

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.145.6

**ТИПЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ФИЗИКЕ,
И «ОБМЕН» ЧАСТИЦАМИ*****Н. П. Клепиков***

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	521
2. Активные преобразования	521
3. Пассивные преобразования	522
4. Преобразования аналогии	523
5. Сопоставление преобразований	524
6. Перестановка частиц	525
7. Частицы одинаковые и различные	526
8. Изменение терминологии и определение понятий	527
Список литературы	529

1. ВВЕДЕНИЕ

Как при изложении физики, так и при вычислениях рассматриваются или используются различного рода преобразования. Во многих случаях содержание и объекты этих преобразований недостаточно ясно определены, и это становится источником недоразумений. Между тем, преобразования, как и всякий математический прием, могут быть надежным инструментом в руках исследователя только в том случае, когда ему совершенно ясно, к чему и с какой целью они применяются.

Термин «преобразование» используется в физике в значительно более широком смысле, чем преобразование какого-либо множества в себя. Поэтому теорема о том, что отображения всякого множества на себя образуют группу, вообще говоря, не применима ко всем рассматриваемым в физике преобразованиям. Следовательно, полезно указать на математическую природу соответствующих преобразований.

Почти тридцать лет назад В. Баргман¹ ввел термины «активное преобразование» и «пассивное преобразование». С тех пор эти термины использовались многими авторами. Оказывается, однако, что они употребляются в различных смыслах, в том числе отличных от первоначального определения. Представляется целесообразным провести классификацию преобразований, используемых в физике, и на основе ее, в частности, выяснить, каков смысл терминов «обмен частицами» или «перестановка частиц», и в связи с этим на примере вероятностного смысла волновой функции коснуться проблемы объяснения одних понятий другими.

2. АКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Активное преобразование какой-либо физической системы, согласно первоначальному определению¹, есть ее *движение*, т. е. изменение ее характеристик под влиянием некоторых внутренних или внешних взаимодействий.

Речь идет о движении одной и той же физической системы, развивающейся во времени, рассматриваемой либо как приближенно изолированной, либо связанной с другими системами и рассматриваемой с точки зрения одной и той же системы отсчета и при одном и том же способе описания. Если говорить точно, то существует лишь один пример активного движения — развитие мира. Но чаще всего мы рассматриваем или планируем активные движения систем тел или частиц, мало связанных с другими системами.

Активные движения непрерывны. Никаких скачков или отражений они не включают. Результат активного движения тела, проходящего между некоторыми начальным и конечным временами, может приводить к конфигурации, которая могла бы быть получена скачком в начальный момент времени, если бы такой скачок был осуществим, но эта конфигурация в действительности относится к другому, последующему моменту времени, так что в пространстве эволюции системы², параметризуемом независимыми координатами системы и временем, этим двум положениям сопоставляются точки, сдвинутые не только по координатам, но и во времени.

Важно отметить, что активные движения любых физических систем не образуют группы, а лишь частичные полугруппы^{*}). Для смещения во времени $(t_1 \rightarrow t_2)$ (подразумевается одновременное изменение всех зависящих от времени характеристик) произведения $(t_1 \rightarrow t_2) \times (t_3 \rightarrow t_4)$ определены только при $t_3 = t_2$ и в этом случае дают переход $(t_1 \rightarrow t_4)$, и ни одно смещение $(t_1 \rightarrow t_2)$ не имеет ему обратного (кроме тождественного $(t \rightarrow t)$), так как макроскопические системы (от многомолекулярного до планетарного уровня, по крайней мере) меняются необратимо, а изоляция микроскопических систем от макроскопических является приближенной идеализацией, смысл которой заключается в том, что при рассмотрении некоторых взаимодействий, происходящих в течение достаточно короткого промежутка времени, например, столкновений, можно игнорировать взаимодействие частиц с макроскопическими системами.

3. ПАССИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

К пассивным преобразованиям относят всевозможные *изменения способа описания* физических систем. Хорошо известно, что каждое физическое состояние, движение или явление допускает много различных описаний. Примерами изменения описаний являются канонические преобразования фазового пространства в механике, включая переходы к другим системам отсчета, как инерциальным, так и неинерциальным, переходы к другим представлениям в квантовой механике или изменения калибровки в электродинамике. Иногда одним и тем же понятиям сопоставляются различные термины или описания явлений переводятся на иной язык (в терминологическом или лингвистическом смысле, в смысле обозначений или машинного языка). Все такие переводы являются примерами пассивных преобразований.

Каждое пассивное преобразование имеет ему обратное, но и они не всегда составляют группу, а лишь частичный группоид. Только в частных случаях

^{*}) Как известно (см., например,⁸) множество G элементов e, a, b, c, \dots , в котором определена одна операция композиции $a \cdot b$ двух элементов a и b , приводящая к одному из элементов того же множества, есть группа, если: 1) операция композиции определена для любой пары элементов множества в любом порядке, $a \cdot b \in G$ и $b \cdot a \in G$, 2) операция композиции ассоциативна, т. е. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, 3) в G существует левая единица e , т. е. $e \cdot a = a$ для всех a из G , 4) каждый элемент $a \in G$ обратим, т. е. существует такой элемент $a^{-1} \in G$, что $a^{-1} \cdot a = e$. При ослаблении одного или нескольких из этих условий получаются различные обобщения понятия группы. В частности, если условие 4) выполнено не для всех $a \in G$, то G есть полугруппа. Если ослаблено условие 1), т. е. операция композиции элементов G определена не для всех пар, то G называется частичным группоидом; одновременно может нарушаться условие 2), в частности, $(a \cdot b) \cdot c$ может быть определено, а $a \cdot (b \cdot c)$ — нет. Если эти два типа ослабления условий встречаются одновременно, получается частичный полугруппоид.

переходы сочетаются в любом порядке. Так переходы к описанию физических систем из иных инерциальных систем отсчета, получающихся из исходной сдвигом по координатам или времени, пространственным поворотом или преобразованием Галилея или преобразованием Лоренца, составляет группу, так как произведения этих преобразований определены в любой последовательности. Пассивные преобразования могут быть как непрерывными, так и дискретными, включая отражения. Одновременно могут осуществляться несколько описаний одного и того же явления, например, различными наблюдателями, сопоставление которых есть пассивное преобразование описаний.

Указанное разнообразие описаний каждого явления исключает отождествление наших знаний о явлении с каким-либо одним его описанием. Точнее: образ явления (объективный, хотя, может быть, и относительный) есть класс эквивалентности его описаний. Иначе говоря, наше знание о каждом явлении относительно не только потому, что никакое измерение не может быть сделано с абсолютной точностью и полнотой, но и потому, что всегда описание его содержит как элементы, отражающие явление, так и элементы, связанные со способом описания. В частности, квантовомеханический вектор состояния есть класс эквивалентности волновых функций (проекций этого вектора) во всевозможных представлениях.

Разнообразие приемов описания физических систем позволяет для каждой задачи выбрать представление, наиболее подходящее для ее решения. Ясность терминологии и целесообразность обозначений являются важным педагогическим приемом, но сущность описываемых явлений от пассивных преобразований не зависит.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АНАЛОГИИ

Активными и пассивными преобразованиями физических систем не исчерпываются все преобразования, используемые в физике. Для преобразований, которые не могут быть включены ни в один из рассмотренных выше типов, нет общепринятого термина, и мы назовем их преобразованиями аналогии. Они заключаются в переходе от рассмотрения некоторой физической системы к рассмотрению другой системы, находящейся в некоторой аналогии с исходной, т. е. обладающей некоторыми сходными с ней чертами, в то время как и другие, менее существенные в рассматриваемом контексте, их характеристики различны.

Преобразованием аналогии для какой-либо физической системы, в частности, является мысленное построение модели, качественной или, если возможно, количественной, исходной системы, отражающей, с одной стороны, все существенные в рассматриваемом аспекте свойства системы и взаимодействия в ней и достаточно упрощенной, с другой, чтобы можно было справиться с анализом этой модели математически. Если совмещение этих двух требований удастся, то построенная модель служит для анализа экспериментов (нахождения параметров), предсказания результатов новых опытов и использования свойств системы для технических применений.

Примером преобразования аналогии является, скажем, переход от рассмотрения правого винта к рассмотрению левого или переход от изучения кристалла, вращающего поляризацию света вправо, к изучению кристалла, имеющего аналогичную структуру, но вращающего ее влево. При этом мы исключим активное взаимодействие на систему, т. е. изготовление левого винта или левого кристалла из материала правых, причем не только потому, что это возможно лишь в принципе и вовсе не делается при сравнении соответствующих объектов, но и потому прежде всего, что это и нужно для указанного сравнения, производимого в один и тот же момент времени. Переход от правого объекта к аналогичному левому не является пассивным преобразованием, так как переход к другой системе отсчета или способу

описания для всех связанных систем не может устранить объективное различие между ними, например, то, что левая гайка не навинчивается на правый винт. Отражение системы отсчета эквивалентно переходу от правого объекта к левому только в том случае, если игнорируются изменения в описании, происходящие при отражении, для объектов, не подвергающихся преобразованию аналогии.

Другим примером преобразования аналогии является так называемое обращение времени. Е. Вигнер, который впервые подробно исследовал применение этого преобразования к квантовой механике, писал⁴: «Термин «обращение направления движения» является по-видимому более точным», хотя и более длинным, чем термин «обращение времени». Действительно, при этой операции состоянию движения некоторой физической системы сопоставляется движение другой системы, отличающейся от первой обращением направления движения всех частиц системы и направлений всех угловых моментов для того же момента времени. Случай, когда обращенная система получается из исходной путем активного воздействия, мы исключим из рассмотрения, так как обращенная этим путем система образовалась бы в последующий момент времени, причем изменились бы также состояния некоторых других систем. Преобразование обращения направления движения эквивалентно пассивному преобразованию обращения времени только для изолированных микросистем.

Преобразования аналогии не всегда образуют группы, так как при отображении более сложного объекта на более простой у отображения нет обратного и не всегда произведения преобразований определены в любой последовательности.

5. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Определения трех указанных типов преобразований не всегда несовместны. Во-первых, тождественное преобразование можно отнести к любому из этих типов. Во-вторых, пассивные преобразования являются частным случаем преобразований аналогии, в котором система, аналогичная исходной, совпадает с исходной, но рассматривается с иной точки зрения.

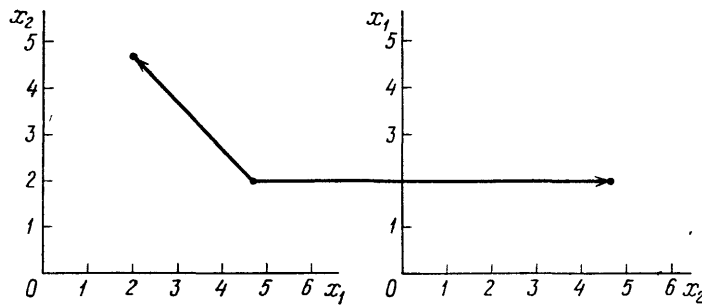
Если некоторые характеристики преобразуемых систем не принимаются во внимание или преобразование применяется к ограниченному объекту, рассматриваемому как изолированный, возможно, что преобразования одного типа имитируют преобразования другого. Так, тело, передвинутое в результате некоторого активного воздействия других тел в новое положение, так же изменяет координаты (если игнорировать сдвиг во времени и движение других тел), как если бы оно стало рассматриваться с точки зрения новой системы координат, подвергнутой сдвигу, противоположному активному пространственному сдвигу тела, если к тому же отвлечься от того, что другие тела, не затронутые сдвигом, в первом случае не меняют своих положений, а во втором — сдвигаются все сразу. В точности то же можно сказать и об активном повороте тела, условно эквивалентном обратному повороту системы координат, а также о соответствующих парах измерений скорости тела и преобразований Галилея или преобразований Лоренца. Группу Пуанкаре образует множество пассивных преобразований, но отнюдь не активных (в полном смысле слова) движений тел или частиц. Поэтому неверно, как это иногда пишут, что активная и пассивная точки зрения на каждое из преобразований группы Пуанкаре полностью эквивалентны.

Преобразования зарядового сопряжения и другие операции внутренней симметрии изолированных микросистем являются в сущности преобразованиями аналогии. Но в соответствующем абстрактном пространстве они выглядят либо как результат активного вращения, либо как пассивное преобразование и поэтому могут быть включены в группы симметрии.

6. ПЕРЕСТАНОВКА ЧАСТИЦ

При изложении квантовой механики особую трудность для объяснения обычно вызывает раздел о системах из тождественных частиц. Р. Мирман⁵ подробно исследовал причины этой трудности и нашел, что ни в одном из доступных ему учебников квантовой механики не было безукоризненного изложения этого пункта. Их авторы не определяют, что значит «переставить частицы» или «обменять частицы», и пытаются объяснить один из терминов «одинаковость», «тождественность» и «неразличимость» другим, тогда как соответствующие понятия не имеют совпадающих определений.

Рассматривая оригинальную и переводную литературу по квантовой механике на русском языке⁶⁻²⁶, легко заметить, что, хотя все авторы приводят читателей к одинаковым и правильным формулам для волновых функций систем из тождественных частиц, изложение этого пункта всюду недостаточно полно и последовательно. Все авторы указанных книг и книг, цитированных Мирманом, не дают четкого ответа по крайней мере на один из двух



вопросов: 1) какого рода преобразованием является операция «перестановки частиц» (или в чем она заключается), 2) описывает ли волновая функция, получаемая посредством такой операции, то же состояние, что и исходная, или иное? Многие из авторов упомянутых книг полностью обходят оба указанных вопроса и сразу переходят к формулам; смысл преобразования остается за пределами текста.

На примере системы из электрона на Земле и электрона, возникающего при распаде нестабильной частицы в другой галактике, Мирман показывает, что активное толкование перестановки частиц исключается уже требованием причинности. Ни в одной из рассматриваемых книг авторы не настаивают явно на объяснении перестановки частиц как экспериментального вмешательства в изучаемую систему, но слова «переставим частицы» наводят недостаточно искушенного читателя именно на это неправильное толкование. В результате он представляет себе перестановку частиц примерно как перестановку одинаковых гаек в пределах одной машины.

Преобразование, называемое перестановкой частиц, заключается в сопоставлении значений волновой функции в точках пространства представления, отличающихся заменой переменных частиц, и, следовательно, является преобразованием аналогии, связывающим волновые функции систем, у которых частицы играют переставленные роли.

С другой стороны, то же преобразование может рассматриваться как пассивное преобразование, заключающееся в переходе к описанию того же состояния той же системы при ином способе введения номеров частиц²⁷ или, что то же самое, при ином порядке следования осей в пространстве представления, например, в конфигурационном пространстве²⁴.

На рисунке указанные две точки зрения на преобразование перестановки частиц представлены для волновой функции $\psi(x_1, x_2)$ простейшего случая одномерного движения двух одинаковых фермионов, причем $\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2)$. Стрелка влево вверх означает сопоставление значений одной

и той же волновой функции в разных точках конфигурационного пространства, а стрелка вправо — сопоставление значений волновых функций, взятых в одной и той же точке, но при различных способах введения координат.

7. ЧАСТИЦЫ ОДИНАКОВЫЕ И РАЗЛИЧНЫЕ

Изменить координаты в пространстве представления можно и в том случае, когда частицы различны по какому-либо признаку. Однако в этом случае операторы, выражающие характеристики системы в одних координатах через таковые в других, а также матрицы, преобразующие волновые функции, не образуют представления конечной группы перестановок, а образуют представление конечного частичного группоида²⁸, где произведения определены не в любом порядке. Так, для двух частиц группоид перестроек состоит из трех элементов: тождества, прямого перехода и обратного перехода; квадраты каждого из двух переходов не определены. Унитарное неприводимое представление этого группоида одномерно, содержит одну произвольную фазу и состоит из единицы и прямого и обратного изменений фазы волновой функции на указанную фиксированную фазу. Однако изменение фазы волновой функции может быть всегда отнесено к калибровочному преобразованию (группоид погружается в группу $U(1)$), а значение произвольной фазы ни на какие наблюдаемые величины не влияет. Поэтому для системы из двух частиц отличие группоида перестроек от группы перестановок несущественно. Для системы из трех частиц группоид перестроек имеет порядок 28, содержит два произвольных параметра и действие соответствующих унитарных представлений этого группоида отнюдь не сводится к действию унитарных представлений группы перестановок трех частиц. Группоид погружается в одну из подгрупп группы $SU(3)$. Коэффициенты Рака для сложения трех моментов образуют также представление этого группоида параметрами, произвольные в общем случае, выражаются через моменты).

Проблеме тождественности частиц в квантовой механике в значительной мере посвящена книга²⁹. Авторы показали, что в тех случаях, когда между ортогональными внутренними состояниями частиц существуют непрерывные переходы, все наблюдаемые величины также непрерывно изменяются от выражений, соответствующих одинаковым частицам, к выражениям для различных частиц, и никакого парадокса тождественности нет (вопреки мнению, высказанному в¹⁸).

Что же касается состояний системы из нескольких невзаимодействующих частиц, то действительно возникает словесный парадокс. С одной стороны, если частицы не взаимодействуют (или даже не могут взаимодействовать из-за невыполнения условий причинности), их совместная волновая функция есть произведение волновых функций частиц, как и для всякой системы невзаимодействующих кластеров. С другой стороны, если этому состоянию системы мы припишем волновую функцию, симметризованную по переменным представления, то это не дает наблюдаемых следствий, так как с какой-либо третьей системой эти частицы взаимодействуют независимо одна от другой.

В примере с частицами в разных галактиках, приводимом Мирманом, волновая функция не может, разумеется, симметризоваться до вступления частиц во взаимодействие, но использование вместо нее симметризованной функции не приводит к изменению каких-либо наблюдаемых эффектов. Аналогично разрешаются кажущиеся парадоксы с симметризацией систем из нейтральных К-мезонов, приводимые авторами книги²⁹. Полная релятивистская квантовая теория систем частиц, допускающая описание систем как длительно взаимодействующих (обмен бесконечными сериями квантов поля), так и не взаимодействующих частиц, должна будет проследить за превращением, в процессе эволюции системы, несимметризованной волновой функции в симметризованную в результате взаимодействия частиц. Суще-

ственно, что теория должна быть релятивистской, ибо в предположении бесконечной скорости распространения взаимодействий системы одинаковых частиц симметризируются мгновенно.

Авторы книги²⁹ категорически отвергают возможность теоретических утверждений, принципиально не проверяемых экспериментом. Но мы выше уже обсуждали пассивные преобразования как переходы между различными описаниями физических систем. Ясно, что утверждение о преимуществе одного описания перед другим не может быть проверено (хотя скорость сходимости приближений при приближенном описании физической системы может для них быть совершенно различной). Аналогично, наличие или отсутствие определенной симметрии волновой функции системы невзаимодействующих частиц есть утверждение, которое не имеет наблюдаемых следствий и поэтому не может быть проверено.

8. ИЗМЕНЕНИЕ ТЕРМИНОЛОГИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Изменение терминологии есть пассивное преобразование. Разумеется, оно само по себе не может служить средством определения или объяснения понятия, термин для которого изменяется. Примером служит проблема «объяснения» вероятного смысла волновой функции. Одно понятие может объяснять другое, либо если они определены независимо, а затем доказано, что они отражают одно и то же или что объясняемое понятие является частным случаем более общего, либо если объясняемое понятие сразу определяется как следствие объясняющего при наложении некоторых условий²⁷. Ничего подобного нет в попытках объяснения вероятностного смысла волновой функции понятием квантового ансамбля^{18,30}, так как у этих двух понятий нет различных определений.

То, что для нахождения *из опыта* распределения вероятностей, в частности, измерения модуля волновой функции, нужно произвести много наблюдений, не дает никаких оснований для того, чтобы определять понятие вероятности через статистику. Последнее есть, в сущности, тот же взгляд на обоснование теории вероятностей, который в свое время отстаивал Р. фон Мизес. Провести эту точку зрения последовательно никогда не удавалось, и подобные попытки стали лишь главой истории теории вероятностей, когда А. Н. Колмогоров в 1933 г. сформулировал аксиоматическое определение понятия поля вероятностей (см. ³¹). Позднее он писал³²: «Наличие аксиоматизированной теории вероятностей избавляет нас от соблазна «определить» вероятность способами, претендующими на соединение их непосредственной естественнонаучной убедительности с приспособленностью к построению на их основе формально строгой математической теории ... К такого рода определениям относится определение вероятности как предела частот при неограниченном увеличении числа испытаний. Допущение о вероятностном характере испытаний, т. е. о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения, само по себе бывает верно (как и допущение о случайности какого-либо явления) лишь при сохранении некоторых условий, которые не могут сохраняться неограниченно долго и с неограниченной точностью. Поэтому точный переход к пределу при стремлении частоты к вероятности не может иметь реального значения. Формулировка принципа устойчивости частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть математической фикцией» *). Противоположный взгляд о возможности определить вероятность как предел частоты,

*) Чтобы довести мысль до абсурда, говорят, что при таком подходе допустимо, например, определять геометрическую точку на плоскости как предел пятен мела, оставляемых на доске при все более слабом нажатии куском мела.

в частности, отражен в определении (1.1) в книге³³; правда, дальнейшее изложение в этой книге не опирается на указанное определение.

Источником смешения понятий здесь является употребление слова «статистика» в двух различных смыслах. Многие авторы, особенно — не математики, статистическими называют явления, в которых участвуют какие-либо случайных факторы, а также теорию таких явлений (статистика в широком смысле слова). Так возник термин «статистическая физика». Статистика в широком смысле слова (например, теория ансамблей) есть синоним понятия полей случайных событий и сопоставляемых им вероятностей. Последние в случае квантовых явлений *определяются* волновыми функциями.

Статистика в более узком смысле этого понятия есть набор приемов (и их теория), позволяющих находить информацию о некотором распределении вероятностей на основании конечного числа соответствующих экспериментов. Из необходимости статистики (в узком смысле) для оценивания параметров распределений вероятностей (см. например,³⁴) вовсе не следует, что сама вероятность должна или может быть «объяснена» статистикой. Поэтому следует говорить не о статистическом, а о *вероятностном* смысле волновой функции и о *статистике измерений*, нужных для восстановления ее модуля из опыта. Если число экспериментов или точность их невелики, преобладание элементов относительной истины над элементами абсолютной все же не дает основания считать результаты опытов необъективными (в отличие от сказанного в¹⁸, с. 59).

Автор благодарен И. А. Яковлеву и Г. Г. Самбуровой за полезные обсуждения предмета статьи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bargman V. // Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 161.
2. Andrie M. // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 394.
3. Ван-дер-Варден Б. Л. Современная алгебра.— М.: ОГИЗ, 1947.— Т. 1. С. 28.
4. Вигнер Е. Теория групп.— М.: ИЛ, 1961.— С. 387.
5. Mirman R. // Nuovo Cimento. Ser. B. 1973. V. 18. P. 110.
6. Френкель Я. И. Волновая механика.— М.; Л: ГТТИ, 1934.— Ч. 1. С. 237.
7. Дирак П. А. М. Основы квантовой механики.— М.; Л: ГТТИ, 1937.— С. 224.
8. Паули В. Общие принципы волновой механики.— М.; Л: Гостехиздат, 1947.— С. 187.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.— С. 252.
10. Шифф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1959.— С. 256.
11. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М. Квантовая механика.— М.: Учпедгиз, 1962.— С. 401.
12. Давыдов А. С. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.— С. 376.
13. Бете Г. Квантовая механика.— М.: Мир, 1965.— С. 23.
14. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики.— М.: Мир, 1965.— С. 211.
15. Матвеев А. Н. Квантовая механика и строение атома.— М.: Высшая школа, 1965.— С. 243.
16. Мотт Н., Снеддон И. Волновая механика и ее применения.— М.: Наука, 1966.— С. 128.
17. Грашин А. Ф. Квантовая механика.— М.: Просвещение, 1974.— С. 155.
18. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики.— М.: Наука, 1976.— С. 493.
19. Елютин П. В., Кривченков В. Д. Квантовая механика.— М.: Наука, С. 249.
20. Фок В. А. Начала квантовой механики.— М.: Наука, 1976.— С. 266.
21. Савельев И. В. Основы теоретической физики.— М.: Наука, 1977.— Т. 2. С. 206.
22. Липкин Г. Квантовая механика: Новый подход и некоторые проблемы.— М.: Мир, 1977.— С. 153.
23. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика.— М.: Наука, 1979.— С. 381.

24. Мессиа А. Квантовая механика.— М.: Наука, 1979.— Т. 2. С. 82—87.
25. Федорченко А. М. Основы квантовой механики.— Киев: Вища школа, 1978.— С. 206.
26. Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.— С. 184.
27. Квантовая механика: Терминология. Сборник рекомендуемых терминов. Вып. 104 — М.: Наука, 1985.— (Комитет научно-технической терминологии АН СССР).
28. Клепиков Н. П. // ЯФ. 1974. Т. 19. С. 462.
29. Гельфер Я. И., Любошин В. Л., Подгорецкий М. И. Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике.— М.: Наука, 1975.
30. Никольский К. В. Квантовые процессы.— М.: Гостехиздат, 1940.
31. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятности.— М.: Наука, 1974.— С. 10—26.
32. Математика, ее содержание, методы и значение.— М.: Изд-во АН СССР, 1956 — Т. 2. Гл. XI. С. 274—275.
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Гостехиздат, 1951.— С. 13.
34. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия.— М.: Наука, 1964.