1988 г. Февраль Том 154, вып. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.14

КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Л. В. Прохоров

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 299
2. Классическая теория 301
2.1. Лагранжев формализм. 2.2. Гамильтонов формализм.
3. Квантовая теория 303
3.1. Исключение нефизических переменных. 3.2. Фиксация нефизических переменных (выбор калибровки).
4. Структура гильбертова пространства 309
4.1. Гильбертово пространство в калибровке Гейзенберга — Паули —Ферми. 4.2. Вакуум в формализме Ферми. 4.3. О скалярном произведении в гильбертовом пространстве. 4.4. Противоречива ли схема Ферми?
5. Заключение 314
6. Приложение 315
6.1. «Старый» формализм Гупты. 6.2. «Новый» формализм Гупты. 6.3. О фиксации калибровки. 6.4. «Релятивистский» осциллятор. 6.5. Краткая история вопроса.
Список литературы 319

Поскольку электромагнитное поле является классической наблюдаемой, казалось бы, его квантование следует рассмотреть в первую очередь. По иронии судьбы, однако, из всех рассматриваемых полей это поле наиболее трудно для квантования.

(*Дж. Бьеркен, С. Дрелл.* Релятивистская квантовая теория)

1. ВВЕДЕНИЕ

Хотя электромагнитное поле было первой динамической системой с бесконечным числом степеней свободы, подвергнутой квантованию [1], вполне удовлетворительное с современной точки зрения изложение этой процедуры, по-видимому, отсутствует.

Трудности квантового описания электромагнитного поля коренятся в сочетании псевдоевклидова характера пространства-времени со свойством калибровочной инвариантности теории, т. е. с наличием нефизических степеней свободы у вектор-потенциала $A_\mu(x)$. Последние допускаются в теорию с целью достижения ее явной релятивистской инвариантности. В классике калибровочный произвол устраняется добавлением к уравнениям движения подходящего калибровочного условия, например,

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0. \tag{1.1}$$

Это релятивистски-инвариантная лоренцова калибровка. В квантовой теории $\hat{A}_\mu(x)$ — операторы, подчиняющиеся определенным коммутационным соотношениям [2]

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(y)] = ig_{\mu\nu}D(x-y) \tag{1.2}$$

($g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, D — перестановочная функция скалярного безмассового поля, т. е. предполагается, что поля свободные), поэтому перенесение на них условия (1.1) недопустимо. Действительно, применяя к (1.2) оператор ∂_μ и учитывая (1.1), получаем $\partial_\mu D(x-y) = 0$, что не так. Последнее обстоятельство отчетливо понимали творцы квантовой электродинамики (КЭД). Единственный способ сохранить условие (1.1) в классическом пределе, не вступая в конфликт с постулатами квантовой механики,— это потребовать его выполнения лишь на физических векторах гильбертова пространства

$$\partial_\mu \hat{A}_\mu(x)\,\psi_{\text{физ}} = 0; \tag{1.3}$$

равенство записано в гейзенберговом представлении. Условие (1.3) связывают с именем Ферми [3–5] (статьи [3–5] переведены на русский язык [6]; см. также [7] и раздел 6.5). В последующем именно его использовал Дирак [8, 9]. Между тем в период создания современной КЭД был поднят вопрос о допустимости этого условия.

Рядом авторов [10–12] было указано на ненормируемость физических состояний в схеме с условием (1.3) (критику см. в разделах 4.2, 6.4), в связи с чем Гупта заменил его на более слабое [13]

$$\partial_\mu \hat{A}_\mu^{(+)}(x)\,\psi_{\text{физ}} = 0 \tag{1.4}$$

($\hat{A}_\mu^{(+)}$ содержит операторы уничтожения). В той же статье [13] он сформулировал довольно громоздкую процедуру квантования, включавшую условие (1.4). По существу, Гупта постулировал существование вспомогательного гильбертова пространства, которое затем наделялось индефинитной метрикой; при этом переопределялась операция эрмитова сопряжения (см. [14], а также раздел 6.1). Тотчас после появления работы [13] Блейлер [15] обобщил ее на случай взаимодействующих полей. Впоследствии Гупта, по-видимому, осознал, что квантовой электродинамике внутренне присуща индефинитная метрика и отказался от искусственного введения вспомогательного гильбертова пространства с дефинитной метрикой [16]. Поскольку первоначальная схема [13] к тому же не обладала явной релятивистской инвариантностью (утверждалось [17], что она вообще лоренц-неинвариантна), Гупта посвятил отдельную работу [18] доказательству релятивистской инвариантности окончательной конструкции. Ее недостаток (впрочем, безобидный) связан с присутствием в физическом подпространстве векторов с нулевой нормой. Подобные состояния, разумеется, не могут иметь физического смысла. Вся процедура получила название квантования по Гупте — Блейлеру, ее первый вариант [13, 15] обычно воспроизводится в учебниках [2, 19, 20]. В книге Яуха и Рорлиха [21] изложены обе схемы квантования, т. е. с условиями и (1.3), и (1.4).

В целом после ознакомления с литературой по обсуждаемой проблеме не остается впечатления полной ясности. Данный вопрос, однако, имеет не только методический интерес. Типичными системами подобного рода являются поля Янга — Миллса, гравитационное поле; аналогичная проблема возникает при квантовании струны. С целью квантового описания гравитации была разработана гамильтонова механика систем со связями п сформулированы общие правила их канонического квантования [22–24]. В соответствии с этой теорией электродинамика есть система с двумя связями первого рода. Ниже проблема канонического квантования электромагнитного поля анализируется в деталях.

Обозначения. Принята метрика $g_{\mu\nu}$ $(+---)$. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские, если не оговорено особо,— 1, 2, 3. Используются сокращенные обозначения для оператора дифференцирования $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ и оператора Даламбера $\Box \equiv -\partial_\mu^2 = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. По повторяющимся греческим индексам одинаковой вариантности предполагается суммирование с надлежащим метрическим тензором, например, $q_\mu x_\mu \equiv g^{\mu\nu} q_\mu x_\nu = q_\mu x^\mu \equiv qx$. Физические векторы состояний обозначаются в дальнейшем Φ, физический вакуум — Φ_0, математический вакуум — ψ_0. Состояния, порождаемые операторами $\hat{a}_0^+$, $\hat{a}_3^+ = a_i^+(q)\, q_i/|\,\mathbf{q}\,|$, условно именуются состояниями с «времениподобными» и «продольными» фотонами. δ_{ik}, δ_i^k, $\delta_{\mu\nu}$, δ_μ^ν — символы Кронекера; $\{\ ,\ \}$ — классические скобки Пуассона, $\{x^i, p_k\} = \delta_k^i$. Используется хевисайдова (рационализированная) система единиц, всюду положено $\hbar = c = 1$. e — электрический заряд.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

2.1. Лагранжев формализм

Динамика свободного электромагнитного поля задается плотностью функционала Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{2} K^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma =$$
$$= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu (A_\nu\partial_\nu A_\mu - A_\mu \partial_\nu A_\nu), \qquad (2.1)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $K^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma}$. Тензор $F_{\mu\nu}$ не меняется при калибровочных преобразованиях $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$, Λ — произвольная функция координат, т. е. теория инвариантна относительно бесконечномерной группы преобразований, и, согласно второй теореме Нетер[25], между уравнениями движения существует тождественное соотношение. Это означает, что уравнений движения меньше, чем неизвестных, т. е. закон изменения некоторых переменных со временем не содержится в (2.1). Лагранжевы уравнения движения, вытекающие из (2.1), таковы:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \qquad (2.2)$$

а упомянутое тождественное соотношение между четырьмя уравнениями (2.2) для четырех функций A_μ есть $\partial_\mu\partial_\nu F_{\mu\nu} \equiv 0$ (тождество Нетер). Калибровочный произвол устраняется добавлением к (2.2) требования (1.1). Остальные уравнения Максвелла $(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0)$ выполняются тождественно при любых A_μ.

2.2. Гамильтонов формализм

Калибровочная инвариантность затрудняет переход к гамильтонову формализму. Если L — функция Лагранжа, то для этого необходимо разрешить N уравнений

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad (2.3)$$

относительно скоростей $\dot{q}$ и затем исключить их из выражения $H = p_i\dot{q}^i - L(q, \dot{q})$. Система (2.3) разрешима лишь в том случае, если матрица

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \qquad (2.4)$$

невырождена. Этого нет в электродинамике, где, согласно (2.1), матрица (2.4)

$$T^{\nu\sigma}=\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\nu\,\partial\dot{A}_\sigma}=K^{0\nu 0\sigma}=g^{00}g^{\nu\sigma}-g^{0\nu}g^{0\sigma} \tag{2.5}$$

вырождена, ибо, будучи диагональной, она имеет на диагонали нуль: $T^{00}=0$. Данное обстоятельство и ведет к появлению связей [24]. При разрешении (2.3) скорости из части уравнений выпадают, и они превращаются в соотношения между координатами и импульсами вида

$$\varphi_k(q,\ p)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s,\quad s<N), \tag{2.6}$$

именуемые связями (связями называют также сами функции φ_k). Общий анализ подобных систем дан в [24]. Применительно к электродинамике в качестве (2.3) имеем

$$\pi^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_\mu}=F^{\mu 0}, \tag{2.7}$$

откуда заключаем, что один из канонических импульсов π^μ равен нулю (первичная связь):

$$\pi^0=0. \tag{2.8}$$

Именно так проявляется в гамильтоновом формализме наличие нефизических степеней свободы. Вычисляя гамильтониан, находим

$$\left.\begin{aligned}&H_0=\int d^3x\left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2)-A_0\operatorname{div}\mathbf{E}+\pi^0\dot{A}_0\right],\\ &E^k=F^{k0},\ \mathbf{H}^2=\frac{1}{2}F_{ik}^2,\quad \operatorname{div}\mathbf{E}\equiv\partial_k E^k\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3).\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Ввиду (2.8), а также в связи с тем, что гамильтонов формализм не должен содержать скоростей, последний член в (2.9) обычно опускают. Теперь нужно убедиться в непротиворечивости динамической системы, т. е. в том, что (2.8) не противоречит уравнениям движения и будет выполняться при всех временах. Для этого необходимо равенство $\dot{\pi}^0=0$. Вычисляя $\dot{\pi}^0=\{\pi^0,\ H_0\}=$ $=\operatorname{div}\mathbf{E}$, где

$$\{f,\ g\}=\int d^3x\left(\frac{\delta f}{\delta A_\mu(x)}\frac{\delta g}{\delta\pi^\mu(x)}-\frac{\delta f}{\delta\pi^\mu(x)}\frac{\delta g}{\delta A_\mu(x)}\right)$$

— классические скобки Пуассона, приходим к новому условию

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{2.10}$$

Так как, согласно (2.7), напряженность электрического поля $E^k\equiv\pi^k$ есть канонический импульс, то (2.10) также есть связь (вторичная связь). Других связей нет, поскольку $\{\operatorname{div}\mathbf{E},\ H_0\}=0$. Для дальнейшего существенно выяснить, чему равны скобки Пуассона обеих связей. Имеем $\{\pi^0,\ \operatorname{div}\mathbf{E}\}=0$, т. е. связи находятся в инволюции (связи первого рода). Данный факт играет важную роль при построении квантовой теории [24], ибо подобные связи могут рассматриваться как некоторые обобщенные импульсы; условия (2.8) и (2.10) нельзя переносить на операторы, не вступая в конфликт с каноническими коммутационными соотношениями [7, 24].

Выше отмечалось, что наличие связей в теории отражает наличие нефизических переменных. Их число (если нет связей второго рода) равно числу связей. Следовательно, электродинамика, формулируемая в терминах векторного поля A_μ, есть система с двумя нефизическими степенями свободы; остающиеся две физические компоненты A_μ описывают два возможных поляризационных состояния фотона. То, что решения уравнений движения (2.2) содержат лишь одну произвольную функцию, означает, что изменение со временем одной из нефизических степеней свободы целиком определяется законом изменения другой.

Введение взаимодействия с заряженными полями не вносит существенных изменений в проделанный анализ [8, 9, 24]. Теория сохраняет калибровочную инвариантность; в гамильтоновой формулировке динамика, как и прежде, характеризуется наличием двух связей первого рода

$$\pi^0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = j_0 \tag{2.11}$$

($j_\mu = -\partial\mathcal{L}/\partial A^\mu$ — 4-вектор электрического тока), т. е. видоизменяется лишь вторичная связь.

3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Переход к квантовому описанию динамической системы сводится к замене во всех выражениях канонических переменных q, p операторами $\hat{q}$, $\hat{p}$, подчиняющимися перестановочным соотношениям

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\{q, p\}. \tag{3.1}$$

Данный рецепт справедлив лишь в декартовых координатах и недвусмыслен, если нет проблемы упорядочения операторов в гамильтониане [8]. Наличие связей усугубляет трудности [22—24]. Электродинамика является типичной системой со связями и содержит помимо физических переменных также и нефизические. Есть два способа распорядиться ими в квантовой теории.

1) Изгнать все нефизические переменные; при этом теряется явная ковариантность теории.

2) Допустить наряду с физическими степенями свободы также и нефизические. Этот способ обычно предпочитают, ввиду его явной релятивистской инвариантности.

3.1. Исключение нефизических переменных

Проиллюстрируем первый способ на примере скалярной электродинамики, заданной лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi][(\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi]^* - V(2\Phi\Phi^*), \tag{3.2}$$

где V описывает самодействие комплексного поля Φ. Удобно от Φ перейти к паре вещественных скалярных полей $\Phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$, которые будем трактовать как двумерный вектор $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$. Тогда (3.2) перепишется в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\nabla_\mu\boldsymbol{\varphi})^2 - V(\boldsymbol{\varphi}^2), \qquad \nabla_\mu \equiv \partial_\mu + eTA_\mu; \tag{3.3}$$

здесь $T = -i\tau_2$, τ_2 — матрица Паули, $(T\boldsymbol{\varphi})_i = T_{ij}\varphi_j$. Переходя к гамильтоновому формализму

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_\mu} = F^{\mu 0}, \qquad \mathbf{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + eA_0T\boldsymbol{\varphi},$$

получаем

$$H = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}[(\partial_k + eA_kT)\boldsymbol{\varphi}]^2 + V(\boldsymbol{\varphi}^2) - A_0G\right\}, \tag{3.4}$$

$$G = \partial_k E^k + e\mathbf{p}T\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{div}\mathbf{E} - j_0, \qquad E^k = F^{k0}. \tag{3.5}$$

Как отмечалось, при включении взаимодействия первичная связь остается прежней ($\pi^0 = 0$), вторичная же меняется; вместо (2.10) имеем $\dot{\pi}^0 = G = 0$. π^0 и G — генераторы калибровочных преобразований. Вычисляя скобки Пуассона G с $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\varphi}$, убеждаемся, что G есть генератор (точнее, его плотность) поворотов в плоскости. Чтобы лучше понять физическое содержание модели, выделим среди канонических переменных φ, $\mathbf{p}$ и A_k, E^k физические [26]; от декартовых переменных φ_1, φ_2 перейдем к полярным ρ, θ ($\rho^2 = \varphi^2$) с канонически сопряженными импульсами $p_\rho = (\varphi, \mathbf{p})/\rho$, $p_\theta = (\mathbf{n}_\theta, \mathbf{p})\,\rho = \mathbf{p}T\varphi$ (n_θ — единичный орт), а электромагнитные поля разобьем на компоненты

$$\begin{aligned} &E^k = \varepsilon^k + \partial^k\pi, \qquad \partial_k\varepsilon^k = 0, \qquad \pi = -\Delta^{-1}\partial_k E^k,\\ &A_k = \alpha_k + \Delta^{-1}\partial_k\alpha, \qquad \partial^k\alpha_k = 0, \qquad \alpha = -\partial^k A_k, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\Delta \equiv -\partial_k\partial^k = \partial_k\partial_k$. Очевидно, α_k, ε^k и α, π образуют пары канонически сопряженных переменных. Из (3.5) вытекает, что $G = -\Delta\pi_\theta + ep_\theta$, поэтому, согласно (3.6) и определению ρ, θ, калибровочно-инвариантными переменными будут пары α_k, ε^k, ρ, p_ρ, тогда как θ и α меняются при сдвигах, генерируемых G: $\alpha \to \alpha + \Delta\omega$, $\theta \to \theta - e\omega$; $\omega(x)$ — произвольная бесконечно-малая функция. Из этих формул следует, что комбинация $\Delta^{-1}\alpha + \theta/e$ есть калибровочный инвариант. Следовательно, две «нефизические» переменные α и θ, меняющиеся при калибровочных преобразованиях, в действительности являют собой линейные комбинации физической и нефизической компонент. В соответствии с этим перейдем к новым каноническим переменным η, p_η и ϑ, p_θ:

$$\begin{aligned} &\eta = \Delta^{-1}\alpha + \frac{\theta}{e}, \qquad p_\eta = \frac{1}{2}(\Delta\pi + ep_\theta),\\ &\vartheta = -\Delta^{-1}\alpha + \frac{\theta}{e}, \qquad p_\vartheta = \frac{1}{2}(-\Delta\pi + ep_\theta). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Очевидно, $p_\theta = G/2$, и ϑ, p_θ образуют пару нефизических переменных, тогда как η, p_η — пару физических (они не меняются при калибровочных преобразованиях) *). Запишем гамильтониан (3.4) в новых переменных

$$H = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}[\varepsilon^2 - (p_\eta - p_\vartheta)\,\Delta^{-1}(p_\eta - p_\vartheta) + \mathbf{H}^2] + \frac{1}{2}\left[p_\rho^2 + \frac{(p_\eta + p_\vartheta)^2}{e^2\rho^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}[(\partial_k\rho)^2 + e^2(\alpha_k + \partial_k\eta)^2\rho^2] + V(\rho^2) - 2A_0 p_\vartheta\right\}. \tag{3.8}$$

Как и полагается, нефизическая степень свободы ϑ оказывается циклической. В [26] показано, что фазовое пространство переменных ρ, p_ρ есть развертываемый в полуплоскость конус.

Мы выявили физические переменные, однако переходить в (3.8) к операторам нельзя, так как используются криволинейные координаты. Нельзя, строго говоря, и исключать до квантования нефизические степени свободы, полагая их в (3.8), например, равными нулю, поскольку операции исключения переменных и квантования, вообще говоря, не перестановочны [26, 27]. Чтобы получить правильное выражение для оператора энергии без вспомогательных нефизических степеней свободы, нужно вернуться к формуле (3.4), записанной в декартовых координатах, заменить канонические переменные операторами и вспомнить, что связи, согласно общей теории [22–24], обращаются в нуль только на векторах Φ из физического подпространства

$$\hat{\pi}^0\Phi = 0, \quad \hat{G}\Phi = 0 \qquad (G = \dot{\pi}^0). \tag{3.9}$$

В соответствии со сказанным представим член $\mathbf{E}^2$ в (3.4) в виде (см. (3.6))

$$\int d^3x\mathbf{E}^2 = \int d^3x\,[\varepsilon^2 + (\partial\pi)^2] = \int d^3x\,(\varepsilon^2 - \pi\Delta\pi). \tag{3.10}$$

При интегрировании по частям в (3.10) мы пренебрегли внеинтегральными членами. Учитывая, что нулевая компонента тока есть $j_0 = -\partial\mathcal{L}/\partial A_0 = -e\mathbf{p}T\varphi = -ep_\theta$, и что, согласно (3.7), $\pi = -\Delta^{-1}(-ep_\theta + G)$, заклю-

*) Калибровочная инвариантность — это необходимый признак физической величины, но отнюдь не достаточный. Например, $p_\vartheta = G/2$ есть калибровочный инвариант, так как инварианты $\mathbf{E}$ и j_0.

чаем: с учетом (3.10) и условий (3.9) физический оператор Гамильтона $\hat{H}_{\text{физ}}$, отвечающий (3.4), дается формулой

$$\hat{H}_{\text{физ}} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{\varepsilon}}^2 + \hat{\mathbf{H}}^2 - \hat{j}_0 \Delta^{-1} \hat{j}_0] + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}}^2 + \frac{1}{2} [(\partial_k + e\hat{\alpha}_k T) \hat{\Phi}]^2 + V(\hat{\Phi}^2) \right\}, \tag{3.11}$$

где

$$\hat{\Phi}(x) = \exp\left(-e \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\partial_k \hat{A}_k(y)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T \right) \hat{\varphi}(x).$$

Третий член здесь описывает кулоново взаимодействие зарядов. В (3.11) вместо A_k написано α_k, так как «нефизическая» составляющая вектора A_k (т. е. α) отнесена в фазу поля $\hat{\varphi}$, где она, комбинируясь с θ, превращается в η. При переходе в (3.4) и связях к операторам нет проблемы их упорядочения, поэтому оператор (3.11) и есть искомый гамильтониан.

3.2. Фиксация нефизических переменных (выбор калибровки)

Если мы хотим сохранить явную релятивистскую инвариантность теории и после квантования, то должны строить формализм с участием всех четырех компонент вектора $A_\mu(x)$, включая нефизические. Но нефизические канонические переменные в классической физике, вообще говоря, совершенно произвольны [24], поэтому встает вопрос: какие операторы сопоставлять им в квантовой теории?

В отличие от классики, в квантовой теории уже условие (3.1) для нефизических q, p определенным образом их ограничивает, ибо не всякая пара операторов ему удовлетворяет. Требование (3.1) означает, что нефизические переменные, как и физические, связаны в разные моменты времени унитарным преобразованием, генератор которых для первых совершенно произволен *). Из сказанного вытекает, что при построении конкретной теории нефизические переменные нужно как-то фиксировать, т. е. указать закон их изменения со временем. Очевидно, фиксация подобного закона нарушает явную калибровочную инвариантность теории — это равнозначно выбору калибровки. В целом теория, разумеется, остается калибровочно-инвариантной в том смысле, что перемена калибровочного условия не влияет на физику (ситуация здесь аналогична выбору системы отсчета в механике). Теорию желательно строить так, чтобы физические и нефизические компоненты A_μ формально были равноправны. Этой цели отвечает добавление в лагранжиан $\mathscr{L}$ (2.1) (или (3.2)) некоторого члена $\mathscr{L}'$, снимающего вырождение матрицы (2.5) (о требованиях, предъявляемых к $\mathscr{L}'$, см. раздел 6.3). Рассмотрим конкретный пример, когда [28] $\mathscr{L}' = -(\partial_\mu A_\mu)^2/2\xi$.

Итак, пусть

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} + \mathscr{L}' = \mathscr{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2. \tag{3.12}$$

Добавленное слагаемое снимает вырождение при любом значении параметра $\xi^{-1} \neq 0$ и нарушает калибровочную инвариантность. Случай $\xi = 1$ отвечает калибровке Фейнмана; при произвольном ξ говорят о классе калибровок Ферми. Впервые указанный класс калибровок ввели Гейзенберг и Паули [28]. Если $\xi = 1$, то добавок сокращается со вторым членом в (2.1) и уравнения движения выглядят особенно просто

$$\Box A_\mu = -j_\mu, \tag{3.13}$$

поэтому в последующем положим $\xi = 1$.

*) Другое ограничение заключается в требовании, чтобы они коммутировали с физическими величинами.

3.2.1. *Свободное электромагнитное поле*

Изучим сначала свободное поле. Построим гамильтонов формализм. Имеем

$$\pi^{\mu}=F^{\mu 0}-g^{\mu 0}\partial_{\nu}A_{\nu}, \tag{3.14}$$

$$H_0=\int d^3x\,(\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu}-\mathscr{L}-\mathscr{L}')=\int d^3x\left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2-(\pi^0)^2\right]-\\ -A_0\operatorname{div}\mathbf{E}-\pi^0\operatorname{div}\mathbf{A}\Big\}. \tag{3.15}$$

Чтобы записать H_0 в форме, удобной для перехода к операторам рождения и уничтожения, выразим функционал (3.15) через потенциалы

$$H_0=-\frac{1}{2}\int d^3x\,[\dot{A}_{\mu}^2+(\partial_i A_{\mu})^2+\partial_i\,(A_k\partial_k A_i-A_i\partial_k A_k)]. \tag{3.16}$$

При $j_{\mu}=0$ **вектор** A_{μ} удовлетворяет уравнению Даламбера, поэтому справедлива формула

$$A_{\nu}(x)=\int d\mu\,(q)\,(a_{\nu}(q)\,e^{-iqx}+a_{\nu}^{*}(q)\,e^{iqx}). \tag{3.17}$$

где

$$d\mu\,(q)\equiv\frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2\omega_q},\qquad \omega_q=|\,\mathbf{q}\,|,\qquad q^2=0. \tag{3.18}$$

Подставляя выражение (3.17) в (3.16) и выполняя необходимые интегрирования, находим

$$H_0=-\frac{1}{2}\int d\mu\,(q)\,\omega_q\,[a_{\nu}^{*}(q)\,a_{\nu}(q)+a_{\nu}(q)\,a_{\nu}^{*}(q)]. \tag{3.19}$$

Перейдем к квантовому описанию. Поскольку классические скобки Пуассона канонических переменных A_{μ}, π^{ν} **есть**

$$\{A_{\mu}(x),\,\pi^{\nu}(y)\}=\delta_{\mu}^{\nu}\delta\,(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\qquad x^0=y^0, \tag{3.20}$$

то, согласно (3.1), имеем для соответствующих операторов

$$[\hat{A}_{\mu}(x),\,\hat{\pi}^{\nu}(y)]=i\delta_{\mu}^{\nu}\delta\,(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\qquad x^0=y^0. \tag{3.21}$$

Пользуясь в (3.21) формулой (3.14) и учитывая перестановочность полей в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, заключаем, что для полей имеют место коммутационные соотношения

$$[\hat{A}_{\mu}(x),\,\hat{\dot{A}}_{\nu}(y)]=-ig_{\mu\nu}\delta\,(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\qquad x^0=y^0. \tag{3.22}$$

Коммутационные соотношения для операторов $\hat{a}_{\mu}$, $\hat{a}_{\mu}^{+}$ следуют из (3.22), если их выразить через $\hat{A}_{\mu}$ посредством равенств

$$\hat{a}_{\mu}(q)=(\chi_q^{(+)},\hat{A}_{\mu}),\qquad \hat{a}_{\mu}^{+}=-(\chi_q^{(-)},\,\hat{A}_{\mu}). \tag{3.23}$$

в которых $\chi_q^{(\pm)}=\exp\,(\mp iqx)$ — решения уравнения Даламбера с положительными $(\chi_q^{(+)})$ и отрицательными $(\chi_q^{(-)})$ энергиями, обладающие свойствами $(\chi_q^{(\pm)},\ \chi_{q'}^{(\pm)})=\pm\tilde{\delta}\,(\mathbf{q},\,\mathbf{q}')$, $(\chi_q^{(\pm)},\ \chi_{q'}^{(\mp)})=0$; в формулах (3.23) и следующих использовано стандартное скалярное произведение

$$(\chi_1,\,\chi_2)=i\int d^3x\,\chi_1^{*}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\chi_2(x), \tag{3.24}$$

и «инвариантная» δ-функция $\tilde{\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv (2\pi)^3 2\omega_q \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$. С учетом (3.22) — (3.24) находим

$$[\hat{a}_\mu(q), \hat{a}_\nu^+(q')] = -g_{\mu\nu}\tilde{\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'). \tag{3.25}$$

Оператор энергии свободного поля получается из выражения (3.19) заменой $a_\mu^* \to \hat{a}_\mu^+$, $a_\mu \to \hat{a}_\mu$:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\int d\mu(q)\,\omega_q\,[\hat{a}_\mu^+\hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu\hat{a}_\mu^+]. \tag{3.26}$$

С формулами (3.25), (3.26) и связаны основные неприятности квантовой электродинамики.

1) Согласно (3.25) в теории имеются состояния с отрицательной нормой (так как $[\hat{a}_0(q), \hat{a}_0^+(q')] = -\tilde{\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, и для $\psi_1 = \int d\mu(q) f(q)\,\hat{a}_0^+(q)\,\psi_0$ имеет место неравенство $(\psi_1, \psi_1) = \|\psi\|^2 = -\int d\mu(q)\,|f(q)|^2 < 0$, если $(\psi_0, \psi_0) = 1$, $\hat{a}_0(q)\,\psi_0 = 0$).

2) Согласно (3.26) возможно появление состояний с отрицательной энергией (так как форма $\hat{a}_\mu^+\hat{a}_\mu = \hat{a}_0^+\hat{a}_0 - \hat{a}_k^+\hat{a}_k$ знакопеременна).

Обе неприятности обязаны своим происхождением времениподобным фотонам. Покажем, что если ограничиться физическим подпространством $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ полного гильбертова пространства ($\mathcal{H}_{\text{физ}} \subset \mathcal{H}$), которое фиксируется условиями (3.9) и корректно определить операцию «эрмитова сопряжения» для оператора $\hat{a}_0$ (раздел 4.2), то трудности снимаются. Согласно (3.14)

$$\hat{\pi}^0 = -\partial_\mu \hat{A}_\mu = i\int d\mu(q)\,(\hat{L}(q)\,e^{-iqx} - \hat{L}^+(q)\,e^{iqx}), \tag{3.27}$$

$$\hat{G} = \dot{\hat{\pi}}^0 = \int d\mu(q)\,\omega_q\,(\hat{L}(q)\,e^{-iqx} + \hat{L}^+(q)\,e^{iqx}), \tag{3.28}$$

где

$$\hat{L}(q) \equiv q_\mu \hat{a}_\mu(q), \quad q^2 = 0. \tag{3.29}$$

Условия (3.9) с учетом (3.27), (3.28) переписываются следующим образом:

$$\hat{L}(q)\,\Phi = 0, \quad \hat{L}^+(q)\,\Phi = 0; \tag{3.30}$$

для вывода (3.30) можно воспользоваться формулами, аналогичными (3.23). Ввиду равенства

$$[\hat{L}(q), \hat{L}^+(q')] = 0 \tag{3.31}$$

условия (3.30) не противоречат друг другу.

Теперь несложно убедиться, что норма векторов $\Phi \in \mathcal{H}_{\text{физ}}$ всегда положительна, а энергия отвечающих им состояний неотрицательна. Действительно, отрицательной нормой могут обладать лишь состояния с нечетным числом времениподобных фотонов. Но состояния вида $(\hat{a}_0^+)^n\,\Phi$ не принадлежат $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ ибо, согласно (3.25), (3.29)

$$[\hat{L}(q), \hat{a}_\mu^+(q')] = -q_\mu \tilde{\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'), \tag{3.32}$$

и $\hat{L}(q)\,(\hat{a}_0^+)^n\,\Phi \neq 0$, $n \geqslant 1$, т. е. первое из условий (3.30) не выполняется. Если отказаться от второго условия (3.30), то в теории сохраняются нефизические состояния с нулевой нормой вида $(\hat{L}^+)^n\,\Phi$. После их исключения остаются лишь состояния с положительной нормой.

Чтобы доказать отсутствие в физическом подпространстве состояний с отрицательной энергией, представим оператор $\hat{h} = -(1/2)(\hat{a}^+_\mu \hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu \hat{a}^+_\mu)$ в виде

$$\hat{h}(q) = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{a}}^+_\perp(q)\hat{\mathbf{a}}_\perp(q) + \hat{\mathbf{a}}_\perp(q)\hat{\mathbf{a}}^+_\perp(q)] - \frac{1}{\omega_q}\Big\{\hat{a}_0(q)\hat{L}^+(q) + \hat{a}^+_3(q)\hat{L}(q) + \frac{1}{2}[\hat{L}^+(q), \hat{a}_0(q)] + \frac{1}{2}[\hat{L}(q), \hat{a}^+_3(q)]\Big\}, \quad (3.33)$$

где $\hat{a}_3(q) = (\mathbf{q}, \hat{\mathbf{a}}(q))/\omega_q$, $(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{a}}_\perp(q)) = 0$. Используя коммутационные соотношения (3.32) и комплексно сопряженные им, $[\hat{L}^+, \hat{a}_\mu] = q_\mu \tilde{\delta}$, находим, что коммутаторы в (3.33) взаимно сокращаются, а члены, содержащие операторы $\hat{L}$, $\hat{L}^+$, обращаются в нуль на физических векторах. Итак, вклад в энергию дают только физические фотоны, тогда как нефизические не дают вклада даже в энергию основного состояния (бесконечная постоянная, появляющаяся после приведения $\hat{h}$ к нормальному виду).

По существу доказательство самосогласованности теории закончено. Убедимся, тем не менее, что гамильтониан $\hat{H}_0$ в процессе движения не выводит физические векторы за пределы физического подпространства. Это вытекает из равенств

$$[\hat{L}(q), \hat{H}_0] = \omega_q \hat{L}(q), \quad [\hat{L}^+(q), \hat{H}_0] = -\omega_q \hat{L}^+(q), \quad (3.34)$$

согласно которым $\hat{L}\hat{H}_0\Phi = \hat{L}^+\hat{H}_0\Phi = 0$. Итак, теория удовлетворяет всем физическим требованиям.

3.2.2. *Взаимодействующее электромагнитное поле*

Мы рассмотрели квантование свободного электромагнитного поля. Легко видеть, что включение взаимодействия не требует изменения схемы квантования. Действительно, лагранжиан, например, спинорной электродинамики есть [2]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial_\mu - eA_\mu)\gamma_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (3.35)$$

Модифицированный лагранжиан $\mathcal{L} + \mathcal{L}'$ (3.12) при $\xi = 1$ дает уравнения движения (3.13), из которых ввиду сохранения электрического тока $\partial_\mu \hat{j}_\mu = 0$ вытекает [3], что оператор $\partial_\mu \hat{A}_\mu$ удовлетворяет уравнению Даламбера $\Box\, \partial_\mu \hat{A}_\mu = 0$. Полностью сохраняются формулы (3.14), (3.20), (3.21), а следовательно, сохраняют внешний вид формулы для связей

$$\hat{\pi}^0 = -\partial_\mu \hat{A}_\mu, \quad \hat{G} = \dot{\hat{\pi}}^0 = -\partial_\mu \dot{\hat{A}}_\mu.$$

Выше, однако, мы видели, что вторичная связь (2.10) меняется при включении взаимодействия (см. (2.11), (3.5)). Покажем, что здесь нет противоречия. Действительно, пользуясь уравнением движения $\ddot{A}^0 + \partial_k\partial^k A^0 = j^0$, получаем

$$\partial_k E^k - j^0 = \partial_k(\partial^k A^0 - \partial^0 A^k) - j^0 = j^0 - \ddot{A}^0 - \partial_k \dot{A}^k - j^0 = -\partial_\mu \dot{A}_\mu. \quad (3.36)$$

Нужно лишь убедиться, что оператор эволюции $\hat{U}_{tt'} = \exp[-i\hat{H}(t - t')]$ не выводит физические состояния за пределы $\mathcal{H}_{\text{физ}}$, т. е. убедиться, что $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ есть инвариантное подпространство относительно действия оператора $\hat{U}_{tt'}$. Но это тривиальным образом следует из факта непротиворечивости теории

$$[\hat{\pi}^0, \hat{H}] = i(\operatorname{div}\hat{\mathbf{E}} - j_0) \approx 0, \qquad [\operatorname{div}\hat{\mathbf{E}} - j_0, \hat{H}] = i\partial_k\partial^k\hat{\pi}^0 \approx 0, \quad (3.37)$$

ибо, согласно (3.37), $\hat{H}\Phi \in \mathscr{H}_{\text{физ}}$, если $\Phi \in \mathscr{H}_{\text{физ}}$. Символ $\approx$ в (3.37) означает равенство на векторах из $\mathscr{H}_{\text{физ}}$.

Обсудим кратко вопрос о том, как выглядят условия на физические состояния в различных представлениях. В гейзенберговом представлении физические векторы фиксируются условием (1.3). Так как оператор $\partial_\mu \hat{A}_\mu$ удовлетворяет уравнению Даламбера, то (1.3) обеспечивается выполнением всего двух условий в момент времени $t = 0$: $\partial_\mu \hat{A}_\mu \Phi = 0$, $\partial_\mu \hat{\dot{A}}_\mu \Phi = 0$, что, ввиду (3.37), эквивалентно двум условиям (3.9) в шредингеровом представлении (даже при включенном взаимодействии, см. (3.36)). Тем самым становится ясной связь между квантованием по Ферми с единственным условием (1.3) и квантованием по рецепту Дирака [24] с двумя условиями (3.9) на векторы Φ.

Чтобы записать (3.9) в представлении взаимодействия, нужно в формулах для π^0 и $G = \partial_k E^k - j^0$ перейти к свободным полям, т. е. в выкладках (3.36) воспользоваться уравнением $\ddot{A}^0 + \partial_k \partial^k A^0 = 0$; в результате получаем [29]

$$\hat{\pi}^0 = -\partial_\mu \hat{A}_\mu, \qquad \hat{G} = \hat{\dot{\pi}} = -\partial_\mu \hat{\dot{A}}_\mu - \hat{j}^0. \tag{3.38}$$

Это и есть связи в представлении взаимодействия. Отсюда следует, что условие (1.3), справедливое при любом x^0, в представлении взаимодействия перепишется в виде [29, 30]

$$\left[\partial_\mu \hat{A}_\mu (x) + \int d^3y D(x-y)\, \hat{j}_0 (y)\right] \Phi = 0, \tag{3.39}$$

так как, согласно (1.2), (3.22), при $x^0 = 0$ справедливы равенства: $D(x) = 0$, $\dot{D}(x) = \delta(\mathbf{x})$.

4. СТРУКТУРА ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

4.1. Гильбертово пространство в калибровке Гейзенберга — Паули — Ферми

Если допустить в формализм все компоненты вектора A_μ, то структура полного гильбертова пространства определяется коммутационными соотношениями (3.25) для операторов $\hat{a}_\mu$, $\hat{a}_\mu^+$ и несет на себе печать структуры пространства Минковского. Покажем это.

Прежде всего обсудим вопрос о вакууме. Если теория задана формулами (3.25), (3.26) без ограничений на векторы состояний, то формально математический вакуум ψ_0 фиксируется условиями

$$\hat{a}_\mu (q)\, \psi_0 = 0. \tag{4.1}$$

Для операторов $\hat{a}_k (q)$, $k = 1, 2, 3$ требование (4.1) очевидно. Сомнение может вызвать лишь допущение, что (4.1) выполняется и для $\hat{a}_0 (q)$ (см. разд. 6.4). Но это представляется неизбежным, если постулировать релятивистскую инвариантность вектора ψ_0, так как преобразованный по Лоренцу оператор $\hat{a}_k$ может содержать и нулевую компоненту. Трудность (мнимую) вызывает аномальный знак у коммутатора $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^+] = -\tilde{\delta}$ по сравнению с коммутаторами пространственных компонент, поскольку, казалось бы, $\hat{a}_0$ должен играть роль оператора рождения. В действительности вопрос сводится к определению оператора $\hat{a}_0^+$, сопряженного к $\hat{a}_0$. Легко видеть, что если $\hat{a}_\mu^+ (q)$ — оператор умножения на функцию $a_\mu (q)$, то, согласно (3.25), $\hat{a}_\mu (q) =$

$=-g_{\mu\nu}\beta_q\delta/\delta a_\nu(q)$ (см. (4.7)), и условие (4.1) выполняется. Такой вид оператора $\hat{a}_\mu$ диктуется релятивистской инвариантностью.

Итак, постулируем существование лоренц-инвариантного циклического вектора ψ_0, удовлетворяющего условию (4.1). Векторы, получающиеся применением к нему всевозможных операторов вида $(\hat{a}_\mu^+)^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ образуют базис гильбертова пространства. Среди базисных векторов имеются таковые с отрицательной нормой, поэтому гильбертово пространство обладает индефинитной метрикой. Имея в виду физические приложения, разложим вектор $a_\mu(q)$ по базисным векторам [31]

$$e_\mu^{(1)}(q),\quad e_\mu^{(2)}(q),\quad q_\mu,\quad \tilde{q}_\mu, \tag{4.2}$$

где

$$e_\mu^{(i)}(q)\,q_\mu=e_\mu^{(i)}(q)\,\tilde{q}_\mu=0,\qquad e_\mu^{(i)}(q)\,e_\mu^{(k)}(q)=-\delta^{ik}, \tag{4.2'}$$

$$q_\mu^2=\tilde{q}_\mu^2=0,\quad q_\mu\tilde{q}_\mu=2\omega_q^2\qquad (i,\ k=1,2),$$

т. е., если $q_\mu=(\omega_q;\ 0,\ 0,\ q)$ — стандартный вектор, то $\tilde{q}_\mu=(\omega_q;\ 0,\ 0,\ -q)$. Так как среди векторов (4.2) есть изотропные, то они образуют неортогональный базис. Построим операторы

$$\hat{a}_i(q)=e_\mu^{(i)}(q)\,\hat{a}_\mu(q),\qquad \hat{L}(q)=q_\mu\hat{a}_\mu(q),\qquad \hat{K}(q)=\tilde{q}_\mu\hat{a}_\mu(q) \tag{4.3}$$

и эрмитово сопряженные к ним $\hat{a}_i^+$, $\hat{L}^+$, $\hat{K}^+$. Операторы $\hat{K}$, $\hat{K}^+$ обладают, очевидно, теми же свойствами, что и операторы $\hat{L}$, $\hat{L}^+$:

$$[\hat{K}(q),\ \hat{K}^+(q')]=0,\qquad [\hat{a}_\mu(q),\ \hat{K}^+(q')]=[\hat{K}(q),\ \hat{a}_\mu^+(q')]=-\tilde{q}_\mu\tilde{\delta}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}'), \tag{4.4}$$

причем

$$[\hat{L}(q),\ \hat{K}^+(q')]=[\hat{K}(q),\ \hat{L}^+(q')]=-2\omega_q^2\tilde{\delta}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}'). \tag{4.5}$$

Применяя к ψ_0 операторы $\hat{a}_i^+$, $\hat{L}^+$, $\hat{K}^+$, находим, что гильбертово пространство $\mathcal{H}$ распадается на подпространства $\mathcal{H}_\varphi$, $\mathcal{H}_\zeta$, $\mathcal{H}_\eta$, $\mathcal{H}_{\varphi\zeta}$, $\mathcal{H}_{\varphi\eta}$, $\mathcal{H}_{\zeta\eta}$, $\mathcal{H}_{\varphi\zeta\eta}$. Базис подпространства $\mathcal{H}_\varphi$ получается применением к ψ_0 операторов $\hat{a}_i^+$, $\psi_0\in\mathcal{H}_\varphi$, базисы $\mathcal{H}_\zeta$ и $\mathcal{H}_\eta$ — операторов $\hat{L}^+$, $\hat{K}^+$ соответственно, базис $\mathcal{H}_{\varphi\zeta}$ — операторов $(\hat{a}_i^+)^n(\hat{L}^+)^m$, $n\geqslant 1$, $m\geqslant 1$, и т. д. Векторы $\varphi\in\mathcal{H}_\varphi$ обладают положительной нормой, тогда как нормы, например, векторов из $\mathcal{H}_\zeta$, $\mathcal{H}_\eta$, $\mathcal{H}_{\varphi\zeta}$, $\mathcal{H}_{\varphi\eta}$ равны нулю — следствие (3.31), (4.1), (4.4) и вытекающих из (4.2') коммутационных соотношений

$$[\hat{a}_i(q),\ \hat{L}^+(q')]=[\hat{a}_i(q),\ \hat{K}^+(q')]=[\hat{a}_i^+(q),\ \hat{L}(q')]=[\hat{a}_i^+(q),\ \hat{K}(q')]=0. \tag{4.6}$$

Подпространства $\mathcal{H}_\zeta$ и $\mathcal{H}_\eta$ не ортогональны ввиду (4.5).

Теперь ясно, какие состояния исключаются условиями (3.30). Первое из них в силу (4.1), (3.31), (4.5) и (4.6) исключает состояния, порождаемые операторами $\hat{K}^+$, т. е. отсекаются подпространства $\mathcal{H}_\eta$, $\mathcal{H}_{\varphi\eta}$, $\mathcal{H}_{\zeta\eta}$, $\mathcal{H}_{\varphi\zeta\eta}$. Тем самым мы получаем гильбертово пространство в формализме Гупты $\mathcal{H}_G=\mathcal{H}_\varphi\oplus\mathcal{H}_\zeta\oplus\mathcal{H}_{\varphi\zeta}$. Векторы из подпространства $\mathcal{H}_\zeta\oplus\mathcal{H}_{\varphi\zeta}$ ортогональны векторам φ и имеют норму нуль. Второе условие (3.30) исключает нефизические состояния с нулевой нормой. Остается подпространство состояний физических фотонов $\mathcal{H}_\Phi$ с положительно определенной метрикой. Чтобы выяснить его структуру, найдем физический вакуум.

4.2. Вакуум в формализме Ферми

В представлении, где $\hat{a}^+_\mu(q)$ есть оператор умножения на функцию $a_\mu(q)$, оператор $\hat{a}_\mu(q)$ есть, согласно (3.25), оператор вариационного дифференцирования:

$$\hat{a}^+_\mu(q) \to a_\mu(q), \quad \hat{a}_\mu(q) \to -g_{\mu\nu}\beta_q \frac{\delta}{\delta a_\nu(q)}, \quad \beta_q \equiv (2\pi)^3 2\omega_q. \tag{4.7}$$

Учитывая, что

$$\hat{L}(q) = q_\mu g^{\mu\nu}\hat{a}_\nu(q) = -\beta_q q_\mu \frac{\delta}{\delta a_\mu(q)}, \tag{4.8}$$

переписываем условия (3.30) для вакуумного вектора Φ_0

$$q_\mu \frac{\delta}{\delta a_\mu(q)} \Phi_0 = 0, \quad q_\mu a_\mu(q)\Phi_0 = 0; \tag{4.9}$$

кроме того, вакуум должен удовлетворять условию отсутствия физических фотонов

$$\hat{a}_i(q)\Phi_0 = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{4.9'}$$

Справедливость представления (4.8) проверяется непосредственно; так как для стандартного вектора q $q_\mu\hat{a}_\mu(q) \equiv \omega_q(\hat{a}_0 - \hat{a}_3)$, причем, согласно (4.7), $\hat{a}_0 = -\beta_q\delta/\delta a_0$, $\hat{a}_3 = \beta_q\delta/\delta a_3$, то $q_\mu\hat{a}_\mu(q) = -\beta_q\omega_q(\delta/\delta a_0 + \delta/\delta a_3) = -\beta_q q_\mu\delta/\delta a_\mu(q)$ *). Переходя в (4.9) к переменным $a^-(q) = q_\mu a_\mu(q)$, $a^+(q) = \tilde{q}_\mu a_\mu(q)$, $\delta a^-(q)/\delta a^+(q') = 0$, получаем пару уравнений

$$\frac{\delta}{\delta a^+(q)}\Phi_0 = 0, \quad a^-(q)\Phi_0 = 0. \tag{4.10}$$

Решение первого из них с учетом (4.9') есть произвольный функционал от $a^-(q)$, т. е. $\Phi_0 = F[a^-(q)]$. Второе условие (4.10) фиксирует функционал F:

$$\Phi_0 = \prod_{\mathbf{q}} \delta(a^-(q)) \quad \left(\text{или } \prod_{\mathbf{q}} \delta(\hat{L}^+(q))\psi_0\right). \tag{4.11}$$

Решение (4.11) легко интерпретировать — физический вакуум есть состояние без поперечных (физических) фотонов с неопределенным числом находящихся в суперпозиции времениподобных и продольных фотонов для каждого значения вектора q, $q^2 = 0$. Состояние Φ_0 ненормируемо. Но это не есть порок теории, ибо ясно, что ненормируемость Φ_0 имеет ту же природу, что и ненормируемость состояний с определенным импульсом в теории рассеяния (монохроматические плоские волны — обобщенные собственные векторы, см. [32]). Подобно тому, как в теории рассеяния от ненормируемости плоских волн можно избавиться переходом к пространству конечного объема, так и здесь от ненормируемости Φ_0 можно избавиться, например, перейдя к «размазанной» δ-функции $\delta(x) \to (2\pi\varepsilon)^{-1/2}\exp(-x^2/2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тем самым, в теорию допускаются нефизические состояния с нормой нуль, которые, однако, безвредны. В конце вычислений ε можно устремить к нулю. В работе [11] прямым вычислением показано, что ненормируемость Φ_0 не влияет на физические результаты.

---

*) Обратим внимание на то, что $\hat{a}_0$ как оператор вариационного дифференцирования имеет другой знак по сравнению с $\hat{a}_3$. Этот знак диктуется коммутационными соотношениями (3.25).

В литературе [10–12, 20–21] обычно используют другую реализацию алгебры (3.25)

$$\begin{aligned} &\hat{a}_i^+(q) \to a_i(q), && \hat{a}_i(q) \to \beta_q \frac{\delta}{\delta a_i(q)}, \\ &\hat{a}_0^+(q) \to \beta_q \frac{\delta}{\delta a_0(q)}, && \hat{a}_0(q) \to a_0(q). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Такое представление алгебры (3.25) нарушает явную релятивистскую инвариантность теории (нет равенства $\hat{a}_\mu \psi_0 = 0$). Поэтому и решение $\tilde{\Phi}_0$ уравнений

$$\begin{aligned} &\hat{L}(q)\tilde{\Phi}_0 \equiv \omega_q \left(a_0(q) - \beta_q \frac{\delta}{\delta a_3(q)}\right)\tilde{\Phi}_0 = 0, \\ &\hat{L}^+(q)\tilde{\Phi}_0 \equiv \omega_q \left(\beta_q \frac{\delta}{\delta a_0(q)} - a_3(q)\right)\tilde{\Phi}_0 = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

которое дается формулой [21]

$$\tilde{\Phi}_0 = c \exp\left(\int d\mu(q)\, a_3(q)\, a_0(q)\right), \tag{4.14}$$

также не инвариантно относительно преобразований Лоренца. Вектор $\tilde{\Phi}_0$, как и Φ_0, ненормируем. В отличие от реализации (4.7), реализация (4.12) дает ненормируемый вакуум (4.14), даже если отбросить второе условие (3.30) (или (4.13)). Отметим, что ненормируемость именно $\tilde{\Phi}_0$ (см. [10–12, 20]) послужила толчком для поиска новых путей квантования [13, 30]. Из сказанного ясно, что $\tilde{\Phi}_0$ может быть отождествлен с вакуумным состоянием только по недоразумению.

Имея в руках вектор Φ_0, находим базис в физическом подпространстве. Его образуют векторы вида $(\hat{a}_1^+(q))^{n_1} (\hat{a}_2^+(q'))^{n_2} \Phi_0$, $n_1, n_2 \geqslant 0$.

4.3. О скалярном произведении в гильбертовом пространстве

До сих пор мы придерживались традиционного подхода к гильбертову пространству в квантовой электродинамике, не задумываясь об определении скалярного произведения в нем. Между тем этот вопрос заслуживает специального обсуждения.

Действительно, возьмем, к примеру, четверку векторов гильбертова пространства $\psi_\mu = \hat{a}_\mu^+(q)\psi_0$. Они образуют вектор пространства Минковского. Сопряженный ψ_μ **элемент** $\psi_0^* \hat{a}_\mu(q)$ также преобразуется как вектор при преобразованиях Лоренца. Следовательно, лоренц-инвариантное скалярное произведение подобных векторов может быть образовано только с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$, например,

$$(\psi_1, \psi_2) = -g^{\mu\nu}(\psi_{1\mu}, \psi_{2\mu}) = -g^{\mu\nu}\int d\mu(q)\, d\mu(q')\, \psi_1^*(q)\, \psi_2(q') \times \\ \times (\psi_0, \hat{a}_\mu(q)\, \hat{a}_\nu^+(q')\, \psi_0) = 4\int d\mu(q)\, \psi_1^*(q)\, \psi_2(q); \tag{4.15}$$

в (4.15) учтены соотношения (3.25). Обобщая это определение на многофотонные состояния, заключаем, что лоренц-инвариантные нормы всех элементов $\mathscr{H}$ будут положительны. При использовании данного аппарата следует проявлять осторожность. Так, может показаться, что норма состояния

$$\psi_L = \int d\mu(q)\, \psi(q)\, \hat{L}^+(q)\, \psi_0$$

есть лоренцев инвариант. С другой стороны, $\|\psi_L\| = 0$, что противоречит утверждению о положительности всех инвариантных норм. В действительности $\hat{L}^+(q)$ есть фактически оператор рождения в базисе (4.2). В самом деле, метрический тензор $\tilde{g}^{AB}$ в этом базисе есть

$$\tilde{g}^{AB} = g^{\mu\nu}e_\mu^A e_\nu^B, \qquad e_\mu^A = \left(\frac{q_\mu}{\sqrt{2}\omega_q};\ e_\mu^{(1)}(q),\quad e_\mu^{(2)}(q),\ \frac{\tilde{q}_\mu}{\sqrt{2}\,\omega_q}\right),$$

$$\tilde{g}^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A,\ B = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{4.16}$$

т. е. $\hat{L}^+(q) = \sqrt{2}\omega_q e_\mu^0 \hat{a}_\mu^+(q) \equiv \sqrt{2}\omega_q \hat{\tilde{a}}_0^+(q)$, поэтому $(\psi_L^0,\ \psi_L^0)$, где $\psi_L^0 = \hat{\tilde{a}}_0^+\psi_0$, не есть инвариант, но преобразуется как компонента $\tilde{g}^{00}$ тензора $\tilde{g}^{AB}$. Подчеркнем в связи с этим, что хотя лоренц-инвариантные нормы и определены положительно, гильбертово пространство псевдоевклидово и нефизические состояния подлежат исключению. То обстоятельство, что в электродинамике понятие ко- и контравариантных (относительно преобразований в пространстве Минковского) векторов следует вводить и для элементов гильбертова пространства, впервые установили Кониси и Огимото [33] (см. также [34]).

4.4. Противоречива ли схема Ферми?

Одним из доказательств противоречивости второго условия (3.30) служит следующее рассуждение [14], заимствованное из [2], где оно проводится в координатном пространстве. Вакуум есть состояние без фотонов, следовательно, отвечающий ему вектор аннулируется операторами уничтожения. Поскольку вакуум есть физическое состояние, то, согласно (3.30),

$$\hat{L}^+(q)\psi_0 = 0. \tag{4.17}$$

Применяя к (4.17) оператор $\hat{K}(q')$ (4.3) и пользуясь формулами (4.1), (4.5), приходим к противоречию

$$\hat{K}(q')\hat{L}^+(q)\psi_0 = -2\omega_q^2\tilde{\delta}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}')\psi_0 = 0 \tag{4.18}$$

(к равенству $\psi_0 = 0$). Ошибочность вывода связана с отождествлением математического вакуума ψ_0, определяемого условием (4.1), с физическим вакуумом Φ_0 (4.11). Утверждение, что физический вакуум должен подчиняться условию (4.1), является совершенно произвольным и не вытекает из формализма. Вектор Φ_0 должен прежде всего удовлетворять условию отсутствия физических фотонов (4.9'). Другое требование, которому он должен подчиняться, есть выполнение условий (3.30), общих для всех векторов физического подпространства. Ясно, что при таком определении Φ_0 противоречия не возникает: операторы $\hat{a}_i$ коммутируют с $\hat{L}$, $\hat{L}^+$ (см. (4.6)), а равенство (4.18), в котором совершена замена $\psi_0 \to \Phi_0$, теряет силу, так как, согласно (4.5), (4.11), $\hat{K}(q)\Phi_0 \neq 0$.

Другое «доказательство» противоречивости условия (1.3) опирается на утверждение, что коммутационные соотношения (1.2), взятые между физическими состояниями

$$(\Phi,\ [\partial_\mu\hat{A}_\mu(x),\ \hat{A}_\nu(y)]\,\Phi) = i\partial_\nu D(x-y)\,(\Phi,\ \Phi), \tag{4.19}$$

не выполняются, ибо левая часть (4.19) есть нуль. Неправомерность последнего утверждения связана с тем, что при его доказательстве оператор $\partial_\mu\hat{A}_\mu$

в выражении $(\Phi, \partial_\mu \hat{A}_\mu \hat{A}_\nu \Phi)$ перебрасывается на левую обкладку, чего, вообще говоря, делать нельзя. Используя эту логику, легко прийти, например, к заключению о недопустимости в квантовой механике состояний с определенным импульсом. Пусть $\hat{p}\psi_p = p\psi_p$ и $[\hat{x}, \hat{p}] = i$, тогда

$$(\psi_p, [\hat{x}, \hat{p}]\psi_p) = p[(\psi_p, \hat{x}\psi_p) - (\psi_p, \hat{x}\psi_p)] = i(\psi_p, \psi_p), \tag{4.20}$$

откуда заключаем, что правая часть (4.20) есть нуль. Некорректность рассуждения связана, во-первых, с тем, что состояния ψ_p ненормируемы, а во-вторых, с очевидным неравенством: $(\psi_p, \hat{p}\hat{x}\psi_p) \neq p(\psi_p, \hat{x}\psi_p)$ — в координатном представлении при перебрасывании $\hat{p}$ на левую обкладку возникнут внеинтегральные члены.

Наконец, можно встретить утверждение о противоречивости условий (3.25) и (4.1) для нулевых компонент операторов [2, 14]. Действительно, умножая вектор $\psi_1 = \int d\mu(q) f(q) \hat{a}_0^+(q) \psi_0$ на комплексно сопряженный, имеем

$$(\psi_1, \psi_1) = -\int d\mu(q) |f(q)|^2 < 0, \tag{4.21}$$

тогда как слева должна стоять величина положительная. Но (4.21) свидетельствует фактически лишь об отрицательности нормы состояния с нефизическим фотоном, как это следует из конкретной реализации (4.7) алгебры (3.25) и из содержания разд. 4.3. В заблуждение вводят слова «комплексно сопряженный» в применении к ψ_1. На деле вектор, сопряженный ψ_1, определяется равенством $\psi_1^* = \int d\mu(q) \psi_0^* \hat{a}_0(q) f^*(q)$, и знак квадрата нормы $\|\psi_1\|^2$ диктуется коммутационными соотношениями (3.25). Трудность здесь скорее психологическая, поскольку мы уверены в положительности квадратов норм всех состояний. Однако согласившись допустить в теорию нефизические объекты, нельзя настаивать на том, чтобы они обладали теми же свойствами, что и физические динамические переменные. В данном случае можно требовать лишь непротиворечивости формализма.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итог. Имеются две равноправные схемы квантования электромагнитного поля. Одна — это так называемый «новый» формализм Гупты, изложенный в разд. 6.2; он базируется лишь на условии (1.4) (или на первом условии (3.30)). Если брать релятивистски-инвариантную реализацию (4.7) алгебры (3.25), то физический вакуум Φ_0 в этой схеме совпадает, с точностью до некоторого ортогонального ему слагаемого ζ, $\|\zeta\| = 0$, с математическим вакуумом ψ_0. Недостаток формализма связан с наличием нефизических состояний нулевой нормы. Реализация (4.12) алгебры (3.25) не обладает явной релятивистской инвариантностью и дает ненормируемый, релятивистски-неинвариантный вакуум (4.14), даже в схеме с одним условием (1.4).

Другая — это первоначальная схема Ферми [3–6], которой всегда придерживался Дирак [8, 9]; она использует оба условия (3.30) на физические векторы, вытекающие из общего анализа динамики электромагнитного поля как механической системы. Подключением второго условия (3.30) из теории изгоняются нефизические состояния с нулевой нормой. Физический вакуум Φ_0 имеет четкий математический смысл — это есть обобщенный собственный вектор операторов $\hat{\pi}^0$, $\hat{\dot{\pi}}^0$, т. е. он ненормируем, что, однако, не вызывает затруднений при вычислениях (см. [11] и разд. 4). В обеих схемах отсутствует потребность в искусственном введении индефинитной метрики [13] с помощью оператора $\hat{\eta}$ (разд. 6.1).

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

6.1. «Старый» формализм Гупты[13]

Для удобства читателя изложим вкратце существо предложения Гупты. Трудности, встретившиеся при квантовании электромагнитного поля, были связаны не только с отсутствием положительной определенности энергии и метрики гильбертова пространства (раздел 3), но и с интерпретацией операторов $\hat{a}_0$, $\hat{a}_0^+$. Так как их коммутатор $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^+] = -\tilde{\delta}$ имеет, согласно (3.25), обратный знак по сравнению с коммутатором $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$, то стандартный анализ[8] показывает, что оператор, увеличивающий собственные значения $\hat{a}_0\hat{a}_0^+$, есть $\hat{a}_0$ (если $\hat{a}_0\hat{a}_0^+ \mid n\rangle = n \mid n\rangle$, то $\hat{a}_0\hat{a}_0^+\hat{a}_0 \mid n\rangle = (n+1)\,\hat{a}_0 \mid n\rangle$; для простоты здесь взят квантово-механический гармонический осциллятор, $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^+] = -1$, подробнее см. разд. 6.4). Но такая интерпретация нарушает явную релятивистскую инвариантность, поскольку из инвариантности вакуума ψ_0 и условия $\hat{a}_0^+\psi_0 = 0$ вытекает: $\hat{a}_\mu^+\psi_0 = 0$ при всех μ, что неприемлемо. Одной из попыток разрешить эти трудности была первая работа Гупты. В ней, по существу, постулируется, что коммутационные соотношения (3.25) есть следствие внесения индефинитной метрики в некоторое гильбертово пространство с положительно определенной метрикой. Именно, полагается, что в основе теории лежат операторы $\hat{a}_\mu(q)$, $\hat{a}_\mu^*(q)$, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_\mu(q), \hat{a}_\nu^*(q')] = \delta_{\mu\nu}\tilde{\delta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'), \tag{6.1}$$

где $\hat{a}_\mu^*$ — оператор, эрмитово сопряженный $\hat{a}_\mu$, $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера. Все операторы $\hat{a}_\mu$ в этом вспомогательном пространстве можно считать операторами уничтожения, а $\hat{a}_\mu^*$ — операторами рождения. Вакуум определяется привычной формулой

$$\hat{a}_\mu\psi_0 = 0. \tag{6.2}$$

В этом пространстве меняется скалярное произведение, именно, вводится индефинитная метрика, что, очевидно, может изменить понятие эрмитова сопряжения некоторых операторов. Новая метрика подбирается так, чтобы сопряженные по Эрмиту в смысле новой метрики операторы удовлетворяли перестановочным соотношениям (3.25). Технически это осуществляется следующим образом. Берется некоторый метрический оператор $\hat{\eta}$, с помощью которого определяется новое скалярное произведение векторов

$$(\psi_1, \psi_2) \to (\psi_1, \psi_2)_\eta \equiv (\psi_1, \hat{\eta}\psi_2). \tag{6.3}$$

Оператор, сопряженный $\hat{A}$, определяется согласно правилу

$$(\hat{A}\psi_1, \psi_2)_\eta = (\psi_1, \hat{A}^+\psi_2)_\eta = (\psi_1, \hat{A}^*\hat{\eta}\psi_2) = (\psi_1, \hat{\eta}\hat{\eta}^{-1}\hat{A}^*\hat{\eta}\psi_2), \tag{6.4}$$

т. е.

$$\hat{A}^+ = \hat{\eta}^{-1}\hat{A}^*\hat{\eta}. \tag{6.5}$$

Остается подобрать оператор $\hat{\eta}$ так, чтобы удовлетворить условиям (3.25). Ясно, что должны выполняться равенства

$$[\hat{\eta}, \hat{a}_k] = [\hat{\eta}, \hat{a}_k^*] = 0, \qquad [\hat{\eta}, \hat{a}_0]_+ = [\hat{\eta}, \hat{a}_0^+]_+ = 0, \tag{6.6}$$

где $[\hat{A}, \hat{B}]_+ \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$, т. е. $\hat{\eta}$ антикоммутирует с $\hat{a}_0$, $\hat{a}_0^+$. Отсюда имеем

$$\hat{a}_k^+ = \hat{a}_k^*, \qquad \hat{a}_0^+ = -\hat{a}_0^*, \tag{6.7}$$

и, если выполняются соотношения (6.1), то операторы $\hat{a}_\mu$, $\hat{a}_\mu^+$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.25). Нетрудно найти явный вид оператора $\hat{\eta}$:

$$\eta = (-1)^{\hat{N}_0}, \tag{6.8}$$

где $\hat{N}_0$ — оператор числа времениподобных фотонов. В данной схеме используется только дополнительное условие (1.4).

Недостатки подхода бросаются в глаза. Как известно, нефизические фотоны допускаются в формализм ради достижения его явной ковариантности. Между тем оператор (6.8) этим свойством не обладает, т. е. фактически теория теряет явную лоренц-инвариантность (хотя неявно она, конечно, лоренц-инвариантна). Неприятен и тот факт, что построение теории начинается с явно нековариантных соотношений (6.1). Наконец, искусственным выглядит все построение — ведь уже коммутационные соотношения (3.25) свидетельствуют о том, что в теории с самого начала имеются состояния с отрицательной нормой. В дальнейшем Гупта устранил из конструкции ненужные элементы.

6.2. «Новый» формализм Гупты[16,18]

Итоговый формализм по существу эквивалентен изложенному в разделах 3, 4, но без второго условия (3.30). Операторы $\hat{a}_\mu$, $\hat{a}_\mu^+$ подчиняются соотношениям (3.25), математический вакуум ψ_0 определен равенством (4.1). Физическое подпространство выделяется условием (1.4), т. е. математический вакуум также принадлежит физическому подпространству. Базис полного гильбертова пространства образуют векторы, получающиеся применением к ψ_0 произвольного числа операторов $\hat{a}_\mu^+$. Среди них имеются состояния с отрицательной нормой (они содержат нечетные числа времениподобных фотонов). Гильбертово пространство содержит также состояния с нормой нуль. Последние получаются применением к физическим состояниям Φ операторов $\hat{L}^+$:

$$\| \hat{L}^+\Phi \|^2 = (\hat{L}^+\Phi, \hat{L}^+\Phi) = (\Phi, \hat{L}\hat{L}^+\Phi) = 0, \tag{6.9}$$

так как, согласно (3.31), $\hat{L}(q)$ коммутирует с $\hat{L}^+(q)$, а $\hat{L}\Phi = 0$. Состояния с нормой нуль принадлежат физическому подпространству вследствие все того же соотношения (3.31) $\hat{L}(\hat{L}^+)^n \Phi = (\hat{L}^+)^n L\Phi = 0$ и ортогональны векторам из $\mathscr{H}_{\text{физ}}$: $(\Phi_1, \hat{L}^+\Phi_2) = (\hat{L}\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Итак, физическое гильбертово пространство формализма Гупты $\mathscr{H}^G_{\text{физ}}$ есть прямая сумма подпространства $\mathscr{H}^{(0)}$ векторов с нормой нуль и ортогонального ему подпространства векторов с положительной нормой $\mathscr{H}^{(+)}$: $\mathscr{H}^G_{\text{физ}} = \mathscr{H}^{(+)} \oplus \mathscr{H}^{(0)}$. Произвольный физический вектор в этой схеме имеет вид $\Phi_G = \Phi^{(+)} + \zeta$, где $\zeta \in \mathscr{H}^{(0)}$. Исключение нефизических векторов ζ можно осуществить переходом к факторпространству $\mathscr{H}_{\text{физ}} = \mathscr{H}^G_{\text{физ}}/\mathscr{H}^{(0)}$ [35].

6.3. О фиксации калибровки

Обсудим вопрос о том, какие требования следует предъявить к фиксирующему калибровку члену $\mathscr{L}'$ («фиксатор калибровки», см. (3.12)). Применительно к теории возмущений они естественным образом распадаются на две группы. К первой относятся требования, которые должны выполняться безусловно. Перечислим их. Добавляемый к $\mathscr{L}$ **член** $\mathscr{L}'$

1) должен снимать вырождение лагранжиана;

2) должен обладать релятивистской инвариантностью;

3) не должен менять уравнений для физических переменных (уравнений Максвелла);

4) не должен вести к противоречию.

К требованиям, выполнение которых желательно, относятся:

5) член $\mathcal{L}'$ должен удовлетворять всем условиям, налагаемым обычно на лагранжианы: локальность, перенормируемость, отсутствие производных от полей, старше первых.

Первое условие самоочевидно. Смысл добавления $\mathcal{L}'$ к лагранжиану заключается в задании уравнений движения для нефизических степеней свободы (фиксация калибровки). Отметим, что это условие не эквивалентно условию

1') член $\mathcal{L}'$ должен нарушать калибровочную инвариантность. Разумеется, снятие вырождения автоматически влечет нарушение калибровочной инвариантности, но обратное не верно. Пример:

$$\mathcal{L}' = \frac{A_\mu^2}{2} \tag{6.10}$$

нарушает калибровочную инвариантность, но не снимает вырождения, так как при переходе к гамильтонову формализму по-прежнему возникнут связи, но уже второго рода [36].

Второе условие можно было бы отнести в разряд необязательных. Но это было бы непоследовательным, ибо нефизические переменные и были допущены в теорию ради ее явной ковариантности.

Третье и четвертое условия самоочевидны. Первое из них исключает член (6.10). Необходимость последнего вытекает из следующего примера: $\mathcal{L}' = x_\mu A_\mu/4$. Уравнения движения в данном случае имеют вид $\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu + x_\nu/4$; применяя к ним оператор ∂_ν, приходим к абсурду: $1=0$.

Желательность выполнения оставшихся условий очевидна, во всяком случае при использовании теории возмущений. Если не вводить вспомогательных полей, то перечисленные требования практически однозначно ведут к $\mathcal{L}'$ из класса Ферми (3.12) (правильнее говорить о классе калибровок Гейзенберга — Паули — Ферми; см. раздел 6.5).

6.4. «Релятивистский» осциллятор

Поясним проблему интерпретации операторов $\hat{a}_0(q)$, $\hat{a}_0^+(q)$ на следующем простом примере. Рассмотрим систему, заданную лагранжианом

$$L = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu - x_\mu x_\nu), \tag{6.11}$$

где $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского, а x_μ — 4-вектор в нем; $\dot{x}_\mu = dx_\mu/d\tau$, τ — инвариантный параметр («время»). Данная модель хорошо иллюстрирует существо затруднений, возникающих при квантовании электромагнитного поля в калибровке Гейзенберга — Паули — Ферми, поскольку и здесь динамической переменной является 4-вектор. Переходя к гамильтонову формализму $p^\mu = \partial L/\partial \dot{x}_\mu = -g^{\mu\nu}\dot{x}_\nu$, имеем

$$H = p^\mu \dot{x}_\mu - L = -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu). \tag{6.12}$$

Ясно, что энергия не определена положительно.

Перейдем к квантовому описанию. Классические скобки Пуассона $\{x_\mu, p^\nu\} = \delta_\mu^\nu$ определяют коммутатор операторов

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}^\nu] = i\delta_\mu^\nu. \tag{6.13}$$

Выразим гамильтониан $\hat{H} = -(\hat{p}^\mu \hat{p}^\mu + \hat{x}_\mu \hat{x}_\mu)/2$ через операторы

$$\hat{a}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_{\mu\nu}\hat{p}^\nu + i\hat{x}_\mu), \qquad \hat{a}_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_{\mu\nu}\hat{p}^\nu - i\hat{x}_\mu),$$

$$[\hat{a}_\mu, \hat{a}_\nu^+] = -g_{\mu\nu}; \tag{6.14}$$

имеем

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}(\hat{a}_\mu^+\hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu\hat{a}_\mu^+). \tag{6.15}$$

Так как среди четырех независимых осцилляторов один аномальный, рассмотрим вопрос о его основном состоянии ψ_0. Если положить

$$\hat{a}_k\psi_0 = 0, \quad \hat{a}_0^+\psi_0 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{6.16}$$

то, решая эти уравнения, в x-представлении: $(\partial/\partial x_k + x_k)\,\psi_0 = (\partial/\partial x_0 + x_0)\,\psi_0 = 0$, находим

$$\psi_0 = c\exp\left[-\frac{1}{2}(x_0^2 + \mathbf{x}^2)\right]. \tag{6.17}$$

Функция (6.17) нормируема (именно поэтому операторами уничтожения брались [21] $\hat{a}_0^+$, $\hat{a}_k$), но не обладает релятивистской инвариантностью (именно поэтому этот выбор неприемлем). Если же потребовать

$$\hat{a}_\mu\psi_0 = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{6.18}$$

то решение этих уравнений

$$\psi_0 = c\exp\frac{x_\mu^2}{2} \tag{6.19}$$

лоренц-инвариантно, но ненормируемо. Именно это обстоятельство побудило обратиться к реализации (4.12) в КЭД (аналог (6.16)) и явилось первопричиной затруднений. Дилемма разрешается переходом к физическому подпространству, которое выделяется условиями (3.9) или (3.30). В данной модели это условия $(\hat{a}_0 - \hat{a}_3)\,\Phi = 0$, $(\hat{a}_0^+ - \hat{a}_3^+)\,\Phi = 0$. Они определяют «физическое» подпространство, которое образовано векторами вида $\Phi = \delta(x_0 - x_3)\,\varphi(x_1, x_2)$, где φ — квадратично интегрируемая функция. Φ есть хорошо определенный математический объект (обобщенный собственный вектор[32]).

6.5. Краткая история вопроса

Квантовое описание электромагнитного поля впервые было дано Дираком [1]; рассматривалось поле излучения, которое трактовалось как набор независимых осцилляторов. Пионерская работа Дирака стимулировала дальнейшее исследование в этом направлении. Иордан и Паули [37] (статьи [7, 28, 37] переведены на русский язык [38]) установили релятивистски-инвариантные коммутационные соотношения для операторов электромагнитного поля, ввели функционалы и функциональные производные от полей. В фундаментальной статье Гейзенберга и Паули [28] присутствовали почти все основные элементы современной спинорной электродинамики. Теория была сформулирована релятивистски-инвариантным образом, отмечено появление связей (условий $\pi^0 = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$), введен класс калибровок, именуемый ныне классом калибровок Ферми. В том же году вышла работа Ферми [3], в которой впервые появились условия $\partial_\mu A_\mu = 0$, $\partial_\mu \dot{A}_\mu = 0$, хотя и не обсуждался их смысл в квантовой теории. В следующей работе [7] Гейзенберг и Паули недвусмысленно указали на то, что эти условия следует понимать как условия не волновые функции (функционалы). Точно так же их трактовал Ферми [4, 5], причем им была найдена волновая функция, удовлетворяющая этим условиям. Таким образом, к началу 30-х годов было завершено построение основ квантовой электродинамики.

В конце 50-х годов, когда создавалась современная квантовая электродинамика, условие (1.3) оказалось в центре внимания. Было обнаружено, что оно ведет к ненормируемости вакуума (4.14) [10—12]. Нужно сказать, что решение (4.14), основанное на реализации (4.12) алгебры (3.25), можно найти у многих авторов [10-12, 39-41]. При этом, однако, нигде не отмечалось, что оно не обладает релятивистской инвариантностью. Впрочем, Дирак исключил его из 4-го издания своей книги [8]. В последующих работах Дирака [9] оно уже не появлялось.

Трудности с интерпретацией операторов $\hat{a}_0$, $\hat{a}_0^+$ и ненормируемость вакуума (4.14) побудили Гупту к поискам новой формулировки теории (см. раздел 6.1) и отказу от условия (1.3) [13]. Мотивируя отказ от (1.3), Гупта [13] ограничился лишь замечанием, что оно слишком ограничительно, чтобы какие-либо состояния полей излучения ему удовлетворяли. Несмотря на то, что впоследствии [16, 18] он, очевидно, уяснил ненужность искусственного построения с метрическим оператором $\hat{\eta}$ и отказался от него, именно она вошло в учебники. Случилось так, что основные руководства по квантовой теории поля и квантовой электродинамике [2, 19—21] были написаны в период между первой [13] и второй [16] публикациями Гупты. Хотя с тех пор монографии и учебники переиздавались, первоначальная конструкция Гупты оставалась в неприкосновенности (справедливости ради отметим, что в 4-м издании монографии [20], вышедшем в 1981 г., конструкция с оператором $\hat{\eta}$уже опущена правда, без указания причин). В последние два десятилетия вопрос о тонкостях квантования электромагнитного поля почти не обсуждался. Считалось, что теоретически проблема решена Гуптой, а все необходимое для практических вычислений содержится в постулированных Фейнманом правилах. Эквивалентность этих правил (в калибровке Фейнмана) квантово-полевой теории с условием Ферми (1.3) продемонстрирована Нинг Ху [31].

Автор глубоко благодарен Б. Л. Воронову и В. В. Нестеренко за полезные обсуждения.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac P. A. M.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. **1927**. V. 114. P. 243.
2. Боголюбов Н. Н., Широков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— 4-е изд.— М.: Наука, 1985.
3. Fermi E.//Rend. Acad. Lincei. **1929**. V. 9. P. 881; перевод://[6].— С. 302.
4. Fermi E.//Ibidem. **1930**. V. 12. P. 431; перевод://[6].— С. 359.
5. Fermi E.//Rev. Mod. Phys. **1932**. V. 4. P. 87; перевод: //[6].— С. 375.
6. Ферми Э. Научные труды. Т. 1.— М.: Наука, 1971.
7. Heisenberg W., Pauli W.//Zs. Phys. **1930**. Bd 59. S. 168; перевод://[38].— С. 89.
8. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. —М.: Физматгиз, 1960; Наука, 1974, 1979.
9. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой теории поля.— М.: Мир, 1971.
10. Ma S. T.//Phys. Rev. **1949**. V. 75. P. 535.
11. Belinfante F. J.//Ibidem. V. 76. P. 226.
12. Pauli W. Lectures on Physics. V. 6.—Massachusetts: The MIT Press, 1973.
13. Gupta S. N.//Proc. Phys. Soc. Ser. A. **1950**. V. 63. P. 681.
14. Полубаринов И. В. Уравнения квантовой электродинамики: Препринт ОИЯИ Р-2421.—Дубна, 1965.
15. Bleuler K.//Helv. Phys. Acta. **1950**. V. 23. P. 567.
16. Gupta S. N.//Can. J. Phys. **1957**. V. 35. P. 961.
17. Sunakawa S.//Prog. Theor. Phys. **1958**. V. 19. P. 221.
18. Gupta S. N.//Ibidem. **1959**. V. 21. P. 581.
19. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.— М.: ИЛ, 1963.
20. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— 3-е изд.— М.: Наука, 1969.

21. Jauch J. M., Rohrlich F. The Theory of Photons and Electrons.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.
22. Dirac P. A. M.//Can. J. Math. **1950.** V. 2. P. 129.
23. Dirac P. A. M.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. **1958.** V. 246. P. 326.
24. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике.— М.: Мир, 1968.
25. Нетер Э.//Вариационные принципы механики.— М.: ИЛ, 1959.
26. Прохоров Л. В.//ЯФ. **1982.** Т. 35. С. 229.
27. Прохоров Л. В.//Физ. ЭЧАЯ. **1982.** Т. 13. С. 1094.
28. Heisenberg W., Pauli W.//Zs. Phys. **1929.** Bd 56. S. 1; перевод: //[38].— С. 30.
29. Schwinger J.//Phys. Rev. **1948.** V. 74. P. 1439.
30. Gupta S. N.//Proc. Phys. Soc. Ser. A. **1951.** V. 64. P. 850.
31. Ning Hu//Phys. Rev. **1949.** V. 76. P. 391.
32. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз, 1961.
33. Konisi G., Ogimoto T.//Prog. Theor. Phys. **1958.** V. 20. P. 868; **1959.** V. 21. P. 727.
34. Надь К. Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля.— М.: Мир, 1969.
35. Kugo T., Ojima I.//Progr. Theor. Phys. Suppl., **1979.** No. 66. P. 1.
36. Senjanovic P.//Ann. of Phys. **1976.** V. 100. P. 227.
37. Jordan P., Pauli W.//Zs. Phys. **1928.** Bd 47. P. 151; перевод:// [38].— С. 7.
38. Паули В. Труды по квантовой теории.— Т. 2.— М.: Наука, 1977.
39. Fock V.//Phys. Zs. Sowjetunion. **1934.** Bd 6. S. 425; перевод://[40].— С. 88.
40. Фок В. А. Работы по квантовой теории поля.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.
41. Dirac P. A. M. The Principles of Quantum Mechanics.— 3rd ed.— Oxford: Clarendon Press, 1947.