1987 г. Июль *Том 152, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

537.8

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФУНКЦИЙ ОТКЛИКА

Д. А. Киржниц

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Функции отклика материальной среды, описывающие ее реакцию на внешние электромагнитные воздействия, играют фундаментальную роль в аппарате макроскопической электродинамики. Будучи тесно связаны с основными электродинамическими характеристиками среды — ее диэлектрической и магнитной проницаемостями (см. [1, 2]), функции отклика служат концентрированным источником информации как о результатах воздействия на среду, так и о структуре и свойствах ее самой. Именно в характере функций отклика (прежде всего в виде их зависимости от частоты ω и волнового вектора $\mathbf{k}$ внешнего воздействия *)), находят свое проявление индивидуальные особенности среды.

Вместе с тем функции отклика обладают и рядом общих свойств, единых для всех сред. Эти свойства вытекают из универсальных соотношений (дисперсионные соотношения, правила сумм, ряд неравенств), которые выводятся непосредственно из общих требований причинности, устойчивости среды, ее свойств симметрии и т. д. без использования каких-либо конкретных моделей среды. Такие соотношения важны уже потому, что они принадлежат к числу немногочисленных точных результатов теории многих тел. В последние годы их значение особенно выросло: оказалось, что возможность решения ряда проблем, привлекающих к себе значительное внимание, упирается как раз в общие свойства функций отклика. Между тем именно в последнее время стало ясно, что многие относящиеся к этим свойствам утверждения, широко проникшие в литературу, на самом деле неточны или заведомо некорректны.

Приводимые ниже примеры могут дать представление о самих упомянутых проблемах, об их связи с общими свойствами функций отклика и о тех

*) Такая зависимость (частотная и пространственная дисперсии) отражает запаздывание отклика и его нелокальность. Нужно подчеркнуть, что учет пространственной дисперсии делает ненужным усреднение физических величин по малому объему. Эффекты несглаженной микроструктуры среды проявляются при этом в виде сложной и нерегулярной зависимости функции отклика от $\mathbf{k}$ при больших значениях этой величины [3–6].

несоответствиях и противоречиях, которые вытекают из имеющихся в литературе утверждений.

1) Проблема высокотемпературной сверхпроводимости ставит вопрос о радикальном повышении критической температуры сверхпроводника. Для положительного решения этого вопроса важно, чтобы эффективное статическое взаимодействие одноименных зарядов в среде имело характер не отталкивания, как в пустоте, а притяжения. На языке продольной диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ это, при некоторых оговорках, ведет к требованию $\varepsilon(0, \mathbf{k}) < 0$ (при больших k) [7–9]. Такое неравенство, однако, несовместимо с широко распространенным утверждением о том, что в равновесной среде $\varepsilon(0, \mathbf{k}) \geqslant 1$. Между тем само это утверждение привело бы к недостижимости порога продольной нестабильности среды $\varepsilon(0, \mathbf{k}) = 0$, т. е. к невозможности ее кристаллизации и т. п.

2) Проблема аномального диамагнетизма имеет дело с вопросом о существовании отличных от сверхпроводника сред с аномально большим отрицательным значением магнитной восприимчивости (примером могла бы служить упорядоченная среда со спонтанным током в основном состоянии); см. по этому поводу [10, 11]. Однако стандартное рассмотрение в рамках теории фазовых переходов Ландау [12] закрывает такую возможность: соответствующий энергетический функционал

$$\mathscr{E} = M^2 [2(\mu(0, \mathbf{k}) - 1)]^{-1} + \beta M^4 - \mathbf{MH}$$

($\mathbf{M}$ — намагничение, прямо связанное со спонтанным током, $\mathbf{H}$ — внешнее магнитное поле, $\mu(\omega, \mathbf{k})$ — магнитная проницаемость среды) ведет к отклику, который имеет парамагнитный характер. Между тем сам этот функционал, который должен описывать не только процесс упорядочения, но и малые флуктуации намагничения в неупорядоченной среде, явно противоречит факту существования диамагнитных сред — например, диамагнитного атомарного газа, поскольку условие стабильности среды относительно нарастания таких флуктуации имеет вид $\mu(0, \mathbf{k}) > 1$.

3) Проблема детектирования магнитных монополей привлекает к себе большое внимание потому, что обнаружение такой частицы с нужными свойствами подтвердило бы правильность стратегии единой теории фундаментальных взаимодействий. Особое место среди соответствующих экспериментальных методов занимает регистрация скачка магнитного потока, возникающего благодаря эффекту Мейсснера при пересечении монополем сверхпроводящего кольца. К выводу о появлении такого скачка действительно ведет прямое динамическое рассмотрение. Однако, в рамках общепринятой схемы макроскопической электродинамики монополя, использующей обычные выражения для проницаемостей, эффект Мейсснера отсутствует. Дело в том, что согласно уравнению $\operatorname{div} \mathbf{B} = 4\pi\tilde{\rho}$, где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, $\tilde{\rho}$ — плотность магнитного заряда, продольное поле монополя вообще не чувствует среды (а поперечное исчезает, как и в обычной электродинамике, вместе со скоростью источника).

Уже из приведенных примеров (их более подробное обсуждение см. ниже в разделах 6, 8 и 10 соответственно) видна необходимость систематического и последовательного анализа общих свойств функций отклика, который привел бы к ответу на вопросы об области допустимых значений статических проницаемостей среды, о виде функционала теории Ландау на языке функций отклика, о функциях отклика в электродинамике монополя. Такой анализ и проводится в данной статье *). Применительно к обсуждавшимся проблемам он позволяет устранить все отмеченные противоречия и положительно решить вопросы, связанные с этими проблемами.

*) Расширенный вариант ее текста войдет как отдельная глава в монографию «Диэлектрическая проницаемость конденсированных сред», готовящуюся к печати издательством «Норт-Холланд».

Ниже рассматривается лишь важный частный случай равновесных, неупорядоченных, однородных, изотропных и негиротропных сред, свойства которых инвариантны относительно сдвигов и отражений пространства и времени, а также вращений (в системе покоя среды как целого *)). Воздействия на среду считаются слабыми (линейная электродинамика). Среда предполагается нерелятивистской в той мере, в какой это совместимо с самим существованием магнетизма.

Принятые ограничения делают особенно удобным переход к фурье-компонентам физических величин. Для действительной величины A (t, x)

$$A^* (\omega, \mathbf{k}) = A (-\omega, -\mathbf{k}). \tag{1.1}$$

Вводятся продольная (индекс l) и поперечная (индекс t) компоненты векторной величины $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V}_l = \mathbf{k} (\mathbf{kV})\, k^{-2}, \quad \mathbf{V}_t = \mathbf{V} - \mathbf{V}_l. \tag{1.2}$$

Рассматривая ниже продольные и поперечные компоненты физических величин и уравнений, мы будем часто соотносить им термины «электрический» и «магнитный» при всей очевидной их неточности. Операторы физических величин берутся в представлении Гейзенберга. Соответственно среднее значение оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$A \equiv \langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Sp}\, (\hat{R}\hat{A}), \tag{1.3}$$

где $\hat{R}$ — матрица плотности среды с выключенным взаимодействием. Величина (1.3) — результат статистического и квантовомеханического усреднения без сглаживания по малому объему (см. сноску на с. 399).

Поскольку в тексте статьи нет упоминания о законах Кулона и Ампера, мы используем единицы Хевисайда, отвечающие отсутствию фактора 4π в уравнениях Максвелла (для перехода к обычным единицам нужно в выражениях для наблюдаемых величин умножить на этот фактор квадрат заряда). Скорость света, постоянные Больцмана и Планка, а также нормировочный объем приняты равными единице. Символ d^3k означает $d\mathbf{k}/(2\pi)^3$.

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Электромагнитное поле в среде описывается напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукцией $\mathbf{B}$ — средними значениями микроскопических напряженностей электрического и магнитного полей. Величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ имеют прямой физический смысл, определяя силу Лоренца $e\,(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$, действующую на классическую пробную частицу. Они подчиняются уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\, \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j} = \mathbf{j}^e + \mathbf{j}^i \quad (\text{а}), && \mathrm{div}\, \mathbf{E} = \rho = \rho^e + \rho^i \quad (\text{б}),\\ &\mathrm{rot}\, \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (\text{в}), && \mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0 \quad (\text{г}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ρ, $\mathbf{j}$ — внешние (индекс e), индуцированные в среде внешним воздействием (индекс i) и полные (без индекса) плотности заряда и тока. Все они связаны уравнениями непрерывности $\dot{\rho} + \mathrm{div}\, \mathbf{j} = 0, \ldots$, позволяющими не рассматривать продольных компонент тока (см. (1.2)).

Вместо $\rho^i, \mathbf{j}^i$ часто вводят электрическую индукцию $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$, записывая уравнения (2.1а, б) в виде

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j}^e \quad (\text{а}), \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{D} = \rho^e \quad (\text{б}). \tag{2.2}$$

*) Об анизотропных и гиротропных средах см. например, [3].

В отличие от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ величины $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ лишены прямого физического смысла (это не относится к величине $\mathbf{D}_l$ и к статическому значению $\mathbf{H}$), и существует преобразование[13] $\mathbf{D}\to\mathbf{D}+\operatorname{rot}\mathbf{N}$, $\mathbf{H}\to\mathbf{H}+\dot{\mathbf{N}}$ с произвольным $\mathbf{N}$, не меняющее вида (2.2)[13].

Уравнения Максвелла содержат избыточное число неизвестных и должны быть дополнены связывающими их материальными уравнениями, в которых и содержится информация об индивидуальных свойствах среды. Обычно это связь ρ^i, $\mathbf{j}^i$ (или $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$) с полями $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Структура материальных уравнений определяется свойствами симметрии среды (см. раздел 1). В линейной электродинамике

$$\rho^i=(1-\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{E},\qquad \mathbf{j}_t^i=(\tilde{\varepsilon}-1)\dot{\mathbf{E}}_t+\left(1-\frac{1}{\tilde{\mu}}\right)\operatorname{rot}\mathbf{B} \tag{2.3}$$

или

$$\mathbf{D}_l=\varepsilon\mathbf{E}_l,\qquad \mathbf{D}_t=\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}_t,\qquad \mathbf{H}=\frac{1}{\tilde{\mu}}\mathbf{B}. \tag{2.4}$$

Параметризующие эти уравнения характеристики среды ε, $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ в общем случае представляют собой интегральные операторы по пространству и времени (в фурье-компонентах — функции ω и $\mathbf{k}$). Независимы лишь две из них соответственно двум типам полей в среде — продольному $\mathbf{E}_l$ и единому (благодаря жесткой связи (2.1в)) поперечному $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{B}$. Величины $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ не имеют самостоятельного смысла, и их можно произвольно менять, сохраняя значение величины

$$\eta=\left(\frac{k^2}{\tilde{\mu}}-\omega^2\tilde{\varepsilon}\right)(k^2-\omega^2)^{-1} \tag{2.5}$$

(нормированной на единицу в отсутствие среды). Это следует из возможности перегруппировки слагаемых второго соотношения (2.3) (см. (2.1в)) или из отмеченной выше неоднозначности величин $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$.

Соответственно имеется множество равноценных форм материальных уравнений. Две наиболее употребительных из них отвечают выбору

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon,\quad \tilde{\mu}=\mu \tag{2.6}$$

и

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon_t=\varepsilon+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\frac{k^2}{\omega^2},\qquad \tilde{\mu}=1, \tag{2.7}$$

где ε — обычная (продольная), ε_t — поперечная диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость. Все такие материальные уравнения содержат единую продольную характеристику среды ε, различаясь видом поперечной характеристики (для (2.6) это μ, для (2.7) — ε_t).

Наиболее естественной и удобной поперечной характеристикой среды служит величина (2.5). Она связана с μ и ε_t соотношениями

$$(k^2-\omega^2)\,\eta=\frac{k^2}{\mu}-\omega^2\varepsilon=k^2-\omega^2\varepsilon_t, \tag{2.8}$$

совпадая с $1/\mu$ при $\omega=0$ и с ε_t при $\omega\to\infty$. В отличие от ε_t величина η не имеет нефизической особенности при $\omega=0$ (см. [5]), обладая, в отличие от μ, прямым физическим смыслом при всех частотах[14].

С характеристиками среды ε и η связана особая форма материальных уравнений, отвечающая связи ρ^i, $\mathbf{j}^i$ не с полями $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, как выше, а с внешними источниками

$$\rho^i=\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\rho^e,\qquad \mathbf{j}_t^i=\left(\frac{1}{\eta}-1\right)\mathbf{j}_t^e. \tag{2.9}$$

С точки зрения последующих приложений удобнее привести эти уравнения к иной форме, вводя потенциалы φ, $\mathbf{A}$ соотношениями

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

обращающими уравнения (2.1 в, г) в тождества. В калибровке $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ уравнения (2.1 а, б) ведут к уравнениям для потенциалов

$$\Delta\varphi = -\rho, \quad \Box\mathbf{A} = \mathbf{j}_t. \tag{2.10}$$

Аналогичные уравнения

$$\Delta\varphi^e = -\rho^e, \qquad \Box\mathbf{A}^e = \mathbf{j}_t^e \tag{2.10'}$$

определяют внешние потенциалы φ^e, $\mathbf{A}^e$, создаваемые теми же внешними источниками в пустоте. Через эти потенциалы и выражаются материальные уравнения (см. (2.9))

$$\rho = \frac{k^2\varphi^e}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}, \qquad \mathbf{j}_t = \frac{(k^2 - \omega^2)\mathbf{A}^e}{\eta(\omega, \mathbf{k})}, \tag{2.11}$$

которые отличаются простотой, однозначностью и ясным физическим смыслом. Еще одно их важное преимущество будет обсуждаться в разделе 3 *).

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

Материальные уравнения вводились выше как соотношения, дополняющие уравнения Максвелла до замкнутой системы уравнений. Физический же их смысл состоит в том, что они описывают реакцию среды на внешние электромагнитные воздействия. Этот факт позволяет выявить целый ряд общих свойств величин, входящих в материальные уравнения.

Пусть среда подвергнута слабому внешнему воздействию $\delta\mathfrak{J}(t, \mathbf{x})$, в результате которого некоторая ее характеристика $\mathfrak{A}$ приобрела приращение

$$\delta\mathfrak{A}(t, \mathbf{x}) = \int dt'\, d\mathbf{x}'\, \mathfrak{R}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}')\, \delta\mathfrak{J}(t', \mathbf{x}'), \tag{3.1}$$

или в фурье-компонентах

$$\delta\mathfrak{A}(\omega, \mathbf{k}) = \mathfrak{R}(\omega, \mathbf{k})\, \delta\mathfrak{J}(\omega, \mathbf{k}). \tag{3.2}$$

В словесной форме

(*результат воздействия*) = (*функция отклика*) × (*воздействие*).

Такой вид и имеют введенные выше материальные уравнения (для слабого воздействия их можно записать как соотношения между вариациями **).

По причинам, ясным из дальнейшего, подчиним входящие в (3.1), (3.2) величины следующим общим требованиям:

А. Воздействие $\mathfrak{J}$ должно быть совершенно произвольной, способной принимать любые наперед заданные значения величиной, а его источник не должен испытывать обратного влияния со стороны самой среды.

Б. Процесс воздействия должен описываться гамильтонианом

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\int d\mathbf{x}\, \hat{\mathfrak{A}}\, \delta\mathfrak{J}, \tag{3.3}$$

где $\hat{\mathfrak{A}}$ — оператор, зависящий от динамических переменных среды (величина $\mathfrak{A}$ в (3.1), (3.2) равна $\langle\hat{\mathfrak{A}}\rangle$), $\mathfrak{J}$ — заданная величина.

---

*) Из (2.11) можно видеть, что величины $1/\varepsilon$ и $1/\eta$ — перенормировочные факторы, отражающие влияние среды, в выражениях для продольной и поперечной компонент функции Грина фотона в среде [15].

**) Мы условно используем буквы готического шрифта $\mathfrak{A}$ (от англ. answer, и т. д.), $\mathfrak{R}$ (response) и $\mathfrak{J}$ (influence), чтобы особо выделить соответствующие величины, фундаментально важные для содержания этой статьи.

Требование А не предопределяет динамического смысла величин $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{J}$. Более же сильное требование Б придает им смысл обобщенных координаты и силы. Далее функцией отклика мы будем называть величину $\mathfrak{R}$ в (3.1), (3.2), подчиняющуюся по крайней мере требованию А. Функцию же отклика, удовлетворяющую и требованию Б, можно назвать обобщенной восприимчивостью за неимением лучшего термина (обычно восприимчивостью называют исчезающую при $\omega \to \infty$ часть функции отклика).

Выясним теперь, какие именно характеристики среды, входящие в материальные уравнения, могут считаться функциями отклика и обобщенными восприимчивостями. Требованию А, во всяком случае, удовлетворяют воздействия со стороны внешних источников ρ^e, $\mathbf{j}^e$, величина которых совершенно произвольна. Это позволяет отождествить с (3.1), (3.2) материальные уравнения (2.9), (2.11) *). Если же сопоставить гамильтониану (3.3) известный гамильтониан взаимодействия среды с внешними полями

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d\mathbf{x}\,(\hat{\rho}\delta\varphi^e - \hat{\mathbf{j}}_t\delta\mathbf{A}^e) \tag{3.4}$$

($\hat{\rho}$ и $\hat{\mathbf{j}}$ — операторы полных плотностей заряда и тока), то величины, входящие в материальное уравнение (2.11), удовлетворяют и требованию Б. Это позволяет положить

$$\mathfrak{J} = -\varphi^e,\ A^e, \quad \hat{\mathfrak{A}} = \hat{\rho},\ \hat{j}_t, \quad \mathfrak{R} = -\frac{k^2}{\varepsilon},\ \frac{k^2-\omega^2}{\eta}, \tag{3.5}$$

где величины $\mathfrak{R}$ можно считать и функциями отклика, и обобщенными восприимчивостями.

Существенно, что в отличие от внешних источников полные плотности заряда и тока ρ, $\mathbf{j}$ не могут считаться произвольными и заданными величинами, так как они содержат неконтролируемый вклад самой среды. Это не позволяет обратить материальные уравнения (2.11), читая их справа налево, и считать функциями отклика сами величины ε и η. Важно, однако, что этот запрет теряет силу в особом случае пространственно однородного воздействия с $\mathbf{k} = 0$ (точнее, с $k \sim 1/L$, где L — макроскопически большой размер образца среды).

В самом деле, обратимся к вопросу о физической реализации воздействий на среду. Воздействия (3.5) легко осуществить, помещая внутрь среды точечные заряд или контур с током заданной величины и выделяя фурье-компоненты с произвольным значением $\mathbf{k}$ (рис. 1). В случае же $\mathbf{k} = 0$ есть

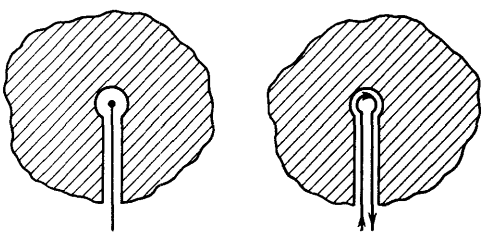

Рис. 1

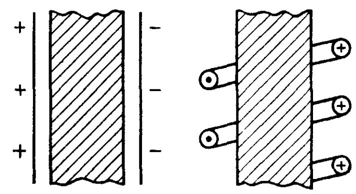

Рис. 2

и другой способ — помещение образца среды внутрь конденсатора с заданным зарядом на обкладках или внутрь соленоида с заданным током в обмотке (рис. 2). Эти же устройства можно использовать для реализации воздействия заданным полным зарядом или током. Первое из таких воздействий отвечает замыканию конденсатора на батарею, поддерживающую заданную разность потенциалов, или, согласно (2.10), заданную полную плотность заряда. Вто-

*) Стандартные материальные уравнения (2.4) для этой цели непригодны, так как величина $\mathbf{H}$ совпадает с внешним полем лишь при $\omega = 0$.

рое требует использования сверхпроводящего соленоида (точнее, сверхпроводящего цилиндра с азимутальным током), который создает заданный, квантованный магнитный поток, равный циркуляции потенциала **A** по периметру отверстия в сверхпроводнике; в таком устройстве заданную величину имеет потенциал **A** или, согласно (2.10), полная плотдость тока. Роль величины $\mathfrak{A}$ (результата воздействия) при этом играют внешние заряды, подтекающие к обкладкам или оттекающие от них, или внешние токи, обтекающие отверстие в сверхпроводнике (рис. 3).

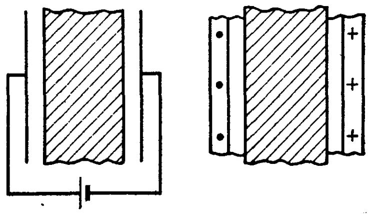

Рис. 3

Подчеркнем, что только при $\mathbf{k} = 0$ устройства, стабилизирующие значения ρ, $\mathbf{j}$ (батарея, сверхпроводник), могут быть вынесены за пределы среды без искажения ее структуры и свойств. В случае же $\mathbf{k} \neq 0$ подобные устройства пришлось бы вводить внутрь среды в числе, растущем с увеличением $\mathbf{k}$, и возникла бы новая среда, мало похожая на исходную. Если же использовать образец среды малых размеров с достаточно большим значением $k \sim 1/L$, то и в этом случае ее свойства будут искажены (за счет поверхностных эффектов, вклад которых растет вместе с $\mathbf{k}$).

Обсуждаемые воздействия со стороны ρ, $\mathbf{j}$ удовлетворяют, конечно, только требованию А: внешние источники, играющие роль величины $\mathfrak{A}$, не могут описываться оператором (см. (3.3)) и их зависимость от состояния среды достигается лишь на уровне средних значений благодаря граничным условиям на поверхности образца среды. Поэтому для отождествления с (3.1), (3.2) можно использовать материальные уравнения (2.9), переписывая их в виде $\rho^e = \varepsilon\rho$, $\mathbf{j}_t^e = \eta\mathbf{j}_t$. Это дает

$$\mathfrak{J} = \rho,\ \mathbf{j}_t,\quad \mathfrak{A} = \rho^e,\ \mathbf{j}_t^e,\quad \mathfrak{R} = \varepsilon(\omega, 0),\ \eta(\omega, 0). \tag{3.6}$$

Здесь величины $\mathfrak{R}$ имеют смысл только функций отклика, но не обобщенных восприимчивостей.

Величинами $\mathfrak{R}$ в (3.5), (3.6) исчерпываются функции отклика в макроскопической электродинамике. Величины же ε и η (при произвольных $\mathbf{k}$), μ, ε_t к числу функций отклика — и, тем более, обобщенных восприимчивостей — не относятся. Укажем в заключение этого раздела, что рассмотренные в нем вопросы были подняты в книге Пайнса и Нозьера [16] и развиты в статьях [14, 17–20].

4. ПРИЧИННОСТЬ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Функции отклика должны удовлетворять условию причинности, которое специализирует их зависимость от частоты. В своей простейшей формулировке это условие гласит: «причина всегда предшествует по времени следствию», или, короче, «будущее не влияет на прошлое». Оно согласуется со всем общечеловеческим опытом и с результатами экспериментов и наблюдений в широчайшем диапазоне масштабов от субъядерных до космических *).

Применим условие причинности к соотношению (3.1), рассматривая воздействие $\mathfrak{J}$ как причину, а его результат $\mathfrak{A}$ — как следствие. В согласии с требованием А величина $\delta\mathfrak{J}$ произвольна и может принимать любые заданные значения. Пусть она равна нулю при временах $t < t_0$ (t_0 — произвольный момент времени), будучи в остальном произвольной. Тогда условие причинности требует исчезновения при $t < t_0$ и величины $\delta\mathfrak{A}$, а это в силу

*) О логических противоречиях, связанных с нарушением причинности, см. работы [21, 22].

произвольности $\delta\mathfrak{J}$ возможно лишь при условии

$$\mathfrak{R}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad t < 0, \tag{4.1}$$

которое и служит количественным выражением условия причинности.

При выполнении (4.1) фурье-компонента функции отклика

$$\mathfrak{R}(\omega, \mathbf{k}) = \int dt\, d\mathbf{x}\, \mathfrak{R}(t, \mathbf{x}) \exp[-i(\mathbf{kx} - \omega t)]$$

выражается в виде интеграла по времени, сходящегося в верхней полуплоскости частоты ω, рассматриваемой как комплексная переменная. В силу известной теоремы о сходящемся интеграле Фурье это ведет к аналитичности функции $\mathfrak{R}(\omega, \mathbf{k})$ в рассматриваемой области. Далее, из (1.1) вытекают соотношения, справедливые для изотропной среды,

$$\operatorname{Re}\mathfrak{R}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re}\mathfrak{R}(-\omega, \mathbf{k}), \quad \operatorname{Im}\mathfrak{R}(\omega, \mathbf{k}) = -\operatorname{Im}\mathfrak{R}(-\omega, \mathbf{k}). \tag{4.2}$$

Отсюда известным способом (см. [16, 23]) выводятся дисперсионные соотношения типа Крамерса — Кронига

$$\mathfrak{R}(\omega, \mathbf{k}) = \mathfrak{R}(\infty, \mathbf{k}) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\zeta^2 \operatorname{Im}\mathfrak{R}(\zeta, \mathbf{k})\,[\zeta^2 - (\omega + i\delta)^2]^{-1}, \tag{4.3}$$

где $\mathfrak{R}(\infty, \mathbf{k})$ — предел $\mathfrak{R}(\omega, \mathbf{k})$ при $\omega \to \infty$, представляющий собой действительное в силу (4.2) число *).

Необходимость требования А для вывода об аналитичности функции отклика можно проиллюстрировать простым примером. Пусть величина $\delta\mathfrak{J}(\omega, \mathbf{k})$ не произвольна, а имеет нуль в верхней полуплоскости ω. Тогда, как видно из (3.2), функция отклика может иметь полюс в той же точке, не препятствующий исчезновению величины $\delta\mathfrak{A}(t, \mathbf{x})$ при $t < t_0$.

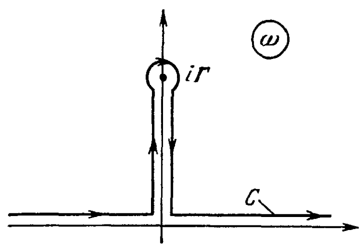

Рис. 4

Подчеркнем, что для вывода дисперсионных соотношений нужно не только условие причинности, но и условие устойчивости среды, выполнение которого неявно предполагалось выше. Это последнее условие, запрещающее экспоненциальный рост со временем величин $\delta\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{R}$, и позволяет перейти к компонентам Фурье. Указанные же условия порознь не ведут к ограничениям на аналитические свойства функции отклика. Если, например, она имеет полюс при $\omega = i\Gamma$, $\Gamma > 0$, то интегрирование по ω в интеграле Фурье для $\mathfrak{R}(t, \mathbf{x})$ дает стабильное, но непричинное поведение $\theta(-t)\exp(\Gamma t)$ при выборе контура вдоль действительной оси ω и, напротив, нестабильное, но причинное поведение $-\theta(t)\exp(\Gamma t)$ при выборе контура C (рис. 4) [21, 25]. Здесь функция $\theta(t)$ равна соответственно нулю и единице при t, меньшем и большем нуля.

Переходя к формулировке дисперсионных соотношений для электродинамических функций отклика (3.5), (3.6), начнем с определения внеинтегрального члена $\mathfrak{R}(\infty, \mathbf{k})$ в (4.3). При $\omega \to \infty$ справедливы следующие асимптотические выражения (см. [2, 16] и (2.5)):

$$\varepsilon \to 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \ldots, \quad \mu \to 1 + \ldots, \quad \eta \to 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \ldots, \tag{4.4}$$

где ω_p^2 — квадрат плазменной частоты (об этой величине см. ниже). Смысл (4.4) состоит в том, что среда не успевает реагировать на быстрые воздействия.

*) Более жесткое релятивистское условие причинности $\mathfrak{R}(t, \mathbf{x}) = 0$ при $t < x$, которое требует и отсутствия взаимного влияния событий, разделенных пространственно подобным интервалом, ведет к дисперсионным соотношениям типа Леонтовича [4, 24] (см. в этой связи [14]).

С учетом (4.4) дисперсионные соотношения в электрическом случае имеют вид

$$\varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta^2 \operatorname{Im} \varepsilon^{-1}(\zeta, \mathbf{k}) [\zeta^2 - (\omega + i\delta)^2]^{-1}, \tag{4.5}$$

$$\varepsilon(\omega, 0) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta^2 \operatorname{Im} \varepsilon(\zeta, 0) [\zeta^2 - (\omega + i\delta)^2]^{-1}. \tag{4.5'}$$

В статическом пределе

$$\varepsilon^{-1}(0, \mathbf{k}) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta} \operatorname{Im} \varepsilon^{-1}(\zeta, \mathbf{k}), \tag{4.6}$$

$$\varepsilon(0, 0) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta} \operatorname{Im} \varepsilon(\zeta, 0). \tag{4.6'}$$

В согласии с (4.2) статические значения функций отклика действительны. Величина $\varepsilon(0, 0)$ должна пониматься как предел $\omega \to 0$, $k \to 0$, $\omega/k \to 0$ (известная же друдевская особенность $\varepsilon \sim i/\omega$ для проводящей среды отвечает обратному пределу $k/\omega \to 0$).

Сама же диэлектрическая проницаемость при $\mathbf{k} \neq 0$ удовлетворять дисперсионным соотношениям не обязана. Она может иметь простой полюс на положительной мнимой полуоси частоты

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta^2 \operatorname{Im} \varepsilon(\zeta, \mathbf{k}) [\xi^2 - (\omega + i\delta)^2]^{-1} - \alpha(\mathbf{k}) [\omega^2 + \Gamma^2(\mathbf{k})]^{-1} \tag{4.7}$$

с вычетом

$$\omega_p^2 \geqslant \alpha \geqslant \Gamma^2 \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta} \operatorname{Im} \varepsilon\right) > 0$$

(это неравенство означает, что $\varepsilon(0, \mathbf{k}) \leqslant 0$). Особенности в (4.7) более широкого класса невозможны, так как они ведут к появлению нулей у $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$, запрещенных соотношением (4.5)[26]. Соотношению (4.7) отвечает нарушение требования А (см. раздел 3) для воздействия полным зарядом: величина $\delta\rho = \delta\rho^e/\varepsilon$ имеет нуль при $\omega = i\Gamma$, а неэффективность условия причинности в этом случае уже отмечалась выше.

В магнитном случае удобнее иметь дело не с самой функцией отклика $(k^2 - \omega^2)/\eta$ (см. (3.5)), растущей на большом круге в комплексной плоскости, а с величиной $1/(k^2 - \omega^2)\eta$, которая имеет те же аналитические свойства и тоже принадлежит к числу функций отклика: $\delta A = \delta \mathbf{j}_i^e/[(k^2 - \omega^2)\eta]$ (см. раздел 2). Это ведет к дисперсионному соотношению (см. (4.4))

$$[(k^2 - \omega^2)\eta(\omega, \mathbf{k})]^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta^2 \operatorname{Im} [(k^2 - \zeta^2)\eta(\zeta, \mathbf{k})]^{-1} [\zeta^2 - (\omega + i\delta)^2]^{-1}. \tag{4.8}$$

В статическом пределе

$$\mu(0, \mathbf{k}) k^{-2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta} \operatorname{Im} [(k^2 - \zeta^2)\eta(\zeta, \mathbf{k})]^{-1}. \tag{4.9}$$

Что же касается функции отклика (3.6), то благодаря равенству $\eta(\omega, 0) = \varepsilon(\omega, 0)$ (см. (2.5)) соответствующее дисперсионное соотношение совпадает с (4.5).

5. МНИМАЯ ЧАСТЬ ФУНКЦИЙ ОТКЛИКА

Для вывода дисперсионных соотношений было необходимо лишь требование А. Если же выполнено и требование Б, то становится возможным динамическое рассмотрение воздействия на среду, что дает дополнительную информацию о свойствах функций отклика. В этом разделе обсуждаются динамические вопросы, относящиеся к диссипативным характеристикам среды — мнимым частям ее функций отклика. Дальнейшее рассмотрение динамических аспектов теории функций отклика будет продолжено ниже в разделе 7.

При внешнем воздействии на среду (поглощающую благодаря большому объему все излучение, которое может возникнуть при воздействии) ей передается энергия, превращающаяся в конечном счете в тепло. Энергия Q, диссипируемая в среде в единицу времени, определяется гамильтонианом (3.3) и равна $-\int \mathrm{d}\mathbf{x}\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{J}}$. Переход к фурье-компонентам с учетом (1.1), (3.2), (4.2) дает для полной диссипируемой энергии выражение *)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\,Q=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega\omega\int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{Im}\,\mathfrak{R}(\omega,\ \mathbf{k})\,|\mathfrak{J}(\omega,\ \mathbf{k})|^2. \tag{5.1}$$

В равновесной среде $Q\geqslant 0$ и благодаря произвольности $\mathfrak{J}$ возникает неравенство

$$\mathrm{Im}\,\mathfrak{R}(\omega,\ \mathbf{k})\geqslant 0 \tag{5.2}$$

при $\omega>0$ (и обратное неравенство при $\omega<0$; см. (4.2)).

Формула (5.1) описывает, в частности, энергетические потери заряженной частицы, проходящей через среду. Имея в виду последующие приложения (см. ниже раздел 10), укажем другой вывод этой формулы, основанный не на гамильтониане (3.3), а прямо на уравнениях Максвелла. Потери энергии частицы, создающей в среде поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, складываются из изменения энергии поля и работы над частицами среды. Эта работа определяется током $\mathbf{j}^{\mathrm{i}}$, индуцированным самой частицей. В результате находим

$$Q=\int \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathbf{j}^{\mathrm{i}}\mathbf{E}+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\,(E^2+B^2). \tag{5.3}$$

Используя (2.1а) и опуская интегралы по поверхности среды, нетрудно получить известное выражение

$$Q=-\int \mathrm{d}\mathbf{x}\mathbf{j}^{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \tag{5.4}$$

которое согласуется с балансом энергии $Q=W$, вытекающим из (2.1), (2.2), где изменение полной энергии среды в единицу времени

$$W=\int \mathrm{d}\mathbf{x}\,(\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}+\mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}). \tag{5.5}$$

С помощью (2.1) и (3.5) нетрудно убедиться, что формулы (5.1) и (5.4) ведут к идентичным выражениям для продольных и поперечных потерь **).

---

*) Это выражение в действительности пропорционально полному интервалу времени T, что отвечает конечной диссипации энергии в единицу времени. Так, для движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ заряда как источника воздействия $\rho^{\mathrm{e}}\backsim\delta(\omega-\mathbf{kv})$ и $|\rho^{\mathrm{e}}|^2\backsim\delta(0)\backsim T$.

**) Отметим, что вывод (5.4), хотя и проводился на языке средних значений, ведет к тому же результату и при учете флуктуаций.

Возвращаясь к неравенству (5.2), приложим его к обобщенным восприимчивостям (3 5). В электрическом случае оно дает

$$\operatorname{Im} \varepsilon (\omega, \mathbf{k}) \geqslant 0, \tag{5.6}$$

в магнитном

$$(k^2 - \omega^2) \operatorname{Im} \eta^{-1} (\omega, \mathbf{k}) \geqslant 0. \tag{5.7}$$

С помощью (2.8) последнему неравенству можно придать вид

$$\omega^2 \operatorname{Im} \varepsilon \geqslant k^2 \operatorname{Im} \mu^{-1}, \qquad \operatorname{Im} \varepsilon_t (\omega, \mathbf{k}) \geqslant 0. \tag{5.8}$$

Все эти неравенства относятся к положительным значениям частоты.

В следующем разделе с их помощью будут найдены области допустимых значений диэлектрической и магнитной проницаемостей. В оставшейся же части этого раздела полученные неравенства будут использованы для вывода дисперсионных соотношений применительно к ряду величин, не относящихся к числу функций отклика. Аналитичность этих величин в верхней полуплоскости частоты следует не из физического условия причинности, а из математического факта отсутствия у некоторых функций отклика не только особенностей (полюсов, разрезов, существенно особых точек), но и нулей в рассматриваемой области. Поэтому величина, обратная такой функции отклика, также аналитична и удовлетворяет дисперсионным соотношениям[17, 27].

Отсутствие нулей у функции, удовлетворяющей дисперсионному соотношению типа (4.3) и имеющей знакопостоянную мнимую часть, требует совпадения знаков этой мнимой части и внеинтегрального члена в дисперсионных соотношениях, когда слагаемые правой части (4.3) не могут скомпенсировать друг друга. В самом деле, интегральный член в дисперсионных соотношениях действителен только на мнимой оси частоты, где его знак совпадает со знаком мнимой части рассматриваемой функции.

В электрическом случае знаки мнимой части и внеинтегрального члена в (4.5) различны и величина $1/\varepsilon$ может иметь нуль, а сама диэлектрическая проницаемость — полюс в верхней полуплоскости частоты. В соотношении же (4.5') эти знаки совпадают, но отсутствие нулей величины $\varepsilon (\omega, 0)$ следует уже из (4.5). В магнитном случае внеинтегральный член в соотношении (4.8) вообще отсутствует и потому величина $(k^2 - \omega^2) \eta$ (и одновременно $\eta (\omega, \mathbf{k})$) аналитична в верхней полуплоскости частоты. С учетом асимптотических выражений (4.4) это ведет к новому дисперсионному соотношению

$$(k^2 - \omega^2) \eta (\omega, \mathbf{k}) = k^2 - \omega^2 + \omega_p^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta^2 (k^2 - \zeta^2) \operatorname{Im} \eta (\zeta, \mathbf{k}) [\zeta^2 - (\omega + i\delta)^2]^{-1} \tag{5.9}$$

со статическим пределом

$$k^2 \mu^{-1} (0, \mathbf{k}) = k^2 + \omega_p^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta} (k^2 - \zeta^2) \operatorname{Im} \eta (\zeta, \mathbf{k}). \tag{5.10}$$

Отсюда же согласно (2.8) вытекает и аналитичность величины ε_t, а также дисперсионное соотношение

$$\varepsilon_t (\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta^2 \operatorname{Im} \varepsilon_t (\zeta, \mathbf{k}) [\zeta^2 - (\omega + i\delta)^2]^{-1}. \tag{5.11}$$

Одновременно легко видеть, что величина $1/\mu$ имеет полюс в той же точке, что и ε, с вычетом, согласованным с величиной α (см. (2.8), (4.7)). Поскольку знаки внеинтегрального члена и мнимой части в (5.11) совпадают (см. (5.8)), аналитична и величина $1/\varepsilon_t$, для которой также можно написать соответствующее дисперсионное соотношение *).

Особый интерес представляет вопрос о справедливости дисперсионного соотношения для комплексного показателя преломления среды (собственно соотношения Крамерса — Кронига)

$$n(\omega)=[\varepsilon(\omega,\ \mathbf{k})\,\mu(\omega,\ \mathbf{k})]^{1/2}=\varepsilon_t^{1/2}(\omega,\ \mathbf{k}),\quad k=\omega n(\omega)$$

(распространение фотона в среде отвечает равенству нулю величины (2.8)). Поскольку величина ε_t аналитична и не имеет нулей в верхней полуплоскости частоты (см. выше), показатель преломления был бы аналитической функцией, несмотря на наличие корня в его определении, если бы не зависимость ε_t от $\mathbf{k}$, сильно усложняющая аналитические свойства $n(\omega)$. Поэтому для справедливости соотношений Крамерса — Кронига необходима достаточно слабая пространственная дисперсия среды.

Подводя итоги, приведем список характеристик среды, аналитичных в верхней полуплоскости частоты и удовлетворяющих дисперсионным соотношениям

$$\varepsilon^{-1}(\omega,\ \mathbf{k}),\ \varepsilon(\omega,\ 0),\ \eta^{-1}(\omega,\ \mathbf{k}),\ \eta(\omega,\ \mathbf{k}),\ \varepsilon_t(\omega,\ \mathbf{k}),\ \varepsilon_t^{-1}(\omega,\ \mathbf{k}).$$

Соответственно могут иметь полюс в указанной области величины

$$\varepsilon(\omega,\ \mathbf{k})\ (\mathbf{k}\neq 0),\quad \mu^{-1}(\omega,\ \mathbf{k}),\quad \mu(\omega,\ \mathbf{k}).$$

6. ГРАНИЦЫ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ СТАТИЧЕСКИХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ СРЕДЫ

Комбинируя статические дисперсионные соотношения с неравенствами для мнимых частей функций отклика, можно получить неравенства для статических значений этих функций и определить тем самым область их допустимых значений. В электрическом случае комбинация (4.6) и (5.6) ведет при произвольных значениях $\mathbf{k}$ к неравенству

$$\varepsilon^{-1}(0,\ \mathbf{k})\leqslant 1, \tag{6.1}$$

т. е. либо к $\varepsilon(0,\mathbf{k})\geqslant 1$, либо к $\varepsilon(0,\mathbf{k})\leqslant 0$ (вторая возможность реализуется только при нарушении дисперсионного соотношения для $\varepsilon(\omega,\ \mathbf{k})$; см. раздел 4). При $\mathbf{k}=0$ более ограничительно соотношение (4.6′), которое дает

$$\varepsilon(0,\ 0)\geqslant 1 \tag{6.2}$$

(о смысле величины $\varepsilon(0,\ 0)$ см. раздел 4). Условие (6.2) совпадает с условием положительности коэффициента сжимаемости среды [16].

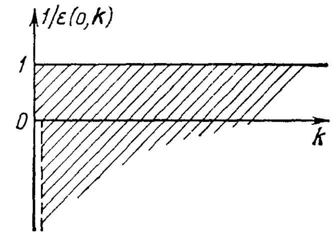

Рис. 5

На рис. 5 изображена область допустимых значений величины $\varepsilon(0,\ \mathbf{k})$ (заштрихована). Ее границы имеют следующий смысл (см. также ниже): точка $\mathbf{k}=0$, $\varepsilon\to\infty$ — граница устойчивости относительно сегнетоэлектрического упорядочения (спонтанного появления $\mathbf{D}$ при $\mathbf{E}=0$); интервал $0<k<\infty$, $\varepsilon=0$ — то же для перехода в состояние с волной зарядовой плотности (спонтанное появление $\mathbf{E}$ при $\mathbf{D}=0$); отрезок $0\leqslant k<\infty$, $\varepsilon=1$ отвечает предельному состоянию абсолютной пустоты. В соответствии со сказанным невозможно существование сегнетоэлектриков с $\mathbf{k}\neq 0$, сред со спонтанным однородным электрическим полем (в таком поле внешний заряд или рожденная им самим пара ускорялись бы, отнимая у среды энергию,

*) Мнимые части η и ε_t достаточно быстро убывают о частотой, и интегралы в (5.9)—(5.11) хорошо сходятся.

в противоречии с условием первоначальной равновесности среды [28]), сред с $0 \leqslant \varepsilon(0, \mathbf{k}) \leqslant 1$ — «диаэлектриков» *).

Сегодня известно уже довольно много примеров реальных сред с отрицательным значением величины $\varepsilon(0, \mathbf{k})$ (и одновременно с нарушенными дисперсионными соотношениями для $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$): неидеальная плазма, сильные электролиты, некоторые простые металлы и др. [19,29]. Всем им свойственно сильное взаимодействие между частицами (сильные эффекты локального поля). На рис. 6 схематически изображен ход функции $\varepsilon(0, \mathbf{k})$ для классической неидеальной однокомпонентной плазмы при разных значениях параметра взаимодействия $\alpha = e^2 n^{1/3}/T$, равного отношению кулоновской и тепловой (кинетической) энергий [30]. При $\alpha \lesssim 1$ диэлектрическая проницаемость больше единицы. При $1 \lesssim \alpha \lesssim 170$ она отрицательна, достигая при $\alpha \approx 170$ границы допустимой области $\varepsilon = 0$, когда происходит образование волны зарядовой плотности (кристаллизация плазмы) с параметром решетки $1/k_0$. Отрицательный знак ε для предкристаллизационного состояния среды следует просто из невозможности попасть в точку кристаллизации $\varepsilon = 0$ иначе, чем из допустимой области $\varepsilon < 0$.

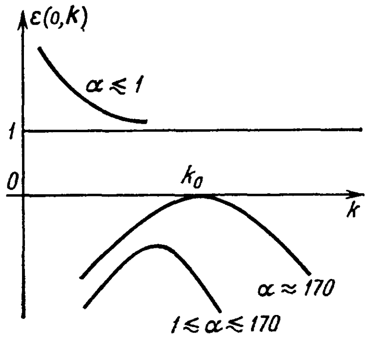

Рис. 6

В нарушенных дисперсионных соотношениях (4.7) величину $\Gamma^2(\mathbf{k})$ можно качественно моделировать выражением $(k^2 - k_1^2)(k_2^2 - k^2)$, отвечающим отрицательному знаку $\varepsilon(0, \mathbf{k})$ в интервале $k_1 < k < k_2$. В непроводящих средах величина k_1 имеет конечное значение, определяемое параметром среды, при прохождении которого величина $1/\varepsilon$ меняет знак, обращаясь при $k = k_1$ в нуль. Однако у проводников (в частности, у плазмы; см. рис. 6) величина k_1 равна нулю, что соответствует дебаевскому полюсу $1/k^2$ у $\varepsilon(0, \mathbf{k})$ с «неправильным» знаком вычета. Соответственно положительный знак $\varepsilon(0, \mathbf{k})$ восстанавливается при этом лишь в самой точке $\mathbf{k} = 0$ [29].

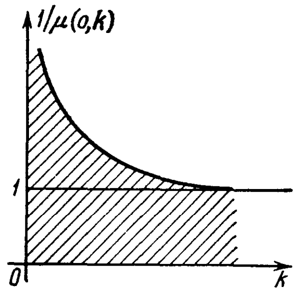

Рис. 7

Все сказанное выше полностью снимает противоречия, о которых говорилось в примере 1) раздела 1, открывая принципиальную возможность радикального повышения критической температуры сверхпроводящего перехода.

Переходя к магнитному случаю, рассмотрим комбинацию статических дисперсионных соотношений (4.9), (5.10) с неравенством (5.7), которая ведет к неравенству для магнитной проницаемости **)

$$\mu(0, \mathbf{k}) \geqslant \left(1 + \frac{\omega_p^2}{k^2}\right)^{-1}. \tag{6.3}$$

Отрицательные ее значения оказываются запрещенными, а отличие правой части (6.3) от единицы дает возможность существования диамагнетизма. На рис. 7 изображена область допустимых значений $\mu(0, \mathbf{k})$ (заштрихована).

*) Вывод о невозможности существования диаэлектриков теряет силу применительно к релятивистским средам, для которых важны вакуумные эффекты (в частности, сам физический вакуум как особая разновидность материальной среды относится как раз к числу диаэлектриков). Дело в том, что в этом случае физический смысл имеют не затравочные, как выше, а перенормированные величины. Соответствующий фактор перенормировки и сдвигает границы допустимой области значений функций отклика [31].

**) Это неравенство следует также из дисперсионного соотношения Леонтовича (см. сноску на с. 406) [14].

Смысл ее границ таков: точка $\mathbf{k} = 0$, $\mu \to \infty$ — граница устойчивости относительно ферромагнитного упорядочения (спонтанного появления поля $\mathbf{B}$ при $\mathbf{H} = 0$); интервал $0 < k < \infty$, $\mu \to \infty$ — то же для антиферромагнитного упорядочения; граница $\mu = [1 + (\omega_p^2/k^2)]^{-1}$ — предельное состояние идеального диамагнетика, реализующееся в лондоновском сверхпроводнике при нулевой температуре.

В системе единиц, где скорость света равна c, формула (6.3) содержит комбинацию ω_p^2/k^2c^2. Поэтому в нерелятивистской среде аномальный диамагнетизм (малые значения μ; см. пример 2) раздела 1) хотя, в принципе, и допустим, но его существование ограничено узкой областью $k < \omega_p/c$; см. также ниже раздел 8 *). Если же значение k не мало, то правая часть (6.3) неотличима от единицы.

Входящая в (6.3) величина ω_p^2 представляет собой квадрат плазменной частоты (см. раздел 4), т. е. равна сумме по всем сортам заряженных частиц величин e^2n/m, где e — заряд частицы, m — ее масса, n — концентрация. Под заряженными частицами здесь следует понимать и связанные комплексы, если в рассматриваемых условиях (температура, давление и т. д.) они участвуют в отклике как целое. Реально в нерелятивистской ситуации речь должна идти об электронах и ядрах, а в некоторых случаях — о валентных электронах и ионах. Отнесение же величины ω_p^2 «с запасом» к более мелким структурным составляющим среды (например, к внутриядерным протонам) приведет просто к менее жесткой границе для магнитной проницаемости вследствие более высокого значения ω_p^2.

Возвращаясь к выводу (6.3) (см. (4.4), (4.9), (5.10)), отметим, что обсуждаемая неоднозначность ω_p^2 отвечает существованию у диэлектрической проницаемости ряда промежуточных асимптотик типа (4.4) с разными значениями ω_p^2, последовательно достигаемых с ростом частоты. Это соответствует структуре величины $\mathrm{Im}\,\varepsilon^{-1}$, представляющей собой совокупность пиков, которые отвечают последовательному возбуждению все более мелких структурных составляющих среды. При невысоких давлениях и температурах и относительно малых значениях ω и $\mathbf{k}$ вклад высших пиков пренебрежимо мал.

Рассмотренные выше вопросы обсуждались в работах [14,17–20,29,30].

7. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ВОСПРИИМЧИВОСТЕЙ

Неравенства (6.1) и (6.3), полученные выше из дисперсионных соотношений для обобщенных восприимчивостей (3.5), можно вывести и чисто динамическим путем, исходя из общих представлений типа формулы Кубо для этих величин. Обобщенная восприимчивость равна вариационной производной

$$\mathfrak{R} = \frac{\delta\langle\hat{\mathfrak{A}}\rangle}{\delta\mathfrak{F}} = \left\langle\frac{\delta\hat{\mathfrak{A}}}{\delta\mathfrak{F}}\right\rangle$$

при $\mathfrak{F} = 0$ (см. (3.1), (3.3), где оператор взят в представлении Гейзенберга относительно полного взаимодействия, включающего (3.3), и дифференцировать можно под знаком среднего (см. (1.3)). Такой оператор зависит от $\mathfrak{F}$ двояко: явным образом и через динамические переменные среды, эволюция которых определяется полным гамильтонианом среды $\hat{H}$, включающим (3.3). Поэтому $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \tilde{\mathfrak{R}}$, где первое слагаемое

$$\mathfrak{R}_0(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left\langle\frac{\partial\hat{\mathfrak{A}}(t, \mathbf{x})}{\partial\mathfrak{F}(t', \mathbf{x}')}\right\rangle \tag{7.1}$$

*) Отметим, что в самой точке $\mathbf{k} = 0$ появление спонтанных токов невозможно (теорема Блоха) [32].

($\partial/\partial\mathfrak{J}$ — символ частной вариационной производной) описывает прямой отклик среды. Второе же слагаемое (формула Кубо)

$$\tilde{\mathfrak{R}}(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{x}')=i\theta(t-t')\langle[\hat{\mathfrak{A}}(t, \mathbf{x}), \hat{\mathfrak{A}}(t', \mathbf{x}')]\rangle \tag{7.2}$$

отвечает той части отклика, которая связана с изменением динамических переменных под влиянием внешнего воздействия.

Приведенные формулы вытекают из общего выражения для производной гейзенберговского оператора $\hat{O}(t)$ по параметру g (см. [33])

$$\frac{d\tilde{O}(t)}{dg}=\frac{\partial\hat{O}(t)}{\partial g}+i\int_{-\infty}^{t}dt'\left[\frac{\partial\hat{H}(t')}{\partial g}, \hat{O}(t)\right], \tag{7.3}$$

в правильности которого можно убедиться, проверяя выполнение равенства $d^2\hat{O}/dtdg = d^2\hat{O}/dgdt$ с учетом уравнения Гейзенберга

$$d\hat{O}(t)/dt = \partial\hat{O}(t)/\partial t + i[\hat{H}(t), \hat{O}(t)] \tag{7.4}$$

и тождества Якоби для коммутаторов. При выводе (7.2) использовано также вытекающее из (3.3) выражение $\partial\hat{H}/\partial\mathfrak{J} = -\hat{\mathfrak{A}}$.

Величину $\tilde{\mathfrak{R}}$ можно представить как производную по $\mathfrak{J}$ от не зависящей явно от $\mathfrak{J}$ части оператора $\hat{\mathfrak{A}}$ (обозначаемой ниже через $\tilde{\hat{\mathfrak{A}}}$), которая в рассматриваемой линейной теории имеет вид

$$\tilde{\hat{\mathfrak{A}}}=\hat{\mathfrak{A}}-\frac{\mathfrak{J}\partial\hat{\mathfrak{A}}}{\partial\mathfrak{J}}, \quad \tilde{\mathfrak{A}}=\langle\tilde{\hat{\mathfrak{A}}}\rangle=\mathfrak{A}-\mathfrak{R}_0\mathfrak{J}. \tag{7.5}$$

В соотношениях, не содержащих производных по величине $\mathfrak{J}$, которая кладется равной нулю, можно сделать замену $\hat{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}$ на $\tilde{\hat{\mathfrak{A}}}$, $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Переходя в (7.2) к фурье-компонентам и вводя промежуточную систему собственных функций гамильтониана $\hat{H}$, можно прийти к выражению

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\omega, \mathbf{k})=2\sum_{mn}\alpha_{mn}|\mathfrak{A}_{mn}(\mathbf{k})|^2[\omega_{mn}^2-(\omega+i\delta)^2]^{-1},$$

где $\omega_{mn} = E_m - E_n$, $\mathfrak{A}_{mn}$ — фурье-компонента матричного элемента оператора $\hat{\mathfrak{A}}$ в представлении Шрёдингера. Величина $\alpha_{mn} = (w_n - w_m)\,\omega_{mn}$, где w_n — вероятность заполнения уровня с энергией E_n, имеет положительный знак для равновесной среды (вероятность заполнения уровня уменьшается с ростом его энергии). Отсюда следует, что величина $\tilde{\mathfrak{R}}$, подобно $\mathfrak{R}$, удовлетворяет дисперсионному соотношению и имеет мнимую часть, знак которой совпадает со знаком частоты. Из приведенного представления для $\tilde{\mathfrak{R}}$ вытекает важное неравенство

$$\tilde{\mathfrak{R}}(0, \mathbf{k})\geqslant 0, \tag{7.6}$$

из которого и будут следовать конечном счете неравенства (6.1), (6.3). Можно привести еще соотношение, выражающее флуктуационно-диссипационную теорему для равновесной среды, температура которой равна T:

$$\langle\{\delta\hat{\mathfrak{A}}(\omega, \mathbf{k}), \delta\hat{\mathfrak{A}}(\omega', \mathbf{k}')\}\rangle = \\ =2(2\pi)^4\operatorname{cth}\frac{\omega}{2T}\operatorname{Im}\hat{\mathfrak{R}}(\omega, \mathbf{k})\,\delta(\omega+\omega')\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'), \tag{7.7}$$

где $\delta\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}$ — флуктуация $\mathfrak{A}$, $\{\hat{a}, \hat{b}\} = \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$. Вывод этого соотношения можно найти, например, в работах [4, 12].

Для вывода неравенств (6.1), (6.3) из (7.6) будем основываться на соотношениях (3.5), вводя соответствующие операторы $\hat{\mathfrak{A}}$ и используя (2.10'). В электрическом случае

$$\hat{\mathfrak{A}}=\hat{\rho}=\rho^e+\hat{\rho}^i,\quad \mathfrak{J}=-\varphi^e=-\frac{\rho^e}{k^2},\quad \mathfrak{R}=-k^2/\varepsilon,$$

где $\hat{\rho}^i=\sum e\hat{n}$, $\hat{n}$ — оператор плотности числа частиц, суммирование здесь и ниже ведется по всем сортам заряженных частиц. Из (7.1), (7.3) имеем

$$\mathfrak{R}_0=-k^2,\quad \tilde{\mathfrak{R}}=k^2\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad \tilde{\hat{\mathfrak{A}}}=\hat{\rho}^i, \tag{7.8}$$

откуда и следует (6.1).

В магнитном случае, где

$$\hat{\mathfrak{A}}=\hat{\mathbf{j}}_t=\mathbf{j}_t^e+\hat{\mathbf{j}}_t^i,\quad \mathfrak{J}=\mathbf{A}^e,\quad \mathfrak{R}=\frac{k^2-\omega^2}{\eta},$$

ситуация сложнее: явная зависимость $\hat{\mathbf{j}}$ от $\mathbf{A}^e=\mathbf{j}_t^e/(k^2-\omega^2)$ определяется не только величиной $\mathbf{j}^e$, но и диамагнитной компонентой тока $\mathbf{j}^i$, линейной по полному потенциалу (включающему в себя $\mathbf{A}^e$). При выборе структурных составляющих среды, в соответствии со сказанным в разделе 6, эта компонента имеет вид $-\sum(e^2\hat{n}/m)\,\hat{\mathbf{A}}$. Это усложнение проявляется в появлении отличного от единицы фактора $\varkappa(\omega,\mathbf{k})$ в соотношениях

$$\mathfrak{R}_0=(k^2-\omega^2)\,\varkappa,\quad \tilde{\mathfrak{R}}=(k^2-\omega^2)(\eta^{-1}-\varkappa),\quad \tilde{\hat{\mathfrak{A}}}=\hat{\mathbf{j}}_t^i-(\varkappa-1)\,\mathbf{j}_t^e. \tag{7.9}$$

В интересующем нас статическом случае оператор $\hat{\mathbf{A}}=-\Delta^{-1}\hat{\mathbf{j}}_t$ можно заменить его средним значением $\mathbf{j}_t/k^2$, которое вносит преобладающий вклад в существенной области малых, не на много превышающих ω_p/c значений k (см. раздел 6): вклад флуктуационной части оператора $\hat{\mathbf{A}}$ определяется заменой k^2 в знаменателе на l^{-2}, где l — корреляционная длина, малая сравнительно с c/ω_p. Простые вычисления дают

$$\varkappa(0,\mathbf{k})=\left(1+\frac{\omega_p^2}{k^2}\right)^{-1}, \tag{7.10}$$

откуда с учетом (7.6). (7.9) и следует неравенство (6.3).

Отличие магнитного случая от электрического в рассматриваемом плане связано с существованием диамагнетизма (ток, зависящий от потенциала) при отсутствии диаэлектричества; см. раздел 6. Однако более глубокая причина этого различия — не имеющий электрического аналога закон индукции Фарадея, благодаря которому и возникает диамагнитный ток. Неудивительно поэтому, что диамагнитными могут быть и релятивистские среды, описываемые уравнением Дирака с не зависящим от потенциала током. Формально в этом случае диамагнетизм возникает из-за нарушения неравенства (7.6) (хотя величина $\varkappa$ в (7.9) и равна единице). В одночастичной теории это нарушение связано с уровнями отрицательной энергии (виртуальные переходы на которые и дают диамагнетизм), в полевой теории — с перенормировками.

8. УСТОЙЧИВОСТЬ СРЕДЫ И ФУНКЦИОНАЛ ЛАНДАУ

Дисперсионные соотношения, ведущие к неравенствам (6.1) — (6.3), основаны, как это подчеркивалось в разделе 4, не только на условии причинности, но и на требовании стабильности среды. Неудивительно поэтому, что эти неравенства служат одновременно критериями устойчивости среды относительно ее спонтанной перестройки (упорядочения) С появлением ненулевого значения величины $\mathfrak{A}$ (параметра порядка). Точнее, спонтанному, не связанному с внешним воздействием упорядочению отвечает параметр порядка $\tilde{\mathfrak{A}}$ — не зависящая явно от воздействия часть $\mathfrak{A}$ (см. (7.5)).

Значению $\tilde{\mathfrak{A}} \neq 0$ отвечает множество неравновесных состояний, различающихся величиной других, отличных от $\tilde{\mathfrak{A}}$ динамических переменных среды ξ и обладающих энергией $\mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{A}}, \xi)$, отсчитываемой от энергии исходного неупорядоченного состояния с $\tilde{\mathfrak{A}} = 0$ *). Среди этих состояний выделяется то, которому отвечает минимум $\mathscr{E}$ по ξ при заданном $\tilde{\mathfrak{A}}$, т. е. равенства

$$\delta\mathscr{E} + \lambda\delta\tilde{\mathfrak{A}} = 0 \tag{8.1}$$

(λ — множитель Лагранжа). Этот минимум, обозначаемый как $\mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{A}})$, носит название функционала Ландау и лежит, по существу, в основе теории фазовых переходов Ландау (см. раздел 1), которая исходит из того, что релаксация параметра порядка происходит существенно медленнее релаксации переменных ξ (неполное равновесие), причем среда считается стабильной относительно этих переменных[12,34]. Устойчивость же ее относительно самого параметра порядка определяется функционалом $\mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{A}})$. В частности, упомянутый выше критерий устойчивости неупорядоченного состояния среды совпадает с условием минимума $\mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{A}})$ при $\tilde{\mathfrak{A}} = 0$.

Благодаря медленности релаксации параметра порядка величину $\mathscr{E}(\tilde{\mathfrak{A}})$ можно рассматривать как энергию равновесного состояния среды, гамильтониан которой отличается от истинного гамильтониана среды $\hat{H}$ добавочным членом $\hat{H}'$, зависящим от величины параметра порядка, предполагаемой достаточно малой. Вид оператора $\hat{H}'$ можно найти из условия (8.1), для раскрытия которого нужно располагать выражением для изменения среднего значения δO некоторого оператора $\hat{O}$ под влиянием самого $\hat{H}'$. Это изменение отвечает перестройке среды, т. е. изменению ее динамических переменных в отсутствие каких-либо внешних воздействий, и потому описывается формулой типа Кубо (см. раздел 7) без члена с частной производной **) $\delta O = -\langle\hat{O}, \delta\hat{H}'\rangle$, где введено обозначение

$$\langle\hat{A}, \hat{B}\rangle = i\int_{-\infty}^{t} dt' \langle[\hat{A}(t), \hat{B}(t')]\rangle.$$

Отсюда, рассматривая отдельную фурье-компоненту статического параметра порядка, можно получить выражения для изменения его самого ($\hat{O} = \hat{\tilde{\mathfrak{A}}}$):

$$\delta\tilde{\mathfrak{A}} = -\langle\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}, \delta\hat{H}'\rangle, \tag{8.2}$$

и энергии ($\hat{O} = \hat{H}$) с учетом (7.4):

$$\delta\mathscr{E} = \delta\langle\hat{H}\rangle = -\delta H' = \langle\hat{H}', \delta\hat{H}'\rangle. \tag{8.3}$$

*) Все сказанное в этом разделе относится и к случаю ненулевой температуры, когда речь должна идти об изменении соответствующего термодинамического потенциала (малые добавки к разным потенциалам, выраженные через соответствующие переменные, равны друг другу).

**) На другом языке перестройке среды отвечает изменение лишь ее матрицы плотности, но не самого оператора $\hat{O}$, что также ведет к формуле Кубо (см. (1.3)).

Подстановка этих выражений в (8.1) дает соотношение $\hat{H}' = \lambda\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}$. С помощью (8.2) и следующего из (7.2) равенства $\langle\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}, \hat{\tilde{\mathfrak{A}}}\rangle = \tilde{\mathfrak{R}}$ находим $\delta\lambda = -\delta\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}/\tilde{\mathfrak{R}}$, а с помощью (8.3) — выражение $\mathscr{E} = \lambda^2\tilde{\mathfrak{R}}/2$. Полагая величину параметра порядка малой, находим окончательные выражения для эффективного гамильтониана

$$\hat{H}' = -\frac{\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}(\mathbf{k})\,\delta\tilde{\mathfrak{A}}(\mathbf{k})}{\tilde{\mathfrak{R}}(0, \mathbf{k})} \tag{8.4}$$

и для первого (квадратичного) члена функционала Ландау

$$\mathscr{E} = \frac{(\delta\tilde{\mathfrak{A}}(\mathbf{k}))^2}{2\tilde{\mathfrak{R}}(0, \mathbf{k})}. \tag{8.5}$$

Условие стабильности среды относительно малых флуктуации величины $\tilde{\mathfrak{A}}$ действительно совпадает с (7.6), откуда и следуют неравенства (6.1), (6.3) (по поводу (6.2) см. следующий раздел).

При принудительном упорядочении среды за счет внешнего воздействия из (7.1), (7.2), (7.5) следует соотношение

$$\delta\tilde{\mathfrak{A}}(0, \mathbf{k}) = \tilde{\mathfrak{R}}(0, \mathbf{k})\,\delta\mathfrak{J}(0, \mathbf{k}). \tag{8.6}$$

Сопоставляя его с (8.4) и переходя в координатное представление, имеем

$$\hat{H}' = -\int d\mathbf{x}\,\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}\,\delta\mathfrak{J}. \tag{8.7}$$

Если закрыть глаза на отличие величин $\hat{\mathfrak{A}}$ и $\hat{\tilde{\mathfrak{A}}}$, то выражение (8.7) совпадает с гамильтонианом внешнего воздействия на среду (3.3). Это соответствует известному утверждению о том, что упорядоченное состояние среды можно рассматривать как равновесное состояние в некотором специально подобранном внешнем поле, величина которого определяется соотношением (8.6). Видно, однако, что такое утверждение в буквальном смысле несправедливо, хотя, как оказывается, в несколько преобразованной форме его можно использовать при термодинамическом рассмотрении упорядоченных сред (см. ниже, раздел 9).

Переходим к выводу конкретного вида функционала Ландау в электродинамике материальной среды, опуская для сокращения записи символ δ у параметра порядка. В отсутствие внешнего поля можно не делать различия между $\tilde{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}$, выбирая в качестве параметра порядка эту последнюю величину, т. е. ρ и $\mathbf{j}$ (или $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$). Используя (8.5), (7.8) и (7.9), находим соответственно в электрическом и магнитном случаях

$$\mathscr{E} = \frac{E^2}{2(1-\varepsilon^{-1})}, \qquad \mathscr{E} = \frac{B^2}{2(\mu-\varkappa)},$$

где величины ε, μ и $\varkappa$ отнесены к аргументам $\omega = 0$ и $\mathbf{k}$ (см. (7.10)). Приведенные выражения нельзя никоим образом смешивать с величинами $\varepsilon E^2/2$ и $B^2/2\mu$, определяющими энергию среды во внешнем поле. Именно такое смешение приводило к неверному выводу о положительности ε.

В присутствии внешнего поля функционал Ландау слагается из выражения (8.5) и добавки — энергии взаимодействия параметра порядка с внешним полем и энергии самого этого внешнего поля. Согласно (3.3) эта добавка равна $-\tilde{\mathfrak{A}}\mathfrak{J}-(\mathfrak{A}-\tilde{\mathfrak{A}})\mathfrak{J}/2$, и с учетом (7.5) функционал Ландау можно записать в виде

$$\mathcal{E}=\frac{(\tilde{\mathfrak{A}}-\tilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{J})^2}{2\tilde{\mathfrak{R}}}-\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{J}^2}{2}. \tag{8.8}$$

Его варьирование по $\tilde{\mathfrak{A}}$ при фиксированном $\mathfrak{J}$ дает правильное равновесное соотношение (8.6), а в самой равновесной точке получается правильное выражение для энергии среды во внешнем поле $D^2/2\varepsilon$ и $-\mu H^2/2$, создаваемом внешними зарядами и токами (выражение же $B^2/2\mu$, приведенное выше, отвечает воздействию полным током сверхпроводящего соленоида [2]).

Раскрывая (8.8), удобно ввести поляризацию среды $\mathbf{P}=\mathbf{D}-\mathbf{E}$ и ее намагничение $\mathbf{M}=\mathbf{B}-\mathbf{H}$. Тогда, согласно (7.8), (7.9),

$$\tilde{\mathfrak{A}}=\frac{i\mathbf{kP}}{k^2},\qquad \tilde{\mathfrak{A}}=i\,[\mathbf{k},\ \mathbf{M}-(\varkappa-1)\,\mathbf{H}]. \tag{8.9}$$

Существенно, что параметр порядка в магнитном случае не сводится к намагничению, а содержит дополнительное (диамагнитное) слагаемое, которое удаляет из намагничения его быстро релаксирующую часть, связанную с прецессией орбит во внешнем поле и не имеющую отношения к параметру порядка как таковому. Окончательно в электрическом случае

$$\mathcal{E}=\frac{[\mathbf{P}-(1-\varepsilon^{-1})\,\mathbf{D}]^2}{2\,(1-\varepsilon^{-1})}+\frac{D^2}{2\varepsilon}, \tag{8.10}$$

в магнитном случае

$$\mathcal{E}=\frac{[\mathbf{M}-(\mu-1)\,\mathbf{H}]^2}{2\,(\mu-\varkappa)}-\mu\frac{H^2}{2}. \tag{8.11}$$

Последнее выражение имеет в раскрытой форме вид

$$\mathcal{E}=\frac{M^2}{2\,(\mu-\varkappa)}-\frac{\mathbf{MH}\,(\mu-1)}{\mu-\varkappa}+\ldots,$$

сильно отличающийся от приведенного в разделе 1 и вполне совместимый с диамагнетизмом неупорядоченной среды. Это снимает противоречие, о котором шла речь в примере 2) раздела 1. Более того, и в упорядоченном состоянии со спонтанным током нижняя граница магнитной проницаемости оказывается равной не единице (как это следовало бы из приведенного в разделе 1 выражения), а величине $\varkappa$. Поэтому бытующее утверждение, что векторный тип параметра порядка предопределяет парамагнитный характер отклика, в действительности безосновательно, так что принципиальная возможность существования аномальных диамагнетиков как сред со спонтанными токами в основном состоянии (при малых, но отличных от нуля значениях $\mathbf{k}$; см. раздел 6) сомнений не вызывает.

9. УСТОЙЧИВОСТЬ СРЕДЫ И ФУНКЦИОНАЛ ЛАНДАУ (ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

Приведенного выше динамического рассмотрения, основанного на гамильтониане (3.3) и существовании оператора $\tilde{\mathfrak{A}}$, недостаточно уже потому, что им не охватывается функционал Ландау для сегнетоэлектрического упорядочения и неравенство (6.2): функция отклика ε **не есть обобщенная** восприимчивость. От этого недостатка свободен более общий термодинамический подход, который обычно и используется для вывода функционала Ландау и условий устойчивости. Однако в рамках стандартной термодинамической схемы возникают трудности с описанием диамагнетизма. Результаты раздела 8 подсказывают, как должна быть изменена эта схема, чтобы она стала универсальной.

Сначала мы переведем на термодинамический язык результаты раздела 8. Пусть среда подвергнута внешнему воздействию $\mathfrak{J}$, ведущему к появлению параметра порядка $\tilde{\mathfrak{A}}$, величина которого определяется формулой (8.6). Соответствующее изменение энергии $\mathfrak{E}(\mathfrak{J})$, представляющее собой функционал от $\mathfrak{J}$, определяется средним значением (3.3):

$$\delta\mathfrak{E}(\mathfrak{J}) = -\mathfrak{A}\delta\mathfrak{J} = -\tilde{\mathfrak{A}}\delta\mathfrak{J} - (\mathfrak{A} - \tilde{\mathfrak{A}})\,\delta\mathfrak{J}. \tag{9.1}$$

Здесь первое слагаемое — работа, непосредственно затраченная на упорядочение среды, второе содержит изменение энергии внешнего воздействия в пустоте, а также (в магнитном случае) работу, связанную с прецессией во внешнем поле. Второе слагаемое не имеет отношения к упорядочению (изменению динамических переменных среды) и должно быть опущено. Переход к интересующему нас функционалу $\mathfrak{E}(\tilde{\mathfrak{A}})$, отвечающий замене аргумента, осуществляется в термодинамике преобразованием Лежандра

$$\delta\mathfrak{E}(\mathfrak{A}) = \delta\mathfrak{E}(\mathfrak{J}) + \delta(\tilde{\mathfrak{A}}\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}\delta\tilde{\mathfrak{A}}, \tag{9.2}$$

где величина $\mathfrak{J}(\tilde{\mathfrak{A}})$ определяется (8.6). Легко видеть, что соотношения (9.2) и (8.5) точно эквивалентны со всеми вытекающими отсюда следствиями, относящимися к виду функционала Ландау и условий стабильности.

Физически изложенная процедура соответствует (с оговоркой об отличии величин $\mathfrak{A}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$; см. раздел 8) так называемому принципу Леонтовича [35]: чтобы найти энергию неравновесного состояния с данным значением параметра порядка, нужно сделать это состояние равновесным путем включения соответствующего внешнего поля, а затем вычесть из энергии среды в таком поле «лишнюю» работу, затраченную на его включение. Такое вычитание и отвечает преобразованию Лежандра. Нужно подчеркнуть, что в электрическом случае замена $\mathfrak{A}$ на $\tilde{\mathfrak{A}}$ имеет «невинный» характер, отвечая замене $\mathbf{E}$ на $-\mathbf{P}$, причем первое слагаемое (9.1) имеет прямой смысл энергии диполя во внешнем поле $-\mathbf{P}\delta\mathbf{D}$. Однако в магнитном случае из-за отличия параметра порядка от намагничения (см. (8.9)) подобная простая картина уже не реализуется — в конечном счете из-за наличия диамагнитных эффектов.

Переходя к случаю, когда упорядочение происходит в заданном полном (а не внешнем, как выше) поле и когда динамический подход непригоден, подчеркнем, что и в этом случае соотношение (9.2) имеет место. При этом нужно исходить из выражения (9.1) как из первичного термодинамического соотношения, а переход от $\mathfrak{A}$ к $\tilde{\mathfrak{A}}$ осуществляется вычитанием членов, прямо связанных с (фиксированным) полным полем. В наиболее простом электрическом случае (упорядочение внутри конденсатора с заданной разностью потенциалов, т. е. с заданным полем $\mathbf{E}$; см. раздел 3) изменение энергии среды равно известному выражению $-\rho^e\delta\varphi$, что ведет к $\mathfrak{J} = \varphi$ и $\mathfrak{A} = \rho^e = \rho - \rho^i$, откуда $\tilde{\mathfrak{A}} = -\rho^i$ *). Соотношение (9.1) принимает при этом вид $-\mathbf{P}\delta\mathbf{E}$, что отвечает просто энергии диполя в заданном поле $\mathbf{E}$.

Соответственно, функционал Ландау для сегнетоэлектрического упорядочения имеет вид: при $\mathbf{E} = 0$ (параметр порядка $\mathbf{D}$)

$$\mathfrak{E} = \frac{D^2}{2(\varepsilon - 1)}, \tag{9.3}$$

при произвольном $\mathbf{E}$

$$\mathfrak{E} = \frac{[\mathbf{P} - (\varepsilon - 1)\mathbf{E}]^2}{2(\varepsilon - 1)} - \frac{\varepsilon E^2}{2}. \tag{9.4}$$

*) Эти выражения практически не отличаются от (3.6).

Вытекающее отсюда условие устойчивости среды точно совпадает с (6.2), причем из (9.3) прямо видно, почему это неравенство относится только к значению $\mathbf{k} = 0$ (см. раздел 3). Дело в том, что в свободной от воздействий среде, внутри которой внешних зарядов нет и потому справедливо уравнение $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, параметр порядка $\mathbf{D}$ может возникнуть лишь при $\mathbf{k} = 0$.

Из сравнения (8.10) и (9.5) при отсутствии внешних воздействий видно, что разность этих выражений, отвечающих упорядочению внутри соответственно закороченного и незаряженного конденсаторов, положительна (и равна $P^2/2$). Это еще одно свидетельство нестабильности среды с однородным спонтанным электрическим полем (см. раздел 6), которому выгодно превратиться в однородную же индукцию.

Найденные в последних двух разделах результаты согласуются с утверждениями раздела 6 о физическом смысле границ допустимой области изменения проницаемостей среды. Рассмотренные в этих разделах вопросы частично обсуждались в работах [14, 18–20].

10. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАГНИТНОГО МОНОПОЛЯ

В этом заключительном разделе статьи обсуждаются вопросы электродинамики среды, подвергнутой воздействию со стороны магнитного заряда (монополя). Сама же среда предполагается не содержащей монополий. Излагаемые ниже вопросы, помимо их самостоятельного интереса, позволяют лучше понять особенности обычной электродинамики, давая возможность взглянуть на нее как бы со стороны.

Уравнения Максвелла с монопольными источниками, восстанавливающими симметрию между электрическим и магнитным полями, отличаются от (2.1в, г) лишь уравнениями (в, г), которые имеют теперь вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = -\tilde{\mathbf{j}}^e \ \text{(в)}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \tilde{\rho}^e \ \text{(г)}, \tag{10.1}$$

где $\tilde{\rho}^e$, $\tilde{\mathbf{j}}^e$ — плотности внешних заряда и тока монополей, также связанные уравнением непрерывности. В уравнения (10.1) не входят индуцированные заряд и ток монополей, поскольку последних нет в составе среды. Индуцированные же заряд и ток обычных частиц, входящие в уравнения (2.1а, б), по-прежнему даются формулами (2.3).

Однако в этих формулах уже нельзя произвести перегруппировку членов, о которой говорилось в разделе 2 и которая меняет величины $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$: поля $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{B}_t$ теперь не связаны жестким соотношением (2.1в) (см. (10.1в)). Поэтому в электродинамике монополя величины $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ не произвольны (в рамках соотношений (2.5), (2.8)), как в обычной электродинамике, а приобретают самостоятельный смысл величин, описывающих отклик среды на независимые воздействия со стороны полей $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{B}_t$ *). Теперь число независимых воздействий на среду равно не двум, как раньше, а трем — $\mathbf{E}_l$, $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{B}_t$, чему соответствуют три независимые характеристики среды — ε, η и одна из величин $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mu}$, по-прежнему связанных соотношением (2.5). Сказанное ясно из выражений, обобщающих (2.9),

$$\rho^i = (\varepsilon^{-1} - 1)\rho^e, \quad \mathbf{j}_t^i = (\eta^{-1} - 1)\mathbf{j}_t^e + (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\mu}^{-1})\,\omega\,[\mathbf{k}\tilde{\mathbf{j}}^e]\,[(k^2 - \omega^2)\,\eta]^{-1} \tag{10.2}$$

— отклик на обычный ток определяется лишь величиной η, отклик на монопольный ток — иной комбинацией величин $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mu}$, а именно $\tilde{\varepsilon} - (1/\tilde{\mu})$.

*) Из уравнений (2.1а, б) и (10.1) нетрудно видеть, что, комбинируя обычный и монопольный токи, можно обратить в нуль либо поперечное электрическое, либо поперечное магнитное поля.

Отметим, что с четвертым типом поля — продольным полем $\mathbf{B}_l$ —не связано никакого воздействия на среду, так как его источники не входят в (10.2). Обратно, это поле и не чувствует среды, характеристики которой не входят в уравнение (10.1г).

Из сказанного выше ясно, что в монопольной электродинамике нужен специальный динамический расчет величин $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ по отдельности. Обычно, однако, просто отождествляют $\tilde{\varepsilon}$ с ε и $\tilde{\mu}$ с μ (см. (2.6)), для чего, очевидно, имеется не больше оснований, чем для выбора $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_t$, $\tilde{\mu} = 1$ (см. (2.7)). Именно этот выбор оказывается оправданным для классической (неквантовой) среды. В этом случае функция распределения, определяющая индуцированный ток, удовлетворяет кинетическому уравнению с силовым членом $e\,(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])\,\nabla_{\mathbf{p}} f_0$, где $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{p}$ — импульс. В равновесной среде f_0 зависит лишь от энергии, градиент которой по $\mathbf{p}$ равен $\mathbf{v}$. Поэтому магнитное поле на среду непосредственно не действует, что согласно (2.3) и дает $\tilde{\mu} = 1$.

Именно этот факт и снимает трудности, о которых шла речь в примере 3) раздела 1. В интересующем нас случае $\omega \ll k \ll \lambda^{-1}$ (вдали от медленного монополя, λ — лондоновская глубина проникновения) сверхпроводник можно описать как классическую идеальную проводящую жидкость. Соответственно $\mu = k^2\lambda^2$ (идеальный диамагнетизм), ε имеет конечную величину, $(k^2 - \omega^2)\,\eta = \lambda^{-2}$, $\tilde{\varepsilon} = -\omega^2\lambda^{-2}$, $\tilde{\mu} = 1$. С другой стороны,

$$\mathbf{B}_t \doteq i\omega\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathbf{j}}_t^e\,[(k^2-\omega^2)\,\eta]^{-1} \tag{10.3}$$

(см. (2.1а, б), (10.1)). При $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ величина B_t исчезает вместе с ω (соскоростью монополя) и эффект Мейсснера действительно отсутствует (см. раздел 1). Однако при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_t$ величина (10.3) принимает вид $\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_l$, где

$$\mathbf{B}_0 = -\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t\,\tilde{\mathbf{j}}^e$$

— «струна» по траектории движения монополя. Поэтому полное поле $\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_t$ испытывает эффект Мейсснера и скачок магнитного потока действительно имеет место.

Важно отметить, что если бы обычно практикуемое отождествление $\tilde{\varepsilon}$ с ε и $\tilde{\mu}$ с μ было правильно, то применительно к средам, для которых $E\,(0, \mathbf{k}) < 0$ и нарушены дисперсионные соотношения для ε (см .раздел 6), мы столкнулись бы с крайне необычным явлением быстрой, «взрывной» остановки монополя с перекачкой его кинетической энергии и в энергию поля в среде, т. е. в конечном счете в излучение и тепло. Об этом сигнализирует уже выражение (10.3): полюс $\tilde{\varepsilon}$ в точке $\omega = i\Gamma$ (см. (4.7)) должен обходиться в соответствии с условием причинности, что и ведет к экспоненциальному росту поля $\mathbf{B}_t \sim \exp\,(\Gamma t)$ (см. раздел 4 и рис. 4). Существенно, что этот рост вовсе не означает нестабильности среды как таковой: по предположению она не содержит монополей и поэтому ее собственные флуктуации не могут имитировать воздействия со стороны монополя, как это было бы в случае воздействия со стороны заряда. Именно это обстоятельство ведет к тому, что функция отклика на монопольный ток (см. второе соотношение (10.2)) не обязана быть аналитичной в верхней полуплоскости частоты, а функция $\tilde{\varepsilon}\,(\omega, \mathbf{k})$ может иметь полюс в этой области. Все сказанное — отражение простого факта, состоящего в различной природе частиц среды и источников внешнего воздействия на нее.

Последовательное рассмотрение обсуждаемого эффекта должно основываться на обобщении изложенной в разделе 5 теории энергетических потерь с включением в нее монопольных источников. По-прежнему, исходя из выражения (5.3), но используя новые уравнения Максвелла (10.1) и уравнения (2.1а, б), легко найти выражение, обобщающее (5.4):

$$Q = -\int d\mathbf{x}\,(\mathbf{j}^e\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{j}}^e_t\mathbf{B}). \tag{10.4}$$

В случае аналитической в верхней полуплоскости частоты величины $\tilde{\varepsilon}$ подстановка сюда выражения (10.3) ведет к формуле, аналогичной (5.1), для полных потерь монополя

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\,Q = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega\omega \int \mathrm{d}^3k\,\mathrm{Im}\,\{\tilde{\varepsilon}\,[(k^2-\omega^2)\,\eta]^{-1}\}\,|\tilde{\mathbf{j}}^e_t|^2. \tag{10.5}$$

При наличии же у величины $\tilde{\varepsilon}$ полюса (см. выше) из (10.4) и уравнения движения $M\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = -Q$ (M и $\mathbf{v}$ — масса и скорость монополя) можно действительно убедиться в быстром замедлении его движения даже при очень большом значении величины M.

Нужно отметить, что обсуждающееся в литературе (см., например, [36]) выражение для потерь монополя отличается от (10.4) заменой **B** на **H**. Вывод этого довольно неестественного результата (действующая на монополь сила должна определяться, казалось бы, средним полем в среде **B**, а не полем в пустоте **H**) основан на балансе энергии при сохранении прежнего выражения (5.5) для изменения энергии среды. Между тем само это выражение базируется на законе индукции Фарадея (2.1в) (см. [2]), несправедливом в электродинамике монополя. Уравнение же (10.1в) ведет к выражению

$$W = \int \mathrm{d}\mathbf{x}\,(\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{j}}^e\,(\mathbf{B}-\mathbf{H})),$$

находящемуся в полном соответствии с (10.4). Добавим, что последнее в сочетании со сказанным выше о продольном поле $\mathbf{B}_l$ ведет к полному отсутствию продольных потерь монополя,, в то время как из выражения, содержащего поле **H**, следовало бы существование таких потерь.

Возвращаясь к эффекту «взрыва» монополя, укажем, что для классических сред с $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_t$ он невозможен. Это связано с отмеченной в разделе 5 аналитичностью величины ε_t. Вопрос о существовании квантовых сред, где этот эффект был бы возможен, остается пока открытым.

В заключение необходимо подчеркнуть, что все сказанное выше относилось к линейной электродинамике монополя, имеющей дело со сравнительно слабыми полями. Между тем поля, создаваемые монополем, заряд которого как минимум в 137/2 раз больше заряда электрона, отнюдь не слабы даже в наиболее благоприятном случае медленного движения монополя относительно среды. Соответственно нужно учитывать нелинейность функций отклика по полю, наличие специфических членов типа [**BE**] (эффект Фарадея) в выражении (2.3) для индуцированного тока и т. п. Исследования по нелинейной электродинамике монополя, по существу, только начались (см., например, [36]). Во всяком случае, имеются реальные ситуации, когда справедлива линейная электродинамика, например черенковские потери монополя в классической среде определяются расстояниями от него, превышающими длину волны излучения, где поле монополя уже достаточно мало и справедлива линейная электродинамика.

Подробности, относящиеся к рассмотренным в этом разделе вопросам, можно найти в работах [37].

Автор благодарен многим лицам, в особенности В. Л. Гинзбургу, Г. В. Домогацкому, А. А. Комару, А. Б.Мигдалу, Е. Л. Фейнбергу, И.М.Франку и участникам руководимых ими семинаров, а также школы МИФИ-85 за ценные дискуссии. Автор особенно признателен О. В. Долгову, Е. Г. Мак-

симову и В. В. Лосякову, в сотрудничестве с которыми был получен ряд оригинальных результатов, вошедших в эту статью.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
3. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1979.
4. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.— М.: Атомиздат, 1961.
5. Пекар С. И. Кристаллооптика и добавочные световые волны.— Киев: Наукова думка, 1982.
6. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики.— М.: Наука, 1977.
7. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости//Под ред. В. Л. Гинзбурга, Д. А. Киржница.— М.: Наука, 1977.
8. Kirzhnits D. A., Maksimov E. G., Khomskii D. I.//J. Low Temp. Phys. 1973. V. 10. P. 79.
9. Долгов О. В., Максимов Е. Г.//УФН. 1982. Т. 138. С. 95.
10. Брандт Н. Б., Кувшинников С. В., Русаков А. П., Семенов М. В.//Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 27. С. 37.
Mattes B. L., Foiles C. L.//Physica. Ser. B. 1985. V. 125. P. 139.
11. Волков Б. А., Гинзбург В. Л., Копаев Ю. В.//Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 27. С. 221.
Ginzburg V. L., Gorbazevitch A. A., Kopaev Yu. V., Volkov B. A.//Sol. State Commun. 1984. V. 50. P. 339.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1.— М.: Наука, 1977.
13. Игнатов А. М., Рухадзе А. А.//УФН. 1981. Т. 135. С. 171.
14. Долгов О. В., Киржниц Д. А., Лосяков В. В.//ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1894.
15. Фрадкин Е. С.//Тр. ФИАН СССР. 1965. Т. 29. С. 7.
16. Пайнс Д., Нозьер Ф. Теория квантовых жидкостей.— М.: Мир, 1967.
17. Martin P.//Phys. Rev. 1967. V. 193. P. 161.
18. Киржниц Д. А.//УФН. 1976. Т. 119. С. 357.
19. Dolgov O. V., Kirzhnits E. G., Maksimov E. G.//Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P. 81.
20. Долгов О. В., Максимов Е. Г.//УФН. 1981. Т. 135. С. 441.
21. Киржниц Д. А., Сазонов В. Н.//Эйнштейновский сборник. 1973.— М.: Наука, 1974.— С. 84.
22. Чонка П.//Ibidem.— С. 178.
23. Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения.— М.: Мир, 1976.
24. Леонтович М. А.//ЖЭТФ, 1971. Т. 40. С. 907.
25. Bludman S. A., Ruderman M. A.//Phys. Rev. Ser. D. 1970. V. 1. P. 3243.
26. Лосяков В. В.//Кр. сообщ. физ., ФИАН СССР. 1983. № 5. С. 35.
27. Киржниц Д. А., Файнберг В. Я., Фрадкин Е. С.//ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 239.
28. Kirzhnits D. A., Linde A. D.//Phys. Lett. Ser. B. 1978. V. 73. P. 323.
29. Долгов О. В., Максимов Е. Г.//Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 28. С. 3.
30. Fasolino A., Parinello M., Tosi M.//Phys. Lett. Ser. A. 1978. V. 66. P. 119.
31. Лосяков В. В. Автореферат диссертации... канд. физ.-мат. наук.— М.: МФТИ, 1984.
32. Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел.— М.: Наука, 1967.
33. Киржниц Д. А.//Проблемы теоретической физики: Памяти И. Е. Тамма.— М.: Наука, 1972.— С. 74.
34. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
35. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.
36. Theory and Detection of Magnetic Monopole/Ed. N. Craigie.— Singapore: World Scientific, 1986.
37. Киржниц Д. А. Теория функций отклика в обычной и монопольной электродинамике (лекции).— М.: МИФИ, 1985.
Киржниц Д. А., Лосяков В. В.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 226.