

537.84

**ГИДРОМАГНИТНОЕ ДИНАМО КАК ИСТОЧНИК ПЛАНЕТАРНОГО,
СОЛНЕЧНОГО И ГАЛАКТИЧЕСКОГО МАГНЕТИЗМА*****Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин***

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	263
2. Природа земного магнетизма	266
3. Солнечный цикл	270
3.1. Движение солнечной плазмы. 3.2. Основной цикл. 3.3. Крутильные вол- ны. 3.4. Магнитогидродинамический хаос.	
4. Галактическое магнитное поле	279
Список литературы	282

1. ВВЕДЕНИЕ

Гидромагнитное динамо означает усиление и поддержание магнитного поля движениями проводящей жидкости. Способность гидродинамических движений действовать подобно динамо-машине без проводов и обмоток была впервые на физическом уровне указана Дж. Лармором¹ в связи с объяснением природы земного и солнечного магнетизма.

Однако затем после критической работы Каулинга² исследования сместились в математическую сторону, к попыткам установить существование динамо путем построения идеализированных примеров и доказательства теорем. На этом пути достигнуты значительные успехи, главным образом в кинематической постановке, когда не учитывается обратное влияние генерируемого магнитного поля на движение. Построено много примеров динамо для ламинарных течений³⁻⁵, особо интересны течения со стохастическими линиями тока⁶⁻⁸. Развита методика вывода и решения уравнений для среднего магнитного поля в турбулентных потоках^{4, 9, 10}. Исследования высоких моментов обнаружили неоднородный, перемежаемый характер генерируемого поля, оно концентрируется в отдельные жгуты или слои^{10, 11}.

Кинематические динамо удалось классифицировать по поведению скорости роста поля при больших магнитных числах Рейнольдса, разделив их на медленные и быстрые^{10, 12, 13}. Наглядной иллюстрацией медленного динамо может служить модель Х. Альвена^{10, 14}, в которой начальная замкнутая трубка магнитных линий растягивается вдвое, распадается на две трубки после сближения вдоль одного из диаметров и действия магнитной омической диффузии в месте сближения, и затем происходит сложение трубок без поворота в одну с удвоенным магнитным потоком. Рост поля в этой модели решающим образом зависит от магнитной диффузии и прекращается, когда последняя становится исчезающе малой. Моделью быстрого динамо, скорость роста которого не зависит от малой магнитной диффузии, служит хорошо известная восьмерка, предложенная одним из авторов (см.^{10, 13, 15}).

Таким образом, с математической точки зрения существование гидромагнитного динамо доказано. Как же обстоит дело с первоначальным вопросом, с физическими приложениями динамо?

Движущаяся проводящая жидкость (плазма) является естественной составляющей большинства небесных тел, ее используют также в современных крупных технических установках: МГД генераторах, реакторах-размножителях с жидкометаллическим теплоносителем, металлургических устройствах. Относительную роль движений, способных генерировать поле, и магнитной диффузии ν_m принято характеризовать безразмерным магнитным числом Рейнольдса $Re_m = lv/\nu_m$, где l и v — пространственный и амплитудный масштабы поля скорости. Оно равно отношению темпа генерации магнитной энергии к джоулевой диссипации (подразумевается отсутствие промежуточных масштабов). В таблице приведены грубые значения Re_m

Оценочные параметры ряда движущихся проводящих жидкостей

	l , м	v , см/с	ν_m , см ² /с	Re_m
МГД-установка	10^2	$6 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^{-3}$
Реактор-размножитель	$2,5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^3$	80
Земное ядро	10^8	$4 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^4$	160
Конвективная оболочка Солнца	$2 \cdot 10^{10}$	10^5	10^7	$2 \cdot 10^8$
Диск Галактики	10^{21}	10^6	10^{21}	10^6

для нескольких технических и космических объектов. Магнитное число Рейнольдса практически для всех космических плазм значительно больше единицы, т. е. движения преобладают над магнитной диффузией. При этом можно выделить области, где магнитная энергия превышает кинетическую и тепловую, например над поверхностью Солнца, — в них поле управляет движениями, и области, в которых магнитная энергия меньше кинетической, — в них поле может усиливаться гидромагнитным динамо.

Для действия динамо недостаточно условия $Re_m \gg 1$. В общем смысле необходима еще топологическая сложность поля скорости. В ламинарных течениях, дающих динамо, поле скорости нетривиально, например течение не может быть плоским¹⁶. Турбулентные течения достаточно запутаны, требования к топологической сложности выполняются автоматически. Обычно для генерации среднего магнитного поля достаточно, чтобы не обращалась в нуль средняя спиральность $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$. Поля с нулевым средним генерируются и в отсутствие средней спиральности^{17, 18}. При $Re_m \gg 1$ случайное нестационарное течение общего вида приводит к росту магнитного поля¹⁰.

Итак, для выяснения вопроса о возникновении динамо в данной области плазмы достаточно оценить магнитное число Рейнольдса и установить характер движений, например показать, что они являются турбулентными. Хотя турбулентность типична, неопределенность параметров конкретного объекта не всегда позволяет надежно доказать, турбулентны ли его движения. Так обстоит дело в случае ядра Земли, оценки кинематической вязкости которого, к сожалению, пока «варьируются» в пределах девяти порядков. Нет полной определенности и в знании крупномасштабных течений, например дифференциального вращения и меридиональной циркуляции в земном ядре. Турбулентный характер конвективных движений на Солнце выявлен прямыми наблюдениями гранул и супергранул. В последнее время благодаря гелиосейсмологии устанавливается зависимость угловой скорости Солнца от глубины¹⁹. Определение поля движений на звездах, наблюдаемых в виде точечных объектов, — дело тонкое, но в принципе разрешимое как наблюдательно, так и теоретически.

Наблюдательное определение поля скорости осложнено тем, что интересные для динамо области находятся внутри небесных тел, большинство из которых удалено от наблюдателя. Исключением является газовый диск

Галактики. Здесь мы находимся внутри динамо-области и располагаем прямыми данными о распределении скорости вращения вдоль радиуса диска и, в принципе, о случайной составляющей мелкомасштабных движений.

Для теории гидромагнитного динамо лучше всего иметь теоретически рассчитанные поля скорости. Однако решение гидродинамических задач, требующих учета тяготения, стратификации, сил Кориолиса и других факторов, специфичных для небесных тел, пока продвинуто недостаточно. Успехи гидродинамики в этом направлении^{84, 85} чрезвычайно важны для теории динамо. Отметим в этой связи работы^{84, 85}.

Неопределенность поля скорости создает главные трудности на пути приложений теории динамо. Тем не менее благодаря использованию некоторых эмпирических, теоретических и гипотетических характеристик течений удалось получить целый ряд содержательных для приложений результатов. Обсуждению основных достижений и проблем приложений гидромагнитного динамо и посвящен настоящий обзор.

Некоторые следствия теории динамо в ее современном состоянии служат предметом критики. Необходимо различать преодолимые трудности (проблемы роста теории) и принципиальную невозможность объяснить происхождение магнитных полей некоторых объектов с помощью динамо. По нашему убеждению, главные проблемы земного, солнечного и галактического магнетизма могут быть решены только с помощью теории динамо. С другой стороны, магнетизм звезд с химическими аномалиями и, возможно, некоторых других объектов может иметь иную природу, химическую или тепловую. Такие отличные от динамо механизмы генерации магнитных полей, в частности, батарейного типа, подробно обсуждаются в представленном выше обзоре А. З. Долгинова⁸⁹. Эти механизмы могут действовать и параллельно с динамо. Важно, что динамо дает экспоненциальный рост поля ($H \sim e^{\gamma t}$), а батарейные эффекты — лишь степенной. Поэтому при наличии развитых движений динамо оказывается эффективнее. Отметим, что конечное поле зависит как от динамо, так и от начальных условий. Однако при $\gamma t \gg 1$ зависимость от начального состояния поля исчезает. В этом случае, как правило, появляется нелинейное влияние поля на движение.

Возможен синтез динамо с батарейными механизмами. Такой подход, названный «полудинамо», предложен и развивается Э. М. Дробышевским²⁰. Кроме того, для действия динамо обязательно нужно начальное, затравочное магнитное поле, которое должно порождаться каким-то другим механизмом.

Таким образом, гидромагнитное динамо не является обособленным механизмом генерации магнитного поля и в указанном выше смысле не претендует на полную универсальность. Просто это физический процесс, который эффективен в движущейся проводящей среде, составляющей большую часть небесных тел.

Усиление магнитного поля с необходимостью приводит к нелинейной ситуации, когда поле само влияет на движение. Об этом говорят и наблюдения магнитных полей, как правило, достигающих квазистационарного (часто колебательного) состояния и эволюционирующих вместе с движениями. Поэтому гидромагнитное динамо должно действовать в нелинейном режиме. К счастью, задача не сводится к полной магнитной гидродинамике. Обычно в среднем магнитная энергия остается малой по сравнению с кинетической, и нелинейность рассматривается упрощенно. Например, часто можно учитывать влияние поля на спиральность течения и пренебречь его воздействием на вращение и турбулентную диффузию, учесть подавление $\text{Re } \gamma$ при неизменной периодичности, определяемой $\text{Im } \gamma$, и т. п.

Ниже будут рассмотрены три основных приложения теории гидромагнитного динамо: природа земного магнетизма, солнечный цикл и усиление магнитного поля в Галактике. По каждому из них написано много обзоров и монографий (см., например,^{4, 9, 13, 21, 36}). Но поскольку мы переживаем

стадию активного развития представлений о космическом магнетизме и в особенности в связи с альтернативными механизмами, рассматриваемыми в обзоре А. З. Долгинова⁸⁹, уместно кратко, на качественном уровне обсудить динамо-подход, а также указать новые результаты, полученные в последнее время.

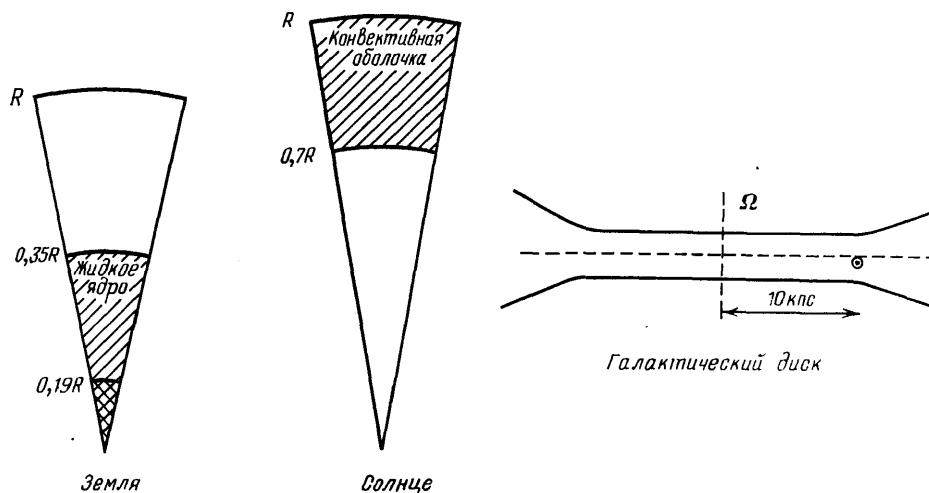


Рис. 1

Стремление к краткости заставило ограничиться анализом средних магнитных полей и оставить в стороне интересные для приложений вопросы, относящиеся к флуктуационным полям и перемежаемости. Схематический вид, в разрезе Земли, Солнца и газового диска Галактики показан на рис. 1.

2. ПРИРОДА ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА

Компас был изобретен в Китае во втором веке и проник в Европу в тринадцатом. Однако поворот его стрелки приписывали «силе, исходящей от Полярной звезды», а не земному магнитному полю²². Психологическую трудность, связанную с переходом от обыкновенного магнита к большому магниту — Земле, первым преодолел Гильберт в 1600 г. В 1838 г. Гаусс предложил описывать магнитное поле Земли с помощью разложения по сферическим гармоникам. Коэффициенты разложения определяются прямым измерением поля на поверхности и в наше время также со спутников.

В первом приближении земной магнит представляется диполем, наклоненным к оси вращения под углом 11° и имеющим на магнитном экваторе напряженность $0,3 \text{ Гс}$. К настоящему времени измерены амплитуды более десятка следующих за диполем гармоник, которые уменьшаются по степенному закону с изломом на восьмой гармонике.

Оправдано ли тянуть формальное разложение Гаусса? Дело в том, что действительное распределение поля по поверхности Земли является пятнистым. Остаточное поле (полное минус диполь) имеет вид конечного числа аномалий, занимающих области с размерами от сотен до двух тысяч километров. (Мы отвлекаемся от локальных магнитных аномалий типа Курской, которые имеют совсем другую природу.) Эмпирически иногда описывают это поле в виде полутора десятка диполей, дополнительных к основному и расположенных в ядре или на границе ядра с мантией Земли.

Земное магнитное поле не статично. Характерные времена его вариаций простираются от примерно 10 лет (более короткие вариации экранируются скин-эффектом в нижней мантии) до возраста Земли, 4,6 млрд лет.

Вариации поля важны для оценки характерных скоростей в ядре Земли. Например, западный дрейф $0,18^\circ/\text{год}$ по долготе остаточного поля соответ-

ствуется скорости $4 \cdot 10^{-2}$ см/с в верхней части ядра. Однако необходима дополнительная информация, чтобы отождествить эту скорость с конвекцией или дифференциальным вращением или скоростью каких-либо волн. Наблюдаются хаотические флуктуации направления дипольного момента с характерными временами 10^3 — 10^4 лет. При усреднении по этим флуктуациям средний земной диполь будет ориентирован вдоль оси вращения. Следовательно, вращение оказывает сильное влияние на эволюцию магнитного поля. За характерное время порядка 10^5 лет происходят обращения (инверсии) направления магнитного диполя. Процесс случайный³². Это одна из самых интригующих загадок нелинейной магнитной динамики Земли. Было бы наивным представлять себе обращение как переворот вектора дипольного магнитного момента, конец которого «проскакивает» по всем широтам. Скорее, в период обращения магнитное поле усложняется, оно мало похоже на дипольное, другие гармоники имеют сравнимую величину. Об этом говорит тот факт, что амплитуда полного поля понижается до 10 % и менее, а в обычном состоянии на дипольную моду приходится около 90 % напряженности.

Основным источником движений в земном ядре, по-видимому, служит уменьшение гравитационной энергии, связанное с ростом внутреннего ядра, $r < 0,19 R \equiv R_1$, благодаря опусканию тяжелой и всплыванию легкой фракций^{23–25}. Согласно сейсмическим данным эти фракции представляют собой железо и, по-видимому, серу и кислород (≤ 10 % по массе). Конвективная устойчивость определяется в основном вариацией плотности по глубине. Плотность является функцией трех переменных: давления, температуры и массовой концентрации легкой фракции $\rho = \rho(P, T, \xi)$. Исследования показали²⁵, что вариации состава существеннее температурных и во внешнем ядре возбуждается не тепловая конвекция, а именно конвекция состава.

Оценка скорости ламинарной конвекции состава с учетом быстрого вращения Земли дана Г. С. Голицыным²⁶ из соображений подобия:

$$v \approx C \left(\frac{Mg}{\Omega \rho} \right)^{1/2},$$

где $M = \langle \rho' v_r' \rangle$ — поток дефицита плотности, $\Omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость Земли, C — некоторая постоянная порядка единицы. В турбулентной конвекции зависимость от угловой скорости иная. Согласно Д. Стивенсону²⁷ $v \sim \Omega^{-1/4}$. Однако численные значения скорости конвекции для параметров земного ядра близки, порядка 0,1–0,2 см/с.

Неравномерность вращения Земли создает силу инерции $-\rho [\dot{\Omega} \mathbf{r}]$. Наиболее интересна прецессия земной оси, когда $\dot{\Omega} \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-2}$ (полный оборот оси по конусу раствором $23,5^\circ \times 2$ происходит за 25 800 лет). Угловая скорость прецессии зависит от динамического сжатия тела ϵ , которое различно для ядра и мантии. Это различие угловых скоростей прецессии приводит в движение жидкость внешнего ядра, заполняющую сферическую полость между мантией и внутренним твердым ядром. Несжимаемая жидкость в полости обладает собственной частотой $\Omega (1 + \epsilon)$. Поэтому действие вынуждающей силы $\mathbf{F} = -\rho [\Omega_0 [\Omega \mathbf{r}]]$ с частотой Ω приводит к большим скоростям почти твердотельного вращения $v_p \sim \epsilon^{-1} \Omega_p R_1 \sim 1 \text{ см/с}$ ²⁸, которые обладают той же частотой Ω . Деформации скорости, существенные для генерации магнитных полей, возникают путем трансформации энергии прецессии в кинетическую в вязком пограничном слое между мантией и ядром. Эффективность механизма трансформации низка, что породило скепсис в отношении роли прецессии^{29, 30}. Дополнительные трудности указаны в²⁷. Однако вопрос окончательно не снят, и прецессия обсуждается как возможный источник движений (динамо) Земли и планет³¹.

Течением, бесспорно способным генерировать магнитное поле в земном ядре, служит нетепловая конвекция состава. Остается невыясненным важ-

ный вопрос: ламинарно или турбулентно соответствующее поле скорости. Трудность связана с неопределенностью в знании кинематической вязкости⁴: $10^{-3} < \nu < 10^9$ см²/с. Обычно принимают значение $\nu = 10^{-2}$ см²/с, близкое к нижнему пределу. Тогда число Рейнольдса $Re = l\nu/\nu$ для $l = 10^8$ см, $\nu = 4 \cdot 10^{-2}$ м/с превышает 10^6 и конвекция должна быть турбулентной. Тем не менее многие исследователи геомагнитного динамо предпочитали стационарные ламинарные течения. Подробный анализ многочисленных динамо-решений в стационарных полях скорости выполнен Ю. А. Бродским³³; см. также³⁻⁵. Из-за трехмерности или несимметричности поля скорости теория ламинарного динамо представляет собой довольно сложную математическую конструкцию.

Турбулентное динамо, как это ни удивительно, проще и нагляднее ламинарного. В пределе больших магнитных чисел Рейнольдса развиты не только эффективные методы получения и решения уравнений для среднего поля

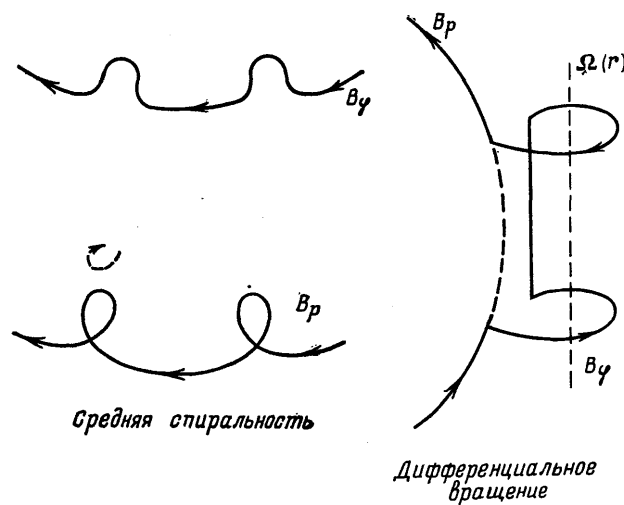


Рис. 2

и корреляционной функции^{4, 9, 10, 21}, но можно делать заключения даже о поведении истинного случайного магнитного поля в турбулентных течениях¹⁰.

В приложении к геодинамо чаще всего рассматривается только магнитное поле, усредненное по пульсациям в турбулентном случае и по азимуту или времени в ламинарном. Замечательно, что в обоих случаях источниками динамо служат одинаковые с физической точки зрения характеристики поля скорости: неоднородное (дифференциальное) вращение $\Omega(r, \theta)$ и средняя спиральность $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$.

Дифференциальное вращение порождает тороидальное магнитное поле B_ϕ из полоидального $\mathbf{B}_p = (B_r, B_\theta)$. Механизм наглядно поясняется на языке замороженных магнитных линий, т. е. в пренебрежении диссипацией. Когда величина $\nabla \Omega \mathbf{B}_p$ отлична от нуля, разные участки линии поля \mathbf{B}_p вращаются с различной скоростью, поэтому магнитная линия вытягивается в азимутальном направлении (рис. 2).

Средняя спиральность означает нарушение отражательной симметрии потока, или, иначе, выделенность направления винтовой закрутки. Она возникает благодаря действию кориолисовых сил в стратифицированной среде. Конкретнее механизм возникновения спиральности показан в следующем разделе. Спиральность $\langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ квадратична по скорости. Ее появление в усредненных уравнениях электродинамики, линейных по магнитному полю, обязано электрическому полю $[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ в законе Ома для движущейся среды. Среднее по пульсациям от электрического поля равно $\langle [\mathbf{v}'\mathbf{H}'] \rangle = \alpha \mathbf{B}$,

где $\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle$ — среднее магнитное поле, $\alpha = -(\tau/3) \langle \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle$ (τ — характерное время турбулентных движений, $\tau = l/v$).

Аппроксимируя область генерации слоем, толщина которого $2h$ много меньше радиуса внешнего ядра $R_2 \equiv 0,55R$, уравнение генерации для осесимметричного магнитного поля можно записать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R_\alpha \alpha(r, \theta) B + \Delta A, \quad (1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_\Omega \nabla \Omega \cdot \mathbf{B}_p + R_\alpha \operatorname{rot}_\varphi (\alpha \mathbf{B}_p) + \Delta B, \quad (2)$$

где $B \equiv B_\varphi$ — азимутальная компонента поля, A — азимутальная компонента вектор-потенциала полоидального поля, $\mathbf{B}_p = \operatorname{rot} A \mathbf{e}_\varphi$. Уравнения записаны в безразмерном виде, относительная величина источников в правых частях характеризуется числами

$$R_\alpha = \frac{R_2 |\alpha_{\max}|}{\beta}, \quad R_\Omega = \frac{R_2^2 \Omega_{\max}}{\beta}, \quad (3)$$

где R_2 — радиус внешнего ядра. В зависимости от интенсивности источников спиральности и дифференциального вращения в (2) выделяют два предельных режима генерации: в первом пренебрегают членом с дифференциальным вращением (α^2 -динамо), во втором — членом $R_\varphi \operatorname{rot} \alpha \mathbf{B}_p$ (α - Ω -динамо). Критерием чисто спирального динамо служит условие

$$R_\alpha^2 \gg R_\Omega$$

(см. например¹³), а не наивное $R_\alpha \gg R_\Omega$. Причина в том, что масштаб генерируемого поля также зависит от R_α . Амплитуды компонент поля в α^2 -динамо одного порядка, $|B_\varphi| \sim |B_p|$ ³⁶.

Уравнения (1, 2) в α^2 -приближении интегрировались численно в ряде работ (см. например, монографии^{4,9}) в сферической геометрии для заданной спиральности вида $\alpha(r) \cos \theta$, где угловая зависимость отражает антисимметрию кориолисовой силы при отражении в плоскости экватора. Критическое значение R_α , с которого начинается самовозбуждение поля, порядка 10. Первым исследователям казалось, что решения монотонные и главной гармоникой служит поле дипольного типа. Более тонкий анализ, выполненный асимптотическим методом типа ВКБ с малым параметром R_α^{-1} , обнаружил и мнимую часть скорости роста³⁴, причем $\operatorname{Im} \gamma / \operatorname{Re} \gamma \sim 0,1 R_\alpha^{-3}$. Принимая, что спиральность при малых числах Россби порядка скорости конвекции, $\alpha \sim v = 4 \cdot 10^{-2}$ см/с, получаем оценку периода колебаний $T \sim 10^8$ лет, что соответствует характерному времени обращения земного диполя. Интересно выяснить, как повлияет на этот результат учет нелинейного влияния поля на спиральность. Другой интересный результат аналитического исследования касается формы решений. В динамо этого типа собственными функциями являются не диполь, квадруполь и т. д., а конфигурации, близкие по форме к бессильным, спиральным структурам³⁵.

Для ламинарной ячеистой конвекции построены нелинейные МГД динамо типа α^2 (см. модели Соурда и Буссе), детально описываемые в⁴.

Однако более подходящим для геодинамо считается α - Ω -приближение^{36, 37}. Предполагается, что динамо поддерживается архимедовой силой, создающей сильное дифференциальное вращение и слабую меридиональную циркуляцию. Вращающаяся и неоднородная по плотности система с аксиально-симметричным полем \mathbf{B}_φ неустойчива относительно возбуждения волн, бегущих вдоль долготы. Магнитные, архимедовы и кориолисовы силы при этом одного порядка, поэтому волны названы МАК-волнами. МАК-волны обладают спиральностью. Тем самым задача до некоторой степени становится самосогласованной. Однако из-за математических трудностей пока рассмотрена промежуточная модель, в которой спиральность не находится, а задается простой функцией. Шаг вперед по сравнению с кинематическим приближе-

нием заключается в том, что самосогласованно с учетом магнитных сил находится средняя скорость, в частности дифференциальное вращение. С МАК-волнами связывается наблюдаемый на поверхности Земли западный дрейф недипольного поля и вековые вариации. Особый интерес представляет анализ пространственно-временной структуры 20-летних и 60-летних вариаций^{38, 39}, определяемых путем прямых измерений геомагнитного поля.

Исследования Солнечной системы с помощью космических аппаратов открыли перспективы для понимания природы магнетизма других планет. Теперь основные надежды на теоретические продвижения. Попытки построить простой закон подобия (скейлинг), связывающий амплитуду наблюдаемого магнитного поля с характерными параметрами планеты (радиусом, угловой скоростью и т. п.), слабо обоснованы. Наиболее удачный из них (правильно предсказано поле Сатурна) — закон подобия Ш. Ш. Долгинова, основанный на модели прецессионного динамо³¹. Проблема в явной несхожести планет, скажем Марса и Юпитера, по физическому строению.

Представление о происхождении магнетизма планет земной группы с учетом их тепловой истории сформулированы в⁴⁰. Планетарные тела, по размерам меньшие Луны, никогда не были в расплавленном состоянии. Остаточная намагниченность их пород — прямая память о первоначальном магнитном поле солнечной туманности. Магнетизм планет больших размеров — Меркурия, Марса и Венеры — связан с остаточным намагничиванием при отвердевании расплавленного вещества в магнитном поле, которое может быть начальным или созданным процессом динамо на эволюционной стадии, скажем, до отвердевания ядра (в Меркурии). Только у Земли динамо активно действует в настоящее время, хотя в будущем земное ядро, по-видимому, полностью отвердеет. В целом эти представления не общеприняты. Например, в работе²⁷ считается, что и сегодня в тонком слое ядра Меркурия действует динамо, поддерживаемое химической конвекцией. Во всех случаях динамо рассматривается как наиболее вероятный источник магнетизма на некоторых стадиях эволюции планет земной группы.

В планетах-гигантах Юпитере и Сатурне динамо создается эффективной тепловой конвекцией⁴¹. Источником энергии служит постепенное охлаждение планет от горячего начального состояния. В Сатурне, который холоднее, возможна и конвекция состава, связанная с фазовым разделением гелия от водорода и опусканием гелия в металлическое ядро. Подробный анализ конвекции можно найти в обзоре²⁷, где даны также и оценки генерируемых магнитных полей.

Таким образом, гидромагнитное динамо, по-видимому, действует во всех планетах, обладающих жидкими проводящими ядрами. Основная задача заключается в уточнении характера движений и построении конкретных динамо-моделей.

3. СОЛНЕЧНЫЙ ЦИКЛ

Равновесие Солнца как звезды определяется балансом силы тяготения и градиента давления. Солнечная активность — это царство движений и магнитных полей. Магнитное поле наблюдается прямо в активных явлениях (пятна, вспышки, протуберанцы) или связывается с ними (нагрев короны, корональные дыры). Наблюдения убеждают в магнитной природе солнечной активности.

Для объяснения этой природы недостаточно теории магнетизма покоящейся среды. В самом деле, проводимость солнечной плазмы в верхнем слое близка к проводимости плохих металлов, а характерные размеры магнитных структур достаточно велики. Так что эффективное время изменения магнитного поля, пропорциональное произведению проводимости на квадрат размера, существенно превышает наблюдаемые времена изменения магнитных явлений. Единственной и естественной причиной переменности поля служат гидродинамические движения плазмы, в первую очередь вращение и кон-

векция. Поэтому основным механизмом солнечной (и звездной) активности можно считать гидромагнитное динамо.

Течение солнечной плазмы представляет собой сочетание крупномасштабного движения (дифференциальное вращение, меридиональная циркуляция) со стохастическим (турбулентная конвекция). Магнитное поле в такой среде является случайной величиной, нахождение которой требует решения сложных стохастических уравнений. Проще и естественнее найти сглаженные, усредненные характеристики: среднее поле, средний квадрат и другие моменты. Эволюция этих величин описывается более простыми, доступными для решения уравнениями. Основные достижения теории солнечного динамо связаны с выводом и изучением уравнения для среднего магнитного поля.

С математической точки зрения «среднее» понимается в статистическом смысле. Практически имеют в виду магнитное поле, усредненное по масштабам и временам, превышающим масштаб и характерное время основных энергосодержащих ячеек турбулентного движения — супергранул. Перенос среднего магнитного поля определяется средними характеристиками течения^{4, 9, 10, 21}. Это прежде всего дифференциальное вращение, действие которого на полоидальное поле приводит к появлению азимутальной компоненты. Турбулентная диффузия выравнивает градиенты среднего поля. Солнечное хаотическое движение обладает средней спиральностью, действие которой на азимутальное поле приводит путем подъема и поворота омегаобразных петель к генерации полоидального поля. Средняя спиральность характеризует преимущественную (левую или правую) винтовую закрутку конвективных движений неоднородной вращающейся жидкости. Наблюдательное доказательство существования этой величины на Солнце представляет существенный интерес. Оно может быть получено, например, путем изучения движений пятен, но непременно с учетом трех компонент скорости. С физической точки зрения наличие средней спиральности ясно и естественно: она является следствием действия кориолисовых сил на конвективные элементы, всплывающие и опускающиеся в неоднородной среде.

Указанные три средние характеристики солнечных движений (дифференциальное вращение, средняя спиральность и турбулентная диффузия) в главном и определяют перенос среднего поля, что было впервые продемонстрировано в работах^{42–44}. В последующем было обращено внимание также на роль турбулентной проницаемости, нелинейного влияния поля на спиральность и другие эффекты^{45, 46}.

Конечно, рассматривая среднее поле, мы ничего не узнаем о мелкомасштабных или быстро меняющихся полях. Зато можем объяснить крупномасштабные и глобальные изменения магнитного поля. Главное из них — это цикл солнечной активности (рис. 3). Слово «цикл» обычно понимается как повторяемость активности, скажем как 11-летняя повторяемость картины пятнообразования или 22-летняя повторяемость конфигурации магнитного поля. Но его можно связать и с понятием «предельный цикл Пуанкаре» нелинейной солнечной магнитогидродинамической системы⁴⁷.

В действительности фазовый портрет солнечной МГД системы еще богаче. Замечена вековая модуляция^{48, 49}, которая может ассоциироваться с представлением о двухчастотном предельном цикле. Специалистов и любителей потрясло обнаружение нерегулярных глобальных минимумов солнечной активности, имевших место в прошлом⁵⁰. Это прямое указание на глобально-стохастическую природу и существование «странного аттрактора» на фазовом портрете солнечной МГД системы^{13, 47, 51}.

В последние годы развит метод изучения поведения магнитного поля на длинных интервалах времени по многолетним, >100 лет, наблюдениям протуберанцев — гигантских выбросов из фотосферы⁵². Протуберанцы «висят» на линиях раздела полярности магнитного поля. Поэтому по ним можно построить нулевые линии радиального (полоидального) магнитного поля.

Таким методом прослеживается распределение полоидального поля по поверхности и моменты переполусовок. В дополнение к этому можно изучать

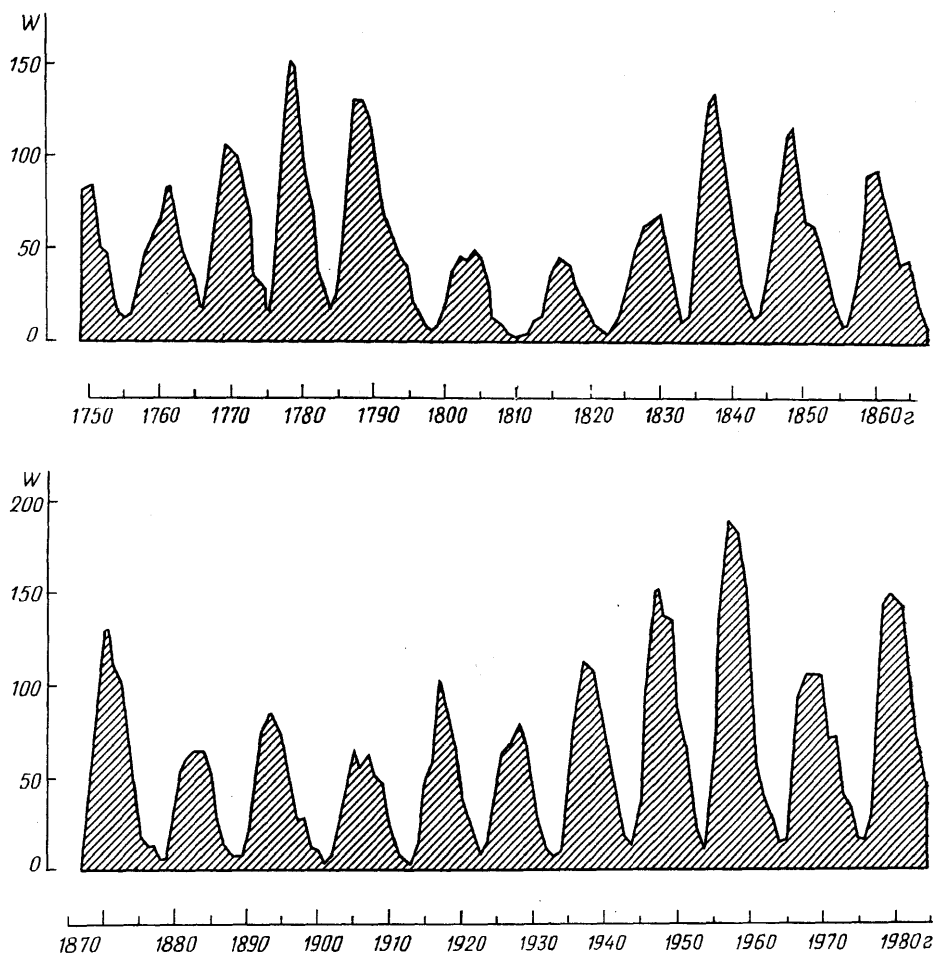


Рис. 3

эволюцию магнитного потока, связанного с азимутальным полем, по многолетним данным о площадях солнечных пятен⁸⁶.

3.1. Движение солнечной плазмы

Перенос магнитного поля в движущейся среде определяется магнитной диффузией (величиной, обратной проводимости) и деформациями поля скорости. Омическая магнитная диффузия внутри Солнца столь мала, что любые магнитные поля с масштабом, превышающим характерный размер гранул, $\sim 10^8$ см, можно на длительных промежутках времени считать замороженными в среду. Эволюция таких полей управляется движениями.

Магнитные линии растягиваются дифференциальным вращением. Широтный градиент угловой скорости Солнца давно обнаружен прямыми наблюдениями движений пятен и доплеровских смещений спектральных линий в поверхностных слоях⁵³. Грубо, перепад угловой скорости от экватора к любому полюсу составляет около 20%. Солнечная сейсмология способна определить радиальный градиент угловой скорости по расщеплению частот колебаний, локализованных на разных глубинах. Обработка ранних наблюдений указала, что радиальный градиент угловой скорости отрицателен и по величине в несколько раз больше широтного⁵⁴. Последующий анализ более

обширного материала по расщеплению спектра показал, что внутренняя область Солнца ($\lesssim 0,2R_{\odot}$) вращается не более чем в два раза быстрее поверхности¹⁹. Однако угловая скорость по мере перехода в глубь Солнца сначала (в конвективной оболочке) убывает, а затем возрастает. Подтверждение этого результата о радиальном градиенте угловой скорости в конвективной оболочке путем устранения наблюдательных неопределенностей и разногласий имеет важное значение для теории солнечного динамо. Знак произведения градиента угловой скорости на спиральность определяет направление движения волны магнитного поля; см. далее.

Согласно стандартным моделям внутреннего строения оболочка Солнца размером около $0,3R$ находится в состоянии сильной турбулентной конвекции, число Рэлея порядка 10^{12} , масштаб определяется шкалой высот; число Прандтля очень мало, $\sim 10^{-9}$, поскольку диффузия тепла является радиактивной. Обычно турбулентный характер движений определяется числом Рейнольдса. В конвективной зоне $Re = 5,5 \cdot 10^{13}$ на глубине $d_1 = 10^{-2} R_{\odot}$ и $Re = 4 \cdot 10^{12}$ на глубине $d_2 = 0,3 R_{\odot}$. На фоне столь сильной турбулентности наблюдаемая на Солнце ячеистая картина грануляции и супергрануляции выглядит удивительным, синергетическим явлением. Известно, что характерный масштаб гранул близок к шкале изменения плотности. Саймон и Вейсс⁵⁵ обратили внимание, что в стратифицированной по плотности конвективной оболочке естественно появление еще двух характерных масштабов, один из которых можно отождествить с супергрануляционным, второй соответствует пока непосредственно не наблюдавшимся гигантским ячейкам.

На первый взгляд, существование конвективных ячеек с размерами, превышающими шкалу высот, невыгодно из-за того, что в силу непрерывности потока небольшое движение в нижней плотной части ячейки порождает огромные скорости в ее верхней части. Однако ячейки, простирающиеся на много шкал высот, более эффективно переносят тепло по сравнению с ячейками, простирающимися на одну шкалу высот, поскольку при одинаковой разности температур они имеют меньший суперрадиабатический градиент. Существует характерный размер ячейки, при котором второй эффект важнее и появление таких ячеек энергетически выгодно. Пока эти интересные и важные оценки не получили количественного обоснования. Разумеется, для численного исследования необходимо отказаться от приближения Буссинеска. Хотя число Маха мало, жидкость нельзя считать несжимаемой, надо учесть влияние градиента плотности, в частности, уравнение $\text{div } \mathbf{v} = 0$ заменить на $\text{div } \rho \mathbf{v} = 0$. Ситуация не похожа на случай лабораторной турбулентности, которую принято характеризовать двумя безразмерными числами: **Re** и **Ma**.

Турбулентная конвекция действует на среднее магнитное поле подобно магнитной диффузии или магнитной вязкости. Грубо, турбулентная диффузия равна $\nu_t = \tau \langle v^2 \rangle / 3$, где τ — корреляционное время, скажем, время жизни супергранул, а $\langle v^2 \rangle$ — средний квадрат пульсаций скорости. Более тонкий момент, на который впервые обратили внимание А. И. Лебединский⁵⁶ и Бирманн⁵⁷, — это анизотропия турбулентного переноса в солнечной конвективной зоне, связанная с выделенностью радиального направления. Неодинаковость переноса импульса турбулентного движения в радиальном и перпендикулярных направлениях является существенным элементом механизма, поддерживающего солнечное дифференциальное вращение^{58–60}.

Среднее магнитное поле должно диффундировать анизотропно. Обычно этот эффект в моделях солнечного динамо в целях простоты не учитывается.

Другая особенность солнечной турбулентности связана с вращением. Число Россби уменьшается от **Ro** = 16 при d_1 , до $4 \cdot 10^{-2}$ при d_2 , так что прямое влияние вращения на форму конвективных ячеек существенно лишь вблизи дна конвективной зоны⁶¹. Однако дело не только в форме ячеек. Благодаря вращению стратифицированной турбулентной конвекции возникает средняя спиральность.

Поясним качественно механизм, порождающий среднюю спиральность. Пусть конвективный элемент поднимается (опускается) вдоль радиуса. Из-за градиента плотности он будет расширяться (сжиматься), т. е. приобретать дополнительные составляющие v_θ, v_φ . Возникающий из-за этого момент кориолисовых сил придаст элементу дополнительное вращение. Грубо,

$$\frac{d}{dt} \text{rot}_r \mathbf{v} \approx -2\Omega \cos \theta \frac{v_r}{r}. \quad (4)$$

Радиальная скорость определяется уравнением неразрывности, $v_r/r \sim v \nabla_r \rho / \rho \sim v/H$; H — шкала плотности. В верхней части конвективной зоны корреляционное время $\tau \sim l/v$ мало по сравнению с периодом обращения, $\text{Ro} = v/l\Omega \gg 1$. Интегрирование (4) дает $\text{rot}_r \mathbf{v} \sim \Omega \tau v \cos \theta / H$. В нижней части зоны $\text{Ro} \ll 1$, т. е. конвективный элемент успевает много раз повернуться за время τ . Поэтому надо взять среднее значение $\text{rot}_r \mathbf{v}$ за период обращения. Спиральность определяется как произведение скорости подъема v_r на дополнительный вихрь $\text{rot}_r \mathbf{v}$. В уравнение генерации среднего магнитного поля входит величина $\alpha = -\tau \langle \mathbf{v} \text{rot}_r \mathbf{v} \rangle / 3$, для которой получаем оценку

$$\alpha \approx \begin{cases} \frac{l^2 \Omega}{H} \cos \theta, & \text{Ro} \gg 1, \\ \frac{l}{H} v \cos \theta, & \text{Ro} \ll 1. \end{cases} \quad (5)$$

Угловая зависимость такова, что α обращается в нуль на экваторе и имеет разные знаки в северном и южном полушариях. Согласно моделям конвективной оболочки $l^2 \Omega / H$ растет вглубь, а lv/H — к поверхности. Таким образом, функция $\alpha(r, \theta)$ имеет максимум в точке, где $l\Omega \sim v (5 \cdot 10^9 \text{ см})$. Появление спиральности означает нарушение зеркальной симметрии. Псевдоскаляр α определяется произведением псевдовектора Ω на вектор $\nabla \rho$. Отсюда видно, что одного вращения мало! Нужен еще вектор, $\nabla \rho$ или $\nabla \langle v^2 \rangle$. Отметим, что неоднородность флуктуации скорости приводит и к одному интересному эффекту — диамагнитному переносу среднего магнитного поля^{9,13,16}.

Гидромагнитное динамо возможно там, где движения торжествуют над губительным действием магнитной диффузии. Простейшая характеристика этого отношения — магнитное число Рейнольдса $\text{Re}_m = lv/v_m$. В конвективной оболочке Солнца оно очень велико: $\text{Re}_m = 2 \cdot 10^7$ при d_1 и $\text{Re}_m = 5 \cdot 10^9$ на глубине d_2 . Поэтому поле солнечных движений действует подобно быстрому динамо. Динамо генерирует среднее, крупномасштабное магнитное поле, а также перемежаемую структуру в малых масштабах.

Главными источниками генерации среднего поля являются дифференциальное вращение и средняя спиральность. Эти источники работают на фоне сильной турбулентной диффузии, выравнивающей градиенты и осуществляющей диффузионный перенос и распад среднего магнитного поля. Обратное влияние магнитного поля на спиральность и дифференциальное вращение приводит к ряду интересных нелинейных эффектов: стабилизации и модуляции колебаний, крутильным волнам меридиональной циркуляции и глобальным минимумам.

3.2. Основной цикл

Магнитная гидродинамика средних полей дает объяснение основной (22-летней) периодичности осесимметричного магнитного поля. Основные уравнения среднего поля (1, 2) в солнечной конвективной оболочке можно записать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \beta \Delta A, \quad (6)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = (l \nabla \Omega, \nabla A) r \sin \theta + \beta \Delta B; \quad (7)$$

здесь β — магнитная диффузия, включающая в себя турбулентную и молекулярную. Чтобы пояснить характер решений системы (6, 7), полезно вначале положить $\beta = 0$, а затем пояснить роль магнитной диффузии. Вводя переменную $\chi \equiv r \sin \theta \cdot A$, получаем для нее своеобразное уравнение⁶²

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = r \sin \theta (\alpha [\nabla \Omega, \nabla \chi])_{\varphi}, \quad (8)$$

которое напоминает уравнение типа теплопроводности, если поменять местами t и r . Решения (8) имеют вид растущих или убывающих по амплитуде волн, распространяющихся вдоль поверхностей $\Omega = \text{const}$. Направление распространения динамо-волн зависит от знака произведения $\alpha \nabla \Omega$. Пусть Ω зависит только от радиальной координаты. Тогда поверхности $\Omega = \text{const}$ совпадают со сферами и

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = D \frac{\partial \chi}{r \partial \theta},$$

где $D = r \sin \theta \alpha \partial \Omega / \partial r$ — локальное динамо-число. Ищем решение в виде $\chi \sim \exp(qt)$. Тогда $q^2 + ikD = 0$, т. е. при $D < 0$

$$\text{Im } q \equiv \omega = \left(\frac{kD}{2} \right)^{1/2},$$

$$\text{Re } q \equiv \gamma = \left(\frac{kD}{2} \right)^{1/2}.$$

Возвращаясь к полю, имеем волну, распространяющуюся от полюса к экватору:

$$\begin{aligned} A &\sim e^{\gamma t} \cos(\omega t - k\theta), \\ B &\sim e^{\gamma t} \cos\left(\omega t - k\theta + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Знак $\partial \Omega / \partial r$ одинаков в северном и южном полушариях Солнца, однако $\alpha \sim \cos \theta$ (см. (5)), и потому D изменяет знак. Отсюда следует, что и в южном полушарии динамо-волны распространяются от полюса к экватору. При $D > 0$ волны бегут к полюсам. Фазовая скорость волн равна $v_{\text{ph}} = \omega/k = (D/2k)^{1/2}$, групповая скорость $v_g = d\omega/dk$ в два раза меньше. Фазовый сдвиг между B и A составляет $\delta = \pi/4$; следовательно, B_r отстает от B_{φ} на $3\pi/4$.

В другом простом случае $\Omega = \Omega(\theta)$ динамо-волна распространяется по радиальным направлениям. Эта ситуация, в отличие от предыдущей, не похожа на поведение поля на поверхности Солнца, где поле движется от высоких широт к экватору в виде известных бабочек Маундера. Однако волны, распространяющиеся по радиусам, могут быть связаны, если учесть турбулентную диффузию⁶².

Учет турбулентной магнитной диффузии прежде всего позволяет получить решение с неизменной амплитудой, так как $\gamma \rightarrow \gamma - \beta k^2$. Значение динамо-числа, соответствующее $\gamma - \beta k^2 = 0$, принято называть критическим для генерации среднего поля. Кроме того, при $\beta \neq 0$, как это ясно из (6), (7), изменяется фазовый сдвиг между полоидальными и азимутальной составляющими поля. Исследование уравнений динамо с учетом диффузии, других эффектов, а также правильной геометрии задачи и граничных условий проводится с помощью компьютеров. Вычислительные эксперименты в теории солнечного динамо были выполнены, например, в работах⁴⁴⁻⁴⁶.

В работе⁸⁷ строится и анализируется асимптотическое решение уравнений генерации магнитного поля Солнца. Изменение угловой скорости с глубиной принимается согласно данным гелиосейсмологии, при этом радиальный градиент угловой скорости в конвективной зоне изменяет знак и по величине превышает широтный градиент. Средняя спиральность берется из расчетов на основе теории длины перемешивания. Показано, что возбуж-

дается три динамо-волны магнитного поля. Первая волна возбуждается в поверхностном слое и имеет максимум на широте около 60° . Ее активность проявляется в миграции к полюсу зоны образования полярных факелов. Вторая, более мощная, волна поля генерируется в середине конвективной зоны,

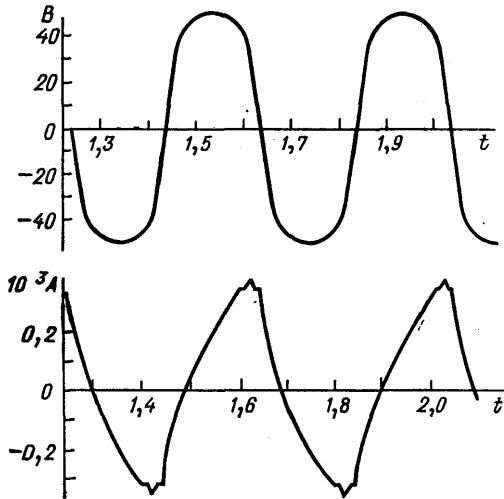


Рис. 4

ее активность проявляется в цикле пятнообразования. Третья волна генерируется у дна конвективной зоны и сильно затухает к поверхности. Она может приводить к многократной переполюсовке полярного магнитного поля в течение одного основного цикла.

В линейной теории незатухающее или невозрастающее решение получается лишь при одном выделенном значении динамо-числа $D = D_{cr}$. При учете обратного влияния магнитного поля на турбулентность можно построить нелинейное решение типа предельного цикла, по крайней мере, для $D \geq D_{cr}$ (рис. 4⁴⁶).

Магнитная сила сильнее влияет на среднюю спиральность, чем на угловую скорость. Согласно оценке⁶⁴ $(\delta\Omega/\Omega)/(\delta\alpha/\alpha) \sim (B_r/B_\phi)v/\Omega r \ll 1$, где v — характерная амплитуда турбулентных пульсаций. При малых нелинейностях естественно рассмотреть

$$\alpha_N = \alpha(r, \theta) (1 - \xi B^2), \quad (10)$$

где параметр ξ определяет нелинейное влияние.

Незатухающее решение нелинейной задачи можно искать в виде разложения по собственным векторам линейной, соответствующим комплексным собственным значениям $q_n = \gamma_n + i\omega_n$:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} F^n(t) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Подстановка в уравнения (6), (7) α_N вместо α приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для $F^n(t)$ с кубической нелинейностью⁶⁵:

$$\frac{dF^n}{dt} = q_n F^n - \xi D \frac{dq_n}{dD} \sum_{l, m, s} K_{lms}^n F^l F^m F^s, \quad (11)$$

где коэффициенты K_{lms}^n определяются собственными функциями a_n и b_n линейной задачи. В первом приближении по $D - D_{cr}$ достаточно удержать в (11) две комплексно сопряженные моды $F^1 \equiv F$, $F^2 = F^*$, что соответствует моде дипольного типа для среднего магнитного поля. Стационарное решение можно интерпретировать как предельный цикл, имеющий форму окружности:

$$(\operatorname{Re} F)^2 + (\operatorname{Im} F)^2 = \operatorname{const} \cdot \frac{D - D_{cr}}{D}.$$

Локальный предельный цикл в переменных B и dB/dt имеет эллиптическую форму⁴⁷. Надо заметить, что в силу неконсервативности динамо этому предельному циклу нельзя приписать обычный энергетический смысл, как динамической системе типа маятниковых часов.

Периодическое решение обладает интересным свойством симметрии $F(t + T/2) = -F(t)$, т. е. оно повторяется через половину периода с обрат-

ным знаком⁶⁵. Его устойчивость, как это ясно уже из (11), требует выполнения условия $d\gamma/dD > 0$, т. е. решения с падающей зависимостью $\gamma(D)$ неустойчивы.

В работах^{66,67} обращается внимание на интересную особенность — чередование амплитуд с четными и нечетными номерами (правило Гневышева — Оля). Эту особенность авторы объясняют путем добавления к предельному циклу (квази) постоянной составляющей среднего поля, в четном номере оно прибавляется к колеблющемуся полю, в нечетном — вычитается. Происхождение этой составляющей пока остается загадкой. Наиболее естественно связать ее со стационарным полем солнечного ядра.

Увеличение динамо-числа приводит к возбуждению нескольких мод. Простейший случай двух взаимодействующих мод дипольной и квадрупольной симметрии⁶⁵ может представлять интерес в связи с вековой модуляцией солнечного цикла.

3.3. Крутильные волны

Одним из впечатляющих событий последних лет явилось открытие крутильных волн, наложенных на общее дифференциальное вращение⁶⁸. Период волн близок к 11 годам, амплитуда порядка 3–6 м/с. В каждой полусфере имеются четыре зоны более быстрого и более медленного вращения. Новая зона появляется вблизи полюса и через 22 года достигает экватора. Изучение движений солнечных пятен указывает на то, что наряду с крутильными волнами, по-видимому, имеются и периодические меридиональные потоки⁶⁹.

Хорошая корреляция крутильных волн с активностью говорит о том, что крутильные волны могут быть объяснены как эффект обратного влияния магнитной динамо-волны на дифференциальное вращение^{63, 70–72}.

3.4. Магнитогидродинамический хаос

В действительности солнечный цикл — не просто предельный цикл или предельный цикл, на который наложены регулярные вековые модуляции. Открытие минимума Маундера и других глобальных минимумов солнечной активности обнаруживает глобально стохастическую природу солнечной активности. С современной точки зрения ее образ естественно связать с образом странного аттрактора.

В первой попытке применить концепцию странного аттрактора к теории солнечного динамо основные уравнения, в которых учитывалось обратное влияние магнитного поля на спиральность, были сведены к системе Лоренца⁷³:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -A + DB - CB, \\ \dot{B} &= -\sigma B + \sigma A, \\ \dot{C} &= -\nu C + AB;\end{aligned}\tag{12}$$

здесь A и B — азимутальные компоненты векторного потенциала и среднего поля, C — изменение спиральности благодаря вкладу магнитной спиральности (прямое влияние на α типа (10) для простоты опущено), $\sigma \sim 1$ и $\nu \ll 1$ — постоянные. Одна из них характеризует различие диффузионных операторов для A и B , вторая определяет темп затухания магнитной спиральности из-за молекулярной магнитной диффузии, и потому ν очень мало для конвективной зоны Солнца.

Грубо говоря, выключения активности происходят из-за того, что у системы (12) имеется нулевое решение $(A, B, C) = (0, 0, 0)$, т. е. в принципе Солнце может «прожить» и без магнитного поля. Для малых динамо-чисел $D < 1$ это нулевое решение устойчиво. Когда $D > 1$, появляются две дополнительные особые точки $S_{\pm} = \pm[\nu(D-1)]^{1/2}$, $\pm[\nu(D-1)]^{1/2}$, $D-1$.

Для определенной области параметров, в солнечном контексте, $\sigma \rightarrow 1$, $\nu \ll 1$, $\dot{D} \rightarrow 4(\sigma - 1)^{-1}$, траектории системы (12) в пространстве (A, B, C) совершают квазипериодические переходы от окрестности S_+ к окрестности S_- и обратно, и в ходе этого процесса иногда (случайно) достигают окрестности особой точки $(0, 0, 0)$. Время пребывания изображающей точки в этой окрестности оценивается как $\tau_M \sim \nu^{-1} (D - D_{cr})^{-1/2}$ 47, поэтому оно очень велико.

Приближенный вывод уравнения для \dot{C} с малым ν дан в работе 64.

Упрощенная система динамо-уравнений (12) обладает существенным недостатком: она не содержит динамо-волн, которые имеются в исходных МГД уравнениях среднего поля; см. п. 3. (Пользуясь (12), можно понимать основной 22-летний цикл как переход от S_+ к S_- и обратно. Частота этого перехода порядка $(\sigma D)^{1/2}$.)

Более реалистическое упрощение уравнений (6), (7) для среднего магнитного поля, включающее динамо-волны, приводит к комплексным уравнениям

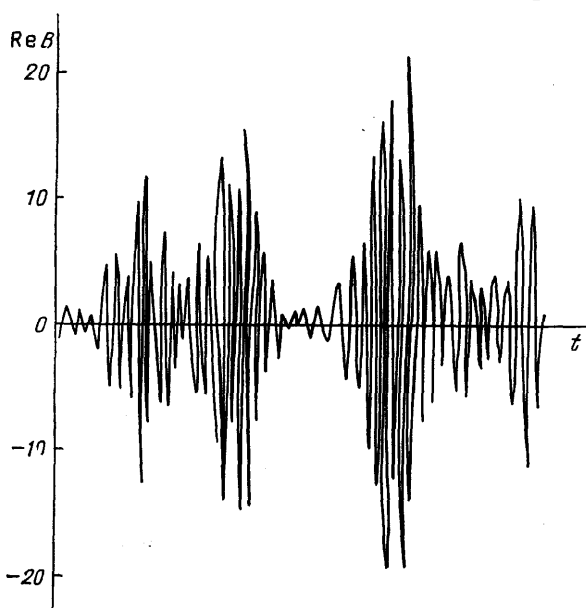


Рис. 5

для A и B . Такой подход был развит в работах 51,74, где учтено обратное влияние магнитного поля не на среднюю спиральность, а на дифференциальное вращение. Возникла система уравнений 6-го порядка для комплексных величин $A(t)$, $B(t)$, $\Omega(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -A + 2DB, \\ \dot{B} &= -B + iA - \frac{i}{2} \Omega A^*, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{\Omega} = -\tilde{\nu} \Omega - iAB,$$

которая является комплексным обобщением системы Лоренца (12). Параметры $\tilde{\nu}$ и D действительны и положительны. При $\tilde{\nu} \ll 1$ с ростом D возникает последовательность бифуркаций, приводящая в

конечном итоге к хаотическому поведению системы с эпизодами сильно пониженной магнитной активности.

Тривиальное решение $(0, 0, 0)$ устойчиво, пока $D < 1$. Первая бифуркация при $D_1 = 1$ приводит к появлению осциллирующего решения, соответствующего динамо-волне. Более того, для $D \geq 1$ система (13) имеет точное периодическое решение,

$$B = |B| e^{ipt}, \quad A = |A| e^{i(pt+\varphi)}, \quad \Omega = |\Omega| e^{2ipt},$$

где $p \sim 4D/(2 + \tilde{\nu})$, $|A| \sim 8D/(2 + \tilde{\nu})$, $|B| \sim |\Omega| \sim 16D/(2 + \tilde{\nu})^2$. Это периодическое решение является предельным циклом в 6-мерном фазовом пространстве (A, B, Ω) . В плоскости $(\text{Re } A, \text{Re } B)$ предельный цикл имеет

вид эллипса. Численные расчеты, выполненные для $\tilde{\nu} = 0,5$, показывают, что это решение становится неустойчивым при $D_2 = 2,07$. После этой бифуркации решение становится дважды периодическим с двумя отличающимися частотами (тор в фазовом пространстве). Дважды периодическое решение становится в свою очередь неустойчивым при $D_3 = 3,47$, когда появляется трехчастотное решение. После $D_4 = 4,81$ появляется фейгенбаумовский каскад решений с удваивающейся частотой, который сходится к $D_{\text{chaos}} = 4,84$. Для больших динамо-чисел решения являются хаотическими во времени, причем

имеются эпизоды сильно ослабленной амплитуды. Пример решения, взятый из работы Вейсса и др. (1984) для $Re B$ при $D = 17$, представлен на рис. 5. Стоит заметить, что в отличие от параметра $v \ll 1$ из системы (12), \tilde{v} в солнечной конвективной зоне порядка $h/H > 1$, где h — глубина конвективной зоны, H — шкала высот плотности, поскольку этот параметр определяется обратным временем затухания угловой скорости из-за турбулентной вязкости. Это еще раз подчеркивает модельный характер приведенного примера. Его ценность заключается в принципиальном указании на существование глобального МГД хаоса в солнечном динамо и в оценках порядков величин.

4. ГАЛАКТИЧЕСКОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Напряженность магнитного поля галактик невелика по сравнению с земной и солнечной. Ее исчисляют в микрогаусах. Однако галактическое поле имеет рекордный масштаб (килопарсеки). Для создания такого магнитного поля необходимо, чтобы в течение 10^{10} лет действовала некая э. д. с. (BRh/ct) порядка 10^{10} В; $B \simeq 2$ мкГс, $R \simeq 15$ кпк, $h \simeq 400$ пс — радиус и полутолщина галактического газового диска. Хойл⁷⁵, первый сделавший подобную оценку, не видел другой возможности, как считать галактическое поле реликтовым, изначальным.

В действительности движения ионизованного галактического газа действуют как гидромагнитное динамо. Динамо приводит к экспоненциальному росту очень слабого начального поля, которое может быть создано эффектом батарейного типа или являться продуктом выброса из звезд. Характерное время роста поля порядка $5 \cdot 10^8$ лет, см. далее, что существенно меньше времени жизни Галактики (10^{10} лет). Затем поле установится благодаря обратному влиянию на движения. Установившееся поле будет поддерживаться э. д. с. $= \int \mathbf{E} \, dl \sim c^{-1} [\mathbf{v} \mathbf{B}] h_*$, где v — характерная скорость случайных движений газа (порядка 10 км/с). Случайные движения приводят также к турбулентной диффузии и диссипации поля. Однако их спиральной части, которая порядка $0,1 v \sim 1$ км/с, вполне достаточно для создания 10^{10} В.

Впервые теория гидромагнитного динамо была применена к объяснению галактического магнетизма в работах^{76,77}, выполненных одновременно и независимо. Основными источниками генерации среднего, крупномасштабного магнитного поля снова служат дифференциальное вращение и средняя спиральность. Однако, в отличие от планет и звезд, в тонком галактическом диске легче всего возбуждается четное относительно центральной плоскости азимутальное поле B_ϕ и соответствующее ему квадрупольное поле (B_ρ, B_z). В этих и некоторых последующих работах, суммированных в монографиях^{13,21}, выяснены условия усиления магнитного поля в локальной, солнечной окрестности. Любопытная особенность галактического динамо заключается в том, что мы находимся внутри динамо-области.

В работе А. М. Шукурова и одного из авторов⁷⁸ была построена динамо-модель, учитывающая наблюдаемый закон распределения угловой скорости и толщины диска вдоль радиуса. Неожиданно выяснилось, что крупномасштабное поле Галактики и сходной галактики «Андромеда» генерируется только в центре и в кольцевой области, включающей солнечную окрестность. Вскоре этот результат получил наблюдательное подтверждение⁷⁹.

В последние годы предпринято интенсивное радиоастрономическое исследование крупномасштабных магнитных полей ближайших спиральных галактик. Кроме кольцеобразных магнитных структур (Галактика, M31, IC342, M81) обнаружены бисимметричные конфигурации, похожие на двойную спираль⁸⁰.

Для нахождения радиального распределения поля и сопоставления с наблюдениями теория динамо в тонком вращающемся слое потребовала дальнейшего развития^{81,88}.

Вопрос о генерации среднего магнитного поля формулируется как задача о собственных значениях для уравнений (1), (2) с нулевыми условиями на границах. Пространственное распределение поля описывается линейной комбинацией собственных функций, собственные значения определяют скорости роста $\Gamma \equiv d \ln B/dt$ различных мод поля. Пусть ρ , φ , z — цилиндрические координаты. Отвлечемся сначала от зависимости по φ . Тогда в безразмерных переменных уравнения генерации примут вид

$$\Gamma A = \alpha B + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A, \quad (14)$$

$$\Gamma B = -DG \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho B; \quad (15)$$

здесь z измеряется характерной полутолщиной h_0 , ρ — радиусом диска R , время — величиной h_0^2/β , $G = \rho d\Omega/d\rho$ — мера дифференциального вращения.

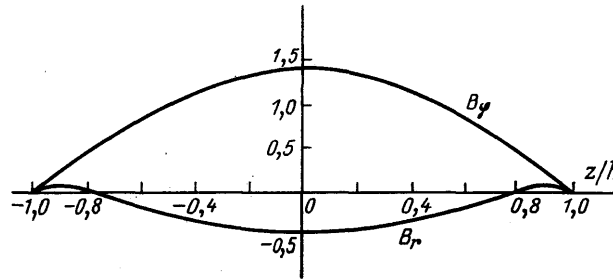


Рис. 6

Характерные значения $G_0 \sim \Omega_0 \sim 10^{-15} \text{ с}^{-1}$, $\alpha_0 \sim 10^5 \text{ см/с}$, $\beta \sim 10^{26} \text{ см}^2/\text{с}$ могут служить оценками дифференциального вращения, средней спиральности и турбулентной диффузии в солнечной окрестности Галактики. Величина $D = R_\alpha R_\Omega = \alpha_0 G_0 h_0^3/\beta^2$ — безразмерное динамо-число и $\lambda^2 = h_0^2/R^2 \sim 10^{-3}$ — малый параметр, появляющийся из-за резкого отличия вертикального и горизонтального размеров диска. Благодаря этому различию магнитное поле относительно быстро диффундирует в направлении z , перпендикулярном плоскости диска, $h_0^2/\beta \sim 5 \cdot 10^8$ лет, и медленно вдоль радиуса, $R^2/\beta \sim 5 \cdot 10^{11}$ лет. Возраст галактик не превышает 10^{10} лет.

Решение задачи (14), (15) ищется в виде

$$A = Q(\rho) a(\rho, z), \quad B = Q(\rho) b(\rho, z),$$

где a и b удовлетворяют системе одномерных уравнений

$$\begin{aligned} \gamma(\rho) a &= \alpha(\rho, z) b + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}, \\ \gamma(\rho) b &= -DG(\rho) \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для радиальной функции получается уравнение типа Шрёдингера

$$\lambda^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho Q \right) + (\gamma(\rho) - \Gamma) Q = 0,$$

в котором скорость роста, $-\gamma(\rho)$, в задаче (16) о вертикальном распределении играет роль потенциала. Такой подход подобен адиабатическому приближению в квантовой теории, справедливому при $\Delta\Gamma \ll \Delta\gamma$, где $\Delta\Gamma$ — расстояние между соответствующими собственными значениями. Для галактического диска $\Delta\gamma \sim 1$, $\Delta\Gamma \leq 0,4$, т. е. это условие выполнено⁸¹.

Решение задачи (16) при заданной спиральности, антисимметричной по z , и $G(\rho)$, определяемой наблюдаемой кривой вращения, выполнено чис-

ленно для простейших вакуумных граничных условий⁸²

$$\frac{\partial a}{\partial z}(\pm h) \approx 0, \quad b(\pm h) = 0.$$

Динамо-число, вычисленное по параметрам, характерным для солнечной окрестности, таково ($D \approx -10$), что может возбуждаться нижайшая мода поля с симметричным азимутальным полем и соответствующим меридиональным полем квадрупольного типа (рис. 6).

Для нахождения радиального распределения поля надо знать «потенциал», $-\gamma(\rho)$, который определяется радиальной зависимостью динамо-числа и полутолщины диска. Согласно наблюдениям толщина газового диска растет при удалении от центра Галактики. В работе⁸¹ применена следующая аппроксимация для полутолщины ионизованного слоя: $h(\rho) = 0,37(1 + \rho/0,4 \text{ кпк})^{1/2}$. Вычисленная путем решения задачи (16) зависимость $\gamma(\rho)$ представлена на рис. 7. При этом использована наблюдаемая кривая вращения и средняя спиральность вида $\delta(z - 0,5) - \delta(z + 0,5)$.

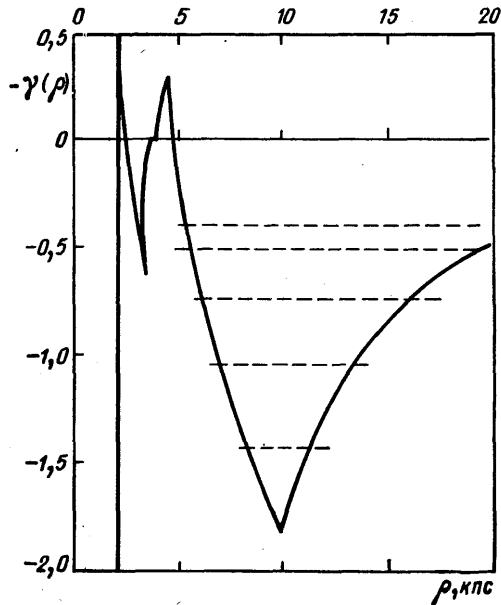


Рис. 7

Магнитное поле генерируется в областях с $\gamma(\rho) > 0$. Для Галактики это центральная часть и кольцо в солнечной окрестности вокруг $\rho = 10$ кпк. Аналогичная картина получается для Андромеды М31. В галактиках с одногорбыми или монотонными кривыми вращения крупномасштабные поля можно генерировать только на некотором расстоянии от центра.

Скорости роста Γ_n радиальных мод проще всего найти в ВКБ-приближении:

$$\int_{u_n}^{w_n} (\gamma(\rho) - \Gamma_n)^{1/2} d\rho = 2\pi\lambda \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

где точки поворота определяются условиями $\gamma(u_n) - \gamma(w_n) = \Gamma_n$. Нижайшая мода $n = 0$ растет с характерным временем $\Gamma_0^{-1} \approx 3 \cdot 10^8$ лет.

Рассмотрим теперь вопрос о генерации неосесимметричных, зависящих от φ , магнитных полей⁸³. Пусть начальное поле имеет составляющую в плоскости диска. Дифференциальное вращение закручивает такое поле в двухрукавную спираль (рис. 8). Расстояние между витками спирали, в которых поля направлены в противоположные стороны, быстро уменьшается со временем, $\Delta\rho \sim \rho_0/\Omega_0 t$, где Ω_0 — характерное значение угловой скорости, ρ_0 — масштаб ее изменения. Соответственно уменьшается и характерное время диффузии магнитного поля. Для моды $B \sim \exp(im\varphi)$

$$\tau_d \sim \frac{(\Delta\rho_m)^2}{\beta},$$

где $\Delta\rho_m = \rho_0/m\Omega_0 t$, β — коэффициент турбулентной диффузии. Это время надо сравнить с характерным временем генерации поля механизмом динамо

$$\tau_g \approx \frac{h_0^2}{\beta} \frac{1}{\gamma_0} (R_\alpha R_\Omega)^{-1/2},$$

где $R_\alpha = h_0 \alpha / \beta$, $R_\Omega = h_0^2 \Omega_0 / \beta$ — безразмерные числа, определяющие силы источников генерации, $R_\alpha R_\Omega = D$, $\gamma_0 \approx 0,4$. Оценка τ_g относится к локальной окрестности ρ и потому не зависит от m (при небольших m). Условие возбуждения $\tau_g < \tau_d$ дает

$$m \leq \frac{\rho_0}{h_0} \gamma_0^{2/3} R_\Omega^{-1/4} \approx 2$$

для $\rho_0 = 3$ кпк. Таким образом, в спиральных галактиках вполне могут возбуждаться нижайшие неосесимметричные моды с $m = 1, 2$. Видно, что предпочтительна первая мода $m = 0$, затем возбуждается мода $m = 1$, соответствующая наблюдаемым бисимметрическим структурам. Приведенная оценка стимулировала построение численной модели неосесимметричного динамо в тонком диске⁸⁸.

Таким образом, уже рассмотрение среднего магнитно-

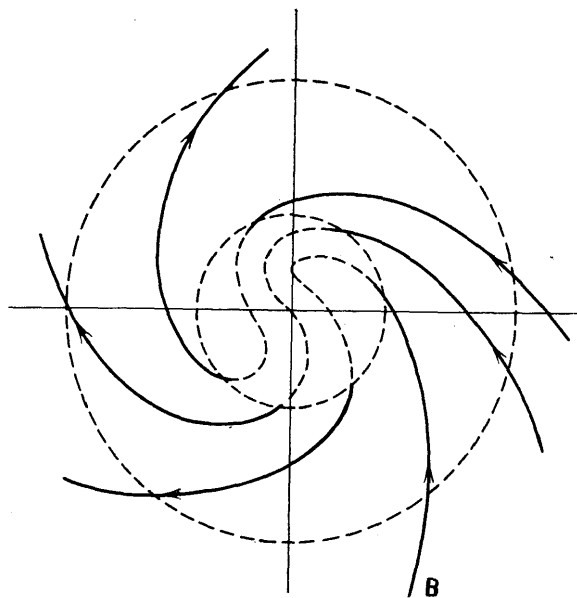


Рис. 8

го поля показывает, что теория гидромагнитного динамо дает содержательные прикладные результаты. Еще большие перспективы открываются при учете более высоких статистических моментов поля.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
АН СССР

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР,
г. Троицк (Московская обл.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Larmor J. // Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci. 1919. P. 159.
2. Cowling T. G. // Mon. Not. RAS. 1934. V. 94. P. 39.
3. Roberts P. H. // Mathematical Problems in the Geophysical Sciences / Ed. W. H. Reid. — Providence, Rhode Island, 1971. — V. 14. P. 129.
4. Мофат К. Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980.
5. Кропачев Э. П. Роторные механизмы динамо и геомагнитное поле. — М.: ИЗМИРАН; 1983.
6. Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 2052.
7. Арнольд В. И., Коркина Е. И. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Математика, механика». 1983. № 3. С. 43.
8. Galloway D., Frisch U. // Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1984. V. 104. P. 419.
9. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. — М.: Мир, 1984.
10. Молчанов С. А., Рузмайкин А. Н., Соколов Д. Д. // УФН. 1985. Т. 145. С. 593.
11. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 2061.
12. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 980.
13. Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnetic Fields in Astrophysics. — New York; London: Gordon and Breach, 1983.
14. Alfvén H. // Tellus. 1950. V. 2. P. 74.
15. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б. // УФН. 1972. Т. 106. С. 431.
Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. — М.: Наука, 1980.

16. Зельдович Я. Б. //ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 154.
17. Казанцев А. П. //ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1806.
18. Новиков В. Г., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. //ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 909.
19. Duvall T. L., Dziembowski W. A., Goode P. R., Gough D., Harvey J. W., Leibacher J. W. //Nature. 1984. V. 310. P. 22.
20. Drobyshevskii E. M. //Astrophys. and Space Sci. 1977. V. 46. P. 41.
21. Паркер Е. Космические магнитные поля. — М.: Мир, 1982.
22. Дорфман Я. Г. Всемирная история физики. Т. I. — М.: Наука, 1974.
23. Брагинский С. И. //ДАН СССР. 1963. Т. 149. С. 8.
24. Gubbins D. //J. Geophys. 1977. V. 43. P. 453.
25. Looper D., Roberts P. H. //Stellar and Planetary Magnetism/Ed. A. Soward. — New York; London: Gordon and Breach, 1983. — P. 297.
26. Голицын Г. С. //ДАН СССР. 1981. Т. 261. С. 317.
27. Stevenson D. J. //Rep. Prog. Phys. 1983. V. 46. P. 555.
28. Stewartson K., Roberts P. H. //J. Fluid Mech. 1963. V. 17. P. 1.
29. Looper D. //Phys. Earth and Planet. Inter. 1975. V. 11. P. 43.
30. Rochester M. G., Jacobs J. A., Smylie D. E., Chong K. F. //Geophys. J. RAS. 1975. V. 43. P. 661.
31. Dolginov Sh. Sh. //Adv. Space Res. 1981. V. 1. P. 245.
32. Cox A. //Science. 1969. V. 163. P. 237.
33. Brodsky Yu. A. //Geophys., Astrophys. and Fluid Dyn. 1983. V. 22. P. 281.
34. Шукуров А. М., Соколов Д. Д., Рузмайкин А. А. //Магн. гидродин. 1985. № 1. С. 9.
35. Sokoloff D. D., Shukurov A. M., Ruzmaikin A. A. //Geophys., and Astrophys. Fluid Dyn. 1983. V. 25. P. 293.
36. Брагинский С. И. //Физ. Земли. 1978. № 9. С. 74.
37. Hide R. //Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1966. V. 259. P. 615.
38. Braginsky S. I. //Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1984. V. 30. P. 1.
39. Головков В. П., Коломейцева Г. И. //Геомагн. и аэроном. 1971. Т. 11. С. 674.
Головков В. П. //Вопросы генерации магнитных полей. — М.: ИЗМИРАН, 1986.
40. Stragway D. W. //Phys. Earth and Planet. Inter. 1977. V. 15. P. 121.
41. Hide R. //Observatory. 1980. V. 100. P. 182.
42. Parker E. N. //Astrophys. J. 1955. V. 122. P. 293.
43. Babcock H. W. //Ibidem. 1961. V. 133. P. 572.
Leighton R. B. //Ibidem. 1969. V. 156. P. 1.
44. Steenbeck M., Krause F. //Astron. Nachr. 1969. Bd 291. S. 49.
45. Stix M. //Astron. and Astrophys. 1974. V. 59. P. 73.
46. Иванова Т. С., Рузмайкин А. А. //Астрон. ж. 1977. Т. 54. С. 846.
47. Ruzmaikin A. A. //Comm. Astrophys. 1981. V. 9. P. 85.
48. Glissberg W. //J. Brit. Astron. Assoc. 1958. V. 68. P. 148.
49. Yoshimura H. //Astrophys. J. 1979. V. 227. P. 1047.
50. Eddy J. A. //Science. 1976. V. 192. P. 1189.
51. Weiss N. O., Cattaneo F., Jones C. A. //Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1984. V. 31.
52. Makarov V. I., Sivaraman K. R. //Solar Phys. 1983. V. 85. P. 227.
53. Howard R. //Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1984. V. 22. P. 131.
54. Hill H., Bos R., Goode P. //Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1794.
55. Simon G., Weiss N. O. //Zs. Phys. 1968. Bd. 69. S. 435.
56. Лебединский А. И. //Астрон. ж. 1941. Т. 18. С. 10.
57. Biermann L. //Zs. Astrophys. 1961. Bd 28. S. 304.
58. Durney B. R. Basic Mechanism of Solar Activity/Eds V. Bumba, J. Kleczek. — Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1976. — P. 243.
59. Monin A. S., Simuni L. M. //Proc. Nat. Acad. Sci. 1982. V. 79. P. 3903.
60. Rüdiger G. //Geophys., Astrophys. and Fluid Dyn. 1982. V. 21. P. 1.
61. Durney B. R., Spruit H. C. //Astrophys. J. 1979. V. 234. P. 1067.
62. Yoshimura H. //Ibidem. 1975. V. 201. P. 740.
63. Yoshimura H. //Ibidem. 1981. V. 247. P. 1102.
64. Клиорин Н. И., Рузмайкин А. А. //Магн. гидродин. 1982. Т. 18. С. 116.
65. Kleorin N. I., Ruzmaikin A. A. //Astron. Nachr. 1984. Bd 305. S. 265.
66. Пудовкин М. И., Беневоленская Е. Е. //Письма Астрон. ж. 1982. Т. 8. С. 506.
67. Levy E. H., Boyer D. //Astrophys. J. 1982. V. 254. P. L19.
68. Howard R., La Bonte B. J. //Ibidem. 1980. V. 239. P. L33.
69. Tuominen J., Tuominen I., Kyröluinen J. //Mon. Not. RAS. 1983. V. 205. P. 691.
70. Schüssler M. //Astron. and Astrophys. 1981. V. 94. P. L17.
71. Клиорин Н. И., Рузмайкин А. А. //Письма Астрон. ж. 1984. Т. 10. С. 925.

72. Tuominen I., Krause F., Rüdiger G., Virtanen H.//Hydromagnetics of the Sun: 4th European Meeting on Solar Physics. — Dordrecht, Holland: D. Reidel. 1984.
73. Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A.//Astrophys. and Space Phys. Rev. 1983. V. 2. P. 333.
74. Jones C. A., Weiss N. O., Cattaneo F.//Physica. Ser. D. 1985. V. 14. P. 161.
75. Hoyle F.//La structure et l'évolution de l'univers: XI Conseil de physique. — Bruxelles, 1958. — P. 59.
76. Parker E. N.//Astrophys. J. 1971. V. 163. P. 255.
77. Вайнштейн С. И., Рuzмайкин А. А.//Астрон. ж. 1971. Т. 48. С. 902.
78. Рuzмайкин А. А., Шукуров А. М.//Ibidem. 1981. Т. 58. С. 969.
79. Beck R.//Proc. of IAU Symposium No. 100. — Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1983. — P. 159.
80. Sofue Y., Fujimoto M., Wielebinski R.//Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1986. V. 24.
81. Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D., Shukurov A. M.//Astron. and Astrophys. 1985. V. 148. P. 335.
82. Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М.//Магн. гидродин. 1980. № 1. С. 20.
83. Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М.//Plasma Astrophysics 1986: Proc. of Joint Varenna—Abastumani Intern. School and Workshop.— European Space Agency. ESA SP-251, 1986.—P. 539.
ж. 1986. Т. 12.
84. Gilman P.//Astrophys. J. Suppl. 1983. V. 53. P. 243.
85. Glatzmaier G. A.//Astrophys. J. 1985. V. 291. P. 300.
86. Рuzмайкин А. А., Тавастшерна К. С.//Солнечные данные, 1986. № 10. С. 78.
87. Макаров В. И., Рuzмайкин А. А., Старченко С. В.//Ibidem. 1987. № 3.
88. Барышникова Ю. С., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М. Препринт ИКИ АН СССР № 1152. — Москва, 1986.
89. Долгинов А. З.//УФН. 1987. Т. 152. С. 231 (в этом номере).