

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

538.91

**СПИНОВЫЕ СТЕКЛА КАК МОДЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
ДЛЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ *)****В. Кинцель**

Спиновые стекла — это магнитные материалы с необычными магнитными свойствами. Сложная структура фазового пространства, в первую очередь наличие большого числа метастабильных состояний, приводит к появлению особо медленных релаксационных процессов. В настоящей статье дается обзор важнейших экспериментов и моделей. Обсуждаются аналитические и численные результаты, полученные в модели среднего поля для спинового стекла. Эта модель обладает интересным свойством — в ней могут происходить процессы типа изучения и обработки информации, и поэтому в последнее время предполагается, что эта модель имеет определенное отношение к процессам, происходящим в нейронных сетях (в мозгу).

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние двадцать лет физика неупорядоченных материалов вызывает все больший интерес. Хотя большинство явлений в чистых кристаллах сейчас вполне понятно, с такими привычными веществами, как стекло, пластмасса или металлические сплавы, не все столь же ясно. Отсутствие трансляционной симметрии в таких системах не позволяет использовать стандартные экспериментальные и теоретические методы физики твердого тела ¹.

Один из примеров неупорядоченных веществ — спиновые стекла — магнитные системы с необычными магнитными свойствами ². Их название, появившееся в 1968 г., связано с тем, что коллективное поведение магнитных моментов (спинов) похоже на поведение атомов и молекул в структурно-разупорядоченных веществах (стеклах). Именно поэтому можно надеяться, что исследование спиновых стекол поможет лучше понять физику неупорядоченных систем в целом.

В самом деле, спиновое стекло — система довольно универсальная. Существуют и металлические спиновые стекла, как, например, $\text{Au}_{1-x}\text{Fe}_x$, и неметаллические, например $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}$, а также спиновые стекла в виде аморфного металла, например $\text{Gd}_x\text{Al}_{1-x}$, причем концентрация магнитного компонента может меняться в широких пределах. Подобная универсальность

*) K i n z e l W. Spin Glasses as Model Systems for Neural Networks//Complex Systems — Operational Approach in Neurobiology, Physics and Computers: Proc. of the Intern. Symposium on Synergetics at Schloß Elmau, FRG, May 6—11, 1985/Ed. H. Haken.— Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1986.—P. 107—115.—Перевод И. И. Мазина.

В. Кинцель — сотрудник Института исследований твердого тела Ядерного центра в Юлихе, ФРГ.

указывает на то, что требуется наличие совсем немногих факторов, чтобы материал проявлял свойства спинового стекла. Оказывается, что общим свойством всех спиновых стекол является наличие *беспорядка* и *конкуренции* различных магнитных взаимодействий. Именно поэтому можно описать реальные системы на языке простой модели³ Эдвардса — Андерсона (ЭА, 1975). Хотя эта модель допускает аналитическое решение лишь в частном и нереалистическом случае магнитного взаимодействия бесконечного радиуса (т. е. в теории среднего поля), имеется довольно много весьма результативных численных экспериментов. Таким образом, исследования спиновых стекол характеризуются чрезвычайно активным обменом результатами и идеями между теорией и натурными и численными экспериментами. В настоящее время эта деятельность выливается в примерно одну публикацию в день. Несмотря на это, фундаментальные вопросы теории спиновых стекол до сих пор до конца не ясны и остаются вызовом для физики твердого тела.

Сложное конфигурационное пространство спиновых стекол можно использовать для запоминания и обработки информации, а именно, даже в простых моделях возможно обучение и распознавание образов с помощью модификации сети взаимодействий в этих системах. Такая память нелокальна (в отличие от памяти ЭВМ) и весьма нечувствительна к дефектам. Даже «зашумленные» образы распознаются довольно быстро. Общие вычислительные свойства таких моделей принципиально отличны от свойств обычных ЭВМ. Не так давно Хопфилд⁴ предположил, что такие системы могут служить простейшими моделями нейронных сетей. В таком случае состояние отдельного нейрона моделируется значением спина в данном узле, а магнитные взаимодействия служат синапсами, связывающими нейроны. Подстройка нейрона под потенциал связанных с ним соседей отвечает при этом релаксации магнитной энергии при нулевой температуре.

Конечно, это взгляд физика; нейробиологи должны сами оценить, насколько такая концепция помогает в понимании работы мозга. Во всяком случае, исследование вычислительных свойств таких систем методами физики конденсированных сред само по себе интересно. Несомненно, что оно будет продолжаться и в будущем, в частности, в комбинаторной оптимизации⁵.

В данной работе дается краткий очерк современного состояния теории спиновых стекол как модели нейронных сетей. В п. 2 обсуждаются экспериментальные и численные результаты, относящиеся к модели ЭА. В п. 3 даны некоторые аналитические результаты, относящиеся к этой модели. Вычислительные свойства таких систем обсуждаются в п. 4. Некоторые численные и аналитические результаты, полученные автором, используются для иллюстрации.

2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ И МОДЕЛИ

В обычных ферро- или антиферромагнетиках имеет место резкий фазовый переход от разупорядоченного при высоких температурах к упорядоченному при низких температурах. В низкотемпературной фазе магнитные моменты с точностью до тепловых флуктуаций упорядочены периодически во всей системе. При температуре перехода параметр порядка либо скачком (переход I рода), либо непрерывно (переход II рода) обращается в нуль. Таким параметром может служить средняя намагниченность в ферромагнетике или же намагниченность подрешетки в антиферромагнетике. Заметим, что упорядоченная фаза есть коллективное явление в *бесконечной* системе, в конечной же системе порядок подавляется тепловыми флуктуациями.

В спиновых стеклах ситуация иная. Имеется температура замерзания T_f , ниже которой магнитные моменты замерзают в *случайных* направлениях (рис. 1). Для простоты мы будем рассматривать спиновые моменты, которые

могут быть направлены только вверх или вниз. Их можно в таком случае охарактеризовать спиновой переменной $S_i = +1$ (вверх) или $S_i = -1$ (вниз). Замерзание — коллективный эффект. Случайные направления возникают из-за конкуренции магнитных взаимодействий обоих знаков (положительное взаимодействие стремится выстроить спины параллельно, отрицательное — антипараллельно). Действительно, в неупорядоченной системе невозможно выстроить спины так, чтобы они удовлетворяли сразу всем взаимодействиям. Возникает явление «фрустрации» (неудовлетворенности)⁶. Именно с ним и связаны специфические свойства спиновых стекол.

Важнейшим отличием спиновых стекол от обычных магнетиков является не случайное направление спинов, но вырождение по различным спиновым конфигурациям. В обычном, анизотропном магнетике имеются только два возможных состояния (со спином вверх или со спином вниз). В спиновых стеклах же возможных состояний *бесконечно* много. Эти состояния могут быть метастабильными, т. е., хотя каждый спин направлен так, как это диктуется его ближайшим окружением, полная энергия системы в таком

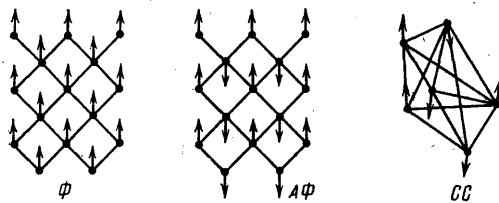


Рис. 1. Расположение магнитных моментов (спинов) в ферро (Ф)-, антиферромагнетиках (АФ) и в спиновых стеклах (СС) при низких температурах

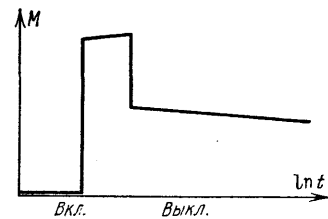


Рис. 2. Намагниченность M спинового стекла как функция времени после включения и выключения магнитного поля

состоянии выше, чем в состоянии равновесия. Со временем такое метастабильное состояние очень медленно переходит в одно из термодинамически равновесных.

Эти свойства спиновых стекол проявляются, в частности, в следующих экспериментальных фактах:

1. В магнитной восприимчивости как функции температуры имеется резкий всплеск при температуре замерзания T_f .
2. В то же время теплоемкость не имеет особенностей при T_f .
3. Рассеяние нейтронов не обнаруживает дальнего порядка.
4. Ниже T_f восприимчивость образца, охлажденного в магнитном поле, отличается от восприимчивости образца, охлажденного без поля. Иначе говоря, намагниченность во внешнем поле зависит от предыстории образца.
5. T_f зависит от характерного для данного эксперимента масштаба времени (10^{-11} с для рассеяния нейтронов вплоть до нескольких дней при измерении намагниченности). Впрочем, изменения T_f невелики.
6. Имеется остаточная намагниченность, которая после снятия поля медленно спадает до нуля.

Поскольку последнее свойство особенно важно для нас, оно проиллюстрировано на рис. 2. В равновесном состоянии спины направлены хаотически и полная намагниченность M равна нулю. После включения внешнего магнитного поля M становится конечным, величина же M зависит от температуры T и напряженности поля h . Если теперь выключить поле h , то M не возвращается к своему первоначальному значению $M = 0$. Вместо этого система переходит в состояние с такой конфигурацией спинов, которой отвечает ненулевая средняя намагниченность. При $T = 0$ это состояние устойчиво, однако при $0 < T < T_f$ M медленно спадает со временем до

полного исчезновения. Таким образом, в такой системе намагниченность, необратима и зависит от времени t , от температуры T , от приложенного магнитного поля h и от истории образца (охлажден в поле или в отсутствие поля).

Как уже отмечалось, свойства спиновых стекол вполне универсальны. Причиной тому является беспорядок в сочетании с конкурирующими магнитными взаимодействиями. Именно поэтому можно описывать спиновые стекла в простой модели Эдвардса — Андерсона (ЭА)³, в которой энергия системы равна

$$H = - \sum_{i,j} S_i S_j J_{ij} - h \sum_i S_i, \quad (1)$$

где спиновые переменные $S_i = \pm 1$ нумеруются индексом i , h — внешнее поле, а J_{ij} — случайное магнитное взаимодействие. Обычно для J_{ij} предполагается гауссовское распределение

$$P(J) = \exp \left[- \frac{J^2}{2(\Delta J)^2} \right], \quad (2)$$

где ΔJ — характерный масштаб энергий.

Конкуренция взаимодействий обеспечивается знакопеременностью. В дополнение к (1) и (2) вводится простая релаксационная динамика, как это обычно делается в машинных (монте-карловских) имитационных расчетах.

Безусловно, эта модель мало связана с реальной микроскопией, скажем, в AuFe или EuSrS. Тем не менее, как оказалось, она удивительно хорошо описывает реальные эксперименты.

Если же рассматриваются J_{ij} с конечным радиусом действия (например, ограничиваются взаимодействием между ближайшими соседями), то на сегодняшний день оказывается, что не существует теории, разумно описывающей свойства такой модели. Тем не менее имитация на ЭВМ показала, что все перечисленные выше характерные свойства присущи и этой модели^{2,7-9}.

Численные расчеты показали, что в двумерной модели ЭА (1) нет фазового перехода¹⁰. Следовательно, процесс замерзания есть динамическое явление с областями локальной корреляции. Размер этих областей и характерные времена релаксации быстро увеличиваются с уменьшением температуры, например^{9,11}

$$\ln \tau \sim T^{-\nu Z}, \quad (3)$$

где $\nu Z \approx 2$, так что для T порядка ΔJ время релаксации оказывается больше любого разумного времени наблюдения и система практически замерзает в состоянии с хаотически направленными спинами и ведет себя как спиновое стекло. Конечно, трудно отличить такой процесс от фазового перехода с $T_c \neq 0$. Проблема существования фазового перехода в трех измерениях пока не решена ни для реальных спиновых стекол, ни для модели ЭА¹².

Поиск состояния $\{S_i\}$ с низшей энергией H вида (1) есть сложная задача комбинаторной оптимизации⁵. Недавно было показано, что эта задача относится к классу так называемых NP -полных задач¹³, т. е. не существует алгоритма, который позволял бы найти решение за время t , полиномиально зависящее от числа спинов N . В то же время опыт работы с численными, моделями показывает, что хорошее приближение к точному решению может быть получено методом Монте-Карло, если медленно охлаждать систему от $T > \Delta J$ до $T = 0$. Этот метод можно также применять и к другим сложным оптимизационным задачам⁵.

3. ТЕОРИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Многие задачи статистической физики точно решаются в пределе взаимодействий бесконечного радиуса. Хотя в этом пределе (который также называют теорией среднего поля, ТСП) исчезают некоторые важные флуктуации, ТСП качественно правильно описывает кооперативные явления в системе. ТСП для модели ЭА¹⁴ активно изучалась². В ТСП каждый спин S_i взаимодействует с каждым другим (S_j) с помощью случайного взаимодействия J_{ij} согласно (2). Разумное значение энергии получается, когда $\Delta J \rightarrow 0$ как $J/N^{1/2}$ в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ (N — число спинов).

За последние пять лет было выяснено, что этой модели присуще сложное до сих пор не до конца понятое поведение. Было развито, однако, много-аналитических методов, и многие статистические и динамические свойства были успешно рассчитаны² в прекрасном качественном согласии с экспериментом.

В ТСП имеется резкий фазовый переход при $T_c \approx J$. Для $T < T_c$ фазовое пространство обладает сложной структурой типа рис. 3. В ТСП свободная энергия F (при $T = 0$ $E = H$) является функцией непрерывных переменных m_i . Локальные минимумы $F(\{m_i\})$ суть физические состояния системы. В ферромагнетиках (при $h = 0$) имеются лишь два минимума: $m_i = M$ и $m_i = -M$, т. е. спонтанная намагниченность

M или $-M$. Параметром порядка здесь будет просто $M(T)$. В спиновых стеклах бесконечно много локальных минимумов $m_i^\alpha = \langle S_i \rangle_\alpha$, где $\langle S_i \rangle_\alpha$ означает термодинамическое усреднение спина S_i по доступной области фазового пространства α . Имеется много термодинамически равновесных состояний (реализующих глобальный минимум) и еще больше метастабильных состояний, определяющих медленные релаксационные процессы в спиновых стеклах. Подобное сложное конфигурационное пространство описывается параметром порядка $q(x)$, который может быть вычислен аналитически и дает термодинамические величины¹⁵. Он имеет следующий физический смысл: возьмем два состояния $\{\langle S_i \rangle_\alpha\}$ и $\{\langle S_i \rangle_\beta\}$, т. е. два глобальных минимума на рис. 3. Тогда расстояние между этими состояниями

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (1 - q_{\alpha\beta}) \quad (4)$$

можно определить через перекрытие $q_{\alpha\beta}$:

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle_\alpha \langle S_i \rangle_\beta. \quad (5)$$

Так как спиновое стекло имеет множество пар (α, β) с различными перекрытиями $q_{\alpha\beta}$, имеет смысл ввести распределение перекрытий $q(x)$. Так вот введенная функция $P(q)$ определена так, чтобы

$$P(q) = \frac{dx}{dq}, \quad (6)$$

так что в термодинамическом равновесии спиновое стекло можно описывать распределением расстояний между всеми низколежащими долинами в конфигурационном пространстве.

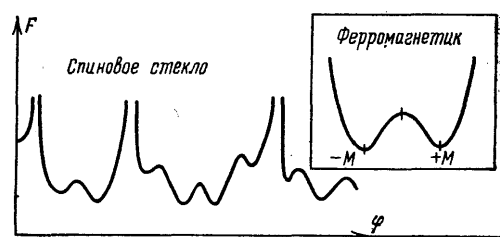


Рис. 3. Свободная энергия как функция некоторой координаты в N -мерном пространстве конфигураций $\{m_i\}$.

Локальные минимумы $\{m_i\}^\alpha$ отвечают физически допустимым состояниям. В ферромагнетике имеются лишь два стабильных состояния, в спиновом стекле — бесконечно много метастабильных состояний

Метрика типа (4) и (5) приводит к интересной топологии, называемой ультраметрической геометрией¹⁶. А именно, три произвольных состояния α , β и γ всегда образуют равнобедренный треугольник, т. е. всегда $d_{\alpha\beta} = d_{\beta\gamma} \geq d_{\alpha\gamma}$ (с точностью до перестановки индексов).

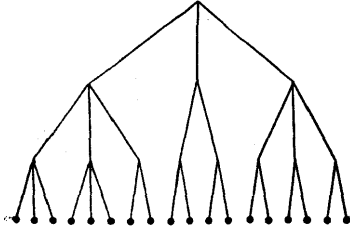


Рис. 4. Ультраметрическая топология состояний спинового стекла, изображенных точками на нижнем уровне. Расстояние до ближайшего общего предка считается расстоянием между состояниями

Эта структура иллюстрируется на рис. 4. Точки внизу отвечают различным состояниям спинового стекла (минимумы на рис. 3). Расстояние $d_{\alpha\beta}$ между точками α и β определяется как расстояние до ближайшего общего предка. Ясно, что такое определение как раз отвечает ультраметрической метрике, что приводит к любопытному явлению типа кластеризации, причем не только в конфигурационном, но и в реальном пространстве¹⁷. Рис. 4, конечно, очень упрощен — в спиновых стеклах $d_{\alpha\beta}$ является непрерывной переменной, а число бифуркаций бесконечно.

Любопытно также, что подобная ультраметрическая структура характерна и для других сложных систем (например, задача коммивояжера¹⁸ или вычислительные структуры¹⁹). Проблема эта нуждается в дальнейших исследованиях.

4. ОБУЧЕНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

Хопфилд⁴ предложил простую модель нейронной сети, похожую на модель ЭА для спиновых стекол: каждый нейрон характеризуется переменной типа «ВКЛ (ВЫКЛ)» $S_i = \pm 1$, где $S_i = +1$ (-1) означает, что нейрон в состоянии i активен (или неактивен). Каждый нейрон i чувствует потенциал E_i со стороны соседних нейронов,

$$E_i = \sum_j J_{ij} S_j + h_i + \text{const.} \quad (7)$$

J_{ij} характеризует потенциал, создаваемый синапсом, связывающим нейроны i и j . h_i — внешнее поле, создаваемое, например, сенсорным устройством (органами чувств). Существуют как возбуждающие, так и тормозящие синапсы, напряжение на которых также может меняться, так что J_{ij} переменна и по знаку, и по амплитуде.

Каждый нейрон i перестраивается согласно потенциалу E_i . Он возбуждается только, если E_i больше, чем пороговое напряжение E_0 . Если константа в (7) выбрана так, чтобы $E_0 = 0$, то состояние нейрона i описывается неравенством

$$S_i E_i > 0, \quad (8)$$

так что функция

$$H = - \sum_i S_i E_i = - \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i S_i \quad (9)$$

имеет локальный минимум.

В случае $J_{ij} = J_{ji}$ мы возвращаемся к спиновому стеклу (1) с локальными полями h_i . Следовательно, в таком случае состояния нейронной сети отвечают метастабильным состояниям спинового стекла (минимумы на рис. 4).

Обсудим вычислительные свойства такой системы. Положим для начала систему полностью неорганизованной, т. е. $J_{ij} (=J_{ji})$ распределены случайно согласно (2). Даже в таком виде система обладает своего рода памятью. Так, если приложить к системе сильное внешнее поле

$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N)$, то система перейдет в состояние $\mathbf{S}^0 = \{S_i = \text{sign } h_i\}$ согласно (8). Если выключить затем внешнее поле, система «свалится» в ближайший локальный минимум \mathbf{S}^1 , т. е. в состояние \mathbf{S}^1 с наибольшим перекрытием с начальным «образом» \mathbf{S}^0 . Легко видеть, что $\mathbf{S}^0 \mathbf{S}^1 = O(N)$. Действительно, \mathbf{S}^0 никак не связано с распределением J_{ij} ; значит, без потери общности можно положить $\mathbf{h} \propto (1, 1, \dots, 1)$, что отвечает однородному полю h . Перекрытие $\mathbf{S}^0 \mathbf{S}^1$ как раз будет равно остаточному намагничению стекла (см. рис. 2)²⁰. Итак, даже неорганизованная сеть способна частично запоминать введенную в нее информацию (заключенную в конфигурации \mathbf{S}^0). Чтобы лучше запомнить эту информацию, следует должным образом подстроить связи J_{ij} к вводимому образу. Положим, мы хотим запомнить одновременно и одинаково «крепко» m образов $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \dots, \mathbf{S}^m$. Соответствующим образом подогнанные связи суть⁴

$$J_{ij} = \sum_{v=1}^m S_i^v S_j^v.$$

В качестве иллюстрации возьмем букву A в качестве образа \mathbf{S}^1 , как это изображено на рис. 5 *). Число узлов S_i было $N = 20 \times 20$, и, кроме A , по схеме (10) было запомнено еще 29 случайных образов. Когда в такую систему

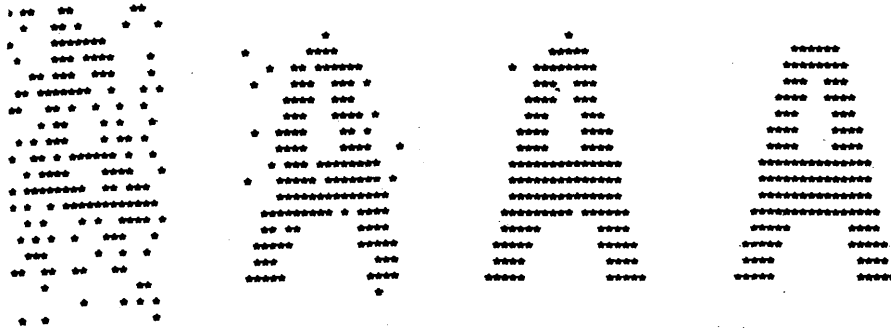


Рис. 5. Распознавание образов в модели Хопфилда.

Спины S_i расположены в узлах решетки 20×20 . $S_i = 1$ изображаются звездочкой, $S_i = -1$ не показаны. Система была обучена 30 образам. После приложения искаженного образа система релаксирует к чистому образу (слева направо)

было введено « A с шумом» в качестве начальной конфигурации, система быстро (за несколько шагов, т. е. несколько переворотов каждого спина) перешла в запомненное состояние.

Для случайных, не коррелированных между собой образов удастся оценить, сколько образов можно одновременно запомнить по схеме (10) и насколько успешно проходит распознавание в зависимости от уровня шумов. Если производится попытка обучения слишком большому числу образов, то в итоге запомненные образы несколько отличаются от заданных. Ошибку можно охарактеризовать расстоянием $d_{\alpha\beta}$, определенным согласно (4) и (5), между заданным образом \mathbf{S}^α и запомненным \mathbf{S}^β . В пределе больших N верно следующее равенство²⁰:

$$d = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{1-2d}{(m/2)^{1/2}} \right) \right], \quad (11)$$

где

$$\Phi(x) = 2 \left[(2\pi)^{1/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \right]^{-1}$$

*) Узлы с $S_i = 1$ обозначены на рис. 5 звездочками, с $S_i = -1$ — пробелами.

— интеграл вероятности, а z — число связей для одного узла. Для взаимодействия бесконечного радиуса $z = N$ и, следовательно, число запоминаемых с определенной ошибкой d образов неограниченно растет при $N \rightarrow \infty$. Например, для $d = 0,5\%$ можно запомнить $0,15N$ образов, причем каждый из них распознается даже с 50% -ным шумом. В то же время для ограниченного z число запоминаемых образов весьма ограничено. Численное моделирование²⁰ подтверждает формулу (11).

Можно аналитически показать, что схема (10) не работает для коррелированных картинок, скажем, для похожих букв. Это демонстрируется на рис. 6, где мы выбрали в качестве образов R , P или E , F . Однако и в этом случае можно построить схему²⁰, обеспечивающую устойчивое запоминание,

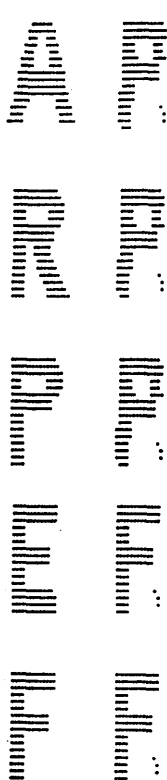


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но запоминались только пять образов, изображенных слева.

Тем не менее в конечном счете вместо них устойчивыми оказались два правых образа. Это говорит о том, что в модели Хопфилда невозможно запомнить коррелированные образы



Рис. 7. Запоминание через разрушение связей.

Система одновременно запомнила пять коррелированных образов и распознает их даже при высоком уровне шума (слева — вход, справа — выход)

воспользовавшись тем фактом, что в первые годы жизни человека многие синапсы мозга отмирают, хотя именно в этот период запоминается много информации и особенно крепко²¹.

Конкретно, в данном случае мы начинаем с полностью неорганизованной сети с гауссовским распределением J_{ij} , как в (1) и (2). Затем все связи, которые противоречат хотя бы одному из m образов, разрушаются, т. е. J_{ij} полагается равным нулю, если существует образ S^α такой, что $J_{ij}S_i^\alpha S_j^\alpha < 0$.

На рис. 7 проиллюстрирована эта ситуация: пять образов A , R , P , E и F запоминались описанным методом в матрице 20×20 . Система распознавала даже крайне зашумленные образы, опять же за несколько шагов. Однако максимальное число запоминаемых образов при этом оказывается меньшим, оно пропорционально $\ln N$.

Перечислим важнейшие свойства модели Хопфилда.

а) Обучение и распознавание образов есть спонтанный коллективный процесс всей системы в целом; сложного алгоритма обработки не требуется. Даже случайная сеть обладает определенного сорта памятью.

б) Запомненная информация хранится сразу во всей сети и одновременно в каждой ее части; иначе говоря, память нелокальна.

в) Система нечувствительна к дефектам. Выключение части сети приводит лишь к некоторому уменьшению емкости памяти.

г) Обработка информации происходит путем релаксации системы к состоянию, ближайшему к введенному образу. Можно сказать, что обращение к хранимой информации производится по ее содержанию, а не адресу в памяти (как в компьютере). Именно поэтому процесс распознавания происходит очень быстро.

д) Точность воспроизведения информации определяется весом данного образа среди других. Возможна ситуация, когда обучение новому образу сопровождается «забыванием» старых образов.

е) Как известно из теории спиновых стекол, качественные свойства модели довольно мало чувствительны к ее деталям. Так, например, обучение и распознавание возможны даже в сети, в которой $J_{ij} = \pm 1$.

Заметим, что до сих пор мы обсуждали лишь детерминистические системы согласно (8) и (9). Однако и в стохастической модели многодолинная структура фазового пространства сохраняет описанные выше свойства²².

Итак, модель Хопфилда обладает некоторыми замечательными свойствами. Применяемый в ней способ хранения и поиска информации принципиально отличается от принятого в современных ЭВМ, но близок по своим свойствам к биологическим системам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zallen R. The Physics of Amorphous Solids. — New York: J. Wiley, 1983.
2. В качестве обзора см.: Fischer K. H. // Phys. Stat. Sol. Ser. b. 1983. V. 116. P. 357; 1985. V. 130.
Краткий обзор последних результатов см.: Kinzel W. // Lect. Not. Phys. 1984. V. 206. P. 113.
3. Edwards S. F., Anderson P. W. // J. Phys. Ser. F. 1975. V. 5. P. 968.
4. Hopfield J. J. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1982. V. 79. P. 2554.
5. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. // Science. 1983. V. 220. P. 671.
6. Toulouse G. // Comm. Phys. 1977. V. 2. P. 155.
7. Binder K., Schröder K. // Phys. Rev. Ser. B. 1976. V. 14. P. 2142.
8. Kinzel W. // Ibidem. 1979. V. 19. P. 4595.
9. Kinzel W., Binder K. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1509.
10. Morgenstern I., Binder K. // Ibidem. 1979. V. 43. P. 1615.
11. Binder K., Young A. P. // Phys. Rev. Ser. B. 1984. V. 29. P. 2864.
Последние работы в этом направлении:
12. Bontemps N. et al. // Ibidem. 1984. V. 30. P. 6514.
Ogielski A. T., Morgenstern I. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 9238.
13. Bachas C. P. // J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. L 709.
14. Sherrington D., Kirkpatrick S. // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 1792.
15. Parisi G. // Ibidem. 1979. V. 43. P. 1754; 1983. V. 50. P. 1946.
16. Mezard M. et al. // Ibidem. 1984. V. 52. P. 1156.
17. Mezard M., Virasoro M. A. (to be published).
18. Kirkpatrick S., Toulouse G. (to be published).
19. Huberman B. A., Kerszberg M. // J. Phys. Ser. A. 1985. V. 18. P. L331.
20. Kinzel W. // Phys. Rev. Ser. B. 1986. V. 33. P. 5086.
21. Я благодарен М. Керсбергу, обратившему мое внимание на этот факт.
22. Amit D. Y., Gutfreund H., Sompolinsky H., Peretto P. // Biol. Cyber. 1984. V. 50. P. 51.