближенно описать выражением

$$\Lambda = \Lambda_0 \tau^{-1/3} \text{ с } \Lambda_0 = 0,3 \pm 0,1. \quad (32)$$

Экспериментальное значение коэффициента вязкости η_n в λ -точке при давлении насыщенных паров есть⁴⁴

$$\eta_n = (27,4 \pm 1,4) \cdot 10^{-6} \text{ пуз}, \quad (33)$$

но температурная зависимость η_n вблизи T_λ измерена с малой точностью.

Что же касается теплопроводности κ , то для нее в области ниже T_λ мы можем привести лишь весьма грубую порядковую оценку, основанную на теории динамической масштабной инвариантности⁴⁵,

$$\kappa \sim \frac{\hbar \Lambda C_\mu}{2m} \sim 10^4 \tau^{-1/3} \text{ эрг/см} \cdot \text{г} \cdot \text{К}. \quad (34)$$

Перейдем теперь к результатам решения на основе полной системы гидродинамических уравнений гелия II вблизи λ -точки^{5,9,10,19} некоторых конкретных задач.

4.2. Сила взаимного трения

Сила взаимного трения между сверхтекучей и нормальной компонентами во вращающемся гелии II, обусловленная присутствием в нем квантованных вихревых нитей, вычислялась на основе Ψ -теории сверхтекучести в работах⁴⁶⁻⁴⁸. Наиболее полное количественное рассмотрение было проведено в⁴⁷, результаты которого мы и приводим:

$$g = g_0 \tau^{1/3} = 1,0 \tau^{1/3}, \quad g' = g'_0 \tau^{1/3} = 1,48 \tau^{1/3}; \quad (35)$$

здесь коэффициенты g и g' связаны с обычно употребляемыми коэффициентами взаимного трения B и B' соотношениями

$$B - iB' = \frac{2}{g - ig'}. \quad (36)$$

Формулы (35) правильно передают наблюдаемую температурную зависимость величины продольной и поперечной составляющих силы взаимного трения

¹⁶, но численные значения коэффициентов («амплитуд») при этих зависимостях несколько отличаются от экспериментальных (экспериментально эти амплитуды равны: $g_0 = 2,8$ и $g'_0 = 2,02$). Указанные расхождения не удивительны ввиду грубости численных оценок коэффициентов в работе ⁴⁷, выполненных к тому же лишь для варианта теории с $M = 0$. Кроме того, в ⁴⁷ не были учтены эффекты вязкости и теплопроводности нормальной компоненты, которые в той области температур, где производились измерения ¹⁶, могут оказаться весьма существенными.

4.3. Пограничное тепловое сопротивление

При распространении тепла через границу двух сред на поверхности раздела этих сред возникает температурный скачок, величина которого пропорциональна плотности теплового потока ($\Delta T = R_K q$), а соответствующий коэффициент пропорциональности R_K носит название пограничного теплового сопротивления, или сопротивления Капицы: В сверхтекучей жидкости наряду с обычным приповерхностным температурным скачком имеется дополнительный перепад температуры, обусловленный превращением диффузионного теплового потока в противоток нормальной и сверхтекучей компонент. Это превращение локализовано в слое вблизи границы жидкого гелия II с характерной толщиной ⁹

$$l_T = \left(\frac{\kappa \Sigma}{S^2 T} \right)^{1/2}, \quad (37)$$

где S — плотность энтропии и $\Sigma = \frac{4}{3}\eta_n + \zeta_2 - 2\rho\zeta_1 + \rho^2\zeta_3$ — комбинация коэффициентов первой и вторых вязкостей, входящая в выражение для коэффициента затухания второго звука.

Вблизи λ -точки аномальная часть комбинации коэффициентов второй вязкости выражается ⁹ через один и тот же кинетический коэффициент Λ :

$$\zeta_2 - 2\rho\zeta_1 + \rho^2\zeta_3 = \frac{\hbar\rho(1+\Lambda^2)}{2\Lambda m\rho_{sb}(T)}, \quad (38)$$

и увеличивается при $T \rightarrow T_\lambda$ по закону $\Sigma \propto \tau^{-1}$. Соответственно неограниченно увеличивается при $T \rightarrow T_\lambda$ и длина l_T ($l_T \propto \xi_m \propto \tau^{-2/3}$) и растет также связанный с этой длиной дополнительный вклад в сопротивление R_K ^{9,10}:

$$\begin{aligned} \delta R_K &= l_T \kappa^{-1} & \text{при } l_T \gg \xi_m \\ &= 2,2(l_T \xi_m)^{1/2} \kappa^{-1} & \text{при } l_T \ll \xi_m. \end{aligned} \quad (39)$$

Экспериментальное выделение вклада δR_K могло бы способствовать как проверке предсказаний Ψ -теории сверхтекучести, так и определению температурной зависимости κ , которая, как уже отмечалось, при $T < T_\lambda$ неизвестна.

Недавно наличие сингулярного вклада в сопротивление R_K было обнаружено экспериментально ¹⁷. Однако детальное сопоставление данных ¹⁷ с выражениями (37) — (39) пока не проведено, в частности, как раз в связи с незнанием коэффициента $\kappa(T)$.

4.4. Подвижность ионов в гелии II вблизи λ -точки

Учет диффузионного теплового потока, существующего на масштабах порядка длины l , и неоднородность распределения параметра порядка вблизи сердцевины иона (см. раздел 3.5) приводят к изменению выражения для величины силы трения F_\pm , действующей на положительный (+) и отрицательный (—) ионы в гелии II, по сравнению с гидродинамической формулой Стокса ^{49,50}. Вблизи λ -точки с точностью до членов порядка ρ_s/ρ

получаем ^{49,10}

$$F_+ = 6\pi\eta_n Ru \left\{ 1 - \frac{\rho_{sb}(T)}{\rho(\Lambda^2 + 1)} \left[\frac{c}{2} - \frac{2}{15} c^2 + \frac{\Lambda}{\omega_0} \left(1 - c + \frac{c^2}{3} \right) - \frac{11}{105} \Lambda \omega_0 c^2 \right] \right\}, \quad (40)$$

$$F_- = 4\pi\eta_n Ru \left\{ 1 - \frac{2\rho_{sb}(T)}{3\rho(\Lambda^2 + 1)} \left[c - \frac{c^2}{3} + \frac{\Lambda}{\omega_0} \left(1 - c + \frac{c^2}{3} \right) - \frac{1}{3} \Lambda \omega_0 c^2 \right] \right\},$$

где u — скорость, R — радиус ядра ионов, $\omega_0 = \hbar\rho_n/m\eta_n = 0,846$, $c = R/(R + l_s)$ и l_s — длина экстраполяции, фигурирующая в граничном условии (13).

Формулы (40) с $\Lambda = 0,3\tau^{-1/3}$ и $c = 1$ и $0,5$ для положительных и отрицательных ионов, соответственно, согласуются с экспериментальными данными ^{51,52}. Однако для их более надежной проверки соответствующие измерения следовало бы продолжить в область температур, более близких к λ -точке, и учесть, кроме того, неоднородность распределения вблизи ионов полной плотности и небольшую сингулярную зависимость вблизи T_λ радиусов сердцевин ионов.

4.5. Поперечный акустический импеданс *)

Еще один интересный способ проверки Ψ -теории состоит в изучении пространственного распределения параметра порядка (плотности сверхтекучей компоненты) вблизи твердой стенки путем зондирования этого распределения апериодической вязкой волной, возбуждаемой поперечными (сдвиговыми) колебаниями материала стенки ⁵⁵⁻⁵⁸.

Глубина проникновения апериодической вязкой волны в нормальной жидкости зависит, как известно, от частоты и в случае однородной жидкости эта глубина $\delta = (2\eta\omega/\rho)^{1/2}$. Для однородного гелия II в этой формуле следовало бы положить $\rho = \rho_n$ и $\eta = \eta_n$. Однако если плотность ρ_n и коэффициент вязкости η_n значительно изменяются на масштабах, меньших или сравнимых с δ , то вклад гелия в вещественную и мнимую части поперечного акустического импеданса колеблющегося тела отличается от вычисленного по обычной гидродинамической формуле (см., например, ⁵⁵)

$$Z = R - iX = (1 - i) \left(\frac{\eta_n \rho_n \omega}{2} \right)^{1/2}.$$

Соответствующие поправки, содержащие информацию о зависимости $\rho_n(z) = \rho - \rho_s(z)$ и $\eta_n(z)$ вблизи стенки, были вычислены и измерены в работах ⁵⁵⁻⁵⁸. При этом авторы пришли к заключению, что температурные зависимости длин корреляции $\xi_M(\tau)$ и $\xi_M^*(\tau)$ хорошо описываются формулами (8) и (8a), но коэффициенты при этих зависимостях составляют лишь приблизительно $0,5$ Å, т. е. в 2 раза, а выше T_λ — даже в 3 раза меньше оцениваемых из других экспериментов.

Нам кажется, что причина этого расхождения может состоять в использовании для интерпретации опытных данных в ⁵⁵⁻⁵⁸ сильно упрощенного подхода ⁵⁷. Дело в том, что в ⁵⁷ не учитывалось влияние ван-дер-ваальсовых сил на распределение $\rho_n(z)$ и особенно на $\eta_n(z)$; вместе с тем в области вблизи λ -точки вязкость гелия очень сильно зависит от полной плотности жидкости ρ (см. ⁴⁴), которая возрастает вблизи стенки. Кроме того, при частотах $\omega \geq 10^7$ Гц, использованных в ⁵⁵⁻⁵⁸, определенную роль могла играть и частотная дисперсия коэффициента сдвиговой вязкости η_n .

Рассмотренные примеры иллюстрируют лишь некоторые из возможных применений общей Ψ -теории сверхтекучести. В целом же можно сказать, что в отношении нестационарных и диссипативных задач мы находимся лишь в начале длинного пути.

*) В английском тексте доклада настоящий раздел 4.5 отсутствует, так как мы узнали о работах ⁵⁵⁻⁵⁸ только на самой конференции LT-18.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше был перечислен целый ряд задач, которые теоретически рассмотрены или могут быть проанализированы на основе Ψ -теории сверхтекучести. Отметим, что прогресс в направлении сопоставления этой теории с экспериментом нельзя все же не признать медленным. В этой области делается значительно меньше, чем хотелось бы и представляется возможным при современном состоянии экспериментальной техники. Возможно, какую-то роль здесь играет загруженность экспериментаторов новыми и модными вопросами (свойства ^3He и пр.). Однако, насколько нам представляется, более существенное значение имеет недоверие к Ψ -теории сверхтекучести, которой посвящен настоящий доклад. Такое недоверие было бы оправдано, если бы речь шла об исходном самосогласованном варианте теории^{4,5}, но в ее настоящей форме¹⁹ она, как неоднократно подчеркивалось выше, свободна от недостатков, присущих приближению среднего поля, и органически включает в себя результаты флюктуационной теории фазовых переходов, полученные для однородного вещества.

Таким образом, использование Ψ -теории сверхтекучести вблизи λ -точки представляется нам вполне естественным и закономерным. В этом отношении она аналогична Ψ -теории сверхпроводимости⁸. Сейчас уже получен ряд убедительных опытных подтверждений предсказаний Ψ -теории сверхтекучести. Вместе с тем, говорить о полном успехе конкретной Ψ -теории сверхтекучести (с использованным выше выбором значений критических показателей и коэффициентов) еще преждевременно, все зависит от степени ее соответствия эксперименту. Дальнейшие усилия в этом направлении весьма желательны и могли бы способствовать как определению места Ψ -теории сверхтекучести, так и прояснению ситуации в отношении поведения гелия вблизи λ -точки в целом.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hohenberg P. C.//*Physica. Ser. B*. 1982. V. 109—110. P. 1436.
2. Do h m V., F o l k R.//*Ibidem*. P. 1522.
3. Do h m V.//*Proc. of the Fifth Oregon Conference on Liquid Helium*.— Eugen, Holland, February 1—3, 1987.
4. Гинзбург В. Л., Питаевский Л. П.//*ЖЭТФ*. 1958. Т. 34. С. 1240.
5. Питаевский Л. П.//*Ibidem*. Т. 35. С. 408.
6. Булаевский Л. Н., Собянин А. А., Хомский Д. И.//*ЖЭТФ*. 1984. Т. 87. С. 1490.
7. A le x a n d r o v A. S., R a p p i n g e r J., R o b a s z k i e w i c z S.//*Phys. Rev. Ser. B*. 1986. V. 33. P. 4526.
8. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.//*ЖЭТФ*. 1950. Т. 20. С. 1064.
9. Гинзбург В. Л., Собянин А. А.//*УФН*. 1976. Т. 120. С. 153.
10. G i n z b u r g V. L., S o b y u a n i n A. A.//*J. Low Temp. Phys.* 1982. V. 49. P. 507.
11. M a g e r l e i n J. H., S a n d e r s T. M.//*Phys. Rev. Lett.* 1976. V. 36. P. 258.
12. S u z u k i M., I i n o M., I k u s h i m a A. J.//*J. Low Temp. Phys.* 1986. V. 63. P. 129.
13. L a m b e r t B., L a v e l u t A., P e r z y n s k y R., S a l i n D.//*Ibidem*. 1979. V. 37. P. 679.
14. Панов В. И., Собянин А. А.//*Письма ЖЭТФ*. 1982. Т. 35. С. 329; 1986. Т. 44. С. 227.
15. G a s p a r i n i F. M., A g n o l e t G., R e p p u r y J. D.//*Phys. Rev. Ser. B*. 1984. V. 29. P. 138.
16. M a t h i e u P., S e r r a A., S i m o n Y.//*Ibidem*. 1976. V. 14. P. 3753.
17. D u n c a n R. V., A h l e r s G., S t e i n b e r g V.//*Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. P. 377.
18. Мамадзе Ю. Г.//*ЖЭТФ*. 1967. Т. 52. С. 729; *Phys. Lett. Ser. A*. 1968. V. 27. P. 322.
19. G i n z b u r g V. L., S o b y u a n i n A. A.//*Superconductivity, Superdiamagnetism and Superfluidity*/Ed. V. L. Ginzburg.— Moscow: Mir, 1987.— Ch. 6.

20. Amit D. J., Luban M.//Phys. Lett. Ser. A. 1968. V. 27. P. 487.
21. Luban M.//Phase Transitions and Critical Phenomena/Eds C. Domb, M. S. Green.— New York: Academic Press, 1976.— V. 5a. P. 35.
22. Каганов М. И., Омельянчук А. Н.//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 1679.
23. Binder K.//Phase Transitions and Critical Phenomena/Eds C. Domb, J. Lebowitz.— New York: Academic Press, 1983.— V. 8.
24. Собянина А. А., Стратонников А. А.//Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 480.
25. Гинзбург В. Л.//ФТТ. 1960. Т. 2. С. 2031.
Ginzburg V. L., Levanyuk A. P., Sobyanin A. A.//Ferroelectrics. 1987. V. 73. P. 171.
26. Schloms R., Dohm V.//Europhys. Lett. 1987. V. 3. P. 413.
27. Собянина А. А.//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 433.
28. Собянина А. А.//ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 1780.
29. Гинзбург В. Л., Собянина А. А.//Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 17. С. 698.
30. Ginzburg V. L., Sobyanin A. A.//Phys. Lett. Ser. A. 1979. V. 69. P. 417.
31. Гинзбург В. Л., Собянина А. А.//ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 769.
32. Frederickse H. P. R.//Physica. 1949. V. 15. P. 860.
Long E. A., Meyer L.//Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 1030.
33. Березинский В. Л.//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 1144.
34. Kosterlitz J. M., Thouless D. J.//J. Phys. Ser. C. 1973. V. 6. P. 1181.
35. Nelson D. R.//Fundamental Problems in Statistical Mechanics/Ed. E. Cohen.— Amsterdam: North-Holland, 1980.— P. 53.
36. Кикнадзе Л. В., Мамаладзе Ю. Г.//ФНТ. 1987. Т. 13.
37. Немировский С. К.//ФНТ. 1976. Т. 2. С. 81.
38. Andronikashvili E. L., Mamaladze Yu. G.//Rev. Mod. Phys. 1968. V. 38. P. 567; Prog. Low Temp. Phys. 1967. V. 5. P. 79.
- 39.a) Jones C. A., Roberts P. H.//J. Phys. Ser. A. 1982. V. 15. P. 2599;
b) Jones C. A., Puttermann S. J., Roberts P. H.//Ibidem. 1986. V. 19. P. 2991.
40. Иорданский С. В., Смирнов А. В.//Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 27.
41. Питаевский Л. П.//ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 646.
Gross P.//Nuovo Cimento. 1961. V. 20. P. 454; J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 190.
42. Gerst J. A.//Phys. Rev. Ser. B. 1980. V. 22. P. 3207.
43. Pankert J., Dohm V.//Europhys. Lett. 1986. V. 2. P. 775.
44. Wilks J. The Properties of Liquid and Solid Helium.— Oxford: Clarendon Press, 1967.
45. Ferrell R. A., Menyhard N., Schmidt H., Schwab F., Szepligeti P.//Ann. of Phys. 1968. V. 47. P. 565.
46. Питаевский Л. П.//Письма ЖЭТФ. 1977. Т. 25. С. 168.
47. Sonin E. B.//J. Low Temp. Phys. 1981. V. 42. P. 417; Rev. Mod. Phys. 1987. V. 59. P. 87.
48. Onuki A.//J. Low Temp. Phys. 1983. V. 51. P. 601.
49. Гаранин Д. А., Собянина А. А.//Материалы 20-го Всесоюзного совещания по физике низких температур.— Черноголовка, Московская обл., 1978.— Ч. 2. С. 278.
50. Palagin A. V., Sobyanin A. A.//Phys. Lett. 1987. V. 126. P. 359.
51. Ahlers G., Gamota G.//Phys. Lett. Ser. A. 1972. V. 38. P. 65.
52. Sittton D. M., Moss F. E.//Low Temperature Physics.— LT 13/Eds K. D. Timmerhouse, W. J. O'Sullivan, E. F. Hammel.— New York: Plenum Press, 1974.— V. 1. P. 479.
53. Собянина А. А.//Проблемы высокотемпературной сверхпроводимости: Информ. мат-лы.— Свердловск: УрО АН СССР, 1987.— Ч. 1. С. 146.
54. Собянина А. А., Стратонников А. А.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1442.
55. Lea M. J., Fozooni P., Retz P. W.//J. Low Temp. Phys. 1984. V. 54. P. 303.
56. Lea M. J., Fozooni P.//Ibidem. V. 56. P. 25.
57. Lea M. J., Fozooni P.//Ultrasonics. 1985. V. 23. P. 133.
58. Lea M. J., Spencer D. S., Fozooni P.//Phys. Rev. Ser. B. 1987. V. 35. P. 6665; Preprint.—1987.