

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145

**МИНИМАЛЬНЫЙ ХАОС, СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПАУТИНА
И СТРУКТУРЫ С СИММЕТРИЕЙ ТИПА «КВАЗИКРИСТАЛЛ»****Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков,
А. А. Черников****СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	193
1. Образование стохастического слоя	194
1.1. Стохастический слой нелинейного маятника. 1.2. Взаимодействие резонансов. 1.3. Стохастический слой ротатора. 1.4. Нетривиальные эффекты дискретизации. 1.5. КАМ-теория и диффузия Арнольда.	
2. Минимальный хаос и стохастическая паутина	202
2.1. Возмущение линейного осциллятора. 2.2. Простейшая структура стохастической паутины. 2.3. Стохастические слои нелинейного осциллятора.	
3. Стохастическая паутина с квазикристаллической симметрией	206
3.1. Отображение с подкручиванием. 3.2. Резонансный гамильтониан. 3.3. Три-виальные резонансы. 3.4. Нетривиальные резонансы и паутина с симметрией типа «квазикристалл». 3.5. Диффузия частиц в магнитном поле.	
4. Структурные свойства паутины	218
4.1. Какими могут быть структуры. 4.2. Метод проектирования и динамическая генерация структур. 4.3. Сглаженные структуры. 4.4. Квазисимметрия, декорирование, субрешетки и подрешетки. 4.5. Фурье-анализ структур. 4.6. Особенности в зависимости фазового объема от энергии (особенности Ван-Хова). 4.7. Замечание о спектральных свойствах структур.	
5. О квазикристаллической симметрии	240
5.1. Гидродинамические структуры. 5.2. Структуры в природе и в орнаментах.	
Заключение	244
Приложения	244
1. Определение ΔE для маятника. 2. Вывод формулы (2.15) для толщины стохастической паутины. 3. Стохастическое ускорение релятивистских частиц в магнитном поле.	
Список литературы	249

ВВЕДЕНИЕ

После почти двадцатилетнего интенсивного исследования хаоса мы уже привыкли к тому, что в этой области анализа следует всегда быть готовым к неожиданностям. Уже само по себе явление хаоса было в такой сильной мере непривычным для сложившихся стереотипов мышления, что для восприятия возможности низкомерных систем находиться в состоянии хаотического движения без действия случайных сил нужны были значительные усилия. Отчасти это было связано с тем, что необходимо было сразу ответить на большое число вопросов, чтобы понять, что такое хаос. По мере ответа на них мы встречались и с новыми необычными свойствами простейших динамических систем, и с появлением новых, необычных задач.

Так и сейчас исследование некоторых тонких свойств хаоса неожиданно связало явление диффузии частиц с проблемой симметрии покрытий пространства. Траектория частицы в состоянии описать необычайно сложную структуру расположения атомов, называемую квазикристаллической. Оказалось, что методы нелинейной динамики могут свести многие симметричные задачи кристаллофизики к исследованию свойств некоторых просто устроен-

ных отображений. Дальнейшее развитие этих идей приводит к еще более неожиданным взаимосвязям, так как оно устанавливает соответствие между структурными свойствами кристаллов и квазикристаллов, с одной стороны, и гидродинамическими структурами (типа, например, ячеек Бенара) — с другой стороны.

Анализу этих связей и посвящается настоящий обзор. Само по себе проникновение динамических методов в теорию симметрии не является неожиданным. Приведем, например, высказывание Вейля по этому поводу: «Мы и поныне разделяем его [Кеплера] убеждение в математической гармонии вселенной. Это убеждение подтверждено критерием беспрерывно расширяющегося опыта. Но ныне мы ищем эту гармонию не в статических формах, подобных правильным многогранникам, а в законах динамики»²⁶. Однако реальное воплощение этих соображений оказывается не столь простым. Пример, связанный с квазикристаллической симметрией, оказывается в этом отношении особенно поучительным. Прimitивные покрытия плоскости квадратной или шестиугольной сеткой достаточно распространены в природе. Поэтому нет ничего удивительного в том, что мы их часто встречаем в природе и, например, в гидродинамическом эксперименте. Квазикристаллическая симметрия не столь очевидна (хотя она достаточно часто встречается у растений). Она возникает в результате реального взаимодействия вращательной и трансляционной симметрий, и наличие динамической модели этого взаимодействия позволяет значительно шире взглянуть как на свойства динамических систем, так и на свойства структур.

Не совсем обычные аналогии, являющиеся предметом данного обзора, обладают еще одним качеством, которое трудно не упомянуть. Структуры образуются на фазовой плоскости инвариантными множествами — стохастическими слоями. Чем тоньше слои, тем правильнее структуры. Однако самым необычным здесь является то, что именно одна стохастическая траектория образует на фазовой плоскости почти правильную структуру. Дальний порядок на фазовой плоскости рожден хаотическим движением.

Обзор построен следующим образом. В разделе 1 подробно описывается общая картина образования стохастических слоев как зародышей хаоса и рассматриваются различные следствия этого явления, включая диффузию Арнольда. В разделе 2 рассматриваются вырожденные случаи, при которых возможно появление стохастической паутины в фазовом пространстве с минимальной размерностью (число степеней свободы равно $3/2$). В разделе 3 на примере резонанса частицы с волновым пакетом в постоянном магнитном поле вводится отображение с подкручиванием, которое порождает равномерную паутину с симметрией квазикристаллического типа. В разделе 4 исследуются различные структурные свойства паутины и находится усредненный гамильтониан структур. В разделе 5 обсуждаются другие приложения структур квазикристаллического типа (в гидродинамике, в ботанике и в искусстве орнамента).

1. ОБРАЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

В гамильтоновских системах область фазового пространства вблизи сепаратрисы играет фундаментальную роль при анализе возникновения хаоса. В простейшем случае одной степени свободы сепаратриса представляет собой особую траекторию, проходящую через неустойчивую седловую точку, в которой происходит ее пересечение с другой сепаратрисой или самопересечение. Возмущение системы может быть и слабым, и медленным. Поэтому оно может достаточно слабо влиять на динамику системы. Однако действие возмущения всегда оказывается сильным, если начальные условия системы принадлежат некоторой области в окрестности сепаратрисы. Именно в этой области зарождается хаос, радикально изменяя свойства системы и делая ее принципиально неинтегрируемой.

Образование в окрестности сепаратрисы сложной динамической картины, обусловленной ее «расщеплением», было отмечено еще Пуанкаре¹. Первая оценка ширины расщепления сепаратрис приведена в². Существование стохастической динамики в окрестности сепаратрисы и анализ ширины стохастического слоя для различных случаев возмущения были описаны в³⁻⁵. Идея построения отображения в окрестности сепаратрисы, основанная на свойствах траектории системы, описана в⁴. Связь неинтегрируемости с существованием стохастического слоя см. в⁶. Изложение ниже следует методу, развитому в^{4,7,8}.

1.1. Стохастический слой нелинейного маятника

Нелинейный маятник представляет собой систему, типичную для многих физических задач. Его гамильтониан имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos x, \quad (1.1)$$

где x — безразмерная координата, p — импульс и ω_0 — частота малых

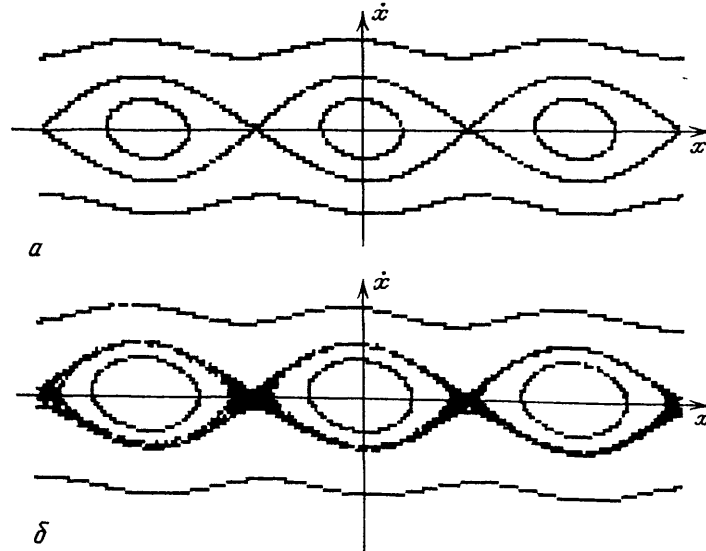


Рис. 1. Фазовый портрет нелинейного маятника.
а — В отсутствие возмущения. б — При наличии возмущения; видны области хаотической динамики в окрестности сепаратрисы

колебаний маятника, а масса положена равной единице. Простейшая форма возмущенной задачи может быть записана так:

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos x + \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} \cos(kx - \Delta\omega t), \quad (1.2)$$

$$V \equiv \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} \cos(kx - \Delta\omega t),$$

где ε — безразмерный параметр возмущения, k и $\Delta\omega$ — соответственно волновое число и частота возмущения. Гамильтониан (1.2) порождает уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = \varepsilon \omega_0^2 \sin(kx - \Delta\omega t). \quad (1.3)$$

Фазовый портрет невозмущенной задачи (1.3) при $\varepsilon = 0$ приведен на рис. 1, а. При малом возмущении (рис. 1, б) часть инвариантных траекторий вблизи

сепаратрисы разрушается, образуя стохастический слой. В основе оценки его ширины лежат следующие соображения.

При малых амплитудах колебания маятника его можно считать линейным ($\sin x \approx x$). Тогда спектр колебаний маятника состоит из одной гармоники с частотой ω_0 . В общем случае нелинейная частота маятника $\omega(E)$ зависит от его энергии $E = H_0$. При малых E частота $\omega \approx \omega_0$. Особой траектории — сепаратрисе — соответствует энергия $E_c = \omega_0^2$. При $E \rightarrow E_c$ частота $\omega(E) \rightarrow 0$, а период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega(E)} \rightarrow \infty \quad (E \rightarrow E_c = \omega_0^2). \quad (1.4)$$

При этом характерное число гармоник в спектре маятника

$$N \sim \frac{\omega_0}{\omega(E)} = \frac{T}{T_0} \quad \left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\right) \quad (1.5)$$

стремится к бесконечности. Из свойства (1.4) следует, что скорость маятника $p = \dot{x}(t)$ при E вблизи E_c имеет вид, изображенный на рис. 2. Такой характер поведения скорости обусловлен тем, что система быстро (за время $\sim T_0$)

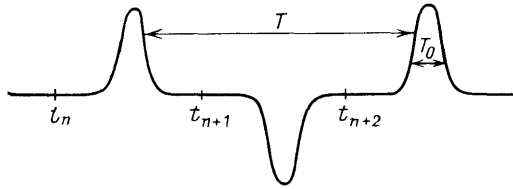


Рис. 2. Зависимость скорости маятника от времени для траектории вблизи сепаратрисы.

T — период колебаний на траектории, T_0 — период малых колебаний

проходит почти всю ширину потенциальной ямы и надолго (на время $\sim T \gg \gg T_0$) застревает вблизи седловых точек. Поэтому условие $N \gg 1$ вблизи сепаратрисы дает возможность перейти в возмущенной задаче (1.3) от дифференциального уравнения к конечно-разностному уравнению (отображе-

Оно записывается между двумя последовательными моментами времени t_n и t_{n+1} (см. рис. 2), взятыми в окрестности n -го и $(n + 1)$ -го прохождений вблизи какой-либо из гиперболических точек. Из уравнения

$$\dot{E} = \varepsilon \omega_0^2 \dot{x} \sin(kx - \Delta \omega t), \quad (1.6)$$

которое получается при дифференцировании $E = H_0$ и использовании выражений (1.1) — (1.3), видно, что изменение энергии маятника происходит лишь в области, где его скорость \dot{x} отлична от нуля. Такая область имеет узкий временной интервал $\sim T_0 = 2\pi/\omega_0$ (см. рис. 2) и эквивалентна действию силового толчка на маятник. Между последовательными толчками проходит интервал времени

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$$

и удовлетворяется условие «мгновенности» столкновения $T_0 \ll \Delta t_n$. Поэтому искомое отображение имеет вид, например, при $E < E_c = \omega_0^2$

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n + \Delta E_n, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_{n+1}} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

в котором

$$\omega_n \equiv \omega(E_n).$$

Выражение для величины ΔE приведено в приложении 1. Используя его и вводя для удобства фазу $\theta_n = \Delta \omega t_n$, получаем при $k = 1$ вместо (1.7)

окончательно

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{n+1} &= \tilde{E}_n - \frac{4\pi\varepsilon v^2 \rho^{\pi v/2}}{\operatorname{sh}(\pi v)} \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + v \ln \frac{32}{\tilde{E}_{n+1}},\end{aligned}\quad (1.8)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}v &= \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \quad \omega(E) \approx \omega_0 \ln \frac{32}{E}, \\ \tilde{E} &= 1 - \frac{E}{\omega_0^2} = \frac{E_c - E}{E_c}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Простейшая оценка области стохастичности получается из неравенства⁷

$$\left| \frac{\delta\theta_{n+1}}{\delta\theta_n} - 1 \right| > 1. \quad (1.10)$$

Отсюда для ширины стохастического слоя по энергии имеем из (1.8):

$$|\tilde{E}_s| < \frac{4\pi\varepsilon v^3 e^{\pi v/2}}{\operatorname{sh}(\pi v)}. \quad (1.11)$$

Если возмущение в (1.2), (1.3) имеет низкую частоту $\Delta\omega \ll \omega_0$, то

$$|\tilde{E}_s| < 4v^2\varepsilon, \quad (1.12)$$

и ширина стохастического слоя в этом случае максимальная. Если, наоборот, возмущение высокочастотное ($\Delta\omega \gg \omega_0$), то

$$|\tilde{E}_s| < 8\pi\varepsilon v^3 \exp\left(-\frac{\pi v}{2}\right), \quad (1.13)$$

и ширина стохастического слоя экспоненциально мала.

1.2. Взаимодействие резонансов

Этот простой пример нам понадобится далее. Взаимодействием резонансов принято называть случай, когда на свободную частицу действуют две гармоники с близкими амплитудами и периодами, но с разными фазовыми скоростями. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos x - \omega_0^2 \cos(x + \Delta\omega t). \quad (1.14)$$

При $\Delta\omega \sim \omega_0$ на фазовой плоскости сепаратрисные ячейки перекрываются и возникает большая область сильного хаоса⁸. Однако при $\Delta\omega \gg \omega_0$ параметр v является большим, и это приводит к малой ширине стохастического слоя. Имеем из сравнения (1.14) и (1.2) $\varepsilon = 1$, $k = 1$. Поэтому оценка ширины слоя (1.13) принимает вид

$$|\tilde{E}_s| < 8\pi v^3 \exp\left(-\frac{\pi v}{2}\right), \quad (1.15)$$

т.е. два сильно удаленных резонанса ($\Delta\omega \gg \omega_0$) индуцируют друг у друга экспоненциально узкие стохастические слои.

1.3. Стохастический слой ротатора

Ротатором называется система с гамильтонианом $H_0 = p^2/2$, определенная на цилиндрическом фазовом пространстве $x \in (0, 2\pi)$, $p \in (-\infty, \infty)$ и $f(x=0, p) = f(x=2\pi, p)$ для произвольной функции f . Величины (p, x) имеют смысл момента импульса и фазы. Многие задачи приводятся

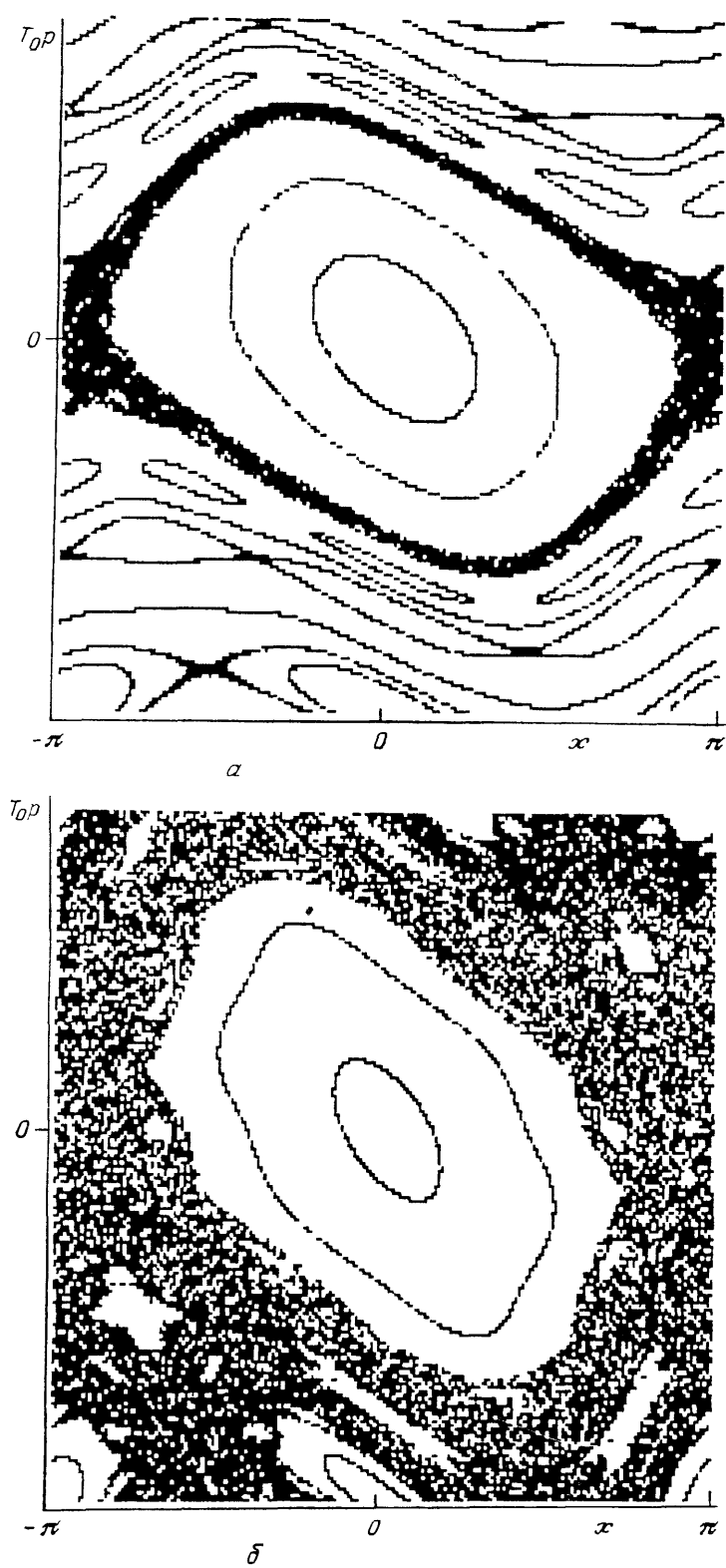


Рис. 3 Фазовые портреты, порождаемые стандартным отображением.
 $a - K = 0,8$. $б - K = 1,3$.

к возмущенному ротатору с гамильтонианом ⁷⁻⁹

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(x - n\Delta\omega t) = \\ &= \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 T_0 \cos x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0), \quad T_0 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В нем ротатор возмущается периодической последовательностью δ -функциональных импульсов.

Уравнения движения, соответствующие (1.16), можно представить в виде отображения

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - T_0 \omega_0^2 \sin x_n, \\ x_{n+1} &= x_n + T_0 p_{n+1} \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

в котором моменты времени $t_n = nT_0 - 0$. Оно называется также стандартным отображением или отображением Чирикова ⁸. При условии

$$K = \omega_0^2 T^4 \gg 1 \quad (1.18)$$

в системе (1.16) возникает сильная стохастичность, приводящая к неограниченной по p диффузии частицы. При $K \ll 1$ области стохастичности локализованы в фазовом пространстве. В частности, при $K \ll 1$ имеются экспоненциально узкие стохастические слои. Покажем это.

Ограничимся в исходной форме для H в (1.16) членами с $n = 0, \pm 1$:

$$H \approx \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos x - \omega_0^2 [\cos(x + \Delta\omega t) + \cos(x - \Delta\omega t)]. \quad (1.19)$$

Первые два члена соответствуют гамильтониану маятника H_0 (1.1). Последующие два дают возмущение, аналогичное (1.14). Они соответствуют слабому взаимодействию резонансов, так как $\omega_0/\Delta\omega \ll 1$. Знак $\Delta\omega$ в (1.19) не существен, и поэтому сразу можно воспользоваться формулой (1.15) для ширины стохастического слоя в (1.19):

$$|\tilde{E}_s| < 16\pi v^3 \exp\left(-\frac{\pi v}{2}\right). \quad (1.20)$$

Если бы мы учли в сумме (1.16) члены, например, с $n = \pm 2$, то это дало бы в показателе экспоненты (1.20) не $(-\pi v/2)$, а просто $(-\pi v)$. Так как $v \gg 1$, вклад таких членов, а также членов с $n > 2$ пренебрежимо мал.

Примеры фазовых портретов задачи (1.16) или (1.17) при $K < 1$ и $K > 1$ приведены на рис. 3. Кроме основного стохастического слоя при $K < 1$ имеется бесконечное число значительно более узких слоев, возникших из-за разрушения сепаратрис от резонансов более высоких порядков. Мы еще продолжим обсуждение этого примера чуть позже.

1.4. Н е т р и в и а л ь н ы е э ф ф е к т ы д и с к р е т и з а ц и и

Предыдущий пример очень удобен для того, чтобы обсудить один из очень серьезных вопросов, возникших в период эскалации компьютерных методов для решения различных задач естествознания. В основе численного анализа лежат разностные схемы, и это вынуждает нас переходить от дифференциальных уравнений к уравнениям в конечных разностях. Например, уравнение движения маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \quad (1.21)$$

в простейшем варианте заменяется уравнением

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + \omega_0^2 (\Delta t)^2 \sin x_n = 0, \quad (1.22)$$

в котором Δt — длина интервала времени, являющегося элементарным шагом разностной схемы и $x_n = x(n \Delta t)$. Для повышения точности вычислений выбираются очень малые величины Δt . Поэтому имеет место неравенство

$$K = \omega_0^2 (\Delta t)^2 \ll 1. \quad (1.23)$$

В какой мере мы можем контролировать ошибки при переходе от задачи (1.21) к задаче (1.22)? Этот вопрос, конечно, не нов. Уже при первых численных моделированиях нелинейных физических задач началось обсуждение того, что теряется и что новое приобретает от введения дискретизации в непрерывную задачу¹⁰. В значительной степени ответ на подобные вопросы стал возможен⁸² лишь после того, когда стало ясно, что в динамических системах возможен хаос. Пример дискретизации уравнения (1.21) позволяет понять, почему это так, и обнаружить нетривиальные эффекты дискретизации.

Обозначим

$$p_n = \frac{1}{\Delta t} (x_n - x_{n-1}). \quad (1.24)$$

Уравнения (1.22) и (1.24) могут быть записаны совместно в виде отображения

$$p_{n+1} = p_n - \omega_0^2 \Delta t \sin x_n, \quad x_{n+1} = x_n + \Delta t p_{n+1} \pmod{2\pi}, \quad (1.25)$$

которое совпадает с (1.17). Поэтому сразу можно сказать, что дискретный аналог уравнения движения маятника имеет области стохастичности при любом шаге дискретизации Δt , в то время как исходное уравнение (1.21) точно интегрируется. Это, в частности, означает, что переход к дискретным уравнениям движения (1.22) эквивалентен добавлению внешней периодической силы, обусловленной дискретизацией.

Нетрудно получить выражение для силы от дискретизации. Для этого заметим, что отображение (1.25) порождается гамильтонианом (1.16), в котором следует считать $\Delta\omega = 2\pi/\Delta t$. При условии (1.23) достаточно ограничиться в сумме первыми членами с $n = 0, \pm 1$, и мы приходим к гамильтониану (1.19). Это позволяет сразу записать гамильтониан дискретной задачи

$$H = H_0 + V_{\text{discr}},$$

в котором H_0 — гамильтониан исходной задачи (1.21), а

$$V_{\text{discr}} = -2\omega_0^2 \cos x \cos \frac{2\pi t}{\Delta t} \quad (1.26)$$

есть «потенциал дискретизации». Он представляет собой высокочастотное возмущение с амплитудой того же порядка, что и H_0 . Весь дальнейший анализ очевиден, так как фазовый портрет дискретной задачи (1.25) известен (см. рис. 3, а). Из него следуют все изменения, обусловленные дискретизацией, по сравнению с простым фазовым портретом маятника.

Теперь ясно, что дискретизация в случае общего положения порождает неустраняемые хаотические зоны, и определение этих зон имеет непосредственное отношение к нетривиальным эффектам дискретизации.

1.5. КАМ - теория и диффузия Арнольда

Теория Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ)¹¹ определяет условия сохранения инвариантных торов гамильтоновских систем при действии на систему малого возмущения. Если система с N степенями свободы описывается гамильтонианом

$$H_0 = H_0(I_1, \dots, I_N),$$

зависящим от N интегралов движения (действий) I_k , которые независимы и коммутируют, то траектория системы лежит на N -мерном торе *). Сам тор тоже является инвариантом. Возмущенный гамильтониан системы можно представить в виде

$$H = H_0(I_1, \dots, I_N) + \varepsilon V(I_1, \theta_1; \dots; I_N, \theta_N), \quad (1.27)$$

где θ_k — фазы, канонически сопряженные I_k , а ε — малый параметр возмущения. При достаточно малых ε и при отсутствии вырождения, т. е. если

$$\text{Det} \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_k \partial I_l} \right| \neq 0, \quad (1.28)$$

большинство инвариантных торов сохраняется в слабо деформированном виде. Часть торов при этом разрушается, однако разрушенных торов мало и они зажаты между инвариантными торами.

Приведенный результат хорошо иллюстрируется рисунком 3, а. Систему типа (1.14) или (1.16) можно рассматривать как системы с $N = 3/2$. Полстепени свободы и приписывается внешнему периодическому возмущению.

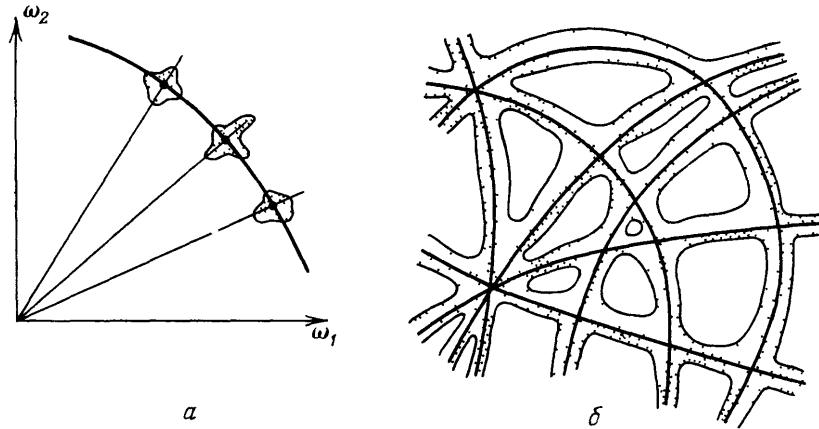


Рис. 4. Области стохастичности при $N = 2$ (а) и при $N > 2$ (б)

Тор в фазовом пространстве устроен так, что его осью является время, замыкание по оси происходит с периодом возмущения T_0 , а плоскостью (p, x) перпендикулярна оси. В сечении инвариантного тора лежат инвариантные кривые на плоскости (p, x) . Стохастическим слоям соответствуют разрушенные торы. В случае $N = 3/2$ или $N = 2$ при $K \ll 1$ фазовое пространство имеет сложную структуру, в которой стохастические слои не пересекаются.

Возможность пересечения стохастических слоев при их слабом взаимодействии существует лишь при $N > 2$. Это приводит к тому, что фазовое пространство покрывается сетью соединяющихся друг с другом узких каналов со стохастической динамикой частиц внутри. По этой сетке возможен уход частиц сколь угодно далеко — явление, получившее название диффузии Арнольда¹² (рис. 4). При $N = 2$ условие резонанса в системе имеет вид

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = 0, \quad (1.29)$$

где n_1, n_2 — целые числа, а частоты каждой из степеней свободы ω_i определяются известными выражениями¹¹:

$$\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, \dots, I_N) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.30)$$

*) Либо на поверхности, представляющей произведение $(N - m)$ -мерного тора на m -мерный цилиндр.

При $N = 2$ условие (1.29) приводит к линейной зависимости между ω_1 и ω_2 . Поэтому поверхность заданной энергии $H_0 = E$ пересекает семейство прямых $\omega_1/\omega_2 = \text{const}$ в точках (см. рис. 4, а). В их окрестности происходит разрушение инвариантов и появляется хаос. Однако малые возмущения создают малые области хаоса, которые не соединяются друг с другом. При $N > 2$ такое соединение уже возможно (см. рис. 4, б), и в результате возникает сеть, называемая далее стохастической паутиной.

2. МИНИМАЛЬНЫЙ ХАОС И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПАУТИНА

Проблема минимального хаоса заключается в определении условий, при которых возникают малые области стохастической динамики при сколь угодно малом возмущении. Существование минимального хаоса означает принципиальную неинтегрируемость системы и возможность перехода от минимального хаоса к глобальному хаосу, охватывающему значительную область фазового пространства, при увеличении некоторого параметра возмущения. Два связанных нелинейных осциллятора с гамильтонианом

$$H = H_1(I_1) + H_2(I_2) + \varepsilon V(I_1, \theta_1; I_2, \theta_2)$$

представляют собой простой пример, в котором в случае общего положения существует минимальный хаос при сколь угодно малых ε .

Стохастическая паутина является своеобразной формой проявления минимального хаоса. Фазовое пространство разбивается на отдельные ячейки — структуры, отделенные друг от друга стохастическими слоями. Иными словами, паутина образует в фазовом пространстве некоторую мозаику покрытия его. Характерный размер элементарной мозаичной структуры определяет не только область существования инвариантных торов, но и их максимальные размеры. Поэтому определение условий, при которых существует стохастическая паутина, интересно, по крайней мере, по следующим причинам: 1) как возможность диффузии по каналам паутины при сколь угодно малых ε ; 2) как ограничение на максимальный диаметр инвариантных торов при сколь угодно малых ε ; 3) как выяснение внутренней симметрии фазового пространства системы, возникающей при сколь угодно малых ε .

Обсуждение этих вопросов приводится ниже.

2.1. Возмущение линейного осциллятора

Некоторые физические модели имеют довольно универсальную природу. Примером таких моделей является возмущенный нелинейный осциллятор, введенный в уравнениях (1.2), (1.3). Его гамильтониан содержит две плоские волны. На этой модели удастся выяснить фундаментальные и типичные свойства образования стохастического слоя. С другой стороны, именно такие уравнения, как (1.2), (1.3), возникают во многих физических приложениях, и это позволяет причислить их к категории «эталонных» уравнений.

Введем еще одно эталонное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0^2 \sin(kx - \Delta \omega t), \quad (2.1)$$

которое описывает линейный осциллятор, возмущаемый плоской волной. Гамильтониан, приводящий к (2.1), имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} \cos(kx - \Delta \omega t). \quad (2.2)$$

Он возникает, в частности, при движении заряженной частицы в постоянном магнитном поле B_0 (которое направлено вдоль z) и в поле плоской электростатической волны, распространяющейся вдоль оси x^{13-15} . Задача (2.1) много исследовалась¹⁶⁻¹⁸ в связи с проблемой резонанса волна — частица.

Возмущение содержит нелинейность, которая, будучи разложена в ряд Фурье, приводит к большому числу гармоник. Между ними и частотой внешнего возмущения $\Delta\omega$ возможны резонансы

$$n\omega_0 = \Delta\omega, \quad (2.3)$$

где ω_0 имеет смысл ларморовской частоты ($\omega_0 = eB_0/mc$). Специфика задачи (2.2) в том, что ее невозмущенная часть является линейной. Поэтому если выполнено условие (2.3), то условие невырожденности (1.28) оказывается невыполненным, и теорема КАМ непосредственно неприменима. Это и приводит к образованию стохастической паутины¹⁹.

2.2. Простейшая структура стохастической паутины

Нас будет интересовать случай, близкий к точному резонансу (2.3) при некотором значении $n = n_0$. Совершим каноническую замену переменных

$$x = \left(\frac{2n_0 I}{\omega_0} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{\varphi}{n_0} - \Delta\omega t \right), \quad p = (2n_0 I \omega_0)^{1/2} \sin \left(\frac{\varphi}{n_0} - \Delta\omega t \right), \quad (2.4)$$

где (I, φ) — переменные действие — угол.

Гамильтониан (2.2) преобразуется с помощью замены (2.4) в следующий:

$$H = (n_0 \omega_0 - \Delta\omega) I + \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} \sum_n J_n(k\rho) \cos \left[\frac{n}{n_0} \varphi + \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right) \Delta\omega t \right], \quad (2.5)$$

где $J_n(k\rho)$ — функции Бесселя, и величина

$$\rho = \left(\frac{2n_0 I}{\omega_0} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

имеет смысл ларморовского радиуса, если принять, что ω_0 — ларморовская частота.

Смысл введения переменных (2.4) состоит в том, чтобы отделить медленное движение от быстрого в окрестности резонанса. При точном резонансе (2.3) представим (2.5) в виде

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V, \\ H_0 &= \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} J_{n_0}(k\rho) \cos \varphi, \\ V &= \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} \sum_{n \neq n_0} J_n(k\rho) \cos \left[\frac{n}{n_0} \varphi + \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right) \Delta\omega t \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Возникшая ситуация уже встречалась нам в предыдущем разделе. Невозмущенное движение описывается гамильтонианом H_0 . Это движение имеет особые траектории-сепаратрисы, которые разрушаются возмущением V , образуя стохастические слои.

Особые точки находятся из условий

$$\frac{\partial H_0}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} = 0.$$

Гиперболические точки (ρ_*, φ_*) определяются уравнениями

$$J_{n_0}(k\rho_*) = 0, \quad \varphi_* = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (2.8)$$

а семейство эллиптических точек (ρ_0, φ_0) — уравнениями

$$J'_{n_0}(k\rho_0) = 0, \quad \varphi_0 = 0, \pi. \quad (2.9)$$

Семейство сепаратрис, проходящих через точки (2.8), имеет структуру паутины (рис. 5). Она состоит из $2n_0$ лучей и концентрических окружностей с радиусами $\rho_{*}^{(s)}$ на плоскости (x, p) , где $k\rho_{*}^{(s)}$ — различные корни функции Бесселя J_{n_0} . Для понимания физической ситуации достаточно ограничиться случаем больших энергий частиц $k\rho_0 \gg n_0$. Тогда

$$H_0 = \pm \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} \left(\frac{2}{\pi k \rho_0} \right)^{1/2} \cos \tilde{k}\tilde{\rho} \cdot \cos \varphi, \quad (2.10)$$

где $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0 \ll \rho_0$, а знак « \pm » зависит от фазы эллиптической точки с координатами (2.9).

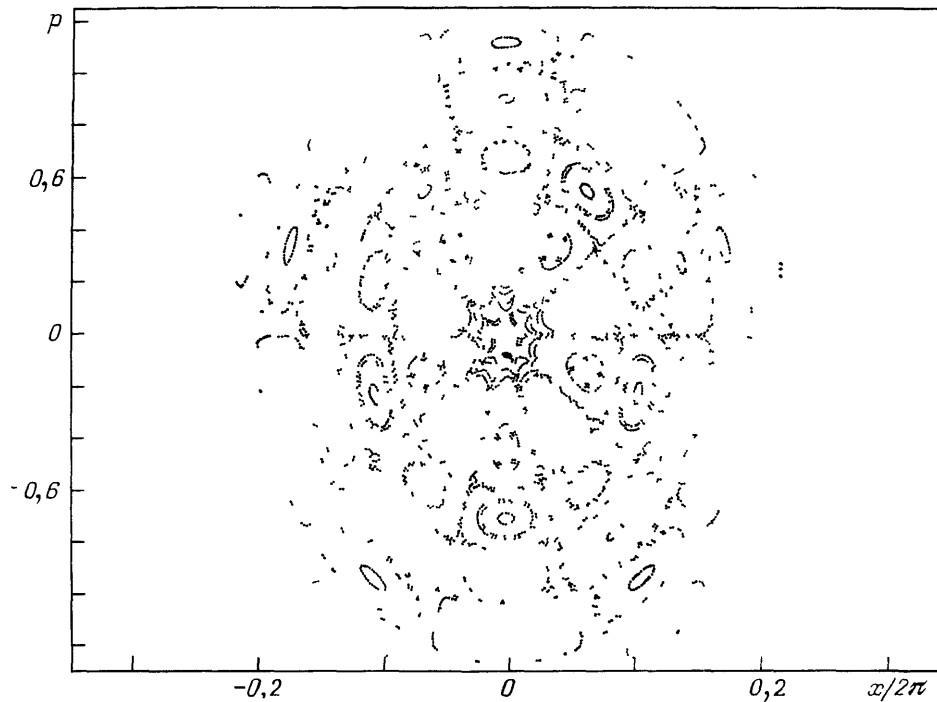


Рис. 5. Фазовый портрет для уравнения (2.1) на плоскости $(x/2\pi, p)$ при $n_0 = 5$, $\varepsilon\omega_0^2/k = 1/80$, $k = 15$.

Точки на плоскости соответствуют интервалам между моментами времени, равным $2\pi/\omega_0$.

Период колебаний частиц внутри одной ячейки сепаратрисы на рис. 5 определяется из (2.10) и равен

$$T = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{4\Delta\omega}{k\varepsilon\omega_0^2 n_0} (k\rho_0)^{3/2} K(\kappa), \quad (2.11)$$

где $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, и

$$\kappa = 1 - \frac{H_0^2 k^2 \pi k \rho_0}{2\varepsilon^2 \omega_0^4}. \quad (2.12)$$

Вблизи положения равновесия внутри ячейки паутины частица совершает малые колебания с периодом

$$T_0 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{4\Delta\omega}{k\varepsilon\omega_0^2 n_0} (k\rho_0)^{3/2}, \quad (2.13)$$

а для колебаний частиц вблизи сепаратрисы ($H_0 \rightarrow 0$) имеем

$$T = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{4\Delta\omega}{k\varepsilon\omega_0^2 n_0} (k\rho_0)^{3/2} \ln \left[\frac{4\varepsilon\omega_0^2}{k^2 H_0} \left(\frac{2}{\pi k \rho_0} \right)^{1/2} \right], \quad (2.14)$$

и период логарифмически расходится. Это означает, что возмущение V в (2.7) является высокочастотным ($\Delta\omega T \gg 1$ при достаточно малых H_0). Оно приводит к разрушению сепаратрисной сетки и к образованию стохастического слоя экспоненциально малой ширины:

$$E_s = (2\pi)^{3/2} \frac{4\omega_0^2}{k^3 \varepsilon n_0^2} (k\rho_0)^{5/2} \exp \left[-\frac{(\pi k\rho_0/2)^{3/2}}{kn_0 \varepsilon} \right] \quad (2.15)$$

(см. вывод этой формулы в приложении 2).

Таким образом, на фазовой плоскости образуется неограниченная сеть каналов (см. рис. 5), по которым возможен уход частиц. По мере удаления

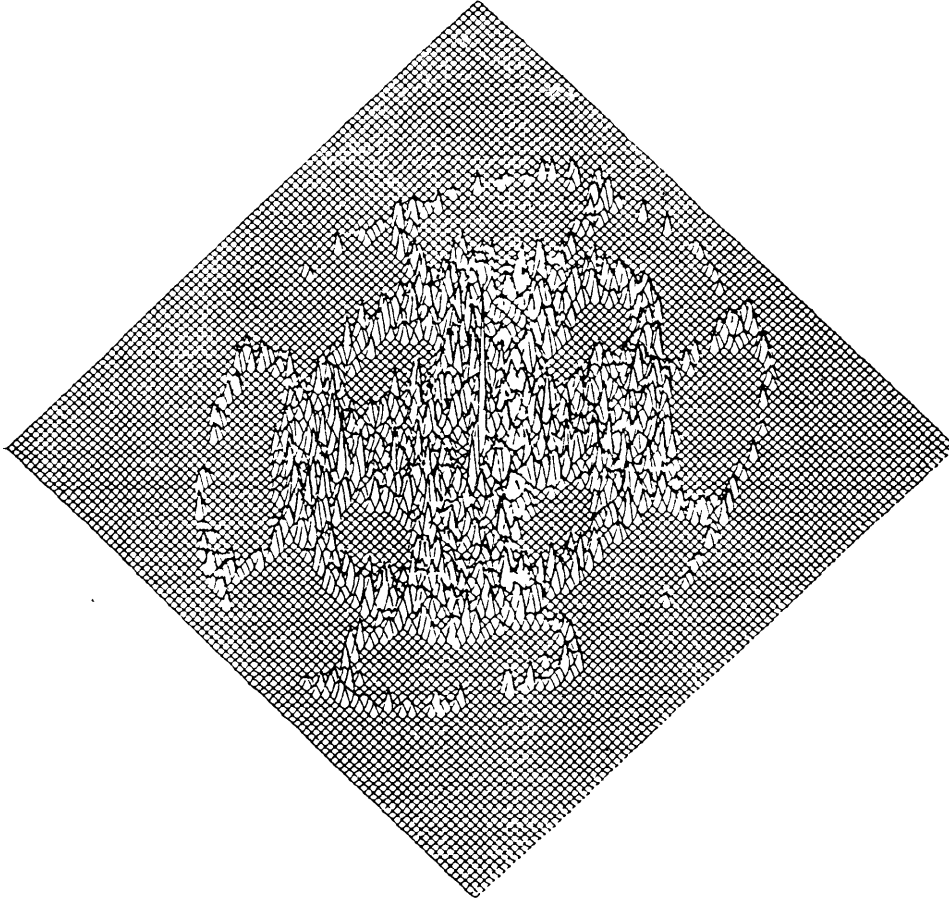


Рис. 6. Функция распределения на стохастической паутине для уравнения (2.1) при $\varepsilon\omega_0^2/k = 0,1$, $k = 15$, $\Delta\omega = 4\omega_0$ и времени счета $2 \cdot 10^4 \cdot 2\pi/\Delta\omega$

от центра скорость частиц увеличивается. Однако одновременно происходит уменьшение ширины паутины. Согласно формуле (2.15) ширина паутины экспоненциально убывает с ростом энергии частиц, так как величина $\rho_0 \sim E^{1/2}$ (см. определение (2.6)). Поэтому, хотя формально паутина и является неограниченной, вероятность диффузионного просачивания частиц в область больших энергий экспоненциально мала. Это хорошо отражается на виде функции распределения¹⁹ (рис. 6).

Рассмотренная картина образования стохастической паутины сохраняется и в случае не очень большой расстройки резонанса,

$$\delta\omega = n_0\omega_0 - \Delta\omega \neq 0.$$

Можно принять следующую простую оценку для ограничения на $\delta\omega$, при котором паутина еще не исчезает:

$$\delta\omega < \frac{2\pi}{T_0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{k\varepsilon\omega_0^2 n_0}{4\Delta\omega (k\rho_0)^{3/2}}.$$

Существование стохастической паутины получено при минимально возможном числе степеней свободы $N = 3/2$, при котором система может быть уже неинтегрируемой. Поэтому можно считать, что в гамильтоновских системах существует универсальный и неограниченный зародыш хаоса, если выполнены некоторые условия достаточно сильного вырождения по частотам.

2.3. Стохастические слои нелинейного осциллятора

Наличие нелинейности в системе автоматически снимает сильное вырождение. Однако резонансные условия могут, тем не менее, привести к сохранению некоторой части паутины¹⁹. Для выяснения этого эффекта обратимся снова к уравнению (1.3).

При малых амплитудах колебаний x нелинейный осциллятор близок к линейному. Поэтому следует ожидать возникновения элементов стохастической паутины внутри основной ячейки сепаратрисы нелинейного осциллятора. Это действительно происходит при достаточно больших значениях k и ε , если выполнено условие резонанса (2.3). Численный анализ показывает¹⁹, что действительно происходит образование в области малых x разрушенной сепаратрисной системы с симметрией, обусловленной порядком резонанса (рис. 7). При изменении ε эта часть паутины перестраивается, испытывая последовательно различные бифуркации. Размер сепаратрисных ячеек второго порядка имеет порядок $2\pi/k$, т.е. длины волны возмущения. Поэтому подобная внутренняя структура возможна лишь при $k > 2$. Между внутренним элементом паутины и обычным стохастическим слоем на месте основной сепаратрисы (см. рис. 7, а) имеются обычные инвариантные торы в соответствии с КАМ-теорией.

Таким образом, даже в нелинейном случае, где точное вырождение отсутствует, внешний резонанс может вызвать аномальную картину, разрушая инвариантные торы и создавая возможность поперечной диффузии. Адиабатический инвариант для частиц внутри элемента паутины может изменяться существенно.

Аналогичная картина возникает при исследовании динамики заряженных частиц в поле электромагнитной волны, распространяющейся с фазовой скоростью, равной скорости света ($\omega = kc$), поперек однородного магнитного поля²⁰ (см. приложение 3).

3. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПАУТИНА С КВАЗИКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

После того, как стало ясно, что стохастическая паутина существует при минимальной неинтегрируемой размерности динамической системы, одной из важных задач явилось определение ее возможных типичных и исключительных случаев. К числу последних относится такая паутина, которая имеет примерно одинаковую толщину на всей бесконечной фазовой плоскости. Такой случай возможен⁵, он возникает в том же классе задач, содержащих резонансы волна — частица при наличии постоянного магнитного поля. Особый интерес к этому случаю связан с тем, что он является своеобразным генератором нового типа симметрии²¹, который будет подробно обсужден в этом обзоре.

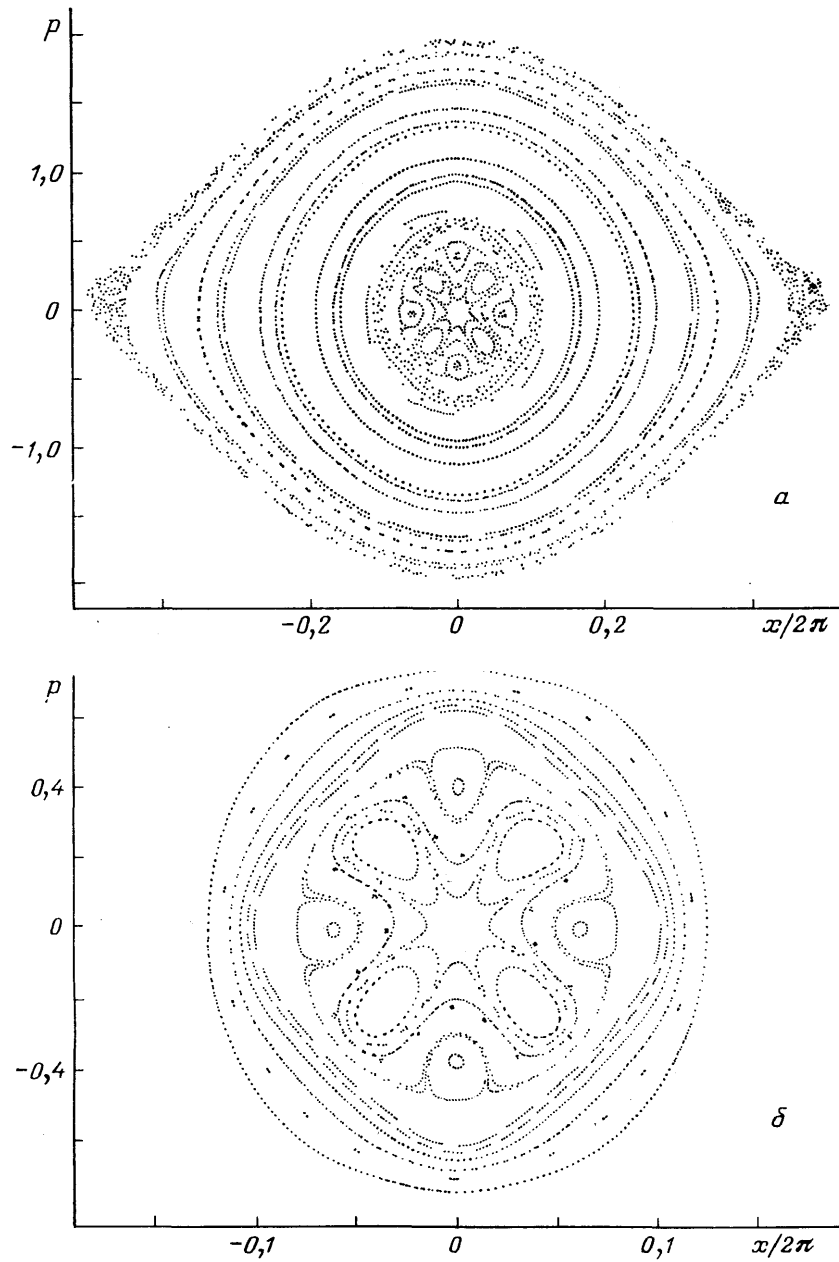


Рис. 7. Фазовый портрет возмущенного нелинейного осциллятора (1.3) в условиях резонанса $\Delta\omega = 4\omega_0$ и $k = 15$; $\varepsilon = 1/30$.

a — Общий вид одной ячейки сепаратрисы. *б* — Детализация внутренней области ячейки, приведенной на рис. *a*

3.1. О т о б р а ж е н и е с п о д к р у ч и в а н и е м

Рассмотрим снова осциллятор, на который действует не одна плоская волна, как в (2.1), а пакет бесконечного числа плоских волн с одинаковыми амплитудами и с постоянным сдвигом по частоте:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon \omega_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(kx - \omega t - n\Delta\omega t). \quad (3.1)$$

Далее удобно положить

$$\theta = kx - \omega t$$

и представить (3.1) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon \omega_0^2 T_0 \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0), \quad (3.2)$$

с тем же обозначением $\Delta\omega = 2\pi/T_0$. Гамильтониан системы (3.1) или (3.2) имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 - \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} T_0 \cos(kx - \omega t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0). \quad (3.3)$$

Его физический смысл легко представить себе, если сопоставить рассматриваемый случай (3.1) — (3.3) с двумя уже рассмотренными задачами (1.16) и (2.2). Вместо плавного периодического возмущения, как в (2.2), на осциллятор действуют периодические δ -импульсы, т.е. мгновенные толчки, подобно тому, как это было в задаче о возмущенном ротаторе (1.16). Кроме того, формула (3.3) соответствует плоскому движению заряженной частицы в постоянном магнитном поле $B_0 \parallel Oz$ и в электростатическом поле, направленном вдоль Ox :

$$E(x, t) = -\varepsilon \omega_0^2 T_0 \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0). \quad (3.4)$$

Теперь вырождение может быть особенно сильным при резонансах:

$$\alpha = \omega_0 T_0 = \frac{2\pi p}{q}, \quad (3.5)$$

где p и q — целые (далее будем считать просто $p < q$). Условие резонанса (3.5) означает (например, при $p = 1$), что за время одного оборота частицы в магнитном поле ($2\pi/\omega_0$) она испытывает ровно q толчков со стороны поля волн.

Уравнение движения (3.2) можно проинтегрировать один раз и получить отображение, связывающее значения (p, x) через интервал времени T_0 :

$$\begin{aligned} \hat{T}: \\ p_{n+1} &= [p_n + \varepsilon \omega_0^2 T_0 \sin(n\omega T_0 - kx_n)] \cos \alpha - \omega_0 x_n \sin \alpha, \\ x_{n+1} &= x_n \cos \alpha + \frac{1}{\omega_0} [p_n + \varepsilon \omega_0^2 T_0 \sin(n\omega T_0 - kx_n)] \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\alpha = \omega_0 T_0$. При $\omega_0 = 0$ отображение (3.6) переходит в стандартное отображение (1.17). Наличие постоянной средней скорости ω/k у волнового пакета (3.4) приводит к эффекту ускорения частиц, о котором уже упоминалось. Более симметричный случай возникает при $\omega = 0$. Тогда отображение (3.6) переходит в так называемое отображение с подкручиванием на

угол α ⁵:

$$\begin{aligned} \hat{M}_\alpha: \\ p_{n+1} &= (p_n - \varepsilon \omega_0^2 T_0 \sin kx_n) \cos \alpha - \omega_0 x_n \sin \alpha, \\ x_{n+1} &= x_n \cos \alpha + \frac{1}{\omega_0} (p_n - \varepsilon \omega_0^2 T_0 \sin kx_n) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Удобно также ввести безразмерные переменные

$$u = kp/\omega_0; \quad v = -kx \quad (3.8)$$

и представить \hat{M}_α в виде

$$\begin{aligned} \hat{M}_\alpha: \\ u_{n+1} &= (u_n + K_H \sin v_n) \cos \alpha + v_n \sin \alpha, \\ v_{n+1} &= -(u_n + K_H \sin v_n) \sin \alpha + v_n \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$K_H = \varepsilon \omega_0 T_0. \quad (3.10)$$

Случаи резонанса (3.5) при $p = 1$ будем обозначать через

$$\alpha_q = \frac{2\pi}{q}. \quad (3.11)$$

Как мы увидим далее, они играют особо важную роль. Параметр K_H характеризует величину взаимодействия частицы с волнами. Если $K_H = 0$, то отображение \hat{M}_α описывает поворот на угол α за один шаг.

Некоторое представление о свойствах \hat{M}_α можно получить следующим качественным образом. Представим параметр α в виде

$$\alpha = \frac{2\pi p_{(0)}}{q_{(0)}} + \delta\alpha,$$

где $p_{(0)}$ и $q_{(0)}$ — целые и $\delta\alpha$ — та часть α , которая не связана с рациональностью. Кроме того, $p_{(0)}$ и $q_{(0)}$ выбраны так, чтобы $q_{(0)}$ было минимальным. Если мы находимся вдали от основных резонансов, т.е. $q_{(0)} \neq 1, \dots, n$, n — целое и не слишком малое, а $|\delta\alpha| \lesssim 1/n$, то независимо от величины p_0 отображение (3.9) во многом напоминает стандартное отображение. Это означает, что при $K = \varepsilon \omega_0^2 T_0^2 \gg 1$ в нем будет сильный хаос, а при $K < 1$ будут существовать в значительной области фазового пространства лишь очень узкие стохастические слои.

Положение изменяется при выполнении условия (3.11).

3.2. Резонансный гамильтониан

Если параметр K_H мал, то при резонансном условии (3.11) можно представить гамильтониан (3.3) в более удобной форме. С помощью обозначений (3.5) и (3.8) перепишем его в виде (с точностью до постоянного множителя)

$$H = \frac{1}{2} \alpha_q (u^2 + v^2) - K_H \cos v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - n), \quad (3.12)$$

где $\tau = t/T_0$. Представим (u, v) в полярных координатах:

$$u = \rho \sin \varphi, \quad v = -\rho \cos \varphi,$$

где ρ — безразмерный ларморовский радиус. С помощью производящей функции

$$F = (\varphi - \alpha_q \tau) I, \quad I = \frac{1}{2} \alpha_q \rho^2$$

осуществляется переход в систему координат, вращающуюся с частотой α_q . В новых переменных гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial \tau} = -K_H \cos [\rho \cos (\varphi - \alpha_q \tau)] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - n). \quad (3.13)$$

Преобразуем ряд δ -функций:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - n) = \sum_{j=1}^q \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - (mq + j)).$$

Подставляя это выражение в (3.13) и пользуясь представлением

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - j - mq) = \frac{1}{q} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp \left(2\pi i m \frac{\tau - j}{q} \right),$$

легко находим:

$$\tilde{H} = H_q + V_q, \quad (3.14)$$

$$H_q = -\frac{1}{q} K_H \sum_{j=1}^q \cos \xi_j,$$

$$V_q = -\frac{2}{q} K_H \sum_{j=1}^q \cos \xi_j \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{2\pi m}{q} (\tau - j) \right],$$

где

$$\xi_j = -\rho \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{q} j \right) = v \cos \left(\frac{2\pi}{q} j \right) + u \sin \left(\frac{2\pi}{q} j \right). \quad (3.15)$$

Величина $\xi_j = \mathbf{R} \mathbf{e}_j$, где \mathbf{R} — вектор состояния на фазовой плоскости с координатами (u, v) и \mathbf{e}_j — единичный вектор, определяющий вершину правильного q -угольника.

Выражение H_q будем называть резонансным гамильтонианом. Он определяет некоторую интегрируемую гамильтоновскую систему. Второй член в \tilde{H} описывает возмущение V_q , действующее на H_q . Это возмущение, в частности, разрушает сепаратрисы в H_q , образуя узкие области хаотической динамики²¹.

В более общем случае вместо (3.12) имеем гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \alpha_q (u^2 + v^2) - K_H f(v) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - n), \quad (3.16)$$

где $f(v)$ — произвольная функция. Ему соответствует резонансный гамильтониан

$$H_q = -\frac{1}{q} K_H \sum_{j=1}^q f(\xi_j), \quad (3.17)$$

где система векторов

$$= \left(\cos \frac{2\pi}{q} j, \sin \frac{2\pi}{q} j \right) \quad (j = 1, \dots, q),$$

на которую проектируется вектор состояния $\mathbf{R} = (u, v)$, образует правильную «звезду». Еще одно обобщение формул (3.17) заключается в том, что «звезда» \mathbf{e}_j может быть неправильной, т.е. \mathbf{e}_j есть совокупность q произвольно направленных единичных векторов.

Особенностью представления (3.14) является наличие параметра взаимодействия K_H в усредненном гамильтониане H_q и в нестационарной части V_q . Иначе, редуцированный гамильтониан \tilde{H} пропорционален константе K_H и исчезает при $K_H = 0$. Таким образом, структура фазовой плоскости для системы с гамильтонианом H_q существует только из-за взаимного влияния магнитного и электростатического полей на частицу (или, иначе, из-за взаимодействия трансляционной и вращательной симметрии). Однако влияние V_q может оказаться как малым, так и большим в зависимости от соотношения между частотой возмущения V_q и невозмущенной частотой колебаний, описываемых гамильтонианом H_q . Последняя, очевидно, имеет порядок K_H , а частота возмущения V_q порядка единицы. Поэтому при $K_H \ll 1$ возмущение всегда является высокочастотным и приводит к малым поправкам. Наоборот, при $K_H \gg 1$ следует ожидать сильного взаимодействия резонансов и образования большой области хаотической динамики.

Таким образом, гамильтониан H_q описывает выражение для H , усредненное по периоду ларморовского вращения.

3.3. Т р и в и а л ь н ы е р е з о н а н с ы

К случаям тривиальных резонансов относятся значения $q = 1, 2$ и $q = 3, 4, 6$. Причины этого станут ясны ниже.

При $q = 1$ из (3.14) следует

$$H_1 = -K_H \cos v. \quad (3.18)$$

Усредненный гамильтониан H_q описывает свободное движение с импульсом v и периодической зависимостью энергии H_q от v . Такой закон дисперсии возникает, в частности, в периодических решетках. Уравнения движения

$$\dot{v} = 0, \quad \dot{u} = K_H \sin v$$

приводят к решению

$$v = \text{const} = v_0, \quad u = u_0 + tK_H \sin v_0. \quad (3.19)$$

Оно описывает ускорение вдоль оси x вследствие так называемого циклотронного резонанса и совпадает с точным решением, получаемым из отображения \hat{M}_α (3.9).

При $q = 2$ из (3.14) имеем $H_2 = H_1$, т.е. этот случай совпадает с предыдущим. Он соответствует полному циклотронному резонансу (мы всюду полагаем $p = 1$, хотя оно может быть и произвольным).

При $q = 4$ (см. ⁵)

$$H_4 = -\Omega_4 (\cos v + \cos u), \quad \Omega_4 = \frac{K_H}{2T}, \quad (3.20)$$

$$V_4 = -\Omega_4 (\cos v - \cos u) \cos \pi t, \quad (3.21)$$

а остальными слагаемыми в V_4 , содержащими $\cos(m\pi t)$ с $m > 1$, можно пренебречь, это станет ясно ниже.

Невозмущенное движение частицы характеризуется гамильтонианом H_4 и нормированным интегралом энергии

$$E_4 = \cos v + \cos u.$$

Устойчивым положениям равновесия соответствуют эллиптические точки:

$$|E_4| = 2, \quad v = \pi n, \quad u = \pi m, \quad m + n = 2l \quad (l = 0, \pm 1, \dots).$$

Неустойчивые гиперболические точки определяются условиями

$$E_4 = 0, \quad v = \pi n, \quad u = \pi m, \quad m + n = 2l + 1 \quad (l = 0, \pm 1, \dots).$$

Сепаратрисы, проходящие через них, покрывают всю фазовую плоскость квадратной сеткой, определяемой уравнениями

$$v = \pm(u + \pi) + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (3.22)$$

Траектория усредненного движения при $|E_4| \leq 2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{1}{2} E_4 + \left(1 - \frac{1}{2} E_4\right) \operatorname{cd} \left[\left(1 + \frac{1}{2} E_4\right) \Omega_4 t; \kappa \right], \\ \cos u &= \frac{1}{2} E_4 - \left(1 - \frac{1}{2} E_4\right) \operatorname{cd} \left[\left(1 + \frac{1}{2} E_4\right) \Omega_4 t; \kappa \right], \end{aligned}$$

где $\operatorname{cd} = \operatorname{sn}/\operatorname{dn}$ — отношение эллиптических функций с модулем

$$\kappa = \frac{2 - E_4}{2 + E_4}.$$

Учет следующего члена возмущения V_4 в гамильтониане \tilde{H} (см. (3.18) и (3.20)) приводит к разрушению сепаратрисной сетки (3.22) и к образованию стохастического слоя толщиной⁵

$$\Delta H \approx \frac{8\pi^3}{K_H T} \exp \left(-\frac{\pi^2}{K_H} \right). \quad (3.23)$$

Теперь слой покрывает все фазовое пространство, имея вид, близкий к прямоугольной сетке, с конечной равномерной толщиной ΔH , равной (3.23). Пример стохастической паутины для $q = 4$ приведен на рис. 8, а. Она слабо промодулирована возмущением V_4 . Параметр возмущения (определяющий глубину модуляции) $\sim \Omega_4^2$. Если бы мы учли в возмущении V_4 в (3.21) следующие члены, то они дали бы аддитивный вклад с большим, чем в (3.23), показателем затухания. Это оправдывает пренебрежение ими. С ростом величины $K_H < 1$ ширина стохастической паутины растет. Одновременно растет и глубина ее модуляции. Ее форма становится все менее похожей на квадратную сетку, хотя симметрия поворота на $\pi/2$ сохраняется. Таким образом происходит образование стохастического моря из паутины.

Аналогичная картина наблюдается и при $q = 3$ (рис. 8, б). Форма образующейся при этом паутины носит название «решетка кагоме», которая некоторым простым образом сопряжена с решеткой типа пчелиных сот. Гамильтониан

$$H_3 = -\frac{1}{3} K_H \left(\cos v + 2 \cos \frac{1}{2} v \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} u \right) \quad (3.24)$$

определяет динамику частиц, которая может создавать на фазовой плоскости инвариантные кривые «треугольного» или «шестиугольного» типа. Их разделяет сепаратрисная сетка, определяемая уравнениями

$$\begin{aligned} v &= \pi(2n_1 + 1), \quad v = \sqrt{3}u + 2\pi(2n_2 + 1), \quad v = -\sqrt{3}u + 2\pi(2n_3 + 1) \\ (n_1, n_2, n_3 &= 0, \pm 1, \dots). \end{aligned}$$

Они и создают решетку кагоме. На сепаратрисной сетке интеграл энергии

$$E_3 = \cos v + 2 \cos \frac{v}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} u \quad (3.25)$$

равен $E_3^{(c)} = -1$. В области значений $-1 \geq E_3 \geq -3/2$ движение частицы происходит внутри треугольников решетки, а при $3 \geq E_3 \geq -1$ движение происходит внутри шестиугольников. Картина на рис. 8, б обладает одной уникальной особенностью. Она представляет собой, с одной стороны, шестиугольную «снежинку», которая могла бы быть получена в результате роста кристаллов. С другой стороны, мы имеем типичный фрактал Коха²³, который создан не с помощью некоторого формального алгоритма, а «изображен» траекторией частицы в полях достаточно простой конфигурации — частица

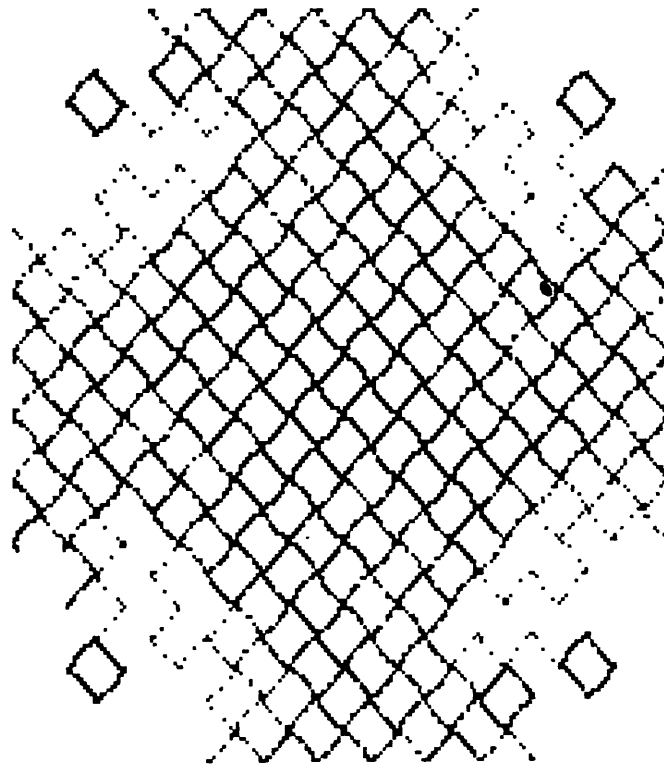
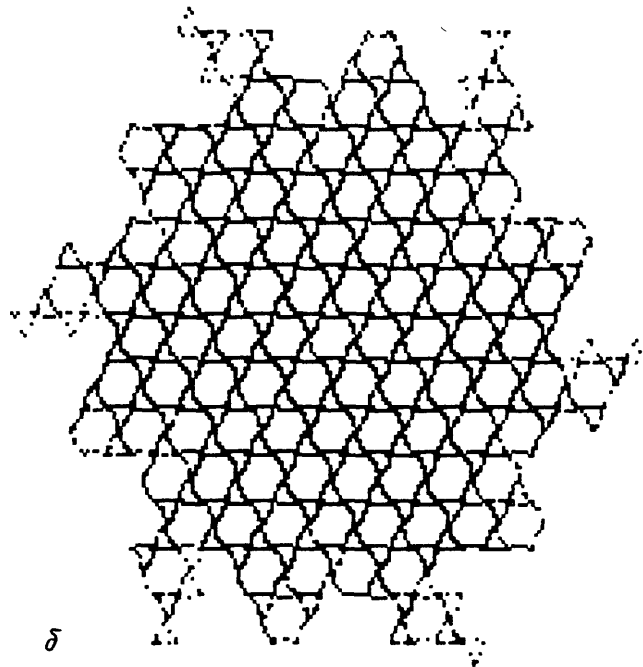
*a**b*

Рис. 8. Стохастическая паутина в случае «тривиальных» резонансов на фазовой плоскости (u, v) .

a — $q = 4$ (квадратная решетка), $K_H = 0,7$; размер квадрата $24\pi \times 24\pi$. *b* — $q = 3$ (решетка кагоме), $K_H = 0,8$; размер квадрата $32\pi \times 32\pi$

в этих полях «рисует» фрактал. Случай $q = 6$ приводит к тому же гамильтониану (3.24) и, тем самым, не содержит новой информации. Таким образом, существуют два типа решеток на плоскости при $q = 3$ и $q = 4$, которые создают структуры с трансляционной и одновременно поворотной симметрией. Известно²³, что других структур, обладающих подобными симметричными свойствами, не существует. Именно поэтому все перечисленные выше случаи резонансных гамильтонианов H_q с $q = 1, 2, 3, 4, 6$ были названы тривиальными.

Они описывают очень простые структуры.

3.4. Нетривиальные резонансы и паутина с симметрией типа «квазикристалл»

Во всех других случаях резонанса, в которых q не принимает значений, указанных выше, возникает нетривиальная ситуация. Теперь нельзя покрыть плоскость сеткой, которая бы обладала как трансляционной, так и вращательной симметрией одновременно. Новая структура стохастической паутины является очень специфической и относится к категории структур с симметрией так называемого квазикристаллического типа. Примеры паутины для $q = 5$ и $7, 8$ приведены на рис. 9, а, б и 10. Она представляет собой множество точек отображения \hat{M}_q за фиксированный интервал времени. Структуры на этих рисунках образованы случайным блужданием изображающей точки на фазовой плоскости. Поскольку точка не может выйти за пределы каналов паутины, то за достаточно большое время мы приобретаем достаточно детальную информацию о структуре паутины. Однако эта структура проявляется очень неравномерной во времени. На рис. 9, а приведена паутина, которая достаточно полно изображена за время ее наблюдения (время счета). Совсем другая картина имеет место на рис. 9, б. В течение более чем 10^6 шагов отображения внутри паутины остается окно в форме фрактальной пятиугольной звезды. Окно зарастает паутиной на временах $\tau > 1,3 \cdot 10^6$. Появление окон разных размеров и формы связано с выбором начальных условий. Последовательность формирования «снежинки» из паутины очень чувствительна к начальным значениям, а это, в свою очередь, связано с существованием кантор-торов²⁴, затрудняющих некоторые направления диффузии.

Рост паутины происходит следующим образом. Сначала случайные блуждания точки на плоскости создают некоторую неправильную фигуру типа, например, звезды, у которой не все концы одинаково выросли. Затем эта звезда достраивается до правильной и следующим этапом роста паутины начинается формирование звезды большого размера. Конечно, границы этих звезд имеют сложную форму и образуют фрактальные кривые в пределе $t \rightarrow \infty$. Поэтому мы будем также называть стохастическую паутину с квазикристаллической симметрией фрактальной паутиной.

Фрактальная паутина имеет центральное незакрытое окно в форме правильного q -угольника при четных q и $2q$ -угольника при нечетных q . Внутри центрального окна также есть сепаратрисы и стохастические слои, которые однако, не выходят на край окна и не соединяются с основной паутиной. Это связано с тем, что фазовое пространство внутри окна больше всего напоминает по своей структуре фазовый портрет стандартного отображения^{8,16}. Чем меньше K_H , тем больше размер центрального окна⁵. С уменьшением K_H , а также с ростом q паутина становится тоньше, а ее ячейки шире.

3.5. Диффузия частиц в магнитном поле

Задача о стохастической паутике имеет не только структурный аспект, но и динамический. Последний из них, в частности, связан с тем, как происходит диффузия частиц по каналам паутины. Аналогия со случайными блужданиями позволяет сравнительно просто записать кинетическое уравнение

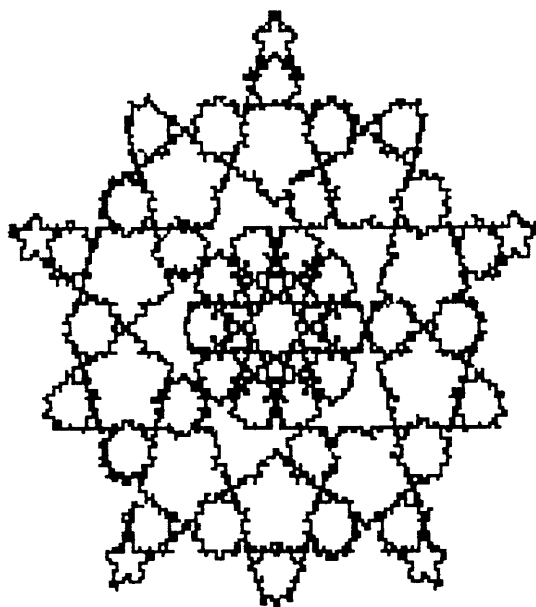
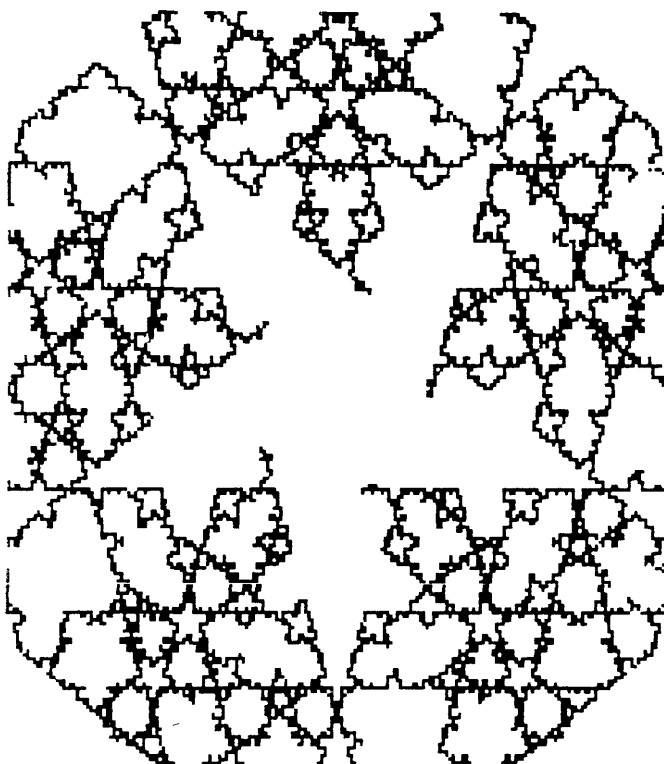
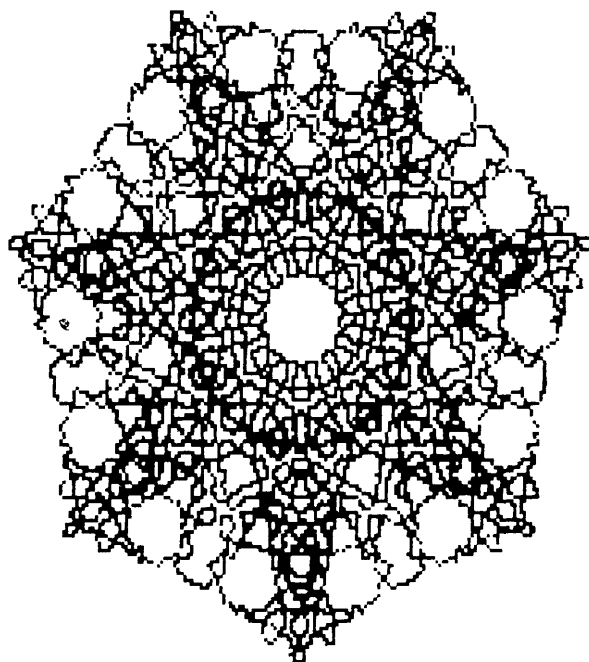
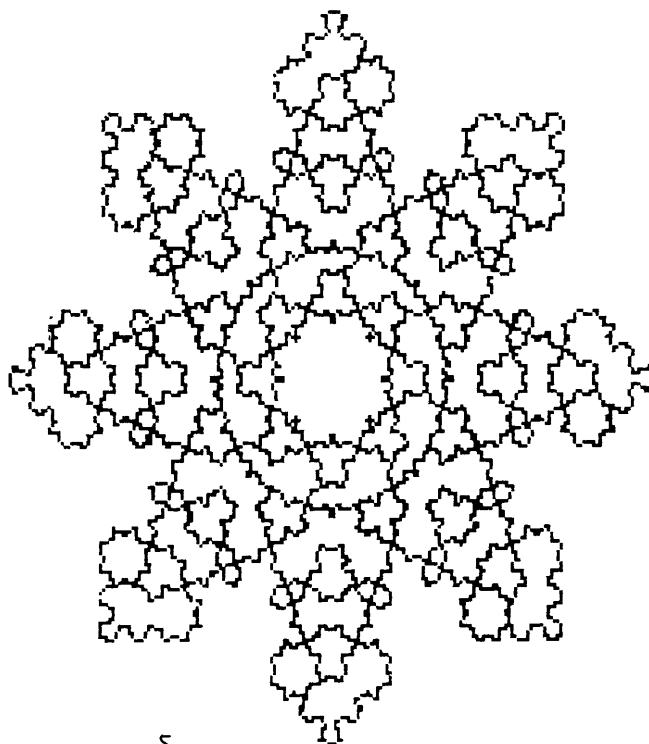
 a  δ

Рис. 9. Стохастическая паутина в случае симметрии 5-го порядка ($q = 5$).
 $K_H = 0,7$, размер квадратов $256\pi \times 256\pi$



a



б

Рис. 10. Стохастическая паутина в случае симметрии 7-го и 8-го порядков.
 а — $q = 7$, $K_H = 0,5$; размер квадрата $64\pi \times 64\pi$. б — $q = 8$, $K_H = 0,6$; размер квадрата $128\pi \times 128\pi$

для случая тривиальных резонансов ($q = 3, 4, 6$). Иначе обстоит дело при нетривиальных резонансах, когда структура паутины очень сложна. Если K_H велико, то описание диффузии частиц можно провести обычным способом с помощью уравнения типа Фоккера — Планка — Колмогорова ⁵.

Обратимся к исходному гамильтониану (3.3) и введем переменные действия — угол:

$$I = \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_0 x}{\dot{x}}. \quad (3.26)$$

Величина I с точностью до постоянного множителя равна энергии частицы (или осциллятора). При малых возмущениях ε изменения энергии на каждой точке могут быть относительно малыми, т.е.

$$|\Delta I| = |I_{n+1} - I_n| \ll I_n. \quad (3.27)$$

Неравенство (3.27), однако, может быть совместимым с условием (см. (3.10))

$$K_H = \varepsilon \omega_0 T_0 \gg 1 \quad (3.28)$$

из-за наличия в нем большого множителя $\omega_0 T_0$. Поэтому благодаря (3.28) происходит быстрое перемешивание по фазе φ . Условие (3.27) означает медленное диффузионное изменение действия. Если $F(I, t)$ есть функция распределения по действию, то соответствующее уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial F}{\partial I}, \quad (3.29)$$

в котором коэффициент диффузии

$$D(I) = \frac{1}{T} \ll (\Delta I)^2 \gg \quad (3.30)$$

и двойные скобки $\ll \dots \gg$ означают усреднение по фазам.

Из отображения \hat{T} (3.6) и определений (3.26) следует

$$\Delta I = 2\varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} T_0 I^{1/2} \sin \varphi \cdot \sin(k\rho \cos \varphi) + \left(\varepsilon \frac{\omega_0^2}{k} T_0 \right)^2 \sin^2(k\rho \cos \varphi), \quad \rho = \frac{\dot{x}}{\omega_0}. \quad (3.31)$$

Подстановка (3.31) в (3.30) и простые вычисления дают

$$D = \omega_0^2 K_H^2 \frac{I}{k^2 T_0} \left[1 - \frac{1}{k\rho} J_1(2k\rho) \right], \quad (3.32)$$

где J_1 — функция Бесселя. При движении в магнитном поле величина ρ имеет смысл ларморовского радиуса. Если $k\rho > 1$ (слабые магнитные поля), то коэффициент диффузии D содержит осциллирующий множитель. Если $k\rho \gg 1$, то

$$D = \varepsilon^2 \frac{\omega_0^4}{k^2} T_0 I, \quad (3.33)$$

и средняя энергия частицы растет пропорционально времени:

$$\langle I \rangle = Dt + I_0.$$

Если выполнено резонансное условие $\omega_0 T_0 = 2\pi p/q$, то, хотя паутина при $K_H \gg 1$ и разрушена, общая картина диффузии сохраняет симметрию порядка q (рис. 11). На фазовой плоскости образуется фрактальное дерево. Действие различных сил в уравнениях движения приводит к своеобразной кластеризации диффузии. При больших амплитудах волн (большие K_H) частица быстро продвигается в радиальном направлении, образуя q размытых лучей неправильной формы. Расплывание лучей в азимутальном направ-

лении происходит сравнительно медленно. Поэтому если выбрать начальное условие так, чтобы диффузия пошла в основном по другим радиусам, то новое фрактальное дерево (кластер) в течение очень длительного времени не будет



Рис. 11. Изображающая точка образует на фазовой плоскости диффузионное фрактальное дерево при сильном хаосе, сохраняющем симметрию q -го порядка.

$q = 5$, $K_H = 20$; размер квадрата $4 \cdot 10^3 \pi \times 4 \cdot 10^3 \pi$, время — $4 \cdot 10^4$ шагов отображения

или почти не будет пересекаться с предыдущим деревом. В этом смысле фазовая плоскость оказывается «кластеризована», т. е. условно поделена на некоторые фрактальные области диффузии, слабо перекрывающиеся друг с другом²⁵.

4. СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ПАУТИНЫ

4.1. Какими могут быть структуры

Когда мы пытаемся понять, почему снежинки имеют шестиугольную, а не, например, пятиугольную форму, мы сталкиваемся с необходимостью проникнуть в глубину тонких геометрических свойств тел, созданных природой. Действительно ли законы геометрии запрещают те или иные формы физических объектов? В той или иной форме подобные вопросы берут свое начало в древнем мире, а использование законов симметрии в физике стало вполне привычным методом анализа. Кристаллофизика является, по-видимому, областью, в которой применение геометрических идей является особенно наглядным. В основе ортодоксальной кристаллографии лежит представление о периодически повторяющихся структурах, заполняющих пространство или плоскость. В более формальном смысле в кристаллах реализуется такая упаковка одной или нескольких структурных ячеек, которая обладает трансляционной симметрией относительно сдвига на некоторый вектор. В таких случаях говорят о существовании дальнего порядка в кристаллах. Одновременно с трансляционной симметрией может существовать и поворотная симметрия на углы²³

$$\alpha_q = \frac{2\pi}{q} \quad (q = 3, 4, 6) \quad (4.1)$$

(условия (4.1) — те же, что и в случае паутины при тривиальных резонансах). Проблема реализации возможных видов кристаллических решеток очевидным образом оказывается привязанной к проблеме мозаик, или покрытий,

пространства либо плоскости с заданным типом симметрии. Она относится уже к области геометрии и ей посвящены обширные исследования (см. в ^{26–29, 77,80}). Хотя мы можем придать достаточно произвольную форму отдельной ячейке, как это видно в изобретательных рисунках датского художника Мори-са Эшера ³⁰, мы можем замостить ими плоскость лишь вполне определенным числом способов, если хотим сохранить при этом дальний порядок.

В длинном перечне исследований по покрытиям, упаковкам, мозаикам орнаментам, кристаллографии и т. п. число «5» всегда было выделенным. Попытки понять, в какой мере правильный пятиугольник может быть включен в покрытия, существуют уже в исследованиях Кеплера и Дюрера. Одно- временно с многочисленными мусульманскими орнаментами, содержащими

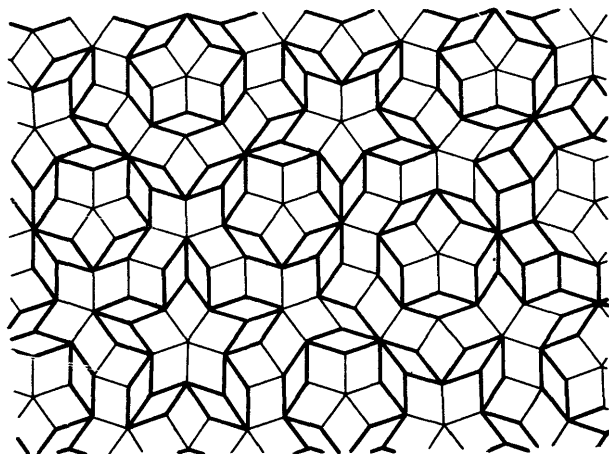


Рис. 12. Пример паркета Пенроуза

правильные 5- и 10-угольники, существовали также многочисленные утверждения в специальной литературе о том, что кристаллов с осью симметрии 5-го порядка быть не может.

Понятие упорядоченности сейчас претерпевает изменения. В значительной степени мы обязаны этому успехами в исследовании нелинейной динамики, где одна и та же система может совершать как регулярное, так и хаотическое движение в зависимости от значений своих параметров. Поэтому один и тот же, например, алгоритм распределения атомов в цепочке может задавать как периодическое их расположение, так и стохастическое ^{31,32}. Причем тот или иной характер распределения атомов может определяться лишь значениями одного параметра — величины потенциала внешнего поля. Существуют и другие, в некотором смысле промежуточные между регулярным и хаотическим, распределения атомов. К ним, в частности, относятся так называемые несоизмерные фазы ³³.

С некоторого времени в кристаллографии появились попытки отхода от ортодоксальных взглядов на то, каким должен быть кристалл. Первое хорошо аргументированное изложение подобной необходимости принадлежит Шрёдингеру ³⁴. Для объяснения структуры большой молекулы, составляющей один ген, он ввел понятие аperiодического кристалла, для которого генетический код служит как раз тем алгоритмом, который задает последовательность в расположении атомов и атомных групп. Многие попытки расширить старые схемы порядка были сосредоточены вокруг поиска структур с симметрией 5-го порядка ^{35,36}. Особую роль сыграло построение Пенроуза ³⁷, внимание к которому было в значительной степени привлечено статьей Гарднера ³⁸. Паркет Пенроуза явился примером нового вида упорядоченных структур, получивших название квазикристаллов. Он может быть составлен из двух типов ромбов ³⁶ (см. рис. 12) и имеет в данном случае ось симметрии.

Первый квазикристалл с симметрией 5-го порядка был открыт Шехтманом и др.³⁹ в результате целенаправленных опытов по быстрому охлаждению сплава Al и Mn. Рентгенограмма показала резкую (не размытую) систему пятен, свидетельствующую о существовании симметрии 5-го порядка и о наличии дальнего порядка. Сейчас проблеме свойств квазикристаллов посвящено очень много работ (см. материалы рабочего совещания по аперiodическим кристаллам⁴⁰). Мы становимся здесь лишь на некоторых определенных аспектах этой проблематики, которые, во-первых, связаны непосредственно со свойствами равномерной стохастической паутины и, во-вторых, с плоским случаем.

4.2. Метод проектирования и динамическая генерация структур

Один из первоначальных методов получения квазикристаллических структур был основан на проектировании N -мерных плотно упакованных кубов из N -мерного пространства на некоторое D -мерное ($D < N$). При $D = 2$ и $N = 5$ получался паркет Пенроуза. Техника проектирования, начатая в⁴¹, развивалась последовательно в^{42–48}. Ее основная идея заключается в следующем.

Рассмотрим систему ортогональных единичных векторов $\{e_j\}$, ($j = 1, \dots, q$), исходящих из одной точки. Каждому вектору e_j сопоставим неограниченную систему равноотстоящих параллельных $(q - 1)$ -мерных гиперповерхностей в q -мерном пространстве. Это семейство гиперповерхностей называется «гридом». Множество из q гридов образует мультигрид порядка q . Пересечения гиперповерхностей образуют d -мерное обобщение квадратной решетки. Проектирование мультигрида на D -мерное пространство порождает покрытие, или мозаику. Именно таким образом возникает паркет Пенроуза и доказывается, что он не содержит «дыр» или пересекающихся ромбов⁴¹.

В более общем случае грид может быть устроен сложнее (например, с некоторыми пробелами), однако ясно, что операция проектирования является линейной. Этот важный вывод означает, что регулярные мультигриды при проектировании создают сложный паркет упорядоченных структур, имеющих заведомо дальний порядок. Однако, как станет ясно, теперь дальний порядок связан не с периодичностью, а с почти периодичностью (конечное число несоизмеримых периодов) или с условной периодичностью (бесконечное число несоизмеримых периодов) структур.

Существуют дальнейшие обобщения идеи проектирования для получения неперiodических структур. Например, система векторов $\{e_j\}$ может образовывать произвольную (неправильную) звезду, а семейство прямых можно определенным образом изгибать⁷⁸.

Важнейшим свойством паркета Пенроуза и других покрытий, возникающих при проектировании решеток, является локальный изоморфизм^{48,78}: если рассмотреть любую конечную часть паркета, то она будет встречаться во всем паркете бесконечное число раз.

Фурье-образ от паркета Пенроуза³⁶ совпадает с рентгенограммами реальных квазикристаллов (см.^{39,40}), называемых также шехтманитами. Тем не менее связь между квазикристаллами и структурами, получаемыми методом проектирования, пока формальна и не вытекает из первых принципов. Это не позволяет, в частности, указать положения атомов в реальной квазикристаллической решетке⁴⁹.

Другой подход к структурам квазикристаллического типа основан на теории Ландау, согласно которой, например, плотность электронов $\eta(r)$ должна иметь ту же симметрию, что и кристаллическая решетка. Это позволяет представить ее в виде разложения^{44,49–53}

$$\eta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.2)$$

где векторы \mathbf{k} образуют базис обратной решетки. В плоском случае имеются пять таких фундаментальных векторов \mathbf{k}_i ($i = 1, \dots, 5$), и мы приходим к выражению типа (3.14), (3.17) для H_q , хотя и с иным содержанием.

Третий подход к анализу симметрии квазикристаллического типа основан на использовании реальной динамической модели, порождающей такую симметрию^{5,21,25,54}. Генератором симметрии является отображение с подкручиванием \hat{M}_q (см. формулу (3.9)) при выполнении резонансных условий (3.11):

$$\begin{aligned} \hat{M}_q: \\ \bar{u} &= (u + K_H \sin v) \cos \frac{2\pi}{q} + v \sin \frac{2\pi}{q}, \\ \bar{v} &= -(u + K_H \sin v) \sin \frac{2\pi}{q} + v \cos \frac{2\pi}{q}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отображение \hat{M}_q действует в двумерном пространстве (u, v) и при малых K_H его разрушенная сепаратрисная сетка (стохастическая паутина) образует инвариантное покрытие плоскости с квазикристаллической симметрией q -го порядка. Усредненный гамильтониан H_q для отображения (4.3) представим согласно (3.14), (3.15) в следующем виде (с точностью до постоянного множителя):

$$\begin{aligned} \bar{H}_q &= -\sum_{j=1}^q \cos(\mathbf{e}_j \mathbf{R}); \\ \mathbf{R} &= (v, u), \quad \mathbf{e}_j = \left(\cos \frac{2\pi}{q} j, \sin \frac{2\pi}{q} j \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Нетрудно установить аналогию между (4.4) и (4.2), однако теперь мы располагаем дополнительной информацией, позволяющей не только обращаться с \bar{H}_q как с гамильтонианом, но и исследовать возмущение его методами гамильтоновской механики.

В недавней заметке⁸³ сообщается об еще одном подходе к проблеме симметрии разбиений, в котором устанавливается связь между квазикристаллической симметрией, марковскими разбиениями и теорией особенностей.

4.3. С г л а ж е н н ы е с т р у к т у р ы

Основу представления о симметрии покрытий, генерируемых выражением (4.4), дают структура сепаратрис и расположение особых точек, порождаемых гамильтонианом \bar{H}_q . Рассмотрим, например, линии уровня $\bar{H}_q = E$. Это семейство большого числа замкнутых инвариантных кривых различной формы и размера. Структуры, порождаемые фазовым портретом \bar{H}_q , будем называть сглаженными относительно стохастической паутины, которая содержит значительно больше мелких деталей. Несмотря на такое упрощение в изучении паутины, задача о фазовом портрете интегрируемой динамической системы с гамильтонианом \bar{H}_q по-прежнему остается сложной.

На рис. 13 приведено распределение числа эллиптических точек ρ_e для различных значений энергии в случае симметрии 5-го и 7-го порядков (нормировка ρ_e произвольная)⁵⁴. Области значений $E = \bar{H}_q > 0$ соответствуют устойчивым точкам (дно потенциального рельефа), а области значений $E = \bar{H}_q < 0$ соответствуют неустойчивым точкам (вершины потенциального рельефа). Аналогичное распределение гиперболических точек ρ_h приведено на рис. 14. В отличие от случаев тривиальных резонансов с $q = 3, 4, 6$ (т.е. случаев обычных кристаллических решеток), где особые точки энергетического рельефа расположены на поверхностях со строго фиксированными значениями энергии, теперь имеется разброс в распределении этих точек.

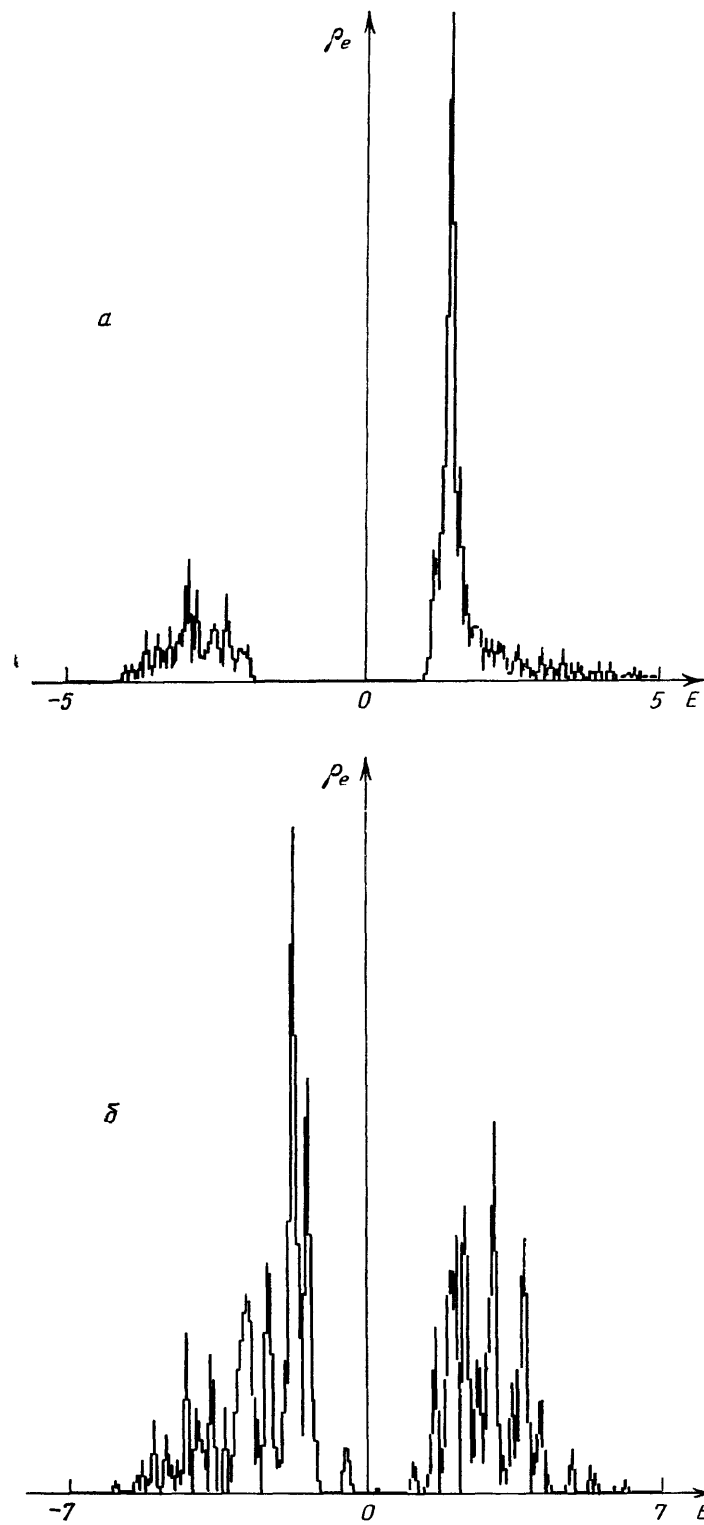


Рис. 13. Распределение эллиптических точек по энергиям для $q = 5$ (а) и $q = 7$ (б).
 При $\overline{H}_q > 0$ устойчивые точки, при $H_q < 0$ неустойчивые точки

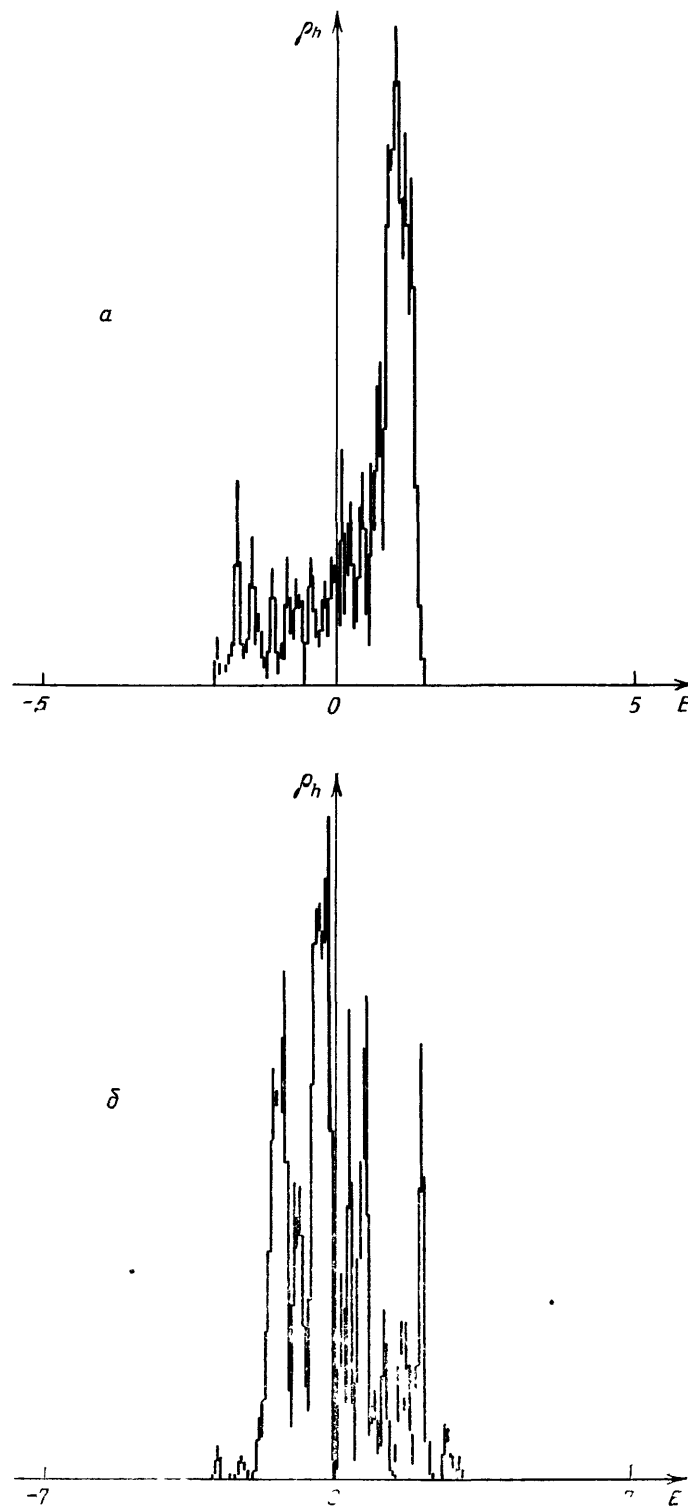


Рис. 14. Распределение гиперболических точек по энергиям для $q = 5$ (a) и $q = 7$ (δ)⁵⁴

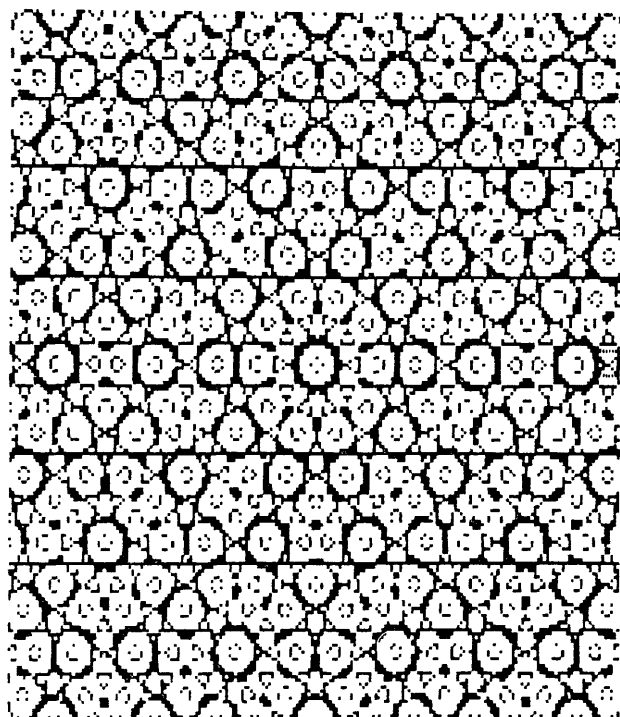
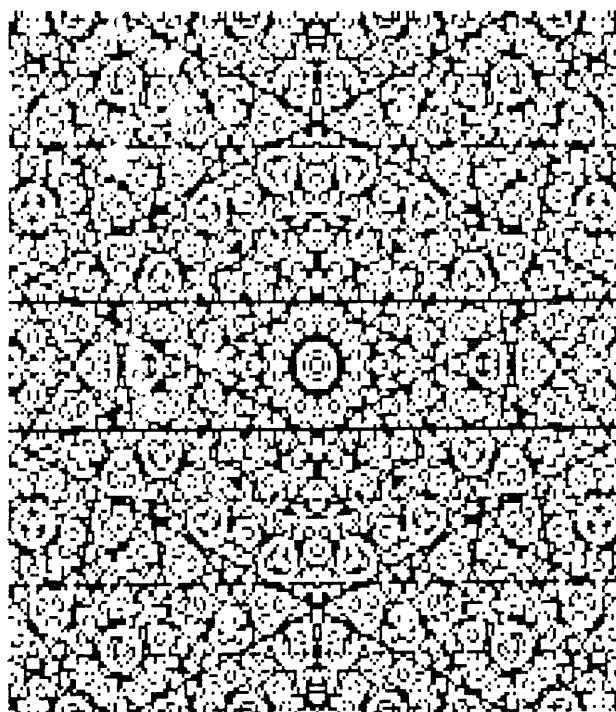
 a  b

Рис. 15. Энергетические рельефы для $q = 5$ (размер квадрата $64\pi \times 64\pi$) (а) и $q = 7$ (размер квадрата $80\pi \times 80\pi$) (б)

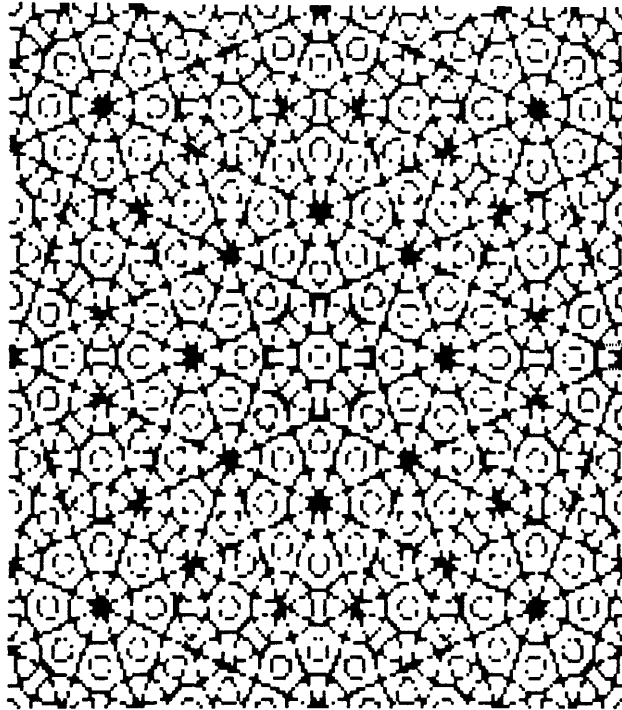
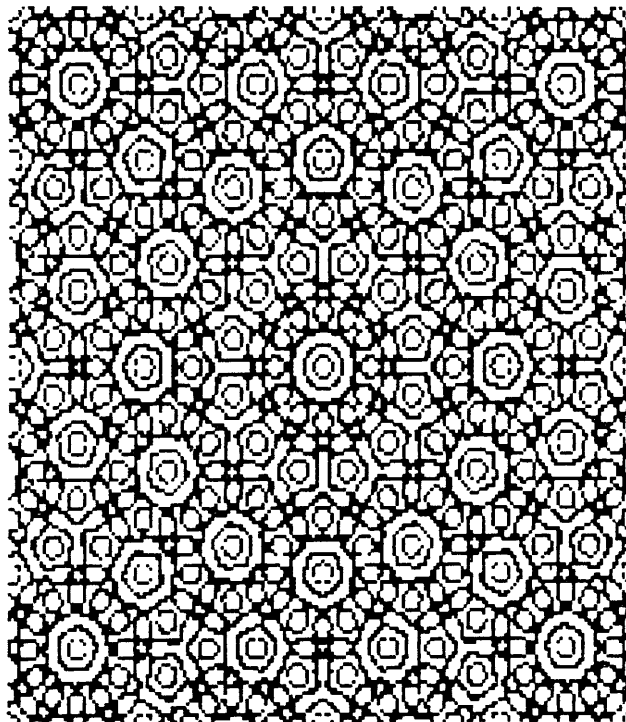
*a**b*

Рис. 16. Энергетические рельефы для $q = 8$ (размер квадрата $48\pi \times 48\pi$) (a) и $q = 12$ (размер квадрата $56\pi \times 56\pi$) (б)

Обычно такая картина присуща неупорядоченным системам. В данном случае мы ее наблюдаем в системе с дальним порядком, и этот факт является достаточно удивительным.

Теперь ясно, что сепаратрис существует очень много и они лежат на разных энергетических уровнях. Некоторые из них имеют близко расположенные друг к другу участки. Под действием даже очень малого возмущения сепаратрисы разрушаются. На их месте образуются стохастические слои конечной толщины. Узкие промежутки между близкими участками сепаратрис зарастают и образуют большую сеть. Она и является основой стохастической паутины генератора структур (4.3). Мы описали основной

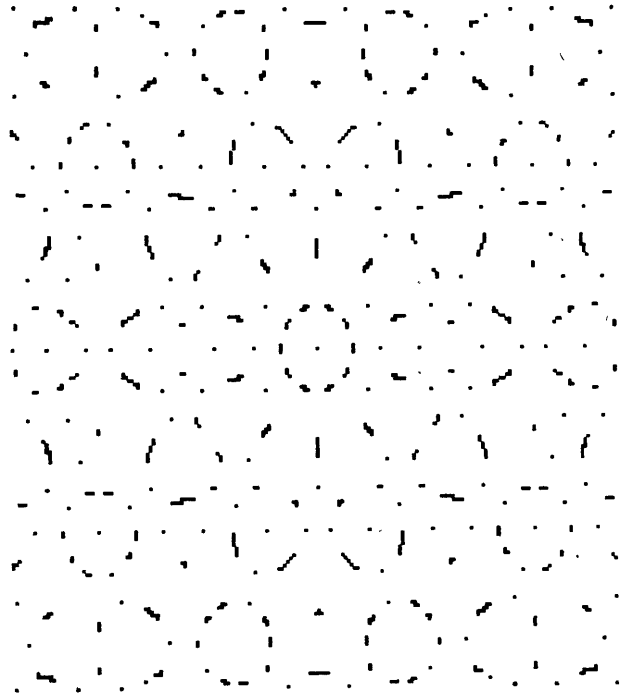


Рис. 17. Пример плоской квазикристаллической решетки 5-го порядка⁵⁴. Темные пятна соответствуют наиболее вероятным областям локализации атомов. Размер квадрата тот же, что и на рис. 14, а

элемент связи между исходной динамической системой, задаваемой уравнениями (4.3), и усредненной системой со сглаженной структурой, определяемой в (4.4). Для того чтобы обнаружить эту сглаженную структуру, следует поступить следующим образом. Рассмотрим узкий энергетический слой ΔE , расположенный вблизи того значения E_c , на которое приходится максимум гиперболических точек ($E_c = 1$ при $q = 5$ и $E_c \approx -1$ при $q = 7$). Точки (u, v) , лежащие на траекториях системы с гамильтонианом \bar{H}_q и энергией $E \in E_c \pm \Delta E/2$, будут определять сглаженный эквивалент стохастической паутины генератора \hat{M}_q . Мы будем называть совокупность этих точек энергетическим рельефом структуры. Примеры энергетических рельефов для случаев $q = 5, 7$ приведены на рис. 15²¹, а для случаев $q = 8, 12$ — на рис. 16. Эти рельефы представляют собой некоторый упрощенный вариант стохастической паутины, приведенной на рис. 9, 10. Квазикристалл с симметрией 12-го порядка был обнаружен в работе³⁵, а квазикристаллы с симметрией 8-го порядка — в работе⁸¹. Можно представить себе, что функция $\bar{H}_q(u, v)$ определяет двумерный потенциальный рельеф на плоскости (u, v) . Тогда атомы должны были бы находиться вблизи устойчивых эллиптических точек.

Если оставить только те из них, которые лежат вблизи максимума распределения ρ_ϵ на рис. 13, то для $q = 5$ возникает пример структуры (рис. 17)⁵⁴, которую мог бы иметь двумерный квазикристалл. Большие темные пятна означают, что область, в которой мог бы находиться атом, имеет некоторую протяженность. Это, в свою очередь, является следствием плоского дна потенциальной ямы. Таким образом, рис. 17 дает представление о строении плоской квазикристаллической пленки с симметрией 5-го порядка. Сглаженные структуры, порождаемые энергетическими рельефами, имеют симметрию относительно поворота на угол π/q , если q нечетное (см. рис. 15), и на угол $2\pi/q$, если q четное (см. рис. 16). Наоборот, структуры, образуемые паутиной, имеют всегда симметрию q -го порядка. В дальнейшем всегда будем говорить о симметрии q -го порядка, имея в виду задающее число q в генераторе покрытий (4.3) или в усредненном гамильтониане (4.4).

Сглаженные структуры обладают масштабной инвариантностью. Это их свойство, однако, еще недостаточно изучено.

4.4. Квазисимметрия, декорирование, субрешетки и подрешетки

Уже отмечалось, что стохастическая паутина фрактальна, и поэтому ее детальная форма очень сложна. Чем точнее мы захотим определить форму ее границ, тем более сложная картина будет наблюдаться. Это свойство присуще любому стохастическому слою. Поэтому вряд ли стоит говорить о какой-либо точной симметрии. Взаимодействие трансляционной и вращательной симметрии должно испортить обе, даже при малых константах взаимодействия K_d . Однако симметричные дефекты могут оказаться слабыми, и поэтому симметрия существует в некотором приближенном и, может быть, плохо определенном смысле. Интуитивно мы понимаем, что некоторая степень огрубления паутины делает ее более правильной, или, иначе, более «симметричной». Это означает, что нам полезно иногда отойти от определения какой-либо «чистой» симметрии, а вместо этого использовать «квазисимметрию». Именно эту роль выполняет отображение \hat{M}_q , которое можно рассматривать как генератор покрытий с «квазисимметрией» типа «квазикристалл». В этом смысле сглаженные структуры, задаваемые гамильтонианом (4.4), являются более «правильными». При переходе от паутины к сглаженным рельефам происходит некоторое выравнивание линий и исчезновение некоторых элементов. Поэтому можно считать, что рельеф является некоторой декорацией паутины.

Вообще, на базе паутины или рельефа можно построить множество различных покрытий, если использовать какой-либо дополнительный алгоритм для соединения различных точек основного рисунка. Такую операцию естественно назвать декорированием. Паркет Пенроуза легко получается как декорация структуры на рис. 15, *а*²¹. Аналогично можно получить мозаику 7-го порядка (рис. 18) как декорацию рельефа на рис. 15, *б*, используя лишь три ромба с острыми углами $\pi/7$, $2\pi/7$, $3\pi/7$. Паркеты типа тех, что на рис. 12 или 18, можно, в свою очередь, также декорировать и получить новые покрытия с той же симметрией⁵¹.

Некоторые идеи декорации связаны с образованием звезд типа той, что была приведена на рис. 9, *б*. Такие звезды являются фракталами типа кривых Коха, и их фрактальная размерность равна $D = 1,44$ ⁵⁶.

В сглаженных структурах на рис. 15 можно выделить систему прямых, образующих мультигрид, т.е. систему параллельных прямых, повернутых q раз на угол $2\pi/q$. Рассмотрим, например, пентагрид на рис. 15, *а*. Система прямых в нем имеет разную толщину, а расстояние между любой парой соседних прямых равно $a_n = a_0 \tau_0^n$, где a_0 — минимальное расстояние, $\tau_0 = (1 + \sqrt{5})/2 = 2 \cos(\pi/5)$ — золотое сечение, а n — какое-либо целое число. Определим процесс фильтрации следующим образом. Будем вычер-

кивать, например, на рис. 15, а все прямые, кроме тех, которые образуют пентагрит лишь с двумя возможными расстояниями между соседними параллельными прямыми: a_n и a_{n-1} ($n \geq 1$), причем число n зафиксировано.

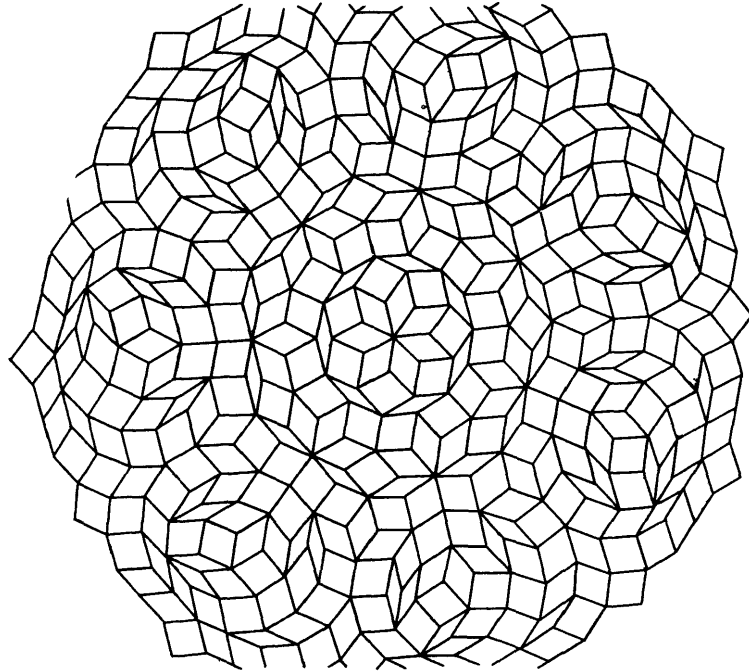


Рис. 18. Пример мозаики 7-го порядка

Образованный таким образом пентагрит называется также решеткой Амманна. Координаты x_m расположения параллельных линий в решетке Амманна удовлетворяет простому правилу⁴⁸

$$x_m = m + \alpha + \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{m}{\tau_0} + \beta \right],$$

где m — целое число, α и β — некоторые константы и скобки $[\dots]$ обозначают целую часть числа.

Другой способ отобразить последовательность чередований двух расстояний a_0 и b_0 между линиями в решетке Амманна связан с использованием отображения⁴⁸

$$\hat{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

действующего на вектор-столбец (a_0, b_0) . Оно дает

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + b_0, & b_1 &= a_0, \\ a_2 &= a_1 + b_1 = a_0 + b_0 + a_0, & b_2 &= a_1 = a_0 + b_0 \quad \dots \end{aligned}$$

Последовательность $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, в которой зафиксирован порядок следования длин a_0, b_0 , называется последовательностью Фибоначчи. Она и определяет решетку Амманна в случае $q = 5$.

При $q = 7$ оператор \hat{T}_7 является нелинейным, а последовательность линий в решетке определяется не одним числом, как в случае $q = 5$, а двумя: например, $\tau_1 = \cos(\pi/7)$ и $\tau_2 = \cos(2\pi/7)$.

Решетки, получаемые фильтрацией, естественно назвать субрешетками. Они тоже представляют собой некоторый примитивный вариант декорации.

Сам факт существования процесса фильтрации отражает свойство масштабной инвариантности исходных структур.

Одним из важных свойств квазикристаллической симметрии является возможность выделения подрешеток подобно тому, как это бывает в обычных кристаллах. Обозначим через $\mathcal{H}_q[f(\theta)]$ обобщенный гамильтониан, порождающий квазикристаллическое покрытие плоскости:

$$\mathcal{H}_q[f(\theta)] = \sum_{j=1}^q f(\theta_j), \quad (4.5)$$

где f — произвольная функция и

$$\theta_j = \mathbf{e}_j \mathbf{R}. \quad (4.6)$$

Тогда имеет место следующее тождество:

$$\mathcal{H}_{nq}[f(\theta)] = \sum_{l=0}^{n-1} \mathcal{H}_q\left[f\left(\theta + \frac{2\pi}{n} l\right)\right], \quad (4.7)$$

где n — целое число. Это означает, что из решетки порядка q можно путем n -кратного поворота на угол $2\pi/n$ образовать решетку порядка $q' = nq$. Гамильтониан результирующей решетки равен простой суперпозиции гамильтонианов подрешеток. Это свойство оказывается важным для построения моделей, содержащих взаимодействие подрешеток.

4.5. Фурье - анализ структур

Фурье-анализ является важным средством изучения структурных свойств стохастической паутины и рельефов на фазовой плоскости. Кроме того, рентгеновский анализ реальных кристаллов позволяет судить об их симметричных свойствах. Картина фурье-спектра структуры в случае симметрии 5-го порядка (покрытия Пенроуза) появилась в³³ до того, как аналогичная картина была получена в экспериментах³⁹. Сравнение фурье-спектров структур, образованных энергетическими рельефами гамильтониана \bar{H}_5 , с экспериментальными проводилось в⁷⁹. Все эти данные позволяют считать, что фурье-спектр с картины покрытия плоскости достаточно хорошо передает симметричные свойства покрытия, хотя и не позволяет его однозначно восстановить.

Обозначим через S_Γ множество точек, принадлежащих на фазовой плоскости размером Γ некоторому рисунку (структуре). Пусть также

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_s) &= 1, & s \in S_\Gamma, \\ &= 0, & s \notin S_\Gamma, \end{aligned}$$

где \mathbf{R} — вектор произвольной точки на плоскости Γ , \mathbf{R}_s — вектор фиксированной точки s . Тогда фурье-образ структуры определяется выражением

$$S(\mathbf{k}) = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_s) d\mathbf{R}. \quad (4.8)$$

Реально мы всегда имеем дело с конечной областью Γ . Это создает дополнительные граничные эффекты в виде $S(\mathbf{k})$. В случае периодических структур S их иногда легко выделить. Однако в случае непериодических покрытий плоскости выделить «монокристалл» оказывается невозможно. Здесь, однако, можно было бы использовать свойство поворотной симметрии и свойство подобия структур квазикристаллического типа.

На рис. 19, б и 20, б — фурье-спектры соответственно для стохастической паутины, порождаемой \hat{M}_5 , и для энергетического рельефа той же сглаженной структуры, порождаемой \bar{H}_5 . Область Γ выбиралась в виде круга, что создает достаточно хорошее приближение к паутине на рис. 19, а.

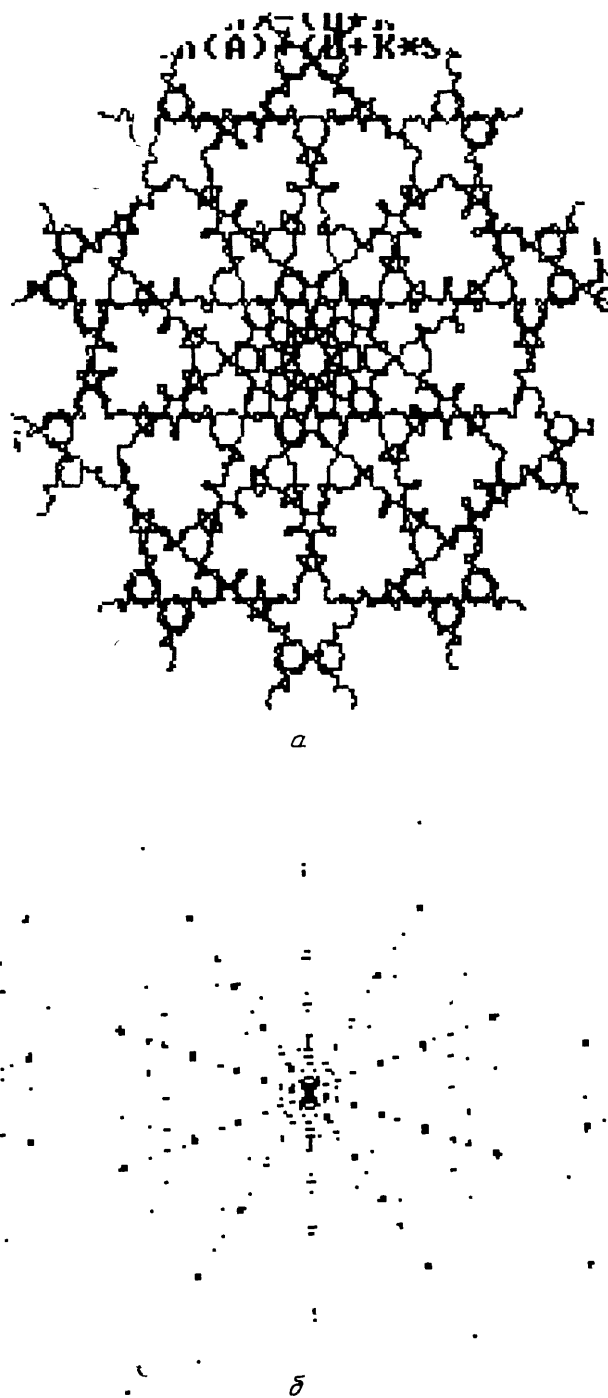


Рис. 19. Элемент паутины для $q = 5$ (радиус круга 50π) (a) и его фурье-образ (б)

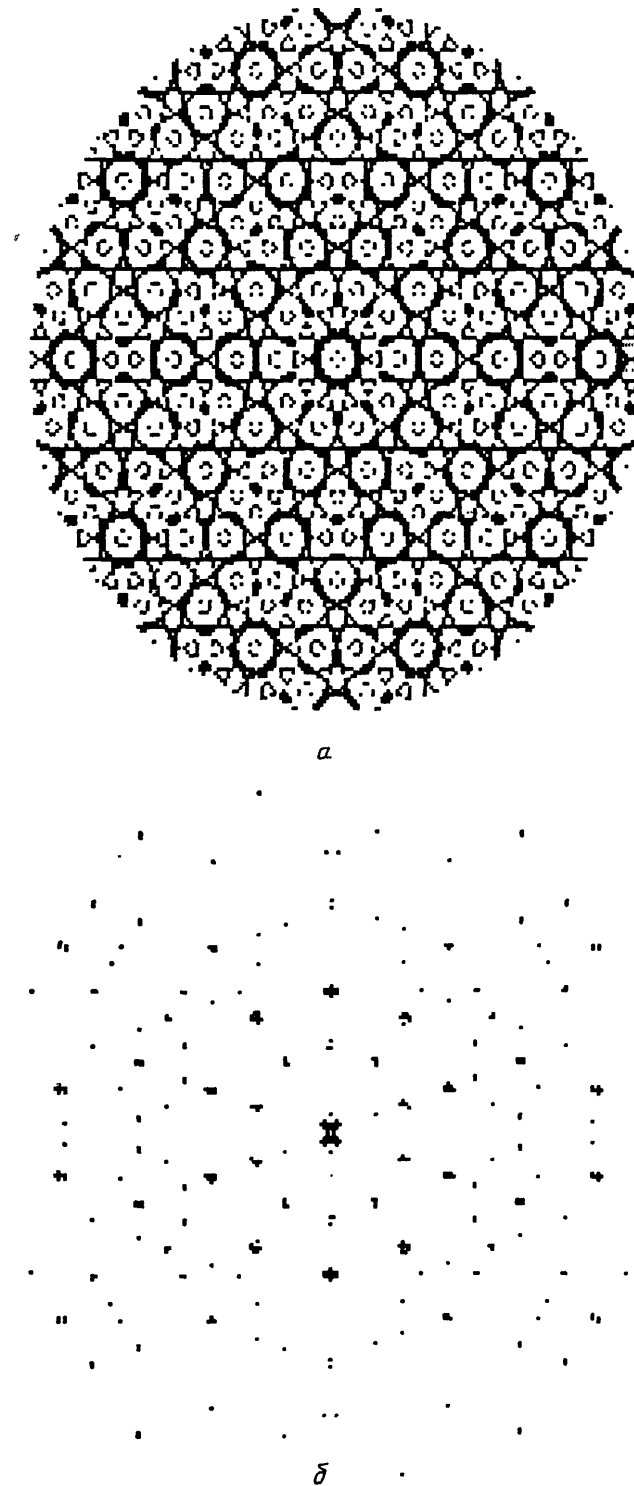


Рис. 20. Элемент энергетического рельефа для $q = 5$ (радиус круга 32π) (a) и его фурье-образ (b)

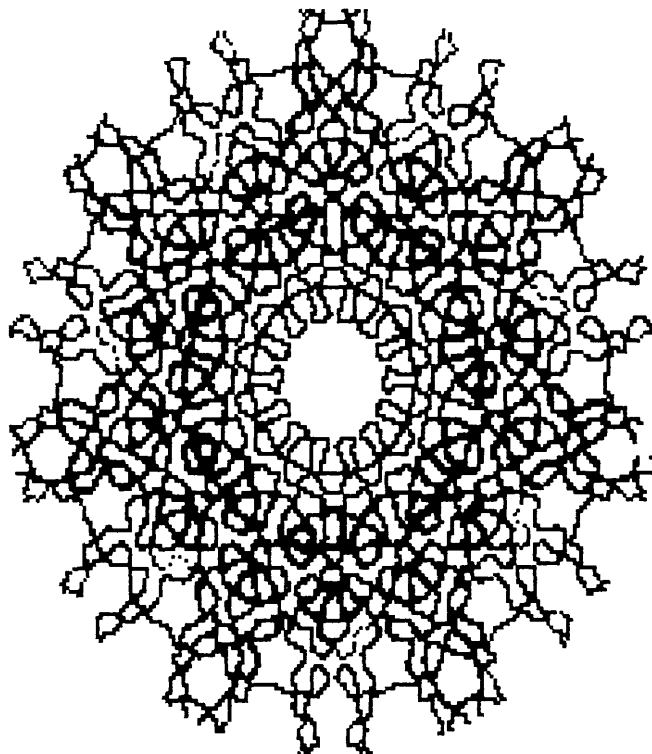
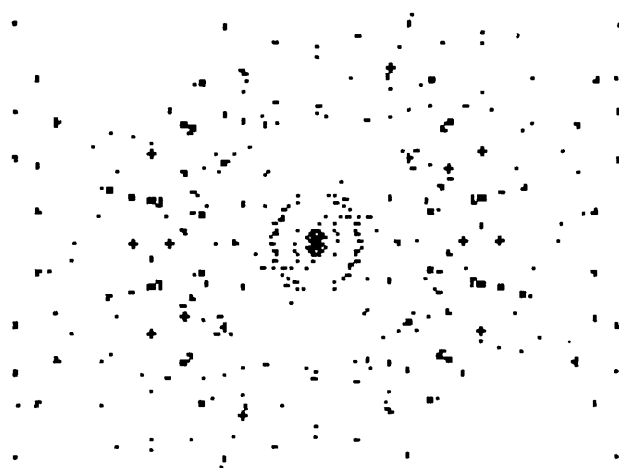
 a  b

Рис. 21. Элемент паутины для $q = 7$ (радиус круга 24π) (a) и его фурье-образ (b)

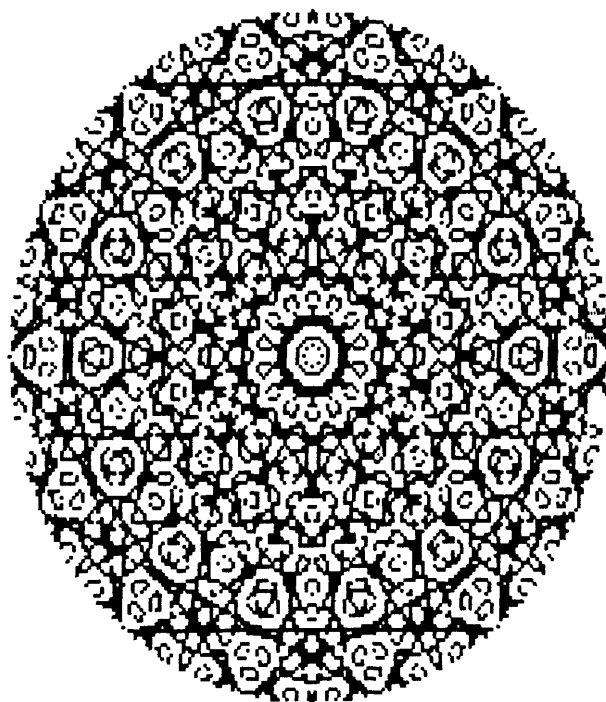
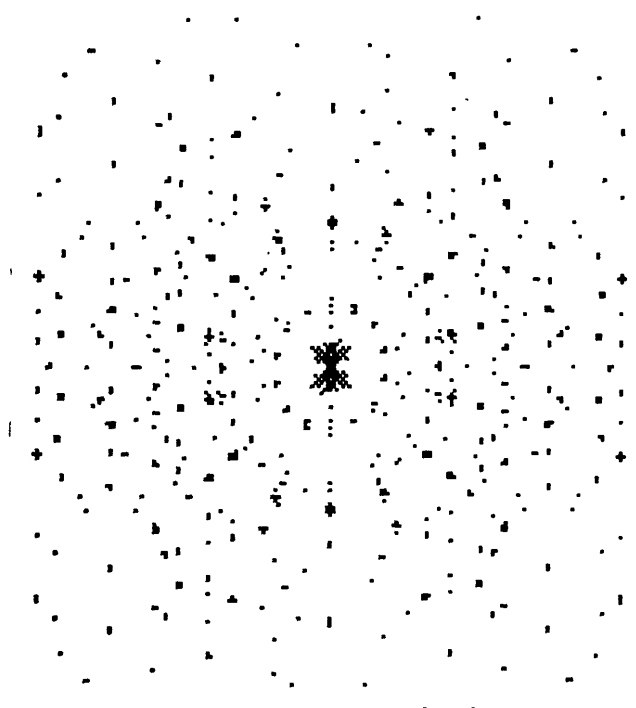
 a  b

Рис. 22. Элемент энергетического рельефа для $q = 7$ (радиус круга 32π) (a) и его фурье-образ (b)

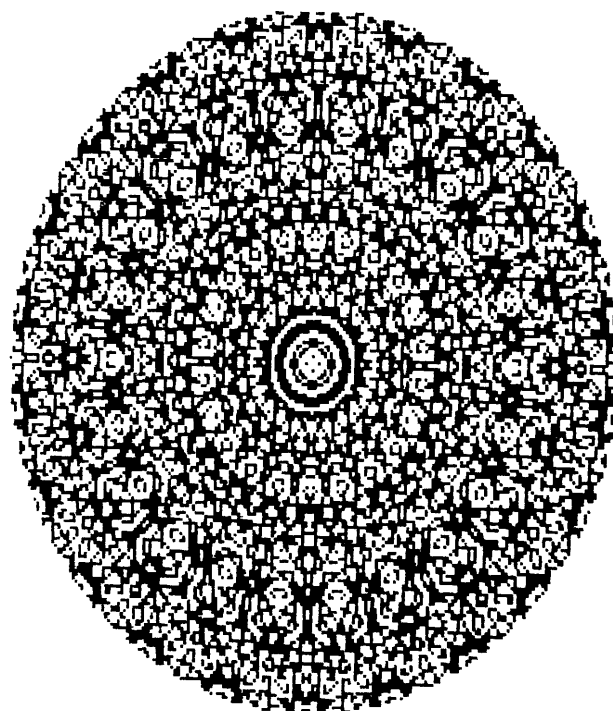
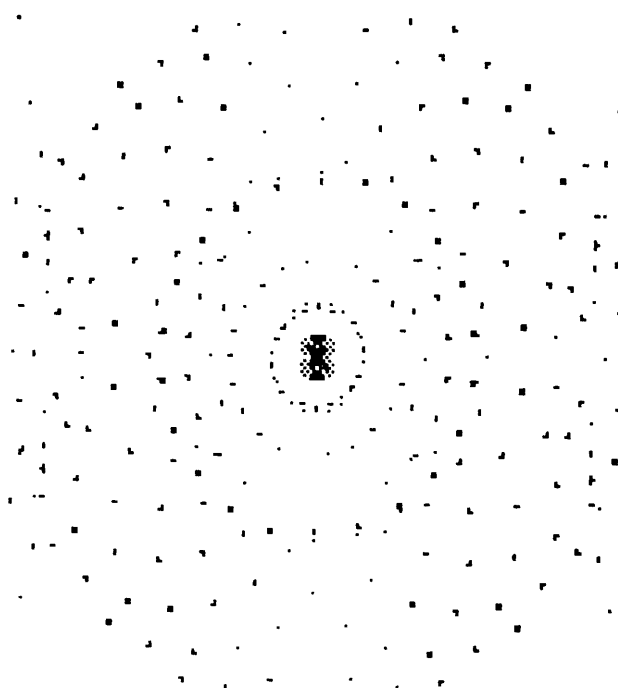
 a  b

Рис. 23. Центральная часть рельефа с $q = 11$ (а) и его фурье-спектр (б)

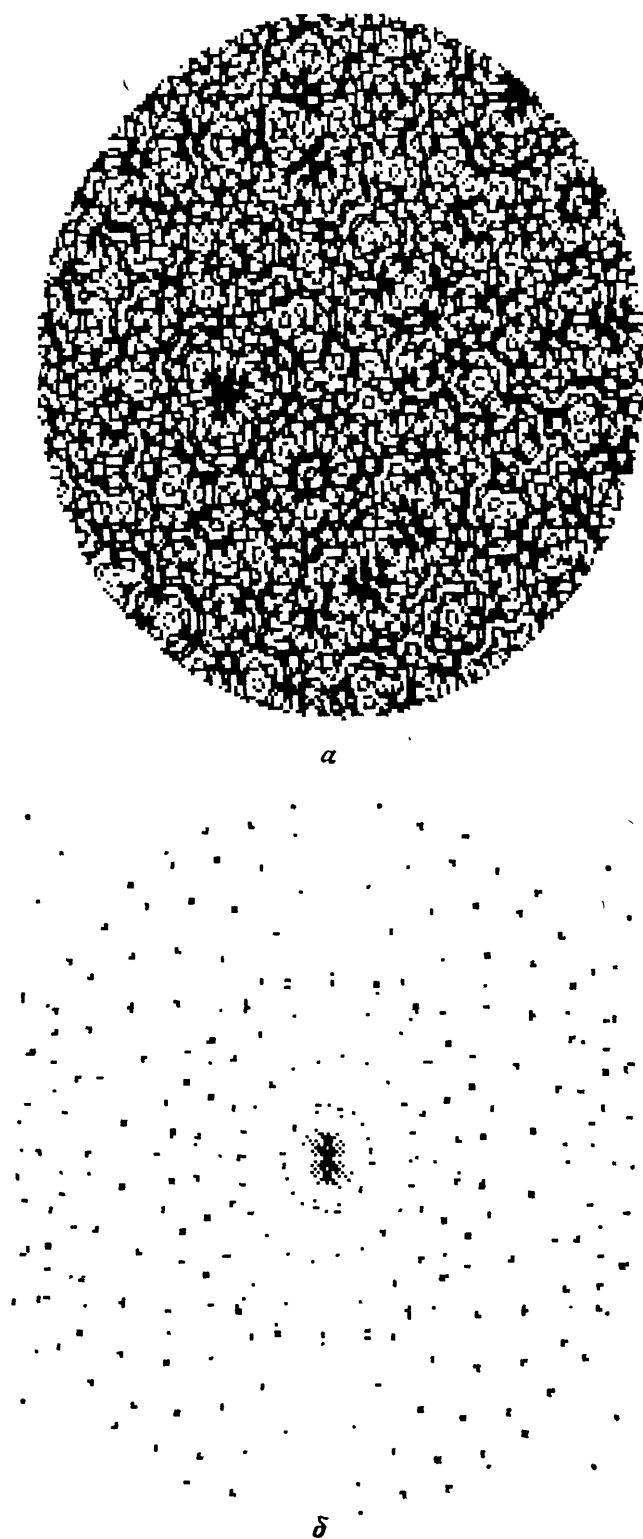


Рис. 24. Нецентральная часть рельефа с $q = 11$ (a) и его фурье-спектр (b)

Картины на рис. 19, б и 20, б близки друг к другу. Это очень важное следствие, так как оно подтверждает возможность введения симметричного анализа бесконечных паутин динамических систем подобно тому, как это делается для кристаллов или квазикристаллов. Аналогичная эквивалентность видна из рис. 21 и 22 для $q = 7$.

Выберем теперь два участка рельефа — один в центральной части структуры при $q = 11$ (рис. 23, а), а второй — в каком-либо другом месте плоскости, отстоящем достаточно далеко от центра (рис. 24, а). По внешнему виду последнего невозможно сказать не только о его симметрии, но и о степени упорядоченности всей структуры, частью которой он является. Однако соответствующий фурье-спектр этого участка (рис. 24, б) практически полностью совпадает с фурье-спектром центрального участка (рис. 23, б). В этом свойстве структур квазикристаллического типа отражается новое представление о возможных видах порядка с поворотной симметрией.

4.6. Особенности в зависимости фазового объема от энергии (особенности Ван-Хова)

Гамильтониан сглаженных структур \bar{H}_q позволяет проанализировать некоторые тонкие структурные характеристики стохастической паутины. К их числу относятся особенности Ван-Хова, связанные с существованием эллиптических и гиперболических особых точек в фазовом пространстве²². Пусть, например, система с одной степенью свободы совершает финитное движение с энергией E . Фазовый объем $\Gamma(E)$, ограниченный гиперповерхностью (в данном случае — кривой)

$$H(p, x) = E, \quad (4.9)$$

равен

$$\Gamma(E) = \int_{H \leq E} dp dx = \oint p(E, q) dq, \quad (4.10)$$

где контуром интегрирования в последнем интеграле является траектория на гиперповерхности (4.9). Число состояний с энергией $\leq E$, как известно²², равно с точностью до константы фазовому объему $\Gamma(E)$, а плотность состояний равна

$$\rho(E) = \text{const} \cdot \frac{d\Gamma(E)}{dE} = \text{const} \cdot \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq. \quad (4.11)$$

Для одной степени свободы

$$\rho(E) = \text{const} \cdot T(E), \quad (4.12)$$

где $T(E)$ — период колебания частицы с энергией E . Отсюда сразу ясно, что особыми точками плотности состояний в данном случае являются особые точки периода колебаний. Для одной степени свободы вблизи эллиптической точки имеется разрыв типа скачка функции, связанный с границей допустимых значений энергии, а вблизи гиперболической точки — логарифмическая особенность, связанная с расходимостью периода колебаний на сепаратрисе.

В случае тех динамических систем, которые рассматриваются в данной работе (см., например, гамильтониан (4.4)), движение устроено более сложно. Гиперповерхности (4.9) соответствует не одна замкнутая петля, а бесконечное число замкнутых петель, располагающихся на плоскости $H = E$ и образующих на ней соответствующую структуру. Поэтому формула (4.10) для фазового объема изменяется следующим образом:

$$\Gamma(E) = \sum \oint p(E, q) dq, \quad (4.13)$$

где сумма берется по всем замкнутым фазовым петлям. Выражение (4.13) расходится. Поэтому смысл имеет другое представление для плотности состояний. Рассмотрим прямоугольник ($|p| < P_0$, $|q| < Q_0$). Определим вместо (4.11):

$$\rho_0(E) = \lim_{P_0, Q_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_0} \sum \oint \frac{\partial p(E, q)}{\partial E} dq, \quad (4.14)$$

где $\Gamma_0 = P_0 Q_0$ и ρ_0 — нормированная плотность состояний. Мы можем рассчитывать на то, что свойство подобия фазового портрета, порождаемого гамильтонианом сглаженных структур \bar{H}_q (см. (4.4)), обеспечивает существование предела в (4.14). В случаях $q = 3, 4, 6$ (симметрия кристаллов) достаточно ограничиться лишь одной ячейкой структуры при вычислении ρ_0 , так как структура периодическая. Однако в случае квазикристаллической симметрии замечание о возможности использования выражения (4.14) становится нетривиальным.

Главное свойство величины $\rho_0(E)$ заключается в том, что она может быть получена из классических (не квантовых) выражений, что, в частности,

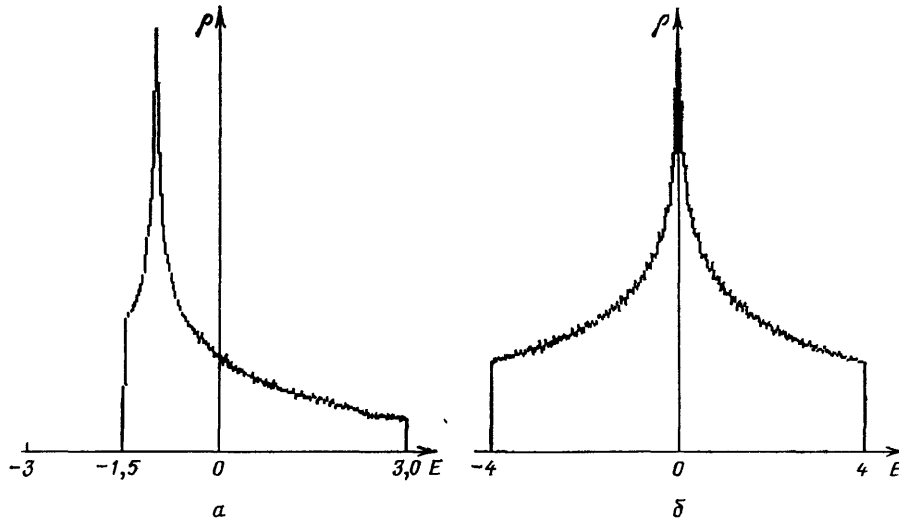


Рис. 25. Плотность состояний и особенности Ван-Хова в случае кристаллической симметрии.

$a - q = 3$. $b - q = 4$. Абсолютные значения ρ в произв. ед.

и характеризуется формулой (4.12). Приведем сначала некоторые простые аналитические выражения для $q = 4$ и $q = 3$.

При $q = 4$ запишем

$$\mathcal{H} = \cos p + \cos x. \quad (4.15)$$

Отсюда

$$\rho_0(E) = \oint \frac{dx}{[1 - (E - \cos x)^2]^{1/2}} = 4K \left(\left(1 - \frac{E^2}{4} \right)^{1/2} \right), \quad (4.16)$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода. При $|E| \rightarrow 0$ и $|E| \rightarrow 2$, т.е. соответственно вблизи гиперболической и эллиптической точек, имеем из (4.16):

$$\begin{aligned} \rho_0(E) &= 4 \ln \frac{8}{|E|}, \quad |E| \rightarrow 0, \\ &= 2\pi, \quad |E| \rightarrow 2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Вид $\rho_0(E)$ при $q = 4$, иллюстрирующий используемый численный метод, приведен на рис. 25, б.

При $q = 3$ запишем

$$\mathcal{H} = \cos x + \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} p \right) + \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} p \right). \quad (4.18)$$

Из (4.18) и (4.14) следует

$$\rho_0(E) = \frac{2}{\sqrt{3}} \oint dx [2(1 + \cos x) - (E - \cos x)^2]^{-1/2}. \quad (4.19)$$

Существуют два интервала энергий с разными выражениями для $\rho_0(E)$.

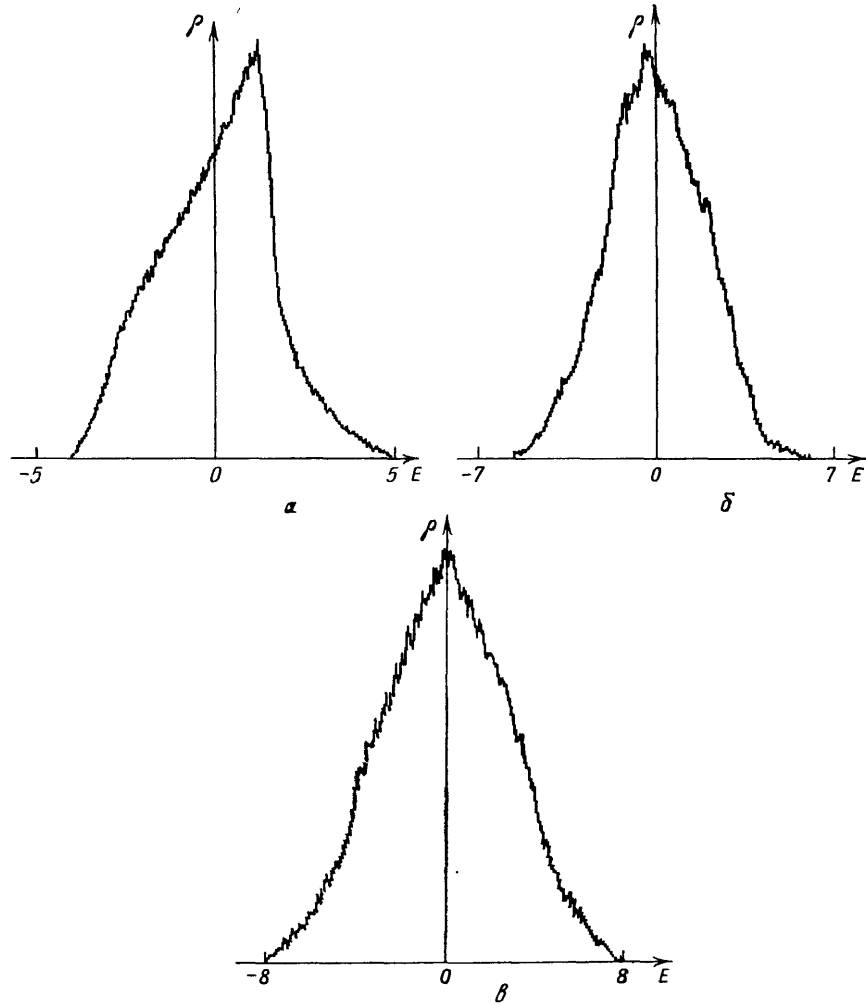


Рис. 26. Плотность состояний и особенности Ван-Хова в случае квазикристаллической симметрии для $q = 5$ (а), $q = 7$ (б) и $q = 8$ (в)

При $-1 < E \leq 3$ имеем из (4.19)

$$\rho_0(E) = \frac{8}{\sqrt{3}} (2E + 3)^{-1/4} K \left(\frac{\{[1 + (2E + 3)^{1/2}]^2 - (1 + E)^2\}^{1/2}}{2(2E + 3)^{1/4}} \right). \quad (4.20)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \rho_0(E) &= \frac{4\pi}{3}, & E &\rightarrow 3, \\ &= 4\sqrt{3} \ln \frac{1}{|E + 1|}, & E &\rightarrow -1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

При $-3/2 \leq E < -1$ имеем из (4.19)

$$\rho_0(E) = \frac{16}{\sqrt{3}} \{ [1 + (2E + 3)^{1/2}]^2 - (1 + E)^2 \}^{-1/2} \times \\ \times K \left(\frac{2(2E + 3)^{1/4}}{\{ [1 + (2E + 3)^{1/2}]^2 - (1 + E)^2 \}^{1/2}} \right). \quad (4.22)$$

Отсюда

$$\rho_0(E) = \frac{16\pi}{3} = 4\rho_0(3), \quad E \rightarrow -\frac{3}{2}, \\ = 4\sqrt{3} \ln \frac{1}{|E + 1|}, \quad E \rightarrow -1. \quad (4.23)$$

Значения $E < -3/2$ для гамильтониана (4.18) невозможны. Соответствующий вид $\rho_0(E)$, полученный численно, приведен на рис. 25, а.

В случаях квазикристаллической симметрии ($q = 5, 7, 8$ и т.д.) аналитические выражения для $\rho_0(E)$ отсутствуют. Численный анализ⁵⁴ приводит к распределениям $\rho_0(E)$, изображенным на рис. 26. Мы видим, что при тех значениях E , при которых распределения эллиптических и гиперболических точек имеют максимумы (ср. рис. 13, 14), имеются четкие следы особенностей Ван-Хова. Однако теперь они сильно сглажены, и вся картина больше напоминает жидкость, чем кристалл. Начиная с $q = 7$ распределение $\rho_0(E)$ практически мало отличается от случаев с $q > 7$. Заглаживание особенностей при квазикристаллической симметрии можно отнести к ее отличительному свойству. Различные способы декорирования могут значительно обеднять структуру и усиливать проявление особенностей Ван-Хова. Именно так обстоит дело, например, с паркетом Пенроуза⁵⁷.

4.7. З а м е ч а н и е о с п е к т р а л ь н ы х с в о й с т в а х с т р у к т у р

До недавнего времени наше представление о характере возможных структур было устроено сравнительно просто. Оно включало в себя понятия о кристаллах и жидкостях, причем различные неупорядоченные среды обычно объединялись с жидкостями. Появление квазикристаллической симметрии требует более ясных и более четких определений. Точнее, требуется вложить более определенный смысл в то, что следует называть упорядоченной структурой, а что — неупорядоченной, или аморфной. Дело в том, что квазикристаллические структуры следовало бы отнести к структурам с дальним порядком, о чем свидетельствуют, например, их рентгенограммы, или фурье-спектры. Однако вид плотности состояний $\rho_0(E)$ со сглаженными особенностями Ван-Хова скорее свидетельствует о неупорядоченном объекте, чем о кристалле.

Причина возникших парадоксов связана отчасти с тем, что конфигурация структур в квазикристаллическом случае задается более сложным алгоритмом, чем это имеет место в кристаллическом случае. Поэтому требуется более четкие определения о понятии порядка применить к алгоритму, определяющему способ построения структуры. Такие определения уже существуют в теории динамических систем, и ими можно воспользоваться при описании свойств структур.

Пусть вектор ξ характеризует положение некоторого элемента структуры, а положение другого элемента η определяется с помощью некоторого оператора \hat{T} :

$$\eta = \hat{T}(\eta|\xi)\xi. \quad (4.24)$$

Уравнение (4.24) определяет некоторую динамическую систему в фазовом пространстве (ξ) , если как-то перенумеровать все элементы структуры

ξ_n . Это возможно, так как их множество счетно. Тогда во введенной системе отсчета вместо (4.24) можно записать:

$$\xi_{n+m} = \hat{T}_m(n) \xi_n. \quad (4.25)$$

Спектром динамической системы (4.25) называется величина $\mathcal{R}(\mathbf{k})$, являющаяся фурье-образом коррелятора $\mathcal{R}(f, f | \mathbf{x})$:

$$\mathcal{R}(f, f | \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathcal{R}(\mathbf{k}), \quad (4.26)$$

$$\mathcal{R}(f, g | m) \equiv \int d\xi_n f(\xi_{n+m}) g(\xi_n) - \int d(\xi_{n+m}) f(\xi_{n+m}) \int d\xi_n g(\xi_n),$$

где f и g — произвольные интегрируемые функции. Весь вопрос о характере структуры сосредоточивается теперь на виде спектра $\mathcal{R}(\mathbf{k})$.

Если отображение (4.25) определяет только эргодическую «траекторию», то ее спектр $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ является дискретным:

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{v}} \mathcal{R}_{\mathbf{v}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\mathbf{v}}), \quad (4.27)$$

где набор волновых чисел $k_{\mathbf{v}}$ определяет возможные периоды структуры. В случае, например, периодической цепочки имеется лишь одно значение k_0 (если не считать возможные значения nk_0). Однако для квазикристаллической решетки Амманна уже появляются два несоизмеримых значения k_1 и k_2 .

Другая возможность связана с тем, что спектр $\mathcal{R}(\mathbf{k})$ может оказаться непрерывным. Это соответствует случаю расщепления корреляций в (4.26), и подобную ситуацию следует отнести к неупорядоченным структурам. Степень хаотичности таких структур зависит от того, как быстро расщепляется коррелятор (4.26) — степенным или экспоненциальным образом. Структуры при экспоненциальном убывании коррелятора соответствуют турбулентности в динамической системе.

Паркет Пенроуза, по-видимому, относится к случаю (4.27) с двумя базисными несоизмеримыми периодами. Все остальные случаи требуют тщательного анализа.

5. О КВАЗИКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Сейчас ясно, что мы столкнулись с новым и еще мало исследованным видом симметрии. Генератор покрытий \hat{M}_q или усредненный гамильтониан \bar{H}_q являются возможными средствами выражения этой симметрии. И здесь мы встречаемся с естественным вопросом, в какой мере симметрия квазикристаллического типа является универсальной и где, кроме реальных квазикристаллов, мы можем ее наблюдать. Некоторые возможные приложения будут отмечены в этом разделе.

5.1. Гидродинамические структуры

Возникновение структур в различных гидродинамических течениях является одним из наиболее ранних экспериментальных наблюдений. Среди них наиболее правильная картина связана с конвективными ячейками, которые могут принимать форму одномерных валов или создавать на поверхности слоя квадратную сетку или гексагональную сетку (ячейки Бенара). Общее понимание явления возникновения структур связывает его с различными стадиями изменения состояния среды при переходе ее к турбулентному движению. Чем более правильная и более простая структура, тем выше ее симметрия и тем более упорядоченным является состояние среды. Турбулентное состояние наиболее однородно (например, вследствие локальной неустойчи-

ности) и симметрия его значительно выше, чем симметрия структурно упорядоченной среды. Максимальной симметрией обладает сильно развитая турбулентность. Путь зарождения турбулентности чрезвычайно сложен. Он определяется не только сложной последовательностью бифуркаций во времени, приводящих в конце концов к хаосу и к непрерывному временному спектру, но и к не менее сложной последовательности пространственных перестроек среды, ведущих к возникновению пространственно неупорядоченных структур. Последнее обстоятельство приводит к появлению непрерывного спектра уже по пространственным координатам. Таким образом, картина возникновения турбулентности есть сложный путь рождения пространственно-временного хаоса. Эти соображения все чаще возникают в текущей литературе^{58–61}.

Существует много экспериментальных и численных исследований возможных структурных организаций среды (см., например, сборники обзоров^{62–64}, хотя это материалы далеко не всех совещаний на эту тему). Легче всего поддаются анализу различные двумерные структуры, возникающие в задачах тепловой конвекции или электродинамической конвекции, которая может также включать внешнее параметрическое возбуждение^{62,63,65–67}. Круг подобных задач чрезвычайно широк: строение пены, конвективные ячейки в атмосфере Юпитера⁶⁸, структуры в вихревых решетках, в сдвиговых течениях и др. На этом пути структуры с квазикристаллическим видом симметрии могут сыграть важную роль в гидродинамических средах при анализе возникновения турбулентности²¹. Поясним, почему это возможно.

Обратимся к двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \psi - \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \psi \right) + \frac{\partial (\Delta \psi, \psi)}{\partial (x, y)} = 0, \quad (5.1)$$

где ψ — функция тока ($v_x = \partial \psi / \partial y$, $v_y = -\partial \psi / \partial x$); Δ — двумерный оператор Лапласа, Re — число Рейнольдса.

Рассмотрим теперь ψ в следующем виде:

$$\psi_k = A(t) \sum_{j=1}^q \cos(k e_j \mathbf{R}). \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) для функции ψ , которое можно назвать «квazoном», обладает следующим свойством:

$$\Delta \psi_k + k^2 \psi_k = 0. \quad (5.3)$$

В силу (5.3) нелинейный член в (5.1) тождественно обращается в нуль, и

$$\dot{A} + \frac{1}{\text{Re}} k^2 A = 0,$$

т. е.

$$A(t) = A(0) \exp \left(-\frac{tk^2}{\text{Re}} \right). \quad (5.4)$$

Если, однако, имеется накачка, то квазон может оказаться стационарным решением, и вопрос теперь заключается в определении области устойчивости подобных решений. Она может быть связана с разными неучтенными факторами (сжимаемостью, теплопроводностью и т.д.). Однако априори нам не следует исключать решений, подобных (5.2), тем более, что они содержат квадратные и гексагональные сетки как частные случаи.

Аналогичное (5.1) уравнение возникает и в случае вращающейся жидкости⁶⁹:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u - \text{Ro}^2 \Delta u) + (\mathbf{v}_R \nabla) u = \Omega \text{Ro}^4 \frac{\partial (u, \Delta u)}{\partial (x, y)},$$

где u — высота жидкого слоя, Ω — частота вращения, $\text{Ro} = (g\bar{u})^{1/2} / \Omega$ — число Россби, \bar{u} — среднее значение высоты u , g — ускорение силы тяжести

$\mathbf{v}_R = R\omega^2 [\nabla\Omega, \mathbf{z}^0]$ — дрейфовая скорость Россби, \mathbf{z}^0 — единичный вектор вдоль оси вращения. Такое же уравнение соответствует дрейфовым волнам в плазме^{70,71}, где роль Ω играет ларморовская частота в магнитном поле.

Исследования, проведенные в⁷², показывают, что в случае тепловой конвекции существует область устойчивости квазонов с симметрией 8-го порядка ($q = 8$). Переход от регулярных структур к пространственному хаосу может сопровождаться последовательностью пространственных бифуркаций, и среди них развитие структур с квазикристаллической симметрией может быть вполне вероятным. Регулярные сложно упорядоченные структуры наблюдались, например, в экспериментах по возбуждению волн капиллярной ряби⁶⁰ и при численном анализе двумерной модели, описываемой нелинейным уравнением Гинзбурга — Ландау⁷³.

5.2. Структуры в природе и в орнаментах

В какой мере квазикристаллический тип симметрии может оказаться «часто» встречающимся в окружающем нас мире? Этот вопрос, как обычно, предполагает понимание того, насколько рассматриваемое явление является типичным или легко реализуемым. Как часто достаточно случайное стечение обстоятельств может привести к выживанию структур с квазикристаллической симметрией? Оказывается, что такие явления не столь редки. Кеплер отмечал⁷⁴ некоторые правильные свойства в строении цветков, пытаясь сравнить их со структурой снежинки или пчелиных сот. Он отмечал также особенность структуры зерен граната, считая ее следствием определенных условий (силовых воздействий), в которых происходил рост зерен.

Структурное упорядочение, проявляющееся в расположении цветков зерен, листьев и т.п. (например, в подсолнухах, маргаритках и др.), носит название филотаксиса²⁶. Сравнительно давно ботаники начали обсуждение закономерностей этого явления (Charles Bonnet, 1754). Объекты филотаксиса, как правило, имеют структуры цилиндрического и конического типа, очень сильно напоминающие квазикристалл. Многие аналогии филотаксиса с квазикристаллами отмечены в^{75,76}. Однако наиболее важными из них могут оказаться свойства инфляции и дефляции. Некоторыми простыми разбиениями и соединениями ромбов в паркете Пенроуза (рис. 12) можно превратить его точно в такой же паркет, состоящий, однако, уже из ромбов большего размера (инфляция) или ромбов меньшего размера (дефляция)^{38,48}. Свойство самоподобного преобразования структуры должно быть заложено в растениях генетическим кодом, однако и сами структуры должны обладать подобным же свойством самоподобия. Это приводит к отбору лишь некоторых структур, а ограничения, связанные с необходимостью цилиндрической симметрии, сразу указывают на причину появления в филотаксисе элементов квазикристаллического типа⁷⁶.

Мы уже отмечали, что среди произведений древних ремесленников и художников имеются образцы многих способов покрытия плоскости с очень сложными орнаментами. Среди них существуют все 17 способов периодического замощения плоскости. Кеплер также занимался проблемой узоров, создав основополагающее исследование мозаик в работе «Гармония мира» (1619). Мусульманские росписи дают один из наиболее богатых примеров различных способов покрытия. Симметрия 5-го порядка является редким элементом и найдена в росписях дворца Альгамбры в Гренаде. Вместе с тем различные пентагональные или декагональные элементы являются очень частыми в многочисленных орнаментах. На рис. 27, а приведена типичная часть мусульманского узора, в котором основную роль играет правильный десятиугольник. Расположение таких десятиугольников произведено на правильной ромбической решетке, а пространство между ними заполнено подходящими элементами. Схема образования такого орнамента приведена на рис. 27, б путем использования квазикристаллического рельефа для $q = 5$

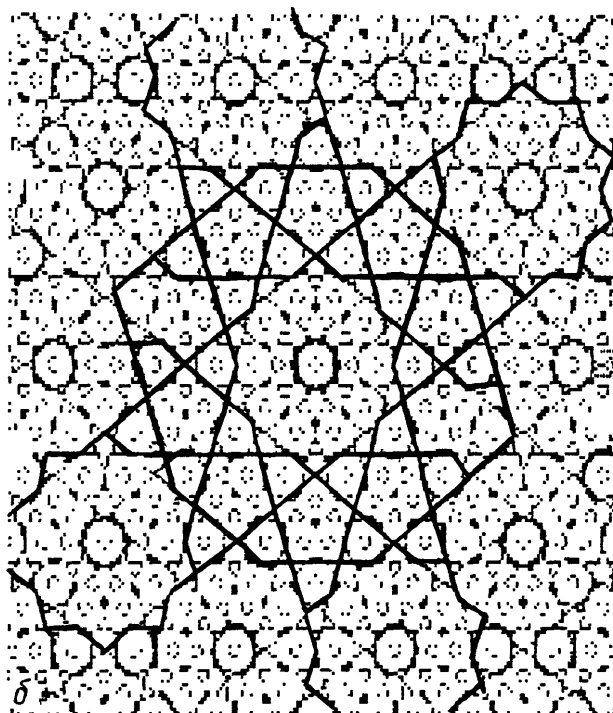
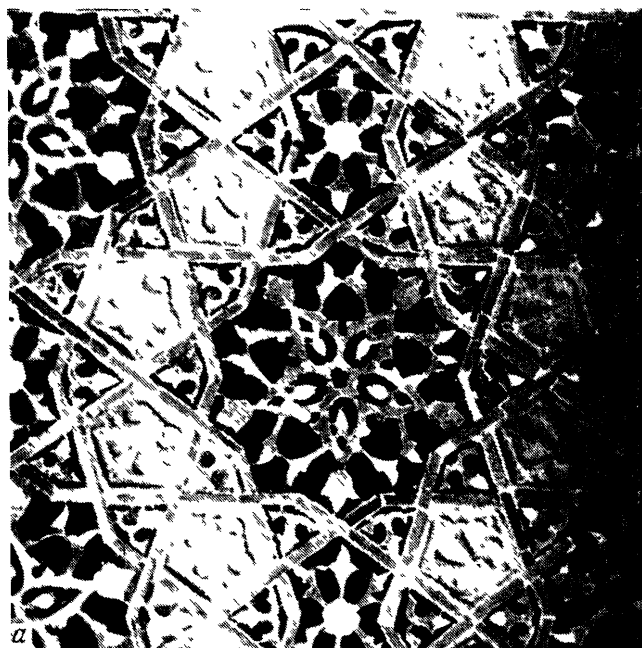


Рис. 27. Типичный элемент мусульманского орнамента (в Тбилиси) с декагональным элементом (а) и его «расшифровка» с помощью рельефа с симметрией 5-го порядка (б)

(см. рис. 15, а). Она иллюстрирует довольно важное утверждение: рельефы, порождаемые квазикристаллической симметрией, порождают новые и исключительные возможности создания узоров, которые вряд ли могли бы себе представить художники. Орнамент, например, с симметрией 17-го порядка может служить примером той ситуации, о которой можно с сожалением сказать, что именно здесь мастер уступил компьютеру.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы привели обзор тех известных случаев, когда в гамильтоновских системах существует минимальный хаос, проявляющийся в образовании универсальных областей разрушенных стохастических слоев на месте сепаратрис невозмущенной динамической системы. Система стохастических слоев может покрыть все фазовое пространство при любой величине возмущения и при любой размерности фазового пространства, большей единицы. В результате возникает стохастическая паутина, по каналам которой происходит неограниченное стохастическое ускорение и диффузия частиц. Адиабатический инвариант для частиц, блуждающих по каналам стохастической паутины, может изменяться существенно.

Другая сторона рассматриваемого явления связана со структурными свойствами стохастической паутины, которая может обладать симметрией квазикристаллического типа. Образование структур с квазикристаллической симметрией связано с взаимодействием двух типов симметрии — трансляционной и вращательной. Такие структуры занимают промежуточное положение между кристаллическими и аморфными. Квазикристаллическая симметрия довольно широко распространена в природе и встречается не только в физике твердого тела и биологии. Уравнения гидродинамики также допускают существование класса решений, обладающих симметрией типа «квазикристалл». Поэтому можно ожидать, что такие структуры могут возникать при переходе к состоянию с пространственным хаосом.

Описанные результаты показывают, что мы встретились с универсальным явлением природы, проявляющимся в различных физических объектах. Его можно кратко сформулировать следующим образом: слабое взаимодействие взаимоисключающих друг друга вращательной и трансляционной симметрии рождает минимальный хаос в областях со структурой квазикристалла.

В заключение авторы благодарят Я. Г. Синяя за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Определение ΔE для маятника

Гамильтониану

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \omega_0^2 \cos x + \frac{\varepsilon \omega_0^2}{k} \cos(kx - \Delta \omega t) \quad (\text{П1.1})$$

соответствует уравнение движения (1.3). Интегрируя (1.6) по времени, для изменения энергии невозмущенного движения получим:

$$\Delta E = \int dt \varepsilon \omega_0^2 \dot{x} \sin(kx - \Delta \omega t). \quad (\text{П1.2})$$

При $\varepsilon = 0$ движение по сепаратрисе описывается соотношением

$$x(t) = 4 \operatorname{arctg} \exp[\omega_0(t - t_n)] - \pi, \quad (\text{П1.3})$$

где t_n — момент n -го пересечения поверхности $x = 0$. Подставляя (П1.3) в правую часть (П1.2) и интегрируя по времени, для изменения энергии

будем иметь

$$\Delta E = 2\varepsilon\omega_0^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{\text{ch } \omega_0 t} \sin(4k \arctg e^{\omega_0 t} - \Delta\omega t - k\pi - \Delta\omega t_n). \quad (\text{П1.4})$$

Запишем правую часть (П1.4) в более компактном виде ($v \gg 1$):

$$\Delta E = -\varepsilon\omega_0^3 2^{2k+2} \sin(\Delta\omega t_n) \int_0^\infty d\tau \frac{\cos(v\tau)}{(\text{ch } \tau)^{2k+1}}, \quad (\text{П1.5})$$

где $v = \Delta\omega/\omega_0$, и вычислим интеграл

$$\Delta E = -\frac{2^{4k+1}\varepsilon\omega_0^3}{\Gamma(2k+1)} \Gamma\left(k + \frac{1+iv}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1-iv}{2}\right) \sin(\Delta\omega t_n). \quad (\text{П1.6})$$

В частности, если k — целое, то

$$\Delta E = -\pi\varepsilon\omega_0^3 \frac{2^{4k+1}}{(2k)!} \frac{\sin(\Delta\omega t_n)}{\text{ch}(\pi v/2)} \prod_{r=1}^k \left[\frac{v^2}{4} + \left(\frac{2r-1}{2} \right)^2 \right]. \quad (\text{П1.7})$$

При $k = 1$ из (П1.4) следует точная формула

$$\Delta E = -4\pi\varepsilon\omega_0^3 \frac{v^2 e^{\pi v/2}}{\text{sh}(\pi v)} \sin(\Delta\omega t_n). \quad (\text{П1.8})$$

2. Вывод формулы (2.15)

для толщины стохастической паутины

Для оценки толщины стохастической паутины удержим в сумме (2.7) лишь слагаемые с $n = n_0 \pm 1$. Ограничимся далее рассмотрением частиц с достаточно большой энергией ($k\rho_0 \gg n_0$) и воспользуемся асимптотическим разложением функции Бесселя. Гамильтониан задачи при этом существенно упрощается:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V, \quad H_0 = -\frac{\sigma\varepsilon\omega_0^2}{k} \left(\frac{2}{\pi k\rho_0} \right)^{1/2} \cos k\tilde{\rho} \cdot \cos \varphi, \\ V &= -2 \frac{\sigma\varepsilon\omega_0^2}{k} \left(\frac{2}{\pi k\rho_0} \right)^{1/2} \sin k\tilde{\rho} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \frac{\varphi + \Delta\omega t}{n_0}, \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

где $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0 \ll \rho_0$, $\sigma = \pm 1$ в зависимости от координаты эллиптической точки.

Изменение энергии усредненного движения при $n_0 \gg 1$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial H_0}{\partial I} \dot{I} = \\ &= \frac{2n_0}{\pi} \varepsilon^2 \omega_0 \frac{1}{(k\rho_0)^2} (\cos 2k\tilde{\rho} - \cos 2\varphi) \cdot \sin \frac{\varphi + \Delta\omega t}{n_0}. \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Движение по сепаратрисе описывается следующим соотношением:

$$\cos \varphi = \text{ch}^{-1} \frac{(\pi/2)^{1/2} k\omega_0 n_0 \varepsilon (t - t_n)}{(k\rho_0)^{3/2}}, \quad (\text{П2.3})$$

где t_n — момент n -го пересечения поверхности $\varphi = 0$. Подставляя траекторию движения частицы (П2.3) в правую часть равенства (П2.2) и интегрируя по времени, найдем изменение средней энергии за половину периода колебаний:

$$\Delta E = -\frac{8\pi\omega_0^3 k\rho_0}{k^2 n_0} \exp \left[-\frac{(\pi/2)^{3/2} (k\rho_0)^{3/2}}{k\varepsilon n_0} \right] \sin(\omega_0 t_n). \quad (\text{П2.3'})$$

Период колебаний частиц в ячейке вблизи сепаратрисы определяется формулой (2.14). Соотношения (2.14) и (П2.3) приводят к сепаратрисному отображению, описывающему динамику частицы при ее движении по стохастической паутине:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{8\pi\omega_0^2(k\rho_0)}{k^2 n_0} \exp \left[-\frac{1}{k\epsilon n_0} \left(\frac{\pi}{2} k\rho_0 \right)^{3/2} \right] \sin \psi_n, \quad (\text{П2.4})$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{2}{k\epsilon n_0} \left(\ln \frac{4\epsilon\omega_0^2}{k} \right) \left(\frac{2}{\pi k\rho_0} \right)^{1/2} \frac{1}{E_{n+1}},$$

где $\psi_n = \omega_0 t_n$ играет роль фазовой переменной. Стохастическое движение возникает при выполнении условия локальной неустойчивости фаз $|\mathrm{d}\psi_{n+1}/\mathrm{d}\psi_n - 1| > 1$; отсюда следует оценка для толщины стохастической паутины $|E| \leq E_s$:

$$E_s = (2\pi)^{3/2} \frac{4\omega_0^2}{k^3 \epsilon n_0^2} (k\rho_0)^{5/2} \exp \left[-\frac{1}{k\epsilon n_0} \left(\frac{\pi}{2} k\rho_0 \right)^{3/2} \right]. \quad (\text{П2.5})$$

3. Стохастическое ускорение релятивистских частиц в магнитном поле

Гамильтониан H , описывающий взаимодействие заряженной частицы с линейно поляризованной волной с векторным потенциалом $\mathbf{A} = \mathbf{e}_y A \times \sin(kx - \omega t)$, в поперечном магнитном поле $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_0$ имеет следующий вид:

$$H = [m^2 c^4 + c^2 p^2 + e^2 (B_0 x + A \sin(kx - \omega t))^2]^{1/2}. \quad (\text{П3.1})$$

Соответствующие канонические уравнения движения:

$$\dot{x} = c^2 p H^{-1}, \quad \dot{p} = -e^2 H^{-1} [B_0 + kA \cos(kx - \omega t)] [B_0 x + A \sin(kx - \omega t)]. \quad (\text{П3.2})$$

Рис. 28 иллюстрирует результаты численного анализа системы (П3.2)²⁰. Численные расчеты показывают, что динамика высокоэнергетических частиц с энергией $\mathcal{E} \gg mc^2$ является хаотической и происходит неограниченное стохастическое ускорение релятивистских частиц. В то же время для частиц достаточно малых энергий $\mathcal{E} \sim mc^2$ существуют области регулярного движения. Особенно интересной динамика низкоэнергетических частиц становится в условиях резонанса между частотой электромагнитной волны и нерелятивистской циклотронной частотой $\omega = n\omega_H$. При этом на фазовом портрете в области малых энергий возникает система относительно больших островков устойчивости. На рис. 26, а, который соответствует случаю $\omega = 2\omega_H$, видны также островки устойчивости, соответствующие циклотронным резонансам 2-го, 3-го и 4-го порядков. В промежутках между островками устойчивости образуются стохастические слои. При малых значениях параметра eA/mc^2 стохастические слои, окружающие циклотронные резонансы, отделены друг от друга инвариантными кривыми. С ростом энергии частиц происходит исчезновение инвариантных кривых, существовавших между слоями, и возникает некоторое подобие стохастической паутины (рис. 28, б). Эта паутина, однако, быстро разрушается с ростом энергии из-за сильной нелинейности движения релятивистской частицы в магнитном поле, и частицы оказываются в режиме неограниченного стохастического ускорения. Пороговое значение энергии частиц $\mathcal{E}_{\text{пор}}$, начиная с которого возникает стохастическое ускорение, имеет вид²⁰

$$\mathcal{E}_{\text{пор}} = \frac{mc^2}{16^3} \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right)^4 \left(\frac{mc^2}{eA} \right)^3. \quad (\text{П3.3})$$

Диффузия на фазовой плоскости частиц с энергией, превышающей пороговую (П3.3), может быть описана обычным способом с помощью уравнения

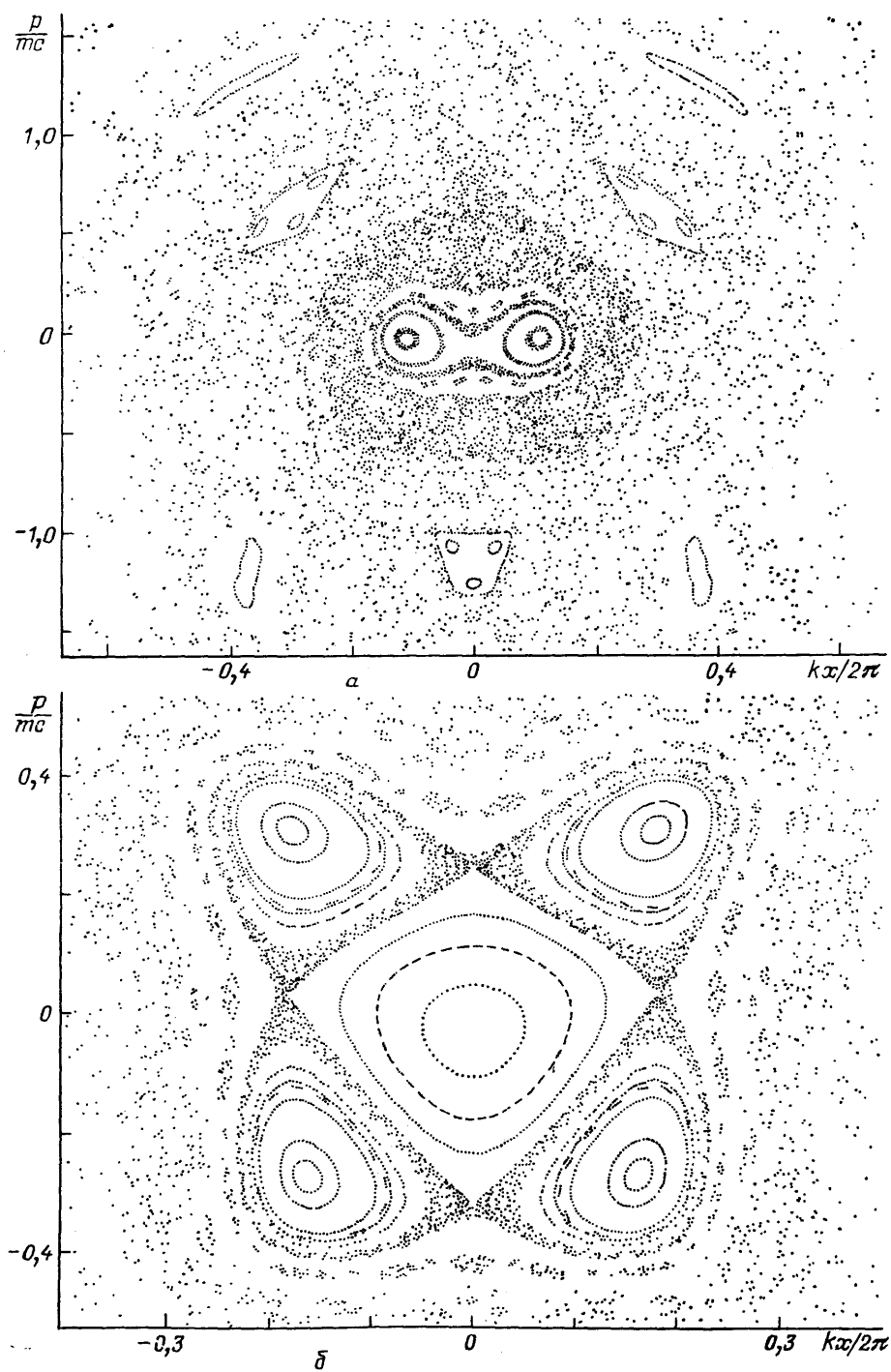


Рис. 28. Фазовый портрет системы уравнений (П3.2).
 а — $\omega/\omega_H = 2$; $eA/mc^2 = 0,1$. б — $\omega/\omega_H = 4$; $eA/mc^2 = 0,1$

Фоккера — Планка — Колмогорова. Для вывода диффузионного уравнения перейдем, следуя⁷, в гамильтониане (ПЗ.1) к переменным действие — угол (J, θ) невозмущенной задачи, соответствующей свободному вращению релятивистской частицы в магнитном поле:

$$x = \rho \sin \theta, \quad p = \rho m \omega_H \cos \theta, \quad (\text{ПЗ.4})$$

где $\rho = (2cJ/eB_0)^{1/2}$ — ларморовский радиус. Гамильтониан (ПЗ.1) в новых переменных имеет следующий вид:

$$H(J, \theta, t) = \left[H_0^2 + 2e^2 B_0 A \rho \sin \theta \cdot \sin(k\rho \sin \theta - \omega t) - \frac{e^2 A^2}{2} \cos(2k\rho \sin \theta - 2\omega t) \right]^{1/2}, \quad (\text{ПЗ.5})$$

где

$$H_0(J) = \left(m^2 c^4 + \frac{e^2 A^2}{2} + 2ceB_0 J \right)^{1/2} \quad (\text{ПЗ.6})$$

— гамильтониан невозмущенной задачи. Для частиц, обладающих достаточно большой энергией $\mathcal{E} \gg eA$, выражение (ПЗ.6) несколько упрощается и может быть представлено следующим образом:

$$H(J, \theta, t) = H_0 - \frac{e^2 B_0 A \rho}{H_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J'_n(k\rho) \cos(n\theta - \omega t), \quad (\text{ПЗ.7})$$

где $J'_n(k\rho)$ — производная функции Бесселя по ее аргументу. Движение частиц с энергией, превышающей пороговую (ПЗ.3), является хаотическим и характеризуется быстрым перемешиванием фаз и более медленной диффузией по действию. Диффузионное уравнение, учитывающее в духе⁷ конечное время расщепления корреляций, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial J} D(J) \frac{\partial f}{\partial J}, \quad (\text{ПЗ.8})$$

где $D(J)$ — диффузионный коэффициент,

$$D(J) = \left(\frac{e^2 B_0 A \rho}{2H_0} \right)^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^2 J_m'^2(k\rho) \int_0^\infty d\tau \exp \left[-i(m\Omega - \omega)\tau - \frac{\tau}{\tau_c} \right] + \text{к. с.}; \quad (\text{ПЗ.9})$$

здесь $\Omega = \partial H_0 / \partial J$ — нелинейная частота невозмущенного движения, а τ_c — характерное время расщепления фазовых корреляций²⁰. Вычисляя интеграл по времени в правой части (ПЗ.9), получим

$$D(J) = \left(\frac{e^2 B_0 A \rho}{2H_0} \right)^2 (i/\Omega) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[m - \frac{\omega}{\Omega} + \frac{i}{\Omega \tau_c} \right]^{-1} - \left[m - \frac{\omega}{\Omega} - \frac{i}{\Omega \tau_c} \right]^{-1} m^2 J_m'^2(k\rho). \quad (\text{ПЗ.10})$$

Ряд в правой части (ПЗ.10) суммируется с помощью следующего тождества:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{J_{m+p}(a) J_m(a)}{m-q} = -\frac{\pi}{\sin \pi q} J_{p+q}(a) J_{-q}(a). \quad (\text{ПЗ.11})$$

В результате в пределе $(\Omega \tau_c \rightarrow 0)$ получим следующее выражение для диффузионного коэффициента:

$$D(J) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2 B_0 A \rho}{H_0} \right)^2 \frac{\omega^2}{\Omega^3} J_{\omega/\Omega}'^2(k\rho). \quad (\text{ПЗ.12})$$

В случае, если фазовая скорость электромагнитной волны равна скорости света $\omega = kc$, выражение (ПЗ.12) в области высоких энергий упрощается и уравнение (ПЗ.8) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu_0 \frac{\partial}{\partial J} J^{5/6} \frac{\partial f}{\partial J}, \quad (\text{ПЗ.13})$$

где $\nu_0 = \zeta A^2 \omega^{2/3} e^{7/6} B_0^{-5/6} c^{-5/6}$ и численный коэффициент

$$\zeta = \frac{\pi 2^{7/6} 3^{-2/3}}{\Gamma^2(1/3)}.$$

Решение уравнения (ПЗ.13) с начальным условием $f(t=0) = f_0(J)$ имеет следующий вид:

$$f(J, t) = \left(\frac{6J^{1/12}}{7\nu_0 t} \right) \exp \left(-\frac{36J^{7/6}}{49\nu_0 t} \right) \times \\ \times \int_0^\infty dJ' J'^{1/12} \exp \left(-\frac{36J'^{7/6}}{49\nu_0 t} \right) I_{-1/7} \left(\frac{72(JJ')^{7/12}}{49\nu_0 t} \right) f_0(J'). \quad (\text{ПЗ.14})$$

При больших временах t решение (ПЗ.14) выходит на автомодельное, «забывая» о начальных условиях

$$f(J, t) = \frac{(6/7)^{5/7}}{\Gamma(6/7)} \frac{N}{(\nu_0 t)^{6/7}} \exp \left(-\frac{36J^{6/7}}{49\nu_0 t} \right), \quad (\text{ПЗ.15})$$

где $N = \int dJ f$ — плотность частиц. Функция распределения частиц по энергиям также имеет автомодельный вид:

$$f(\mathcal{E}, t) \propto \mathcal{E} t^{-6/7} \exp \left(-\frac{\text{const} \cdot \mathcal{E}^{7/3}}{t} \right), \quad (\text{ПЗ.16})$$

и, следовательно, средняя энергия частиц $\langle \mathcal{E} \rangle$ растет со временем по закону $\langle \mathcal{E} \rangle \propto t^{3/7}$.

Институт космических исследований
АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избранные труды. — М.: Наука, 1971. — Т. 1.
2. Мельников В. К. // ДАН СССР. 1983. Т. 148. С. 1257.
3. Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M. // Nucl. Fusion. 1967. V. 7. P. 253.
4. Заславский Г. М., Филоненко Н. Н. // ЖЭТФ. 1968. Т. 54. С. 1590.
5. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 500.
6. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики». Т. 3. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1985.
7. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
8. Chirikov B. V. // Phys. Rep. 1979. V. 52. P. 263.
9. Заславский Г. М. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 1984.
10. Улам С. М. Нерешенные математические задачи. — М.: Наука, 1964.
11. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
12. Арнольд В. И. // ДАН СССР. 1964. Т. 156. С. 9.
13. Карней С. F. // Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 1584; 1979. V. 22. P. 2188.
14. Riyopoulos S., Antonson T. M., Ott E. // Ibidem. 1984. V. 27. P. 184.
15. Fukuyama A., Momota H., Itatani R., Takizuka T. // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 701.
16. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
17. Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д. // Письма ЖЭТФ. 1973. Т. 17. С. 389.
18. Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M. // Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics / Ed. R. Z. Sagdeev. — М.: Mir, 1986.

19. Chernikov A. A., Natenzon M. Ya., Petrovichev B. A., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M. // *Phys. Lett. Ser. A*. 1987. V. 122. P. 39.
20. Заславский Г. М., Натензон М. Я., Петровичев Б. А., Сагдеев Р. З., Черников А. А. // *ЖЭТФ*. 1987. Т. 93. С. 881.
21. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. // *Письма ЖЭТФ*. 1986. Т. 44. С. 349.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. *Статистическая физика*. — М.: Наука, 1964.
23. Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*. — San Francisco: Freeman, 1982.
24. Maskay R. S., Meiss J. D., Percival I. C. // *Physica. Ser. D*. 1984. V. 13. P. 55.
25. Chernikov A. A., Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zakharov M. Yu., Zaslavsky G. M. // *Nature*. 1987. V. 326. P. 559.
26. Weyl H. *Symmetry*. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1952; перевод: Вейль Г. *Симметрия*. — М.: Наука, 1968.
27. *The Mathematical Gardner*/Ed. D. A. Klarner. — Boston: Prindle, Weber and Schmidt 1981; перевод: Математический цветник. — М.: Мир, 1983.
28. *Patterns of Symmetry*/Eds M. Senechal, G. Fleck. — Amherst. Univ. of Massachusetts Press, 1977; перевод: Узоры симметрии. — М.: Мир, 1980.
29. Кокстер Г. С. М. *Введение в геометрию*. — М.: Наука, 1966.
30. *The World of M. C. Escher*/Ed. J. L. Locher. — New York: Abrahams, 1977.
31. Aubry S. // *J. de Phys.* 1983. Т. 44. P. 147.
32. Белобров П. И., Белошапкин В. В., Заславский Г. М., Третьяков А. Г. // *ЖЭТФ*. 1984. Т. 87. С. 310.
33. Rokrovsky V. L., Talarov A. L. *Theory of Incommensurate Crystals*. — New York: Hardwood Acad. Publ., 1984.
34. Шрёдингер Э. *Что такое жизнь?* — М.: Атомиздат, 1972.
35. Маккай А. Л. (Maskay A. L.) // *Кристаллография*. 1981. Т. 26. С. 910; *Physica. Ser. A*. 1982. V. 114. P. 609.
36. Maskay A. L. // *J. de Phys.* 1986. Т. 47. Coll. C3. Suppl. au Nr. 7. P. 153.
37. Penrose R. // *Bull. Inst. Math. Appl.* 1974. V. 10. P. 266.
38. Gardner M. // *Sci. American*. 1977. V. 236. P. 110.
39. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J. W. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 1951.
40. Intern. Workshop on Aperiodic Crystals // *J. de Phys.* 1986. Т. 47. Coll. C3. Suppl. au Nr. 7.
41. De Bruijn N. G. // *Kon. Nederl. Akad. Wetesch. Proc. Ser. A*. 1981. V. 84. P. 38, 53.
42. Kramer P., Neri R. // *Acta Crystallogr. Sect. A*. 1984. V. 40. P. 580.
43. Elser V. // *Phys. Rev. Ser. B*. 1985. V. 32. P. 4892.
44. Калугин П. А., Китаев А. Ю., Левитов Л. С. // *Письма ЖЭТФ*. 1985. Т. 41. С. 119.
45. Duneau M., Katz A. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 54. P. 2688.
46. De Bruijn N. G. // *J. Phys.* 1986. Т. 47. Coll. C3. Suppl. au Nr. 7. P. 9.
47. Gahler F., Phynner J. // *J. Phys. Ser. A*. 1986. V. 19. P. 267.
48. Levine D., Steinhardt P. J. // *Phys. Rev. B*. 1986. V. 84. P. 596.
49. Bak P. // *Ibidem*. 1985. V. 32. P. 5764.
50. Levine D., Steinhardt P. J. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 2477.
51. Levine D. // *J. de Phys.* 1986. Т. 47. Coll. C3. Suppl. au Nr. 7. P. 125.
52. Nelson D. R., Sachdev S. // *Phys. Rev. Ser. B*. 1985. V. 32. P. 689.
53. Nelson D. R., Sachdev S. // *Ibidem*. P. 4592.
54. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. *Препринт ИКИ АН СССР № 1229*. — Москва, 1987; *Phys. Lett. Ser. A*. 1987. V. 125. P. 101.
55. Ishimasa T., Nissen H. U., Fukano Y. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55. P. 511.
56. Mosseri R., Sados J. P. // *J. de Phys.* 1986. Т. 47. Coll. C3. Suppl. au Nr. 7. P. 281.
57. Cho Y. T. C. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55. P. 2915.
58. Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zaslavsky G. M. *Nonlinear Physic*. — New York: Hardwood Acad. Publ., 1988.
59. Newell A. C. // ⁶³. — P. 38.
60. Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М. // *ЖЭТФ*. 1986. Т. 91. С. 2070.
61. Chate H., Manneville P. // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. P. 112.
62. *Cellular Structures in Instabilities*/Eds J. E. Wesfreid, S. Zaleski. — Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1984.

63. Perspectives in Nonlinear Dynamics/Eds M. F. Shlesinger, et al. — Singapore: World Scientific, 1986.
64. Physica. Ser. D. 1986. V. 23. No. 1—3.
65. G o l l u b J. P.//⁶³. — P. 24.
66. Е з е р с к и й А. Б., К о р о т к и н П. Н., Р а б и н о в и ч М. И.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 129.
67. Гапонов-Грехов А. В., Ломов А. С., Рабинович М. И.//Ibidem. 1986. Т. 44. С. 242.
68. W i l l i a m s G. P.//J. Atmos Sci. 1978. V. 35. P. 1399.
69. C h a r n e y J. G.//Geophys. Publ. 1948. V. 17. P. 3.
70. H a s e g a w a A.//Adv. Phys. 1985. V. 34. P. 1.
71. Н е з л и н М. В.//УФН. 1986. Т. 150. С. 3.
72. М а л о м е д Б. А., Н е п о м н я щ и й А. А., Т р и б е л ь с к и й М. И.//Письма ЖТФ. 1987. Т. 13. С. 1165.
73. А р а н с о н И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Р о - г а л ь с к и й А. В., С а г д е е в Р. З. Решеточные модели в нелинейной динамике неравновесных сред: Препринт ИПФ АН СССР № 163. — Горький, 1987.
74. К е п л е р И. О шестиугольных снежинках. — М.: Наука, 1982.
75. R i v i e r N., O s c e l l i R., P a n t a l o n i J., L i s s o w s k i A. J.//J. de Phys. 1984. Т. 45. P. 49.
76. R i v i e r N.//Ibidem. 1986. V. 47. Coll. C3. Suppl. au Nr. 7. P. 299.
77. Ш у б н и к о в А. В., К о п ц и г В. А. Симметрия в науке и искусстве. — М.: Наука, 1972.
78. К о р е п и н В. Е. Квазипериодические покрытия и квазикристаллы//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — Л.: Наука, 1986. — Т. 155. С. 116.
79. L u b e n s k y T. C., S o c o l a r J. E. S., S t e i n g a r d t P. J., B a n c e l P. A., H e i n e y P. A.//Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1440.
80. G r u n b a u m B., S h e p a r d G. C.//Tilings and Patterns. — San Francisco: Freeman, 1986.
81. W a n g, H. C h e n, K. H. K u o//Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1010.
82. U s h i k i S.//Physica. Ser. D. 1982. V. 4. P. 407.
83. А р н о л ь д В. И.//УМН. 1987. Т. 42, вып. 4. С. 139.