530.182(048)

Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков А. А. Черников. Стохастическая паутина и генерация структур. В гамильтоновых системах сколь угодно малые возмущения приводят к разрушению особых траекторий (сепаратрис), проходящих через седловые особые точки. При периодических возмущениях разрушение носит стохастический характер, порождая в окрестности сепаратрисы область стохастической динамики — стохастический слой [1]. В фазовом пространстве узкие стохастические слои могут пересекаться, образуя сложную сеть каналов (стохастическую паутину), по которой возможно блуждание частицы. Существование такой сети в общем случае гамильтоновых систем с числом степеней свободы $N \geqslant 3$ (6-мерное фазовое пространство) было предсказано Арнольдом [2] (диффузия Арнольда).

Границу существования стохастической паутины с $N = 3$ можно понизить до минимальной: $N = 3/2$ (т. е. фазовое пространство — трехмерное), если выполнены некоторые дополнительные резонансные условия, приводящие к сильному вырождению системы [3]. Примером такой системы является линейный осциллятор, находящийся под действием периодической последовательности **δ-импульсов.** Его гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \omega_H^2 x^2) - \frac{K}{T}\cos x \sum \delta(t - nT), \qquad (1)$$

где K — безразмерный параметр возмущения и T — период возмущения. Роль третьей координаты фазового пространства, кроме x и $\dot{x}$, здесь играет переменная t. К такому же выражению (1) приводится задача о движении частицы в постоянном магнитном поле и в поле широкого волнового пакета, распространяющегося перпендикулярно к магнитному полю. В этом случае ω_H — ларморовская частота.

Особым свойством (1) является отражение в достаточно простой форме взаимодействия вращательной симметрии траекторий, обусловленных движением в магнитном поле, и трансляционной симметрией вдоль x, обусловленной волновым пакетом благодаря члену с $\cos x$. Взаимодействие этих симметрии оказывается наиболее сильным при выполнении резонансных условий:

$$\alpha \equiv \omega_H T = \frac{2\pi p}{q} \quad (p < q), \qquad (2)$$

где p и q — целые числа (далее всюду можно положить $p = 1$).

Уравнения движения для (1) могут быть приведены точно к «отображению с подкручиванием»

$$\hat{M}_\alpha: \begin{cases} \bar{u} = \left[u + \frac{K}{\alpha}\sin\vartheta\right]\cos\alpha + v\sin\alpha, \\ \bar{v} = -\left[u + \frac{K}{\alpha}\sin\vartheta\right]\sin\alpha + v\cos\alpha, \end{cases} \qquad (3)$$

где $u = \dot{x}/\omega_H$, $v = -x$ и шаг отображения равен T. Отображение (3) при условии (2) порождает на плоскости (u, v) стохастическую паутину при произвольно малых K с толщиной ~ exp $(-\mathrm{const}/K)$. Паутина имеет приблизительную симметрию вращения q-го порядка и является фракталем. С ростом параметра взаимодействия K толщина паутины растет, и при больших K фазовая плоскость покрывается стохастическим морем, в котором остаются отдельные малые островки на местах ячеек паутины.

При условии резонанса (2) можно выделить в гамильтониане (1) ту часть, которая создает «голые» сепаратрисы, и ту часть, которая одевает их стохастическим слоем [4]. Первая из них имеет следующий вид:

$$H_q = -\frac{K}{\alpha^2 q}\sum_{j=1}^{q}\cos\left(u\cos\frac{2\pi j}{q} + v\sin\frac{2\pi j}{q}\right), \qquad (4)$$

который сразу приводит нас к утверждению, что мы имеем дело со структурами типа «квазикристалл» при $q \neq 2, 3, 4, 6$. Соответствующие структуры»

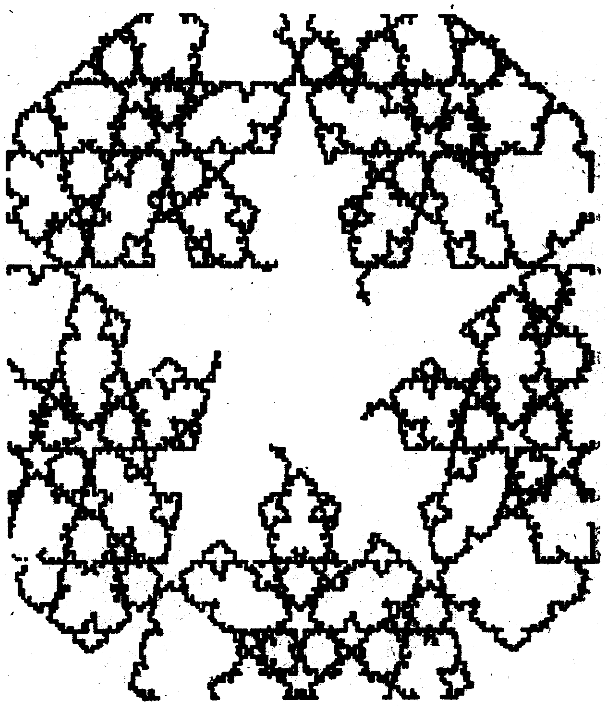

Рис. 1. Пример стохастической паутины с симметрией 5-го порядка.

Внутреннее «окно»—пример известного фрактального дерева. «Окно» возникает вследствие существования кантороторов и запояняется также элементами паутины через довольно большое время

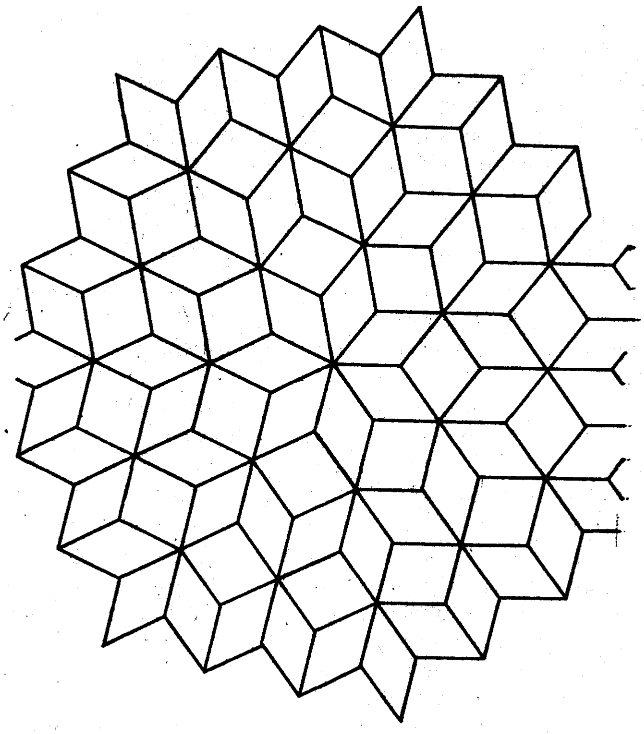

Рис. 2. Пример непериодического покрытия плоскости с симметрией 7-го порядка с помощью двух элементов — толстого и тонкого ромбов

на плоскости (u, v) образуются ливнями постоянной энергии $E = H_q$. В частности, при $q = 5$ с помощью простого алгоритма на линиях уровня $H_q = E$ может быть размещена мозаика Пенроуза[4]. Тем самым устанавливается важная связь между покрытием Пенроуза и свойствами «генератора покрытий» (tiler mapping) $\hat{M}_{\alpha=2\pi/q}$ при $q = 5$ (рис. 1).

Существование в явной форме гамильтониана H_q и «генератора покрытий» $\hat{M}_{\alpha=2\pi/q}$ (q — целое) позволяет исследовать многие важные свойства подобных структур с симметрией типа «квазикристалл». Они определяются как структуры с симметрией линий уровня H_q (q — целое). Плотность состояний при $q \geqslant 7$ близка по своим свойствам к плотности состояний жидкости. Структуры с $q = 5, 7$ ... могут являться промежуточными при переходе порядок — хаос (рис. 2).

Семейство линий уровня для H_q состояний — из большого числа односвязных областей с различными площадями и геометрией. Это семейство также фрактально и обладает скейлинговыми свойствами. Распределение эллиптических и гиперболических точек сосредоточено, в основном, в некоторых энергетических зонах и, по-видимому, также сохраняет симметрию типа «квазикристалл»[5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M.//Nucl. Fusion. 1967. V. 7. P. 253.
2. Арнольд В. И.//ДАН СССР. 1986. Т. 156. С. 9.
3. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А.//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 500.
4. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А.//Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 44 С. 349.
5. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Препринт ИКИ АН СССР.— Москва, 1987.