

539.12.01+539.9

**ДРОБНЫЙ ЗАРЯД В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ  
И ФИЗИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

***И. В. Криве, А. С. Рожавский***

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	33
2. Дробный заряд в одномерных моделях квантовой теории поля . . . . .	36
2.1. Солитоны в модели Джэкива — Ребби. 2.2. Суперсимметрия, нулевые моды и дробление заряда. 2.3. Дробно-заряженные солитоны и бозонизация. 2.4. Киральная аномалия и дробный заряд. 2.5. Взаимодействие дробного заряда с электрическим полем. Топологическая природа дробного заряда.	
3. Аномальные квантовые числа в системе Пайерлса — Фрэлиха . . . . .	42
3.1. Пайерлсовский диэлектрик — модель динамической генерации массы. 3.2. Микроскопическая модель пайерлсовского диэлектрика. 3.3. Киральная аномалия и волна зарядовой плотности. 3.4. Аномалия спин—заряд для солитонов в поликарбонате. 3.5. Солитоны в соизмеримой волне зарядовой плотности. 3.6. Конфайнмент солитонов. 3.7. Туннельное рождение солитон-антисолитонных пар и нелинейная проводимость.	
4. Двумерные модели теории поля и квантовый эффект Холла . . . . .	53
4.1. Топологическое действие в двумерной квантовой электродинамике. 4.2. Топологический ток в релятивистской и нерелятивистской системе 2D-электронов. 4.3. Целочисленный квантовый эффект Холла. 4.4. Квазичастицы с дробным зарядом. 4.5. Иерархия квазичастиц и аномальная статистика.	
5. Заключение . . . . .	69
Список литературы . . . . .	70

1. ВВЕДЕНИЕ

На развитие квантовой теории поля в последнее десятилетие существенное влияние оказали идеи и методы топологии. Наряду с традиционным изучением локальной динамики полей, особое внимание стали уделять исследованию глобальных характеристик теории. Среди новых понятий, возникших при таком взгляде на модели теории поля, важное место занимает топологический заряд. Его сохранение обеспечивается не динамикой взаимодействия, а нетривиальными граничными условиями. По своей сути топологический заряд является глобальной характеристикой теории и относится к объектам, наделенным пространственной структурой, — солитонам.

В 1976 г. Джэкив и Ребби изучали влияние фермионных полей на квантовую динамику солитонов. При этом был обнаружен поразительный факт: в одномерных моделях топологически устойчивый солитон (кинк) так поляризует дираковский вакуум, что приобретает полуцелый фермионный заряд (электрический, если фермионы электрически заряжены).

Этот результат, широко известный среди специалистов, занимающихся квантовой теорией солитонов, казался, однако, далеким от возможных экспериментальных следствий. Действительно, в физике высоких энергий одномерные модели не могут претендовать на роль реалистических теорий, а используются только в качестве «полигона» для теоретической проверки различных гипотез, переносимых впоследствии в реальный трехмерный мир.

Но вот, в 1979 г. появилась работа Су, Шриффера, Хигера<sup>36</sup>, в которой исследовался на первый взгляд очень далекий от возможных приложений квантовой теории поля объект — линейный полимер транс-полиацетилен (trans-(CH)<sub>x</sub>). Чистый полиацетилен является хорошим диэлектриком, на уже при слабом легировании он обладает достаточно высокой проводимостью. Причем, резкое увеличение проводимости (на 10–12 порядков) сопровождается падением магнитной восприимчивости практически до нуля. Этот экспериментальный факт заставляет считать свободные носители заряда в trans-(CH)<sub>x</sub> бессpinовыми. Наоборот, в нелегированном полиацетилене имеются нейтральные подвижные объекты со спином 1/2 (см., например, обзор<sup>39</sup>). Для объяснения аномальной связи спин—заряд, а также необычных оптических свойств слаболегированного полиацетилена в работах<sup>36, 37</sup> была выдвинута гипотеза, что свободными носителями заряда (спина) в trans-(CH)<sub>x</sub> являются топологические дефекты структуры — солитоны параметра порядка пайерлсовского диэлектрика, существование которых впервые было предсказано<sup>35</sup> Бразовским<sup>35</sup>.

Работы<sup>35–37</sup> стимулировали необычайную активность теоретических и экспериментальных исследований пайерлсовских диэлектриков (ПД) и, в частности, полиацетилене. Вскоре было осознано, что обнаруженные аномалии в полиацетилене являются проявлением эффекта дробления заряда Джэкива — Ребби, замаскированного наличием спина у реального электрона<sup>3, 47</sup>. При этом оказалось, что континуальная модель ПД в основных чертах совпадает с изучавшимися ранее моделями одномерной квантовой теории поля<sup>43–50, 40</sup>.

Полиацетилен принадлежит к выделенному классу пайерлсовских диэлектриков (димеризованные структуры) с вещественным параметром порядка. В общем случае при пайерлсовском структурном фазовом переходе возникает комплексный параметр порядка, фаза которого описывает коллективное подщелевое движение электронов заполненной зоны (фрёлиховская волна зарядовой плотности). Солитоны волны зарядовой плотности, изучавшиеся впервые в рамках феноменологического подхода Райсом, Бишопом, Крумханслом и Траллинджером<sup>57</sup>, могут обладать произвольным дробным зарядом. Электророждение таких солитон-антисолитонных пар — один из возможных механизмов нелинейной проводимости<sup>58, 65</sup> ряда квазиодномерных соединений (TaS<sub>3</sub>, NbSe<sub>3</sub> и др.).

Поэтому можно утверждать, что сложилась ситуация, когда формальные модели одномерной квантовой теории поля успешно применяются для описания квазиодномерных проводящих сред, а эксперименты в этой далекой от квантовой теории поля области физики косвенно подтверждают такое необычное предсказание современных моделей физики высоких энергий, как дробление фермионного заряда. Однако прямое экспериментальное доказательство существования дробного заряда в квазиодномерной физике пока отсутствует.

Дробные квантовые числа впервые наблюдались Тсуи и др.<sup>92</sup> при измерении холловской проводимости двумерного электронного газа (квантовый эффект Холла) в гетеропереходах на основе арсенида галлия GaAs — AlGaAs. Эффект целочисленного квантования поперечной и одновременное обращение в нуль продольной компонент магнитосопротивления газа двумерных (2D) электронов в сильном магнитном поле был открыт в 1980 г. фон Клитцингом и др.<sup>90</sup> и связан с когерентным движением делокализованных электронных состояний полностью заполненных уровняй Ландау. Высокая точность, с которой наблюдается целочисленное квантование холловской проводимости, объясняется топологической природой эффекта<sup>101, 105, 106</sup>.

Вскоре существование топологического тока холловского типа было предсказано и в калибровочных моделях квантовой теории поля в (2 + 1)-мерном пространстве-времени<sup>86–88</sup>. В частности, было показано, что в дву-

мерной квантовой электродинамике электрическое поле  $\mathbf{E}$  вызывает перпендикулярный направлению  $\mathbf{E}$  недиссипативный вакуумный ток с проводимостью  $\sigma = e^2/4\pi\hbar$  ( $e$  — заряд электрона). Но если для систем Пайерлса — Фрёлиха теоретико-полевые модели могут быть получены из микроскопических гамильтонианов и поэтому претендуют на описание реальной ситуации, то связь между топологическим вакуумным током в 2D-электродинамике и холловским током нерелятивистских двумерных электронов в квантующем магнитном поле чисто формальна и не затрагивает различных физических причин, объясняющих оба эффекта.

Целочисленный квантовый эффект Холла (КЭХ) может быть объяснен в рамках одночастичной модели 2D-электронов, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем и с примесями. Наблюдаемое в эксперименте дробное квантование холловской проводимости есть следствие многочастичных эффектов — кулоновского взаимодействия электронов. Для описания дробного КЭХ Лафлинным была предложена модель несжимаемой квантовой электронной жидкости<sup>107</sup>. Основное состояние в этой модели отвечает конденсату вращающихся вокруг общего центра масс электронов, а квазичастицы (квазиэлектроны и квазидырки) имеют конечную энергию возбуждения и обладают дробным электрическим зарядом. Но, пожалуй, самым необычным свойством квазичастиц Лафлина является их аномальная статистика<sup>121, 122</sup>. На этом уровне опять возникает тесное пересечение идей и методов, разрабатываемых в квантовой теории поля и физике твердого тела.

В 1982 г. Вилчек, изучая движение частицы с зарядом  $q$  в поле бесконечно тонкого соленоида с потоком  $\Phi$ , указал на возможность считать величину  $\Delta_\Phi = q\Phi/2\pi$  спином такой двумерной связанной системы (композит заряженная частица плюс поток магнитного поля получил название «анион»)<sup>116</sup>. При этом квантовый ансамбль тождественных анионов подчиняется аномальной статистике, в общем случае, промежуточной между традиционными ферми- и бозе-статистиками частиц<sup>116, 120</sup>. Аномальная статистика квазичастиц в дробном квантовом эффекте Холла — еще один пример удивительной взаимосвязи глубоких идей, возникающих в различных областях современной физики.

Топологический заряд (и связанные с ним аномалии в поляризации фермionного вакуума) не является специфическим свойством низкоразмерных моделей, а присутствует в пространствах любой размерности. Мы в предлагаемом обзоре ограничимся, однако, изучением только одно- и двумерных теорий, поскольку именно в низкоразмерной физике выявлена к настоящему времени тесная связь между предсказаниями моделей квантовой теории поля и рядом необычных эффектов, экспериментально обнаруженных в физике конденсированных сред.

Целью настоящего обзора является последовательное изложение теоретических фактов, касающихся проблемы дробного заряда. Авторы старались представить материал в такой форме, чтобы он был интересен специалистам, занимающимся как квантовой теорией поля, так и физикой твердого тела. В основу рассмотрения, однако, положены представления, разработанные в квантовой теории поля (это касается и используемой терминологии). Поэтому «твёрдотельный» аспект проблем изложен не полностью, а только с теоретико-полевой точки зрения. В меньшей степени это относится к разделу, посвященному квантовому эффекту Холла, но и здесь мы практически не касались очень важного для данной проблемы, но лежащего в стороне от целей обзора, вопроса о роли неупорядоченности. Мы не обсуждаем также многочисленные эксперименты, связанные с вопросом существования и динамики солитонов в квазидимерных системах. К сожалению, в этой области экспериментальную ситуацию еще нельзя считать окончательно установившейся. Очень кратко изложены и экспериментальные факты, касающиеся квантового эффекта Холла. Все эти дополнительные сведения могут быть почерпнуты, например, из обзоров<sup>39–42, 61, 94, 95, 135, 136</sup>.

## 2. ДРОБНЫЙ ЗАРЯД В ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

## 2.1. Солитоны в модели Джэкива — Ребби

Изучение явления дробления заряда начнем с простейшей одномерной модели, описывающей взаимодействие фермионных  $\psi$  и скалярных  $\phi$  полей:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi) + \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial_\mu - g\phi) \psi; \quad (2.1)$$

здесь  $\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma_0$ ,  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ ,  $g$  — константа юкавской связи. На потенциал  $U(\phi)$  налагаются условие (дополнительно к требованию перенормируемости модели (2.1)), чтобы бозонный сектор модели содержал статические топологически устойчивые солитоны. Пусть  $U(\phi)$  имеет, например, вид, показанный на рис. 1 (при конкретном выборе потенциала  $U(\phi) = \lambda(\phi^2 - \phi_0^2)^2$  лагранжиан (2.1) иногда называют моделью Джэкива — Ребби). Тогда, при  $g \rightarrow 0$ , решения (2.1), имеющие пространственные асимптотики

$$\Phi_S(x) = \begin{cases} \phi_0, & x \rightarrow \infty, \\ -\phi_0, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad \Phi_S(x) = \begin{cases} -\phi_0, & x \rightarrow \infty, \\ \phi_0, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.2)$$

обладают конечной энергией и абсолютно устойчивы. Ясно также, что такие солитоны сохраняются и при наличии юкавского взаимодействия скалярных полей  $\phi$  с фермионами (по крайней мере, для случая слабых констант взаимодействия). При конкретном выборе  $U(\phi)$  легко найти решения системы классических уравнений движения полей  $\phi$  и  $\psi$  (см., например, <sup>1</sup>), отвечающие граничным условиям (2.2). Для наших целей, однако, явный вид солитонных решений не важен. Рассмотрим, какое влияние топологически устойчивый солитон оказывает на фермионный вакуум.

## 2.2. Суперсимметрия, нулевые моды и дробление заряда

Будем считать статический солитон  $\phi_S(x)$  внешним полем, тогда (2.1) сводится к лагранжиану дираковских электронов с зависящей от пространственных координат «массой»  $m(x) = g\phi_S(x)$ . Напомним, что в  $(1+1)$ -мерном пространстве-времени дираковский спинор  $\psi$  двухкомпонентен и описывает две степени свободы (частица — античастица). Поскольку кинематический спин у одномерных электронов отсутствует (нет группы вращений), матрицы Дирака вырождаются в матрицы Паули  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1) \rightarrow \sigma_i$ . Выбирая, например,  $\gamma_0 = -\sigma_1$ ,  $\gamma_1 = -i\sigma_3$  и полагая  $\psi(x, t) = e^{i\omega t} \hat{\psi}(x)$ , имеем

$$H_D \psi(x) = \omega \psi(x), \quad H_D = \sigma_2 \hat{p} - \sigma_1 m(x), \quad (2.3)$$

где  $\omega$  — энергия фермионов в статическом скалярном поле  $m(x)$ ,  $\hat{p} = -i\partial_x$ . Так как  $\{H_D, \sigma_3\} = 0$ , легко построить два эрмитовых антисимметрических оператора  $Q_{1,2}$ , квадраты которых совпадают

$$Q_1 \equiv H_D, \quad Q_2 = i\sigma_3 H_D, \quad \{Q_1, Q_2\} = 0, \quad (2.4)$$

$$H_S = H_D^2 = Q_1^2 = Q_2^2 = \hat{p}^2 + m^2(x) + \sigma_3 m'(x). \quad (2.5)$$

Оператор  $H_S$  является гамильтонианом суперсимметричной квантовой механики Виттена. Согласно общим свойствам суперсимметричных теорий для

гамильтониана (2.5) имеем (см., например, обзор<sup>32</sup>): 1) все уровни «энергий»  $E_s > 0$  гамильтониана  $H_s$ , по крайней мере, двукратно вырождены, что является следствием зарядовой симметрии  $\psi_{-\omega} = \sigma_3 \psi_\omega$ ; 2) нулевая мода  $H_s \psi_0 = 0$  невырождена, а само существование такого нормированного решения зависит от «топологии» потенциала  $m(x)$ . А именно, если при  $x \rightarrow \pm\infty$   $m(x)$  принимает разные знаки, то вне зависимости от конкретного локального поведения функции  $m(x)$ , существует уровень нулевой энергии. Наоборот, когда на пространственных бесконечностях потенциал  $m(x)$  принимает один и тот же знак, нулевая мода отсутствует.

Как легко видеть, нулевые моды гамильтонианов  $H_s$  и  $H_d$  совпадают. Поскольку требование топологической устойчивости солитона  $\varphi_s(x)$  удовлетворяет условию существования нулевой моды у суперсимметричного гамильтониана  $H_s$ , мы приходим к заключению, что на кинке появляется связанное состояние с нулевой энергией.

Для бессpinовых фермионов нулевая мода может быть либо пустой, либо однократно заполненной. Так как энергия фермиона на уровне нулевой энергии естественно равна нулю, состояния солитона оказываются двукратно вырожденными по энергии. Эти состояния, однако, различаются знаком фермионного заряда. Действительно, пусть  $F_+$  — фермионный заряд солитона с заполненной нулевой модой,  $F_-$  — с незаполненной. Тогда  $F_+ - F_- = 1$ . Так как из соображений зарядовой симметрии естественно считать, что абсолютные величины фермионных зарядов этих состояний совпадают, находим  $F_+ = -F_- = 1/2$ . Приведенные рассуждения легко перевести на строгий алгебраический язык и получить доказательство дробления заряда кинка<sup>1,9</sup> (см. также<sup>4</sup>, где использовалась связь с суперсимметрией). Мы не будем воспроизводить это формальное алгебраическое доказательство, а рассмотрим аналитические методы, дающие те же самые конечные ответы, но более удобные при изучении поведения дробного заряда во внешнем поле.

### 2.3. Дробно-заряженные солитоны и бозонизация

Простое доказательство существования дробно-заряженных солитонов в модели (2.1) может быть получено<sup>2</sup> (см. также<sup>3, 5</sup>), используя метод бозонизации.

Напомним, что в  $(1+1)$ -мерном пространстве-времени существует возможность эквивалентного описания квантовых систем на языке бозонных или фермионных переменных. Для безмассовых свободных теорий фермионного и бозонного поля такая эквивалентность отмечалась еще в работах начала шестидесятых годов (см., например, обзор<sup>24</sup>). В частности, обращал на себя внимание тот простой факт, что каноническое коммутационное соотношение для бозе-операторов

$$[\sigma(x), \dot{\sigma}(y)] = i\delta(x - y) \quad (2.6)$$

переходит в одновременной коммутатор фермионных токов

$$[j^\mu(x), j^\nu(y)] = -\frac{i}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \delta'(x - y), \quad \epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1 \quad (2.7)$$

при формальной замене

$$j^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma. \quad (2.8)$$

При этом канонический тензор энергии-импульса свободного скалярного поля переходит в тензор энергии-импульса безмассовых фермионов, записанный в терминах плотностей фермионных токов.

В 1975 г. Коулмен доказал теорему<sup>22</sup> об эквивалентности двух нетривиальных моделей одномерной квантовой теории поля: массивной модели

Тирринга

$$\mathcal{L}_T = \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{g}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 \quad (2.9)$$

и квантовой модели синус-Гордон

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{\alpha_0}{\beta^2} (1 - \cos \beta \sigma); \quad (2.10)$$

здесь  $\psi$  — двухкомпонентный дираковский спинор,  $\sigma$  — действительное скалярное поле,  $m$  — масса фермиона,  $\beta$ ,  $g$  — константы самодействия скалярных и фермионных полей.

Непосредственная запись ферми-полей через бозе-операторы имеет громоздкий нелокальный вид<sup>23, 25</sup>. Структурно ферми-поля принимают форму  $F \propto e^B$ , где  $B$  — бозе-операторы, и антисимметрические соотношения для  $F$  появляются благодаря коммутации на  $c$ -число, равное  $i\pi$ , бозе-операторов

$$F_1 F_2 = e^{B_1} e^{B_2} = e^{B_2} e^{B_1} e^{[B_1, B_2]} = e^{B_2} e^{B_1} e^{i\pi} = -F_2 F_1.$$

Для билинейных комбинаций ферми-полей формулы перехода имеют простой локальный вид и удобны при практических расчетах. В частности, переход от массивной модели Тирринга к модели синус-Гордон совершается заменой нормальных произведений операторов:

$$:\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi: \Leftrightarrow \frac{1}{2} :(\partial_\mu \sigma)^2:, \quad (2.11)$$

$$:\bar{\psi} \gamma_\mu \psi: \Leftrightarrow \frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma, \quad (2.12)$$

$$:\bar{\psi} \psi: \Leftrightarrow \mu : \cos(\beta \sigma): \quad (2.13)$$

При этом константы самодействия полей связаны соотношением

$$1 + \frac{g}{\pi} = \frac{4\pi}{\beta^2}. \quad (2.14)$$

(Константа  $\mu$  в (2.10) пропорциональна массе, при которой выполняется процедура нормального упорядочения.)

Из соотношения (2.14) следует, что при  $\beta^2 = 4\pi$  ( $g = 0$ ) модель Тирринга вырождается в модель свободных фермионов, которым в бозонном формализме отвечают топологически устойчивые солитоны модели синус-Гордон (при  $\beta^2 = 4\pi$ ). Это свойство позволяет использовать метод бозонизации в многочисленных моделях одномерной квантовой теории поля, рассматривая взаимодействующие с фермионами поля как внешние (адиабатическое приближение).

После бозонизации лагранжиан (2.1) принимает вид

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - V(\sigma, \varphi), \quad V(\sigma, \varphi) = U(\varphi) + g\mu\varphi \cos(2\sqrt{\pi}\sigma). \quad (2.15)$$

Согласно (2.8), (2.12) фермионный заряд

$$Q_F = \int dx \bar{\psi} \gamma_0 \psi \quad (2.16)$$

в бозонной формулировке модели совпадает с топологическим зарядом солитонов:

$$Q_F = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \sigma = \frac{\Delta\sigma}{\sqrt{\pi}}, \quad \Delta\sigma = \sigma(\infty) - \sigma(-\infty). \quad (2.17)$$

Поэтому, для расчета  $Q_F$  достаточно определить вакуумные значения скалярных полей  $\varphi$  и  $\sigma$ . В квазиклассическом приближении эта задача сводится

к изучению минимумов потенциала  $V(\phi, \sigma)$  (2.15)

$$U'(\phi) + g\mu \cos(2\sqrt{\pi}\sigma) = 0, \quad \sin(2\sqrt{\pi}\sigma) = 0. \quad (2.18)$$

Для слабой константы юкавской связи  $g$  (когда может быть оправдана вся схема расчета) решения системы уравнений (2.18) показаны на рис. 2 ( $\pm\phi$  — вакуумные значения поля  $\phi$ ). Устойчивые статические неоднородные решения модели (2.12), выходящие при  $x \rightarrow \pm\infty$  на одно и то же равновесное значение поля  $\phi$  ( $+\phi$  или  $-\phi$ ), имеют  $|\Delta\sigma| = \sqrt{\pi}$  и поэтому, согласно (2.17), обладают единичным фермионным зарядом. Это фермион модели (2.1) (более точно полярон — локально возмущенный вакуум скалярного поля со связанным однофермионным состоянием). Для солитонов, принимающих при  $x \rightarrow \pm\infty$  разные по знаку асимптотические значения поля  $\phi$ ,  $|\Delta\sigma| = \sqrt{\pi}/2$  и их фермионный заряд полуцелый. Этим состояниям отвечают кинки. Таким образом, солитоны с незаполненным уровнем нулевой энергии имеют заряд  $Q_F = -1/2$ , с заполненным  $Q_F = +1/2$ . Отметим, что кинк изменяет также плотность состояний фермионов непрерывного спектра, но это возмущение сводится только к переопределению энергии квантового солитона.

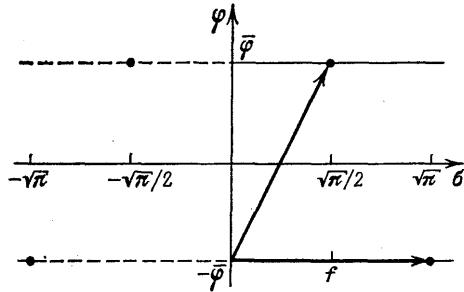


Рис. 2

#### 2.4. Киральная аномалия и дробный заряд

В этом разделе мы несколько обобщим задачу — рассмотрим поляризацию вакуума комплексным скалярным полем  $\phi = \rho e^{i\theta}$  ( $\rho(x) > 0$ ). Лагранжиан фермионов во внешнем поле  $\phi$ , согласованный с общими требованиями симметрии (эрмитовости, лоренц-инвариантности, Р-четности), имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial_\mu - g\rho(x) e^{i\gamma_5 \theta(x)}) \psi, \quad \gamma_5 \equiv \gamma_0 \gamma_1, \quad (2.19)$$

где  $g$  — константа юкавского взаимодействия. Удобно преобразовать лагранжиан (2.19), выделив в нем слагаемое, являющееся при  $\rho = \text{const}$  массой дираковских электронов  $m = g\rho$ . Вид этого унитарного преобразования (киральный поворот) однозначно диктуется формой фермион-бозонной связи в (2.19):

$$U_\theta \psi U_\theta^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{2} \gamma_5 \theta(x)\right) \psi, \quad U_\theta \bar{\psi} U_\theta^{-1} = \bar{\psi} \exp\left(-\frac{i}{2} \gamma_5 \theta(x)\right). \quad (2.20)$$

Используя канонические антисимметрические соотношения для фермионов, нетрудно проверить, что оператор кирального поворота  $U_\theta$  может быть представлен в виде

$$U_\theta = \exp\left(\frac{i}{2} \int j_\mu^5(x) \theta(x) dx\right), \quad j_\mu^5(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \quad (2.21)$$

( $j_\mu^5$  — аксиально-векторный ток).

Преобразования типа (2.20) легко выполняются при помощи формального операторного тождества

$$e^{iA} B e^{-iA} = B + i[A, B] + \frac{i^2}{2} [A, [A, B]] + \dots, \quad (2.22)$$

если известна алгебра операторов  $A, B$ . В нашем случае необходимо вычислить коммутатор векторных и аксиально-векторных токов. Заметим, что

в  $(1 + 1)$ -мерном пространстве-времени матрицы Дирака удовлетворяют простому соотношению  $\gamma^\mu \gamma^\nu = \epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu$  и единственный нетривиальный коммутатор (плотностей векторных и аксиально-векторных зарядов) легко находится, используя, например, процедуру бозонизации (2.6), (2.8):

$$[j_0^\mu(x), j_0^\nu(y)] = -\frac{i}{\pi} \delta'(x-y). \quad (2.23)$$

Соотношений (2.20) — (2.23) достаточно для вывода кирально-преобразованного лагранжиана (2.19)<sup>5,6</sup>:

$$U_\theta \mathcal{L} U_\theta^{-1} \equiv \mathcal{L}_\theta = \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi - g \rho \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \theta + \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu \theta)^2. \quad (2.24)$$

Обратим внимание на последнее слагаемое в (2.24), обвязанное появлению швингеровских членов в алгебре плотностей зарядов (2.23). В функциональном подходе эта добавка к классическому лагранжиану происходит от якобиана перехода при замене переменных  $\psi = \exp[-(i/2) \gamma_5 \theta(x)] \chi$  в континуальном интеграле по ферми-полям<sup>29,30</sup>.

Используя (2.20) — (2.23), легко найти формулы преобразования векторных и аксиально-векторных токов при локальных киральных вращениях:

$$j_\mu^\theta(x) = j_\mu(x) - \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \theta, \quad j_\mu^{5\theta}(x) = j_\mu^5(x) - \frac{1}{2\pi} \partial_\mu \theta. \quad (2.25)$$

Согласно первому из соотношений (2.25), фермионный заряд вакуума

$$Q_F = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle 0 | \bar{\psi} \gamma_0 \psi | 0 \rangle - \frac{\Delta \theta}{2\pi}, \quad \Delta \theta = \theta(\infty) - \theta(-\infty) \quad (2.26)$$

состоит из двух частей: 1) топологического заряда, обвязанного ненулевой разности фаз  $\Delta \theta$  и 2) поляризационного заряда, индуцированного взаимодействием вакуумных фермионов с действительным скалярным  $\rho$  и векторным  $A_\mu^5 \equiv \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \theta / 2$  полями (см. выражение (2.24)).

Не налагая каких-либо ограничений на вид функций  $\rho(x)$  и  $\theta(x)$ , мало что можно сказать о целой части полного заряда вакуума, определяемой заполнением всех фермионных состояний отрицательной энергии в неоднородном внешнем поле. Что же касается дробной части заряда, то она связана только с глобальными (топологическими) характеристиками внешнего поля и может быть рассчитана для достаточно общей ситуации.

Обратимся к первому слагаемому в формуле (2.26). Это заряд в основном состоянии  $Q_F^{\text{pol}}$ , индуцированный положительно определенным скалярным полем  $\rho(x)$  и векторным полем  $A_\mu^5$ :

$$Q_F^{\text{pol}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta A_0^5}; \quad (2.27)$$

здесь  $S_{\text{eff}}$  — эффективное действие, полученное из лагранжиана (2.24) (без последнего слагаемого) интегрированием по ферми-полям:

$$\exp(iS_{\text{eff}}) = \int D\bar{\psi} D\psi \exp\left(i \int d^2x \mathcal{L}\right).$$

Для внешних источников солитонного типа  $\rho(x) \rightarrow \rho_0$  при  $|x| \rightarrow \infty$  и согласно общим теоремам, обсуждающимся ранее, в таком скалярном поле 1D-гамильтониан Дирака нулевых мод не имеет. Поэтому взаимодействие фермионов с полем  $\rho(x)$  не меняет дробную часть заряда вакуума.

Векторное поле  $A_\mu^5$  поляризует фермионный вакуум. Ясно, что эффективное действие в (2.27) является функционалом только от  $\partial_\mu A_\nu^5$  ( $\mu \neq \nu$ ).

Для слабонеоднородных квазистационарных полей  $|\dot{A}_1|$ ,  $|A'_0| \ll g\rho_0$  эта связь становится эффективно локальной и в низшем порядке по внешнему полю дает вклад в плотность энергии вакуума, пропорциональный  $(A'_0)^2 \sim \sim (\theta'')^2$ ,  $(\dot{A}_1)^2 \sim (\dot{\theta})^2$ , что значительно меньше вклада киральной аномалии  $(\partial_\mu \theta)^2$  (играющей роль массы векторного поля  $A_\mu^5$ ). Поэтому вкладом  $Q_F^{\text{pol}}$  можно пренебречь и дробная часть заряда вакуума во внешнем комплексном скалярном поле оказывается пропорциональной топологическому заряду солитонов фазы

$$Q_F = -\frac{\Delta\theta}{2\pi}. \quad (2.28)$$

Что дает формула (2.28) для изученной ранее модели действительного скалярного поля? В этом случае фаза  $\theta$  может принимать значения 0 или  $\pi \pmod{2\pi}$ . У топологически устойчивых солитонов ( $\phi \rightarrow \pm \phi_0$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ ) разность фаз  $|\Delta\theta| = \pi$  и соотношение (2.28) воспроизводит полученный в разделах 2.2 и 2.3 результат: заряд кинка с незаполненным уровнем нулевой энергии  $Q_F = -1/2$ , с заполненным  $-Q_F = -1/2 + 1 = +1/2$ .

В общем случае комплексных скалярных полей соотношение (2.28) не запрещает существования у вакуума одномерных фермионов произвольной дробной части заряда <sup>5-14</sup>.

## 2.5. Взаимодействие дробного заряда с электрическим полем.

### Топологическая природа дробного заряда

Если фермионы модели электрически заряжены, то дробный фермионный заряд солитонов превращается в дробный электрический заряд  $Q = eQ_F$  и возникает важная задача о его взаимодействии с электромагнитным полем.

В модель (2.19) внешнее электрическое поле вводится стандартным приемом, удлиняя производную  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ . После кирального вращения фермионных полей лагранжиан модели приобретает вид

$$\mathcal{L}^\theta(A) = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D_\mu - g\rho)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\theta + \frac{1}{8\pi}(\partial_\mu\theta)^2 - \frac{e}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\theta, \quad (2.29)$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  и последние два слагаемых в (2.29) появились благодаря наличию аномальных швингеровских членов в коммутаторе плотностей зарядов (2.23) (киральная аномалия). Покажем теперь, что последнее слагаемое в лагранжиане (2.29) описывает взаимодействие внешнего поля с дробным зарядом. Проинтегрировав это выражение по частям, находим

$$\mathcal{L}_{\text{Int}} = -\frac{e}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\theta \Rightarrow eA_\mu j_t^\mu, \quad j_t^\mu = -\frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\theta; \quad (2.30)$$

$j_t^\mu$  — топологический ток, его сохранение для гладкой функции  $\theta(x, t)$  обеспечивается тривиальным тождеством  $\partial_\mu j_t^\mu \sim \partial_\mu \partial_\nu \theta \epsilon^{\mu\nu} = 0$ . Проинтегрированная по пространственной координате нулевая компонента этого тока совпадает с дробным зарядом вакуума (солитона фазы). Согласно (2.30), взаимодействие внешнего электрического поля с топологическим тиком имеет стандартный электродинамический вид: оно локально, несмотря на коллективный характер дробного заряда.

Различные методы, использованные нами для изучения реакции вакуума на внешнее топологически нетривиальное поле, связывают дробный фермионный заряд с глобальными характеристиками этого поля.

Поэтому следует ожидать, что в самом общем случае дробный фермионный заряд вакуума может быть выражен через топологические инварианты теории.

Удобно связать заряд вакуума со спектральными характеристиками задачи. По сути мы изучаем асимметрию спектра уравнения Дирака в плоском

пространстве во внешнем поле. Оператор фермионного заряда  $\hat{Q}_F$ , имеющий нужные свойства при преобразовании  $C\hat{Q}_F C^{-1} = -\hat{Q}_F$ , как известно, может быть представлен через коммутатор фермионных полей

$$\hat{Q}_F = \frac{1}{2} \int dx [\psi^+, \psi], \quad Q_F = \langle 0 | \hat{Q}_F | 0 \rangle. \quad (2.31)$$

Разлагая  $\psi$  и  $\psi^+$  в ряд по собственным функциям  $\psi_k(x)$  уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией  $\omega_k$ , легко представить оператор заряда в следующем виде (см., например, <sup>130</sup>):

$$\hat{Q}_F = \sum_k (\hat{n}_k - \hat{\bar{n}}_k) - \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{k, \\ \omega_k \geq 0}} 1 - \sum_{\substack{k, \\ \omega_k < 0}} 1 \right), \quad (2.32)$$

где  $\hat{n}_k$  ( $\hat{\bar{n}}_k$ ) — оператор числа частиц (античастиц). В стандартных руководствах по квантовой теории поля последнее слагаемое в (2.32) обычно полагают равным нулю. В этом случае равным нулю оказывается и заряд вакуума  $\langle 0 | \hat{Q}_F | 0 \rangle = 0$ . Такая процедура, безусловно правильная для свободных фермионов, при наличии внешних полей, однако не всегда справедлива. Действительно, выражение

$$\eta(0) = \sum_{\substack{k, \\ \omega_k \geq 0}} 1 - \sum_{\substack{k, \\ \omega_k < 0}} 1 \equiv \sum_k \operatorname{sgn} \omega_k \quad (2.33)$$

в (2.32) является формальным рядом. Для того, чтобы корректно определить сумму, (2.33) необходимо регуляризовать. Удобно использовать следующую регуляризацию:

$$\eta(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \eta(s), \quad \eta(s) = \sum_{\substack{k, \\ \omega_k \neq 0}} (\operatorname{sgn} \omega_k) |\omega_k|^{-s} + n_0, \quad (2.34)$$

где  $n_0$  — число нулевых мод. Величину  $\eta(0)$  назвали  $\eta$ -инвариантом Атья—Патоди—Зингера<sup>79</sup>. Таким образом, фермионный топологический заряд вакуума выражается через  $\eta$ -инвариант<sup>7,8</sup>:

$$Q_F = -\frac{1}{2} \eta(0). \quad (2.35)$$

Для дираковских фермионов во внешнем скалярном поле  $\phi(x)$  (2.3) вследствие зарядовой симметрии задачи спектр энергий  $\omega_k$  симметричен относительно нуля. Поэтому в сумму (2.34) вносят вклад только нулевые моды  $n_0$ . Для внешнего поля, принимающего разные по знаку асимптотические значения при  $x \rightarrow \pm\infty$ , нулевая мода одна,  $\eta(0) = 1$ , и мы еще раз воспроизводим результат о полуцелом фермионном заряде кинка.

Если зарядовая симметрия отсутствует, в сумму (2.34) могут вносить вклад все состояния (включая непрерывный спектр) и расчет спектральной асимметрии становится не столь элементарным (общее рассмотрение и конкретные примеры см. в работах<sup>8,11</sup>).

### 3. АНОМАЛЬНЫЕ КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА В СИСТЕМЕ ПАЙЕРЛСА—ФРЕЛИХА

Существование протяженных объектов с необычными квантовыми числами — дробным фермионным и электрическим зарядами — было впервые предсказано в квантовой теории поля (КТП)<sup>1</sup>. К аналогичному выводу независимо пришли и авторы работ<sup>35—37, 38, 57</sup>, теоретически изучавшие образование топологических дефектов структуры в ряде квазиодномерных проводящих соединений. Эти соединения относятся к модельному классу веществ,

получивших название пайерлсовских диэлектриков. Ниже мы на языке КТП сформулируем микроскопическую модель пайерлсовского диэлектрика (ПД) и покажем как явление дробления заряда, подробно изученное в квантовой теории поля, находит свои параллели в физике квазидномерных конденсированных сред.

### 3.1. Пайерлсовский диэлектрик — модель динамической генерации массы

Пайерлсовский диэлектрик относится к классу веществ, у которых щель  $\Delta$  на уровне Ферми в спектре электронов проводимости является параметром порядка. Само по себе образование щели энергетически выгодно, поскольку понижает энергию заполненных электронных состояний. При пайерлсовском переходе такое расщепление зоны происходит за счет электрон-фононного взаимодействия.

На языке квантовой теории поля образование щели на уровне Ферми

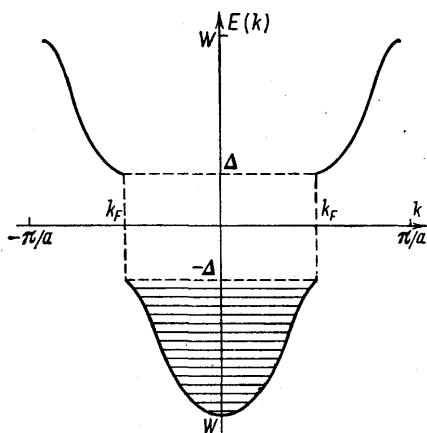


Рис. 3.  $k_F = \pi/2a$  — фермиевский импульс

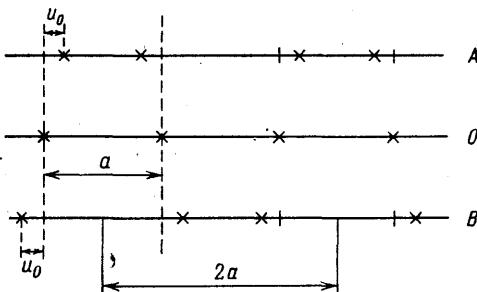


Рис. 4

означает появление массы у фермионов; электрон-фононному взаимодействию отвечает юкавская фермион-бозонная связь. Необходимое для генерации массы ненулевое вакуумное среднее скалярного поля для электрон-решеточной системы обеспечивается конденсатом фононов, т. е. макроскопическим смещением ионов относительно их положения равновесия. Система, следовательно, претерпевает структурный фазовый переход.

Придадим указанной аналогии более точный смысл (см. обзоры <sup>33,34</sup>). Рассмотрим в качестве примера одномерный металл с наполовину заполненной зоной проводимости. Пусть в системе произошел Пайерлсовский фазовый переход и в спектре электронов образовалась щель (рис. 3) на уровне Ферми (который в дальнейшем мы будем принимать за нуль отсчета энергии). Тогда в классическом приближении плотность энергии можно представить как сумму двух вкладов: отрицательной энергии электронов заполненной зоны (вакуума) и положительной энергии конденсата фононов:

$$\epsilon(\Delta) = -2 \int_{-k_F}^{k_F} \frac{dk}{2\pi} (\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2} + \frac{\Delta^2}{g^2} + \frac{\dot{\Delta}^2}{g^2 \omega^2}; \quad (3.1)$$

здесь  $\epsilon_k = -W \cos(ka)$  — спектр электронов проводимости в модели сильной связи ( $W$  — полуширина зоны проводимости,  $a$  — межатомное расстояние),  $k_F$  — фермиевский импульс ( $k_F = \pi/2a$  в нашем случае),  $g$  — константа электрон-фононной связи. Последние два слагаемые в (3.1) отвечают упругой и кинетической энергиям решетки в гармоническом приближении (ввиду малого смещения ионов  $|\Delta| \sim |u_0| \ll a$ ; рис. 4);  $\omega$  — частота сконден-

сировавшихся фононов с импульсом  $Q = 2k_{\text{F}}$ . Величины  $W$ ,  $\bar{\omega}$  и  $g$  можно считать затравочными константами пайерлсовской теории.

Равновесная щель  $\Delta_0$  определяется из условия минимума энергии  $\epsilon(\Delta)$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \Delta} = 0 \Rightarrow \Delta = \pm \Delta_0, \quad \Delta_0 = 4W \exp\left(-\frac{\pi \hbar v_{\text{F}}}{g^2}\right). \quad (3.2)$$

Таким образом, при низких температурах одномерный металл с одним электроном на атом должен находиться в диэлектрической фазе, которая характеризуется удвоенным периодом решетки (димеризация) и параметром порядка  $\pm \Delta_0$ .

Для слабой константы электрон-фононной связи образовавшаяся щель  $\Delta_0 \ll W$ . В этом приближении

$$\epsilon(\Delta) - \epsilon(0) = \frac{\Delta^2}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2 - 1 \right] \quad (3.3)$$

(мы используем систему единиц, в которой  $\hbar = v_{\text{F}} = 1$ ) и (3.3) не изменится, если линеаризовать вблизи  $k \simeq k_{\text{F}}$  закон дисперсии электронов:

$$E(k) \Rightarrow E(p) = \pm (p^2 + \Delta^2)^{1/2}, \quad p = k - k_{\text{F}}. \quad (3.4)$$

После линеаризации электронный сектор модели ПД принимает форму, типичную для моделей одномерной релятивистской квантовой теории поля:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_{\sigma} (i\gamma_{\mu} \partial_{\mu} - \Delta) \Psi_{\sigma} - \frac{\Delta^2}{g^2} + \frac{\dot{\Delta}^2}{g^2 \bar{\omega}^2}. \quad (3.5)$$

Здесь  $\Psi$  — двухкомпонентный релятивистский спинор, описывающий в  $(1+1)$ -мерном пространстве-времени две степени свободы дираковского поля (частица — античастица). Матрицы Дирака  $\gamma_{\mu}$  в этом случае вырождаются в матрицы Паули. Спин реального электрона учитывается «изотопическим» удвоением компонент  $\sigma = 1, 2$ .

### 3.2. Микроскопическая модель пайерлсовского диэлектрика

При микроскопическом описании пайерлсовского фазового перехода <sup>33,34</sup> исходным пунктом обычно является гамильтониан электрон-фононного взаимодействия Фрёлиха:

$$H = \sum_{k, \sigma} \epsilon_k a_{k, \sigma}^+ a_{k, \sigma} + \sum_q \omega_q b_q^+ b_q + N^{-1/2} \sum_{k, q, \sigma} g a_{k+q, \sigma}^+ a_{k, \sigma} (b_q + b_{-q}^+); \quad (3.6)$$

здесь  $a_{k, \sigma}^+$  ( $a_{k, \sigma}$ ),  $b_q^+$  ( $b_q$ ) — операторы рождения (уничтожения) электронов и фононов;  $\epsilon_k$ ,  $\omega_q$  — спектры электронов и фононов,  $g$  — константа электрон-фононного взаимодействия,  $N$  — число атомов в цепочке длиной  $L$  ( $N = L/a$ ). Континальная модель ПД выводится из гамильтониана (3.6) после усреднения по  $|k| \sim k_{\text{F}}$  и линеаризации спектра электронов. Последовательный вывод такой модели, учитывающий эффекты соизмеримости  $k_{\text{F}}$  и бриллюэновского импульса  $\pi/a$ , приведен, например, в работах <sup>42,56</sup>. Не акцентируя внимание на специфически твердотельных аспектах вывода модели, мы распространим результаты предыдущего раздела на общий случай произвольного заполнения зоны проводимости.

В общем случае пайерлсовский диэлектрик характеризуется комплексным параметром порядка  $\Delta = |\Delta| e^{i\phi} \propto N^{-1/2} \langle h_Q \rangle$ , модуль которого есть щель в спектре электронов проводимости на уровне Ферми, а фаза  $\phi$  описывает крупномасштабные вариации химпотенциала. Возникшая модуляция заряда получила название фрёлиховской волны зарядовой плотности (ВЗП).

Взаимодействие электронов с комплексным параметром порядка приводит, как и в ранее разобранном примере, к образованию массы у дирако-

вских электронов. В полевом подходе легко написать общий вид членов взаимодействия дираковских электронов  $\psi$  с параметром порядка  $\Delta$ , согласованный с требованиями симметрии:

$$\mathcal{L}_{\psi\Delta} = -\Delta_1 \bar{\psi}_\sigma \psi_\sigma - i\Delta_2 \bar{\psi}_\sigma \gamma_5 \psi_\sigma, \quad (3.7)$$

где  $\Delta_1 = |\Delta| \cos \varphi$ ,  $\Delta_2 = |\Delta| \sin \varphi$  — действительная и мнимая части параметра порядка. Тот же результат следует при выводе континуальной модели из гамильтониана Фрёлиха.

Полный лагранжиан континуальной модели ПД имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{|\dot{\Delta}|^2}{g^2 \bar{\omega}^2} - \frac{|\Delta|^2}{g^2} + \bar{\psi}_\sigma (i\gamma_\mu \partial_\mu - \Delta_1 - i\gamma_5 \Delta_2) \psi_\sigma. \quad (3.8)$$

В действительности (3.8) описывает динамику ПД с так называемой несоизмеримой волнной зарядовой плотности, когда степень заполнения зоны не может быть представлена в виде отношения целых чисел. Учет эффектов соизмеримости будет сделан ниже, а здесь мы проведем сравнение (3.8) с известными моделями одномерной квантовой теории поля.

Без первого слагаемого (кинетическая энергия решетки) лагранжиан (3.8) совпадает с квазиклассическим лагранжианом  $U(1) \otimes U(1)$  кирально-инвариантной модели Гросса — Неве<sup>43</sup>. В этой работе изучался механизм динамической генерации массы в релятивистских моделях с четырехфермионным взаимодействием.

Для  $U(1) \otimes U(1)$  кирально-инвариантной одномерной модели

$$\mathcal{L}_{GN} = i\bar{\psi}_\sigma \gamma_\mu \partial_\mu \psi_\sigma + \frac{g^2}{2} [(\bar{\psi}_\sigma \psi_\sigma)^2 - (\bar{\psi}_\sigma \gamma_5 \psi_\sigma)^2] \quad (3.9)$$

( $\sigma = 1, \dots, N_m$ ) при замене

$$\Delta_1 = -g^2 \bar{\psi}_\sigma \psi_\sigma, \quad \Delta_2 = ig^2 \bar{\psi}_\sigma \gamma_5 \psi_\sigma \quad (3.10)$$

лагранжиан (3.9) принимает вид, формально совпадающий с (3.8) (без первого слагаемого). Поэтому, если  $\Delta_{1,2}$  в (3.10) — слабофлуктуирующие поля, то четырехфермионное взаимодействие эффективно сводится к модели, описывающей динамику свободных фермионов в самосогласованном комплексном скалярном поле. Для модели Гросса — Неве условие малости флуктуации  $\Delta$  выполняется при  $N_m \gg 1$ . Для пайерлсовского диэлектрика (3.8) классичность поля  $\Delta$  обеспечивается не многокомпонентностью электронной волновой функции, а существованием медленной подсистемы — решетки. В модели (3.8) имеются два внутренних временных масштаба: электронный  $t_e \sim \Delta_0^{-1}$  ( $\Delta_0$  — равновесная щель) и фононный  $t_L \sim (g\bar{\omega})^{-1}$ . Их отношение  $\alpha = t_e/t_L$  всегда мало в рассматриваемых системах (для полиацетилена  $\alpha \sim 0,1$ ), и поэтому справедливо адиабатическое приближение, когда электронные процессы изучаются на фоне нефлуктуирующей решетки<sup>56</sup>.

Модель (3.5) является частным случаем (3.8) для вещественного параметра порядка ( $\Delta_2 = 0$ ) и описывает одномерный пайерлсовский диэлектрик с удвоенным периодом решетки типа транс-полиацетилена. Если поле  $\Delta$  считать классическим (опустить последнее слагаемое в (3.5)), то лагранжиан (3.5) совпадает с квазиклассическим лагранжианом модели Гросса — Неве<sup>43</sup>. Замечательным свойством этой модели является наличие в ней солитонов<sup>44</sup>. Применительно к ПД нас будут интересовать только статические солитонные решения модели Гросса — Неве, поскольку эволюция параметра порядка  $\Delta$  во времени определяется кинетическим решеточным слагаемым в (3.5).

В работе<sup>44</sup> в рамках квазиклассического приближения было показано существование двух типов статических солитонных решений: 1) топологические солитоны (кинки) параметра порядка

$$\Delta(x) = \Delta_0 \operatorname{th} \Delta_0 x, \quad E_s = N_m \frac{\Delta_0}{\pi} \quad (3.11)$$

( $E_s$  — энергия солитона); на каждом кинке может быть локализовано  $n_0 = 0, 1, \dots, N_m$  бесспиновых фермионов с энергией  $\omega_f = 0$ ; 2) связанные кинк-антикинковые пары (поляроны)

$$\Delta = \Delta_0 \left[ 1 + \gamma \operatorname{th} \left( \Delta_0 \gamma x - \frac{1}{4} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) - \gamma \operatorname{th} \left( \Delta_0 \gamma x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \right], \quad (3.12)$$

$$E_p = \frac{2}{\pi} N_m \gamma \Delta_0, \quad \gamma = \sin \left( \frac{n_0}{N_m} \cdot \frac{\pi}{2} \right); \quad (3.13)$$

здесь  $E_p$  — энергия полярона,  $n_0 = 1, 2, \dots < N_m$  — число локализованных на поляроне фермионов. Для пайерлсовского диэлектрика типа **trans-(CH)<sub>x</sub>** индекс  $\sigma$  отвечает только спиновому вырождению и  $N_m = 2$ . Феноменологическая модель слаболегированного транс-полиацетилена, удобная для описания возбуждений солитонного типа, была предложена в работах <sup>37,45</sup>.

### 3.3. Киральная аномалия и волна зарядовой плотности

Перепишем лагранжиан (3.8) в терминах модуля  $|\Delta|$  и фазы  $\phi$  параметра порядка и введем электромагнитное поле  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ :

$$\mathcal{L} = \frac{|\dot{\Delta}|^2}{g^2 \bar{\omega}^2} - \frac{|\Delta|^2}{g^2} + \frac{|\Delta|^2 \dot{\phi}^2}{g^2 \bar{\omega}^2} + \bar{\psi}_\sigma i \gamma_\mu D_\mu \psi_\sigma - |\Delta| \bar{\psi}_\sigma \exp(i\gamma_5 \phi) \psi_\sigma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2. \quad (3.14)$$

Электронный сектор модели (3.14) аналогичен рассмотренному в разделе 2.4, и поэтому при выводе эффективного лагранжиана мы воспользуемся полученными ранее результатами. Интегрируя (3.14) по фермионным полям (см. с. 40), находим

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(\Delta)} + \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(\phi)}, \quad (3.15)$$

$$\int \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(\Delta)} d^2x = \int d^2x \left( \frac{|\dot{\Delta}|^2}{g^2 \bar{\omega}^2} - \frac{|\Delta|^2}{g^2} \right) - i \ln \operatorname{Det} (i \gamma_\mu D_\mu - |\Delta|), \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(\phi)} = |\Delta|^2 \frac{\dot{\phi}^2}{g^2 \bar{\omega}^2} - \frac{1}{4\pi} (\phi')^2 - \frac{e}{\pi} E\phi, \quad (3.17)$$

где  $E$  — электрическое поле. При выводе (3.17) фаза  $\phi$  считалась слабонеоднородным полем  $|\phi'| \ll \Delta_0$  и мы опустили временные производные от фазы «электронного происхождения», поскольку аналогичные решеточные слагаемые в  $(\Delta_0/\bar{\omega})^2 \gg 1$  раз больше. Вещественная часть  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(\Delta)}$  определяет поляризацию вакуума внешним электрическим полем, мнимая — интенсивность туннельного рождения электрон-дырочных пар (см., например, <sup>131</sup>). Ясно, что туннельное рождение электрон-дырочных пар становится существенным только в полях  $E_c \sim \Delta_0^2/e$ , поэтому при  $E \ll E_c$  будем считать модуль параметра порядка однородным. Для постоянного внешнего поля задача о поляризации основного состояния ПД решается точно <sup>46</sup>. При  $E \ll E_c \times \operatorname{Re} \mathcal{L}_{\text{eff}}(\Delta_0, E) \sim E^2$  и первые два слагаемых в (3.15) сводятся к стандартному выражению для энергии электрического поля в среде:

$$\mathcal{L}_E = \frac{\epsilon_\Delta E^2}{2}, \quad \epsilon_\Delta = 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{\omega_p}{\Delta_0} \right)^2; \quad (3.18)$$

здесь  $\epsilon_\Delta$  — диэлектрическая проницаемость ПД, обязанная виртуальным электрон-дырочным переходам <sup>55</sup>,  $\omega_p^2 = 8e^2 n_f$  ( $n_f$  — двумерная плотность цепочек в образце).

Лагранжиан (3.17) есть лагранжиан несоизмеримой волны зарядовой плотности в электрическом поле

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{\Delta_0^2}{g^2 \omega^2} [\dot{\varphi}^2 - c_0^2 (\varphi')^2] - \frac{e}{\pi} E \varphi, \quad (3.19)$$

где  $c_0 = g\bar{\omega}/2\sqrt{\pi}\Delta_0$ . Отметим, что как градиент фазы, так и взаимодействие фазы с внешним полем появился в рассматриваемом подходе благодаря киральной аномалии <sup>66</sup>. Дополнительный по сравнению с (2.29) множитель 2 в этих слагаемых обязан учету спина реального электрона (изоспин  $\sigma$  модели (3.8)). В соответствии с (2.30), (3.16) определим топологический ток:

$$j_{\text{CDW}}^\mu = -\frac{e}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi. \quad (3.20)$$

Согласно последнему выражению, плотность заряда ВЗП связана с градиентом фазы, а ток ВЗП (CDW) — с производной фазы по времени:

$$\rho_{\text{CDW}} = -\frac{e}{\pi} \dot{\varphi}, \quad j_{\text{CDW}} = \frac{e}{\pi} \dot{\varphi}. \quad (3.21)$$

Из (3.22) следует, что полный заряд ВЗП

$$Q_{\text{CDW}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_{\text{CDW}} = -\frac{e}{\pi} \Delta \varphi \quad (3.22)$$

есть «топологическая» характеристика, зависящая только от глобального изменения фазы  $\Delta\varphi = \varphi(\infty) - \varphi(-\infty)$ . В несоизмеримой ВЗП разность фаз не фиксирована. Действие, соответствующее лагранжиану (3.19), инвариантно относительно изменения фазы на произвольный угол  $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$  и в пренебрежении кулоновскими эффектами несоизмеримая ВЗП — голдстон при спонтанном нарушении  $U(1)$ -симметрии. Топологическое дробление заряда появляется при учете энергии соизмеримости, оставляющей вырождение основного состояния ПД только относительно дискретных преобразований фазы.

#### 3.4. Аномалия спин-заряд для солитонов в полиацетилене

Очень важен частный случай — структурный пайерлсовский переход с удвоением периода решетки (двукратная соизмеримость). Континуальная микроскопическая модель пайерлсовского диэлектрика этого типа (3.1)–(3.5) содержит одну коллективную степень свободы — вещественный параметр порядка  $\Delta$ . Фаза  $\varphi$  как независимая динамическая переменная отсутствует. Примером такой системы служит линейный полимер — транс-полиацетилен (trans-(CH)<sub>x</sub>)<sup>39</sup>.

Как уже отмечалось, континуальная модель ПД типа транс-полиацетилен (3.5) в адиабатическом приближении совпадает с  $N_m = 2$  моделью Гросса — Неве. Поскольку плотность энергии модели имеет два вырожденных по энергии минимума ( $\pm \Delta_0$ ), в системе могут существовать топологически устойчивые солитоны. Эти солитоны — суть доменные стенки (дефекты структуры), разделяющие вырожденные по энергии фазы в димеризованной цепочке атомов углерода (рис. 5).

Для целей, преследуемых в этом обзоре, явный вид солитонных решений несуществен. Заметим только, что в пайерлсовском диэлектрике с вещественным параметром порядка (типа *trans*-(CH)<sub>x</sub>,  $N_m = 2$ ) согласно (3.11)–(3.13) могут существовать два типа неоднородных квантовых объектов: топологически устойчивые солитоны (кинки  $\Delta_s(x) \rightarrow \pm \Delta_0$ , при  $x \rightarrow \pm \infty$ ) с энергией  $E_s = 2\Delta_0/\pi$  и поляроны (связанные S<sup>+</sup>S<sup>-</sup>-пары:  $\Delta_p(x) \rightarrow \Delta_0$  при

$|x| \rightarrow \infty$ ) с энергией  $E_p = 2\sqrt{2\Delta_0}/\pi$ . Полярон несет одно локализованное электронное (дырочное) состояние  $|\omega_p| = \Delta_0/\sqrt{2}$ . Так как  $E_p < \Delta_0$ , свободный электрон в зоне проводимости (дырка в валентной зоне) неустойчив относительно автолокализации с образованием за время  $t > \omega^{-1}$  полярона<sup>40</sup>. Полярон, таким образом, всегда заряжен  $Q_p = \pm e$  и имеет полуцелый спин. Пара поляронов, однако, неустойчива по отношению к распаду на  $S\bar{S}$ -пару<sup>41</sup>.

Необычными квантовыми числами обладают солитоны в полиацетилене. Формула (3.22) для заряда ВЗП применима и для модели с действительным параметром порядка  $\Delta$ . Хотя в этом случае фаза жестко фиксирована ( $\phi = 0, \pi; \text{mod } 2\pi$ ), но для доменной стенки, разделяющей вырожденные по

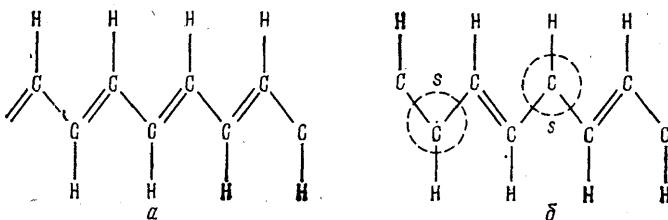


Рис. 5. а — Бездефектная цепочка транс-фазы полиацетилен; альтернирование одинарных и двойных связей приводит к структуре с удвоенным периодом. б — Цепочка транс- $(CH)_n$ , содержащая солитон-антисолитонную ( $S\bar{S}$ )-пару

энергии вакуума ПД  $\Delta = \pm \Delta_0$ , разность фаз  $|\Delta\phi| = \pi$ . Поэтому, согласно (3.22), кинк  $\Delta\phi = \pi$  приобретает топологический заряд  $Q_s = -e$  (антикинк  $\Delta\phi = -\pi$ ,  $Q_{\bar{s}} = e$ ). При этом спин заряженных солитонов равен нулю, так как по спиновому индексу а при выводе (3.20) — (3.22) произведено суммирование. Топологически устойчивый солитон создает, как мы видели, электронный уровень строго в центре запрещенной зоны (нулевая мода). При учете спина электрона этот уровень может быть пустой, однократно или двукратно заполненный. Для электронейтральной системы с необходимостью следует, что коллективный (топологический) заряд должен быть скомпенсирован зарядом электрона (дырки), перешедшего из заполненной зоны в связанное состояние с нулевой энергией. Такая компенсация на расстояниях  $l \gg \xi_0$  ( $\xi_0 = \hbar v_F / \Delta_0$  — длина когерентности ПД, совпадающая с характерным размером солитона) возможна благодаря локальной связи плотности топологического заряда с внешним полем (3.19), (3.20). Кинк становится нейтральным, но приобретает спин 1/2. На уровень нулевой энергии можно поместить дополнительный электрон (дырку) с противоположной проекцией спина, лежирия транс-полиацетилен. Тогда у кинка пропадает спин, но появляется заряд. Итак, в полиацетилене незаряженные топологические дефекты структуры обладают парамагнитными свойствами, заряженные солитоны — диамагнитны<sup>39</sup>.

Интуитивное объяснение нетривиальной связи спин—заряд дает следующее простое наблюдение. Структурная формула транс-модификации полиацетиленена приведена на рис. 5,а. Димеризация отвечает альтернированию одинарных и двойных связей между атомами углерода. Ясно, что локальное изменение структуры будет содержать, по крайней мере, одну солитон-антисолитонную ( $S\bar{S}$ ) пару (см. рис. 5,б). Легко видеть, что добавление одной связи к  $S\bar{S}$ -паре переводит эту структуру в бездефектную цепочку ( $A$ - или  $B$ -фазу рис. 4 в зависимости от граничных условий). Для бесспиновых электронов одна связь соответствует одному электрону и поэтому в силу симметрии каждый кинк должен обладать полуцелым зарядом. Наличие спина, удваивая число электронов, отвечающих одной химической связи, маскирует дробный заряд, но приводит к аномальной связи спин—заряд у солитонов в полиацети-

лене (подробный обзор экспериментальных данных, подтверждающих наличие солитонов в поликарбонате, см. в<sup>39,42</sup>).

Для произвольного изоспина  $\sigma = 1, 2, \dots, N_m$  (компонентность электронной функции) топологический заряд солитонов легко найти, обобщая формулы (3.14), (3.17), (3.22):

$$Q_s = -N_m \frac{e}{2\pi} \Delta\phi \Rightarrow -N_m \frac{e}{2}. \quad (3.23)$$

Случай  $N_m = 1$  отвечает эффективно бесспиновым электронам<sup>54</sup>,  $N_m = 4$  — может реализоваться в цепочках карбина<sup>55</sup>.

### 3.5. Солитоны в соизмеримой волне зарядовой плотности

До сих пор, изучая пайерлсовский диэлектрик, мы сводили его к модели одномерной квантовой теории поля, и специфика твердотельной задачи отразилась только в выборе определенной формы кинетической энергии параметра порядка  $\Delta^2/g^2\omega^2$ . Ниже мы учтем еще два фактора, присущих конденсированной среде.

Реальные квазиодномерные проводники — периодические структуры. Волна зарядовой плотности (ВЗП) в континуальной модели (3.20) без учета периодичности решетки — голдстоун. Такой подход может быть оправдан, если период ВЗП несоизмерим с периодом решетки и пренебрежимо малы другие эффекты, приводящие к пиннингу (зацеплению) ВЗП. В этом случае движение ВЗП безактивационное. Реально всегда есть пиннинг волны зарядовой плотности и малые колебания фазы параметра порядка имеют отличную от нуля пороговую частоту.

В ряде квазиодномерных проводников основной причиной пиннинга является корреляция периода ВЗП с периодом решетки. При заполнении зоны проводимости, выражаемом отношением взаимно простых целых чисел  $v = N/M$  ( $N \leq M$ ,  $M > 2$  — индекс соизмеримости  $M = \pi N/k_F a$ ,  $a$  — период решетки) в лагранжиане ВЗП появляется дополнительное слагаемое — энергия соизмеримости<sup>55</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{com}} = \frac{\lambda}{g^2} \Delta^2 \left( \frac{\Delta}{\epsilon_F} \right)^{M-2} \cos M\phi, \quad \lambda \sim 1 \quad (3.24)$$

( $\epsilon_F$  — фермиевская энергия). С учетом (3.24) лагранжиан соизмеримой волны зарядовой плотности совпадает с лагранжианом модели синус-Гордон. Хотя отношение  $\Delta/\epsilon_F$  в (3.24) мало, учет пиннинга соизмеримости приводит к важным следствиям: во-первых, малые колебания фазы приобретают массу  $\omega_0 = \lambda^{1/2} (\Delta/\epsilon_F)^{1/2} M \bar{\omega}$ ; во-вторых, в системе появляются солитоны с дробным зарядом.

Действительно, корреляционная энергия (3.24) снимает вырождение лагранжиана ПД относительно непрерывных преобразований фазы и в изучаемой модели остается только дискретный набор вакуумов  $\Phi_K = K \cdot 2\pi/M$ . Неоднородные решения, «связывающие» вакуумы  $\Phi_K$  и  $\Phi_{K \pm 1}$  являются топологически устойчивыми солитонами (солитоны фазы) с дробным зарядом<sup>57</sup>

$$Q_s = -e N_m \frac{\Delta\phi}{2\pi} \xrightarrow{N_m=2} \pm \frac{2e}{M}. \quad (3.25)$$

Следующая модификация лагранжиана ВЗП связана с учетом эффектов трехмерности<sup>68,89</sup>. Благодаря им в системе может возникать поперечная жесткость, т. е. появляется область с размером  $\xi_\perp \gg n_F^{-1/2}$ , внутри которой  $\Phi(x_\perp) = \text{const}$ <sup>42</sup> (существование поперечной когерентности ВЗП обнаружено экспериментально<sup>61,62a,64</sup>).

Для когерентных флюктуаций фазы в кластере, содержащем большое число цепочек  $N_k \sim \xi_\perp^2 n_t$ , важным становится учет их кулоновского взаимодействия. Действительно, электростатическое взаимодействие коллективных зарядов в кластере размером  $\xi_\perp \gg n_t^{-1/2}$  является эффективно одномерным и поэтому существенно при построении электродинамики ВЗП. Решение самосогласованной задачи приводит к следующей структуре лагранжиана ВЗП в постоянном внешнем электрическом поле  $E$ <sup>65</sup>:

$$\mathcal{L}(\varphi) = N_0 \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{c_0^2}{2} (\varphi')^2 - \frac{1}{2} \omega_\varphi^2 \left( \varphi + \frac{E}{e^*} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{M^2} \cos(M\varphi) \right], \quad (3.26)$$

где  $e^* = e n_t / \pi \epsilon_{||}$  ( $\epsilon_{||}$  — статическая диэлектрическая проницаемость),

$$N_0 = \frac{2N_k}{g^2} \frac{\Delta_0^2}{\omega^2}, \quad c_0 = \frac{g\bar{\omega}}{2V\pi\Delta_0}, \quad \omega_\varphi^2 = e e^* \frac{g^2 \bar{\omega}^2}{\Delta_0^2}, \quad \omega_0^2 = \lambda \left( \frac{\Delta_0}{\epsilon_F} \right)^{M-2} M^2 \bar{\omega}^2. \quad (3.27)$$

Легко видеть, что учет электростатического взаимодействия когерентных флюктуаций ВЗП привел к появлению плазменной частоты  $\omega_\varphi$  у фазовой моды. Подставляя в определение  $\omega_\varphi$  диэлектрическую проницаемость пайерловского диэлектрика  $\epsilon_{||} = \epsilon_\Delta \gg 1$  (3.18), имеем  $\omega_\varphi^2 = 3g^2\bar{\omega}^2/\pi^{60}$ .

Отметим, что в литературе есть несколько подходов, описывающих динамику ВЗП в поле (см. например, <sup>60,61,67</sup>). Мы акцентируем внимание на модели (3.26), так как соответствующий лагранжиан имеет параллели в квантовой теории поля (см. ниже). По всей видимости, описание ВЗП с помощью (3.26) справедливо при низких температурах и слабом влиянии примесей.

Интересно, что незначительная модификация (3.26), не меняющая структуру модели, позволяет предложить наглядную картину <sup>65</sup>, объясняющую нелинейную электропроводность ВЗП, описываемую эмпирической формулой<sup>61</sup>

$$\sigma(E) = \sigma_0 + \sigma_1 \left( 1 - \frac{E_T}{E} \right) \exp \left( - \frac{E_0}{E - E_T} \right), \quad E > E_T; \quad (3.28)$$

здесь  $\sigma_{0,1}$  — коэффициенты электропроводности,  $E_T$  — пороговое поле, при превышении которого появляется неомический вклад в  $\sigma(E)$ .

Нелинейная проводимость (3.28) в излагаемом подходе обусловлена неустойчивостью основного состояния модели (3.26) во внешнем поле и тесно связана с представлением о конфайнменте дробно-заряженных солитонов фазы.

### 3.6. Конфайнмент солитонов

Лагранжиан (3.26) напоминает бозонную форму лагранжиана массивной модели Швингера (ММШ). Массивная модель Швингера описывает одномерную квантовую электродинамику (см., например, <sup>70-73</sup>):

$$\mathcal{L}^F = \bar{\psi} \{ i\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m \} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2. \quad (3.29)$$

Здесь  $\psi$  — дираковские бессpinовые фермионы с массой  $m$ ,  $\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma_0$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $A_\mu$  — векторное поле.

В  $(1+1)$ -мерном пространстве-времени электромагнитное взаимодействие сводится к кулоновскому взаимодействию зарядов и взаимодействию зарядов с внешним электрическим полем  $E$ . В калибровочных теориях поле  $A_0$  не является независимой динамической переменной (соответствующий обобщенный импульс  $\pi_\mu = F_{0\mu}$  равен нулю,  $\pi_0 \equiv 0$ ) и в гамильтоновом формализме должно быть исключено из описания, используя уравнения связи. В калибровке  $A_1 = 0$  гамильтониан ММШ и уравнение связи имеют вид

$$H^F = \bar{\psi} i\gamma_1 \partial_x \psi + m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} F_{01}^2, \quad \partial_x^2 A_0 = -ej_0 \quad (3.30)$$

$(j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)$ . Специфика одномерной электродинамики (наличие только кулоновского взаимодействия зарядов) позволяет применить к (3.29) формулы фермион-бозонной эквивалентности (2.11)–(2.14) для случая свободных фермионов  $\beta^2 = 4\pi$ . После соответствующего перехода лагранжиан ММШ принимает вид (бозонная форма)<sup>72</sup>

$$\mathcal{L}^B = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{e^2}{2\pi} \left( \sigma + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 + \mu m \cos(2\sqrt{\pi}\sigma). \quad (3.31)$$

Параметр  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) в (3.31) формально появляется как константа интегрирования при бозонизации уравнения связи (3.30)

$$F_{01}^2 = (\partial_x A_0)^2 = e^2 \left( \partial_x^{-1} j_0 + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \Rightarrow \frac{e^2}{\pi} \left( \sigma + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \quad (3.32)$$

и имеет простую физическую интерпретацию. Он пропорционален,  $\theta = -E2\pi/e$ , напряженности  $E$  однородного электрического поля, характеризующего вакуум одномерной квантовой электродинамики. Действительно, в одномерном пространстве сила кулоновского взаимодействия между зарядами не зависит от расстояния между ними и поэтому существование вакуумного электрического поля с амплитудой  $|E| \leq e/2$  не противоречит условию равновесия в системе (отсутствует рождение пар зарядов).

Согласно (3.31) безмассовая ( $m = 0$ ) одномерная электродинамика эквивалентна теории свободного нейтрального скалярного поля с массой <sup>70</sup>  $m_\sigma = e/\sqrt{\pi}$ . Так как нейтральные частицы с однородным электрическим полем не взаимодействуют, безмассовая модель Швингера не зависит от величины угла  $\theta$  ( $\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}_{\theta=0}$  при замене  $\sigma \rightarrow \sigma - \theta/2\sqrt{\pi}$ ). Какие изменения вносит учет массы?

Легко видеть, что потенциал ММШ (3.31)

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \left( \sigma + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 - m\mu \cos(2\sqrt{\pi}\sigma) \quad (3.33)$$

в режиме сильной связи  $m_\sigma \gg m$  вне зависимости от величины  $\theta$  имеет единственный вакуум и поэтому качественно предсказания модели в этом случае совпадают с предсказаниями безмассовой модели Швингера. В частности, в спектре отсутствуют фермионы, которые согласно коулменовской фермион-бозонной эквивалентности, соответствуют топологическим солитонам бозонного лагранжиана (3.31). В режиме слабой связи ( $m_\sigma \ll m$ )  $V(\sigma)$  имеет два локальных минимума  $\sigma \approx 0$  и  $\sigma \approx \sqrt{\pi}$ , один из которых при  $|\theta| \neq \pi$  метастабилен. Такой потенциал не запрещает существования солитонов, связанных (при  $|\theta| \neq \pi$ ) линейно растущим потенциалом в солитон-антисолитонные пары (фаза конфайнмента). Эту фазу удобно описывать в терминах фермионных полей, образующих фермион-антифермионные пары за счет линейного растущего с расстоянием (одномерного) кулоновского потенциала.

Основное отличие лагранжиана когерентной ВЗП (3.26) от лагранжиана ММШ (3.31) — произвольный коэффициент (не равный  $2\sqrt{\pi}$ ) в аргументе косинуса в (3.26). Это означает (см. (2.13) — (2.14)) наличие (дополнительного к кулоновскому) взаимодействия солитон-антисолитонных пар, приводящего к образованию бионов. В бионе взаимодействие солитонов на расстояниях  $x \gg d$  ( $d$  — размер солитона) экспоненциально мало.

При выводе (3.26) решающим было предположение о межцепочечной фазовой когерентности, что позволило свести электростатическое взаимодействие эффективных зарядов на расстояниях  $x \gg d_{\parallel} \gg \xi_{\perp}(d_{\parallel})$  — характерный размер области возмущения фазы вдоль цепочки) к одномерному. Именно для такого типа флюктуаций фазы может быть оправдано появление в лагранжиане ВЗП (3.26) слагаемого, пропорционального  $\phi^2$ . В этом случае экспоненциально малым «бионным потенциалом» можно пренебречь и электро-

динамика когерентной ВЗП в слабых полях эквивалентна одномерной электродинамике массивных бессpinовых фермионов.

В соответствие с описанием ММШ, приведенным выше, при  $\omega_0 \gg \omega_\phi$  в (3.26) солитоны когерентной ВЗП в полях

$$E < E_T = \frac{\pi e^*}{M} = \frac{e}{M} \frac{n_f}{\epsilon_{||}} \quad (3.34)$$

находятся в фазе конфайнмента. Легко видеть, что поле деконфайнмента  $E_T$  совпадает с полем равномерно заряженной плоскости — пластины «конденсатора», образованного когерентными солитонами (кинк-антикинковая пара) со средней плотностью заряда  $n_f Q_S$ :

$$E_T = \frac{1}{2} \frac{n_f Q_S}{\epsilon_{||}} = \frac{e}{M} \frac{n_f}{\epsilon_{||}}. \quad (3.35)$$

Мы привели возможный механизм конфайнмента солитонов ВЗП, связанный с электростатическим взаимодействием жестко скоррелированных на разных цепочках солитонов фазы. Но и без предположения о кластерном характере движения ВЗП солитоны на отдельной цепочке за счех влияния остальных будут находиться в фазе конфайнмента<sup>35</sup>, характеризуемой тем, что свободные солитоны отсутствуют, а энергия взаимодействия  $S\bar{S}$ -пары растет с увеличением расстояния между солитонами.

### 3.7. Туннельное рождение солитон-антисолитонных пар и нелинейная проводимость

В разделе 3.5 мы отмечали, что модель (3.26) выведена в предположении, что свободные электроны отсутствуют. В этом случае топологические солитоны, обладая электрическим зарядом, могут вносить вклад в проводимость ВЗП. Если диэлектризация поверхности Ферми не является полной (есть примесные уровни или температуры достаточны для образования значительной концентрации надщелевых возбуждений), заряд солитонов экранируется<sup>60</sup>. Заметим, однако, что в реальных одномерных цепочках при низких температурах подвижность свободных электронов подавлена эффектами локализации. Если свободные электроны подвержены эффекту сильной локализации, то они создают большую статическую диэлектрическую проницаемость<sup>132</sup>  $\epsilon(0)$ , но не приводят к дебаевскому экранированию солитонных зарядов. Феноменологический учет свободных носителей сводится к замене  $\epsilon_{||}$  величиной  $\epsilon(0)$ <sup>65</sup>. Такая «двуухжидкостная» модель (пайерлсовская подсистема плюс свободные электроны в режиме локализации) позволяет согласовать предсказания теории и эксперимента<sup>61</sup> без существенной модификации представлений о коллективных возбуждениях в пайерлсовском диэлектрике.

Итак, будем считать, что топологические солитоны в волне зарядовой плотности обладают электрическим зарядом (3.25). Так как малые колебания фазы параметра порядка при учете сколь угодно слабого пиннинга ( $\omega_0 \neq 0$ ) не дают вклада в проводимость на постоянном токе ( $\sigma(\omega) \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow 0$ <sup>55</sup>), нелинейная статическая проводимость в системе Пайерлса — Фрёлиха обязана существованию солитонов ВЗП и пропорциональна плотности  $S\bar{S}$ -пар. При низких температурах  $T \ll \omega_0$  основным механизмом образования  $S\bar{S}$ -пар является их туннельное рождение внешним электрическим полем.

Без учета эффекта конфайнмента расчет интенсивности рождения  $S\bar{S}$ -пар постоянным электрическим полем применительно к системе Пайерлса — Фрёлиха впервые проводился в работах Маки<sup>58</sup> (см. также<sup>5, 626</sup>), в которых использовалась, ставшая традиционной в подобных задачах, инстанционная техника. В полном согласии с аналогичными расчетами в одномерных моде-

лях квантовой теории поля<sup>75-78</sup> процесс рождения  $S\bar{S}$ -пар полем имеет беспороговый характер.

Эффекты конфайнмента приводят к наличию порогового поля  $E_T$ , начиная с которого энергетически выгодным становится образование солитон-антисолитонных пар. Рассчитаем в этом случае интенсивность образования  $S\bar{S}$ -пар вблизи порога в модели (3.26), используя метод фермионизации<sup>76</sup>.

Потенциал модели (3.26)

$$V(\varphi) = N_0 \left[ \frac{1}{2} \omega_\varphi^2 \left( \varphi + \frac{E}{\epsilon^*} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{M^2} \cos(M\varphi) \right] \quad (3.36)$$

при реалистическом соотношении между активациями фазовой моды  $\omega_\varphi \ll \omega_0$  ( $\epsilon_{||} \sim \epsilon(0) \sim 10^7$  для трихалькогенидов) имеет абсолютный минимум  $\varphi = 0$  только в полях, меньших порогового  $E < E_T = e n_f / M \epsilon(0)$  (3.34), (3.35). При  $E > E_T$  более низкой энергии, как легко проверить, отвечает состояние  $\varphi = -2\pi/M$ . Туннельный распад  $|0\rangle \rightarrow |-\pi/M\rangle$  сопровождается рождением  $S\bar{S}$ -пары (рис. 6) с плотностью заряда  $n_f Q_s$ . В слабых полях (вблизи порога рождения пары) или, эквивалентно, при слабом «перекосе» вакуумов  $\Delta V \ll E_s/d$  ( $E_s$  — энергия,  $d$  — размер солитона)

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(0) - V\left(-\frac{2\pi}{M}\right) = \\ &= 2N_K |Q_s| (E - E_T) \end{aligned} \quad (3.37)$$

солитоны можно считать свободными и поэтому при расчете вероятности туннельного распада удобно использовать фермионный язык. Лагранжиан когерентной ВЗП (3.26) в этом случае эквивалентен лагранжиану свободных бессpinовых (одномерных) дираковских фермионов во внешнем однородном электрическом поле  $qE^* = \Delta V$ . Интенсивность рождения  $S\bar{S}$ -пар, таким образом, совпадает с известным выражением для интенсивности рождения фермион-антифермионных пар с зарядом  $q$  в постоянном поле  $E^*$  ( $qE^* = \Delta V$ )

$$I_{S\bar{S}} = \frac{\Delta V}{2\pi\hbar N_K} \exp\left(-\pi \frac{E_s^2}{\Delta V \cdot c_0 \hbar}\right). \quad (3.38)$$

Выражая входящие в (3.38) величины через параметры задачи, для нелинейной проводимости ВЗП  $\sigma(E) \propto n_f I_{S\bar{S}}/E$  получим<sup>65</sup> закон (3.28). В экспериментах<sup>61</sup> было установлено также, что пороговое поле удовлетворяет универсальному соотношению  $E_T \epsilon(0) = \text{const}$ , которое легко находит естественное объяснение в рассмотренной модели электростатического конфайнмента (см. (3.34), (3.35)). В рамках тех же предположений при учете вклада в диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(0)$  недиэлектризованных электронов удается качественно объяснить температурную и концентрационную зависимость порогового поля<sup>65</sup>.

#### 4. ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ И КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

До сих пор мы изучали модели квантовой теории поля в  $(1+1)$ -мерном пространстве-времени и связывали их предсказания с экспериментально наблюдаемыми явлениями в физике квазиодномерных соединений в тех случаях, когда физическая ситуация может быть сведена к эффективно одномерной. Ниже мы изучим аномалии в калибровочных моделях двумерной квантовой теории поля и обсудим их связь с квантованием холловской проводи-

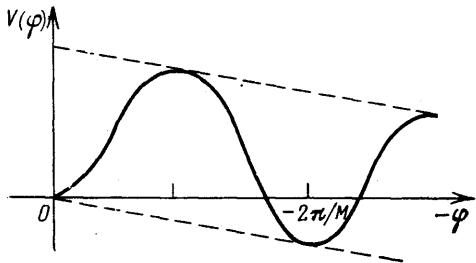


Рис. 6

ности двумерных электронов в сильном магнитном поле (квантовый эффект Холла <sup>90</sup>).

Напомним, что в пространствах нечетномерной (пространство + время) размерности нельзя построить матрицы ( $\gamma_{D+1}$ ), антисимметричные со всеми матрицами Дирака  $\gamma_\mu$ . Поэтому в таких пространствах киральные преобразования отсутствуют. Однако и в нечетномерном пространстве-времени для калибровочных теорий существуют аномальные члены в эффективном действии, имеющие «топологическое» происхождение. Такие слагаемые принято называть топологическим действием (или действием Черна — Саймонса).

Для наших целей интерес представляет изучение двумерной квантовой электродинамики (2D-КЭД). Поэтому, не останавливаясь на иерархии аномалий в калибровочных теориях и их нетривиальной математической структуре (связь с характеристическими классами в дифференциальной геометрии и коциклами в когомологии <sup>80–83</sup>), мы из простых физических сопротивлений выпишем аномальную добавку к действию 2D-КЭД.

#### 4.1. Топологическое действие в двумерной квантовой электродинамике

Рассмотрим дираковские фермионы  $\psi$  в (2 + 1)-мерном пространстве-времени во внешнем электромагнитном поле  $A_\mu$ :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \{i\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m\} \psi; \quad (4.1)$$

здесь  $m$  — масса фермиона,  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака, сводящиеся в данном случае ( $\mu = 0, 1, 2$ ) к трем матрицам Паули  $\sigma$ . Внешнее поле будем считать магнитным  $B = e^{ij}F_{ij}/2$  ( $i, j = 1, 2$ ) и, следуя схеме, изложенной в п. 2.5, найдем «заряд» вакуума двумерных фермионов, индуцированный внешним калибровочным полем. Согласно (2.31)–(2.34) этот заряд обусловлен асимметрией спектра уравнения Дирака:

$$Q_F = -\frac{1}{2} \sum_{\{k\}} \operatorname{sgn} \omega_{\{k\}} \quad (4.2)$$

( $\{k\}$  — набор квантовых чисел). В изучаемом нами случае уравнение принимает вид

$$H_D \psi = \omega \psi, \quad H_D = \alpha (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m \quad (4.3)$$

( $\alpha, \beta$  — набор матриц Паули), и легко показать, что все собственные значения (4.3) с  $|\omega| > m$  симметричны относительно нуля и только состояния  $\omega_- = -m$  (или  $\omega_+ = +m$ ) приводят к асимметрии спектра. Действительно, так как операторы  $H_D$  и  $[H_D, \beta]$  антисимметричны

$$\{H_D, [H_D, \beta]\} = [H_D^2, \beta] = 0, \quad (4.4)$$

собственные функции  $\psi_\omega$  и  $\psi_{-\omega} = [H_D, \beta] \psi_\omega$  имеют равную по модулю и противоположную по знаку энергию. Соответственно их вклад в (4.2) равен нулю. Далее, гамильтониан 2D-электронов (4.3) имеет следующую матричную структуру:

$$H_D = \begin{pmatrix} m & D^- \\ D^+ & -m \end{pmatrix}, \quad D^\pm = D_1 \pm iD_2, \quad D_j = p_j - eA_j, \quad (4.5)$$

и операторы  $D^\pm$  в магнитном поле  $B$  не коммутируют:  $[D^-, D^+] = -2eB(x, y)$ . «Нулевые моды»  $\psi_m$  ( $[H_D, \beta] \psi_m = 0$ ) удовлетворяют уравнению

$$H_D \psi_\pm = \omega_\pm \psi_\pm, \quad \psi_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \beta) \psi_m. \quad (4.6)$$

Нетрудно убедиться, что из-за некоммутативности операторов  $D^\pm$ , может удовлетворяться только одно (в зависимости от знака  $eB$ ) из двух уравнений

$D^\pm \psi_\mp = 0$ . Согласно (4.5), (4.6) это означает, что нулевые моды всегда асимметричны — при  $eB > 0$   $\omega_+ = +m$  (состояние  $\omega_- = -m$  отсутствует в спектре) и наоборот. Таким образом, спектр (4.3) асимметричен и, следовательно, внешнее магнитное поле индуцирует в вакууме отличный от нуля «заряд»<sup>86</sup> (4.2).

Для того чтобы рассчитать (4.2), необходимо знать кратность вырождения нулевых мод. Для этой цели перейдем от  $H_D$  к квадрированному «гамильтониану»

$$H_S = H_D^2 - m^2 = Q_1^2, \quad Q_1 = \alpha D. \quad (4.7)$$

Оператор  $H_S$  является гамильтонианом суперсимметричной квантовой механики с суперзарядами  $Q_1$  и  $Q_2 = i\beta Q_1$ ;  $\{Q_1, Q_2\} = 0$  (подробнее см. <sup>82</sup>). Согласно общим свойствам суперсимметричных теорий: 1) все состояния  $H_S$  с энергией  $E_S^2 = \omega^2 - m^2 > 0$  даже в неоднородном магнитном поле  $B(x, y)$  двукратно вырождены (для нерелятивистской задачи это есть известное вырождение по спину электрона); 2) нулевые моды  $E_S = 0$  ( $\omega_+ = +m$  или  $\omega_- = -m$ ) суперпартнеры не имеют (поляризованы по спину). Кратность их вырождения есть топологический инвариант, зависящий только от потока магнитного поля <sup>84</sup>  $N_t = |\Phi|/\Phi_0$  ( $\Phi_0 = 2\pi/e$  — квант магнитного потока). Для магнитного поля, обладающего бесконечным потоком, имеет место бесконечнократное вырождение с плотностью состояний

$$\tilde{v} = \frac{|\Phi|}{\Phi_0 \int dS} \quad (4.8)$$

( $dS$  — элемент площади;  $\tilde{v} = |eB|/2\pi$  при  $B = \text{const}$ ). Учитывая (4.8), для плотности индуцированного в вакууме «заряда», легко находим

$$J_0 = -\frac{e}{2} \tilde{v} \operatorname{sgn}(eBm) = -\operatorname{sgn} m \cdot \frac{e^2}{8\pi} \epsilon^{ij} F_{ij}. \quad (4.9)$$

Почему мы говорим об индуцированном заряде, хотя изучается реакция вакуума на внешнее магнитное поле? Ниже будет показано, что при фиксированном знаке массы двумерные дираковские фермионы могут принимать только одно (из двух возможных) значений спина. Причем состояния с положительной и отрицательной энергией имеют противоположные спины. Магнитное поле, поляризуя спины, частично вызывает их «переворот». Но в двумерии знак спина жестко скоррелирован со знаком энергии, и спиновая поляризация автоматически влечет за собой асимметрию спектра, и, следовательно, в вакууме появляется индуцированный магнитным полем заряд.

Релятивистски ковариантное обобщение<sup>86-88</sup> (4.9) приводит к следующему простому выражению для вакуумного тока:

$$J^\mu = -\operatorname{sgn} m \cdot \frac{e^2}{8\pi} \epsilon^{\mu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (4.10)$$

Ток  $J^\mu$  является топологическим  $\partial_\mu J^\mu \equiv 0$  и калибровочно инвариантным. Вакуумный ток, однако, — аксиальный вектор и поэтому имеет необычную Р-четность.

Как известно, любой недиссипативный ток может быть получен варьированием действия по потенциалу. Поэтому в действии 2D-КЭД появляется дополнительное топологическое слагаемое

$$S_{CS} = (\operatorname{sgn} m) \frac{e^2}{16\pi} \int d^2x dt \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} = i\theta_0 \int \omega_3, \quad (4.11)$$

где  $\theta_0 = 2\pi e^2 \operatorname{sgn} m$  и

$$\int \omega_3 \equiv \frac{1}{32\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} \quad (4.12)$$

есть  $U(1)$ -топологический инвариант Черна — Саймонса (см., например<sup>28,81</sup>) в трехмерном (евклидовом) пространстве. Как легко проверить, абелевое действие Черна — Саймонса (4.12) калибровочно-инвариантно и поэтому константа  $\theta_0$ , с которой (4.12) входит в эффективное действие теории, не квантуется и, вообще говоря, может зависеть от параметров среды (температуры, химпотенциала и т.д.)<sup>20</sup>.

#### 4.2. Топологический ток в релятивистской и нерелятивистской системе 2D-электронов

Из формулы (4.10) следует неожиданный вывод: в релятивистской теории двумерных электронов электрическое поле  $\mathbf{E}$  вызывает вакуумный (недиссипативный) ток холловского типа (перпендикулярный  $\mathbf{E}$ )

$$J^i = (\operatorname{sgn} m) \sigma \epsilon^{ij} E_j \quad (4.13)$$

с квантовой проводимостью  $\sigma = e^2/2h$  ( $h = 2\pi\hbar$ ).

Стандартное выражение для холловского тока реальных частиц имеет вид

$$j_i = j_0 v_i^D = j_0 \frac{1}{B} \epsilon_{ij} E_j; \quad (4.14)$$

здесь  $j_0 = en$  — плотность заряда,  $B$  — однородное магнитное поле,  $v_i^D$  — дрейфовая скорость электронов в скрещенных электрических и магнитных полях  $E < B$ ,  $V^D = E/B$ . Хотя формула для плотности тока (4.14) в виде произведения плотности заряда на их скорость имеет классический нерелятивистский вид, она после замены  $j_0 = e\tilde{v}$  ( $\tilde{v} = e|eB|/2\pi$  — плотность заряда заполненного уровня Ландау) является точной и для релятивистской квантовой одночастичной задачи. Этот факт может быть проверен прямым вычислением<sup>100</sup> и имеет простое объяснение. Очевидно, что кратность вырождения  $\tilde{v}$  уровней Ландау в однородном магнитном поле одинакова как для релятивистских, так и для нерелятивистских частиц. Неизменной остается и скорость дрейфа орбиталей Ландау. Действительно, так как в лабораторной системе координат электрическое ( $E_y$ ) и магнитное ( $B$ ) поля ортогональны,  $E_y < B$ , существует инерциальная система отсчета<sup>126</sup> (движущаяся со скоростью  $v_x = E_y/B$ ), в которой электрическое поле обращается в нуль и поэтому ток зарядов отсутствует. Возвращаясь в лабораторную систему, легко находим средний ток, обязанный дрейфу орбиталей Ландау:

$$j_i = (\operatorname{sgn} eB) \frac{e^2}{h} \epsilon_{ij} E_j. \quad (4.15)$$

Суммарный ток  $K$  заполненных уровней (без учета спинового вырождения)

$$j_i^K = \sum_{K=1}^K j_i = K \frac{e^2}{h} (\operatorname{sgn} eB) \epsilon_{ij} E_j. \quad (4.16)$$

Напомним, что для пауливских электронов с нормальным магнитным моментом в магнитном поле все уровни Ландау (кроме наименее высокого) двукратно вырождены по направлению спина. Однако для электронов проводимости в конденсированных средах эффективная масса электрона  $m^*$ , входящая в диамагнитную часть гамильтониана, и масса  $m$ , определяющая парамагнитный отклик системы, вообще говоря, различны  $m^* \neq m$ . Поэтому вырождение по спину снимается, на каждом уровне энергия все электроны поляризованы и расстояние между уровнями порядка  $w_c = eB/m^*$ .

Холловский ток первых полностью заполненных уровней Ландау (4.16) имеет структуру, похожую на (4.13), что дало возможность ряду авторов<sup>97–99</sup> связать топологический ток в 2D-КЭД с наблюдаемым в эксперименте целочисленным квантованием холловской проводимости. Однако, как будет видно из дальнейшего обсуждения, физическая картина, лежащая в основе (4.10), (4.13), и причина квантования холловской проводимости реаль-

ных электронов различны и обсуждаемая в цитированных работах связь 2D-КЭД и КЭХ (квантовый эффект Холла) чисто формальна.

Попытаемся объяснить прежде всего «физическую» причину аномальной реакции вакуума 2D-электронов на внешнее электромагнитное поле. Наибольшее удивление вызывает тот факт, что вектор тока  $\mathbf{J}$  перпендикулярен направлению электрического поля, хотя магнитное поле в (4.13) в отличие от (4.16) явно не присутствует (вместо  $\text{sgn}(eB)$  появляется  $\text{sgn } m$ ).

Как уже отмечалось ранее, в трехмерном пространстве-времени алгебра матриц Дирака изоморфна алгебре матриц Паули. Поэтому волновая функция релятивистских 2D-электронов — двухкомпонентный спинор, описывающий только две степени свободы: частица—античастица. Таким образом, кинематика запрещает существование у 2D-фермионов спиновой степени свободы. С другой стороны, наличие группы вращений в плоскости  $O(2)$  формально позволяет дираковскому фермиону иметь спин  $s = \pm 1/2$  (в двумерном пространстве спин, конечно, псевдоскаляр, а не аксиальный вектор). Следовательно, существует кинематическая причина, заставляющая фермион находиться в одном из двух возможных состояний поляризации. Такой причиной является масса фермиона \*). Действительно, массовый член  $m\bar{\psi}\psi = m\psi^+\beta\psi$  в двумерии неинвариантен относительно Р-отражений координат  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow y$  (отражение одновременно двух координат эквивалентно вращению), так как  $P_\psi(x, y, t) P^{-1} \sim \alpha_3 \psi(-x, y, t)$  и только комбинированная операция — Р-отражение и замена  $m \rightarrow -m$  оставляет лагранжиан неизменным <sup>85</sup> (см. также лекции Джэкива <sup>28</sup>). Поэтому естественно ввести матрицу спина двумерных фермионов  $\Sigma^{(2)} = (\text{sgn } m) \beta/2$ , а так как  $\beta$  является одновременно и матрицей знака энергии, то состояния с положительной и отрицательной энергией имеют спиновые поляризации противоположного знака. Наиболее четко это прослеживается в представлении Фолди — Баутхайзена, где гамильтониан свободных электронов  $H_D^{F-W} = \beta(p^2 + m^2)^{1/2}$  и  $[\Sigma, H_D^{F-W}] = 0$ .

Таким образом, дираковский вакуум 2D-фермионов обладает не только электрическим зарядом, но и не равной нулю намагниченностью. Естественно, физический смысл имеет не сам по себе полный «заряд» вакуума, а только его часть, индуцированная внешним полем,  $\Delta Q = Q \{F_{\mu\nu}\} - -Q \{F_{\mu\nu} = 0\}$ .

Перейдем непосредственно к нашей задаче. Пусть  $B$  — внешнее магнитное поле. Тогда, в зависимости от знака  $eB$ , в спектре уравнения Дирака (4.3) отсутствует состояние с энергией  $\omega = +m$  или  $\omega = -m$ . Далее, все состояния вакуумных 2D-дираковских электронов полностью поляризованы как при  $B \neq 0$ , так и в отсутствие поля, но число вакуумных состояний с энергией  $E < -m$  уменьшилось на величину, равную половине состояний, «сконденсировавшихся» на уровень  $\omega = -m$  (или  $\omega = m$ ). Поэтому индуцированная намагниченность вакуума определяется нулевыми модами оператора (4.7) в полном соответствии с квантовомеханическим расчетом, проведенным в предыдущем разделе. Если, наряду с магнитным, в плоскости  $x, y$  действует электрическое поле  $E$ , то оно вызовет поперечный к  $E$  дрейф зарядов, заполняющих уровни Ландау. Индуцированная магнитным полем плотность «заряда» есть  $J_0 = -2\text{sgn } m \cdot S$  ( $S = (\tilde{v}/4) \text{sgn } (eB)$  — индуцированный спин, и, подставляя  $J_0$  в (4.14), мы получаем в точности выражение (4.13) для вакуумного тока 2D-электронов).

В рамках стандартного квантовоэлектродинамического подхода аномальная (топологическая) добавка к эффективному лагранжиану Гейзенберга — Эйлера 2D-электронов была впервые получена в <sup>87</sup>.

\*) Безмассовый двумерный фермион кинематического спина иметь не может, так как релятивистская инвариантность требует, чтобы спин был направлен по или против импульса, что, однако, абсурдно для частиц, «живущих» в плоскости.

Ток (4.13) по своему физическому смыслу (поляризация вакуума) специчен именно для релятивистских 2D-фермионов. Эта особенность приводит к тому, что магнитное поле  $B$  не входит в выражение для плотности тока (4.13) (4.13) и направление  $\mathbf{J}$  при заданном  $\mathbf{E}$  определяется знаком массы (а не знаком  $eB$ , как в стандартных формулах для холловского тока (4.15)). Топологический характер вакуумного тока проявляется также в том, что выражение (4.13) остается справедливым и в неоднородном магнитном поле  $B(x, y)$  (важно, чтобы неизменным оставался поток — см. предыдущий раздел), тогда как формулы (4.15), (4.16) имеют смысл только для  $B = \text{const}$ .

Итак, топологическая добавка к действию 2D-КЭД не может определять холловский ток реальных 2D-электронов в твердых телах (см. также <sup>100</sup>), и для объяснения квантования холловской проводимости надо искать другие физические причины (см. следующий раздел).

В заключение этого раздела сделаем замечание о переходе от релятивистского к нерелятивистскому описанию 2D-фермионных систем. Хорошо известно, что нерелятивистские двумерные фермионы, в отличие от релятивистских, могут иметь два состояния поляризации  $s = \pm 1/2$ . Нет ли в этом противоречия, так как нерелятивистская физика является предельным случаем релятивистской? Разрешение парадокса заключается в следующем. В  $(2 + + 1)$ -одномерном пространстве знак массы является дополнительным новым квантовым числом дираковских фермионов. В нерелятивистской физике масса может быть только положительной. Поскольку знак массы в нерелятивизме принципиально ненаблюдаем, при переходе от дираковской картины к паулиевской мы должны дополнительно усреднить по квантовому числу «знак массы». Легко проследить, что такая «смесь» дираковских электронов (после усреднения теория становится  $P$ -четной) дает спиновую степень свободы паулиевским 2D-электронам.

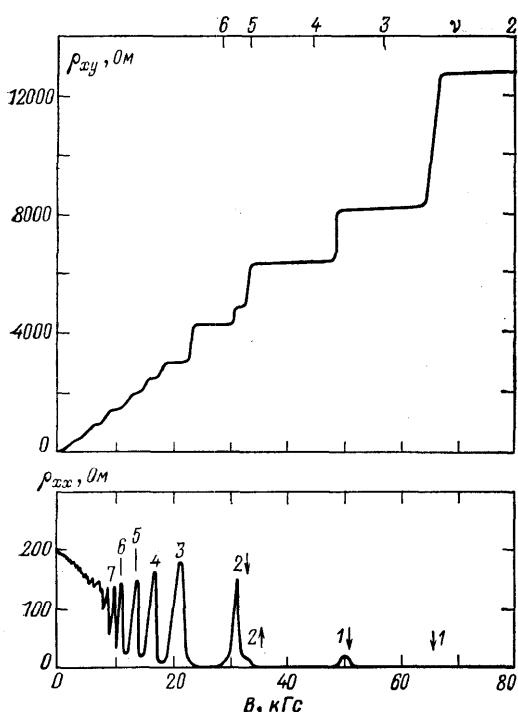


Рис. 7. Экспериментальные кривые взяты из работы <sup>95</sup>

теропереходов, в сильном магнитном поле  $B \sim 100$  кГс, перпендикулярном проводящей плоскости, при низких температурах  $T \sim 1$  К холловская компонента магнитосопротивления  $\rho_{xy}$  как функция магнитного поля (или плотности зарядов в канале, задаваемой напряжением на затворе МДП-структур) имеет кусочно-постоянный вид (рис. 7):

$$\rho_{xy}^{\text{exp}} = \frac{1}{K(B)} \frac{h}{e^2} . \quad (4.17)$$

#### 4.3. Целочисленный квантовый эффект Холла

В 1980 г. фон Клитцингом и др. <sup>90</sup> было обнаружено следующее необычное явление. В системе 2D-электронов, существующих в проводящем слое (канале) МДП-структур (металл — диэлектрик — полупроводник) либо ге-

$K(B)$  — ступенчатая функция, принимающая на каждой «ступеньке» целые значения с поразительной для твердотельных эффектов точностью ( $\Delta K/K \sim \sim 10^{-7}$ ; см. обзоры<sup>94,95</sup>). В той же области параметров, когда имеет место квантование холловского сопротивления, диагональная компонента магнитосопротивления  $\rho_{xx}$  практически равна нулю ( $\rho_{xx} \lesssim 10^{-10}$  Ом). Наблюдаемая картина стабильна по отношению к изменению температуры, концентрации примесей, а также выбора типа структур, имеющих проводящий слой 2D-электронов, в широкой области изменения параметров. Высокая точность квантования холловского сопротивления и универсальность наблюдаемой картины заставили искать общие законы квантовой физики, лежащие в основе обнаруженного эффекта.

Компоненты  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  матрицы проводимости и компоненты  $\rho_{xx}$   $\rho_{xy}$  матрицы магнитосопротивления связаны соотношениями

$$\sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}, \quad \sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}. \quad (4.18)$$

Поэтому обращение в нуль  $\rho_{xx}$  при  $\rho_{xy} \neq 0$  означает одновременно исчезновение продольной компоненты проводимости.

В картине идеального газа 2D-электронов обращение в нуль  $\sigma_{xx}$  и целочисленные значения  $\sigma_{xy}/\sigma_{xy}^{(0)}$  ( $\sigma_{xy}^{(0)} \equiv e^2/h$  — квантовая единица проводимости) достигаются только в отдельных точках, когда плотность электронов такова (или при заданной плотности — величина магнитного поля), что первые  $K$  уровней Ландау полностью заполнены (4.16). Поэтому периодическое по  $1/B$  исчезновение продольного магнитосопротивления  $\rho_{xx}$  — ожидаемый эффект (осцилляции Шубникова—де Гааза). Необычность результатов фон Клитцинга, вызвавшая поток теоретических работ, заключается в том, что для реальных 2D-электронов эти свойства с большой точностью сохраняются в конечной области изменения плотности электронов (магнитного поля). Реакция взаимодействующих между собой и с примесями 2D-электронов на внешнее электрическое поле всегда такая (исключая очень узкие области, когда  $\rho_{xx} \neq 0$ ), как и в идеальном ферми-газе при полном заполнении уровней Ландау.

Качественное объяснение описанного поведения реальных систем 2D-электронов, по-видимому, заключается в следующем. За счет взаимодействия электронов проводимости с примесями **δ-образные** бесконечно-кратно вырожденные уровни Ландау размываются в зоны (недавно проведенные измерения<sup>96</sup> действительно указывают на протяженный гауссовский вид плотности состояний электронов). На краях зон все состояния являются локализованными и не дают вклада в проводимость. Таким образом, при большой концентрации примесей (малой подвижности электронов в канале полевого транзистора или проводящем слое гетероперехода) увеличение плотности 2D-электронов сопровождается медленным перемещением уровня Ферми  $\epsilon_F$  по локализованным состояниям (в щели для подвижности) между двумя областями непрерывного спектра. В этой ситуации только заполненные области ( $\epsilon < \epsilon_F$ ) делокализованных состояний (вблизи центров уровней Ландау) вносят вклад в холловскую проводимость. То, что именно существование локализованных состояний приводит к образованию ступенек на зависимости  $\sigma_{xy}$  ( $B$ ), подтверждается сравнением ширины ступенек для образцов с низкой и высокой подвижностью зарядов. Экспериментально показано, что ширина ступенек уменьшается с увеличением подвижности.

В очень важной для данного круга задач статье Лафлина<sup>101</sup> было впервые дано общее доказательство (не связанное с использованием конкретного вида гамильтониана взаимодействия и теории возмущений) целочисленного квантования холловской проводимости, основанное на свойствах калибровочной инвариантности теории. Рассмотрим, следуя<sup>101</sup>, мысленный опыт по «измерению» холловской проводимости в геометрии, показанной на рис. 8. Здесь система 2D-электронов с током  $J$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$  свернута в ци-

линдр, через ось которого проходит бесконечно длинный соленоид. Так как поверхность цилиндра всюду пронизывает нормальное к поверхности магнитное поле  $\mathbf{B}$ , на движущиеся заряды будет действовать сила Лоренца, притягивающая электроны к одному из торцов цилиндра. Для компенсации этой силы к краям цилиндра приложена разность потенциалов  $U_H$  (холловское напряжение)

Пусть  $\Phi$  — поток, создаваемый соленоидом. Тогда, потенциал  $A_\varphi$  от соленоида на поверхности цилиндра есть  $A_\varphi = \Phi/2\pi R$  ( $R$  — радиус цилиндра). Согласно общему термодинамическому соотношению (см., например,

<sup>129</sup>, с. 176) ток  $I$  можно найти, зная изменение свободной энергии системы  $\delta F$ , вызванное изменением потока магнитного поля  $\delta\Phi$  через контур тока

$$I_H = \frac{\partial F}{\partial \Phi}. \quad (4.19)$$

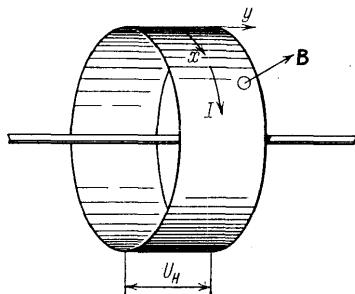


Рис. 8. Схема мысленного опыта Лафлина.

$I$  — азимутальный ток электронов,  $U_H$  — холловское напряжение,  $\mathbf{B}$  — нормальное к поверхности постоянное магнитное поле

длинный соленоид во внешней области физически не наблюдаем. Действительно, в калибровочно-инвариантной теории гамильтониан заряженных частиц в электромагнитном поле зависит только от кинематических (калибровочно-инвариантных) импульсов

$$H = H(\mathbf{p}^{(j)} - e\mathbf{A}^{(j)}) \quad (4.20)$$

( $j$  — номер частицы). Калибровочное преобразование

$$A_\varphi^{(j)} \rightarrow A_\varphi^{(j)} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi^{(j)}} \Lambda^{(j)} \quad \Lambda^{(j)} = \frac{\Phi}{2\pi} \varphi^{(j)} \quad (4.21)$$

полностью «убирает» потенциал из области вне соленоида. Одновременно волновые функции заряженных частиц умножаются на фазовый множитель

$$\exp\left(i e \sum_j \Lambda^{(j)}\right) = \prod_j \exp\left(i \frac{\Phi}{\Phi_0} \varphi^{(j)}\right). \quad (4.22)$$

При произвольном потоке  $\Phi$  такое калибровочное преобразование сингулярно и соответствующие волновые функции согласно (4.22) неоднозначны. Требование однозначности приводит к квантованию потока  $\Phi = K\Phi_0$  ( $K$  — целое число).

Пусть химпотенциал системы 2D-электронов лежит в щели для подвижности (что эквивалентно требованию  $\sigma_{xx} = 0$ ). В этом случае возбужденные состояния системы отделены конечной энергетической щелью от основного и не могут быть достигнуты при адиабатическом изменении параметров. Поэтому адиабатическое изменение потока в соленоиде оставляет систему в основном состоянии. Если основное состояние невырождено, то начальное  $|\Phi = 0\rangle$  и конечное  $|\Phi = \Phi_0\rangle$  состояния многочастичного гамильтониана в силу калибровочной инвариантности должны быть идентичны. Но волновая функция системы в конечном состоянии получила дополнительный фазовый множитель (4.22). Его, однако, можно полностью убрать, совершив трансляцию на расстояние  $a = \Phi_0/2\pi RB$  вдоль оси цилиндра (напомним, что

трансляции в магнитном поле сопровождаются фазовым вращением волновых функций заряженных частиц; см., например,<sup>128</sup>, § 60). Полученная волновая функция в силу трансляционной инвариантности системы (в среднем при наличии примесей) и невырожденности основного состояния приводит к тем же самым средним характеристикам системы, что и  $|\Phi = 0\rangle$ . Физически это означает, что при наличии делокализованных электронных состояний при изменении потока на  $\Phi_0$  целое число электронов  $N_0$  перейдет с одного торца цилиндра на другой (локализованные электроны в таком перенесе заряда, конечно, не участвуют). Поэтому изменение свободной энергии  $\Delta F = N_0 e U_H$  и согласно определению (4.19)

$$I_H = \langle I_H \rangle = \frac{\Delta F}{\Phi_0} = N_0 \frac{e^2}{h} U_H, \quad \bar{\sigma}_{xy} = N_0 \frac{e^2}{h}, \quad (4.23)$$

где  $\langle I_H \rangle$  означает средний холловский ток за время изменения потока в соленоиде от 0 до  $\Phi_0$ , или, что эквивалентно, усреднение (4.19) по потоку

$$\langle I_H \rangle = \Phi_0^{-1} \int_0^{\Phi_0} d\Phi \frac{\partial F}{\partial \Phi}.$$

Только благодаря существованию щели в спектре возбуждений точный  $I_H$  и средний  $\langle I_H \rangle$  холловские токи совпадают с экспоненциальной точностью. Иными словами имеет место когерентность волновой функции делокализованных электронов, дающих вклад в холловскую проводимость.

Таким образом, 1) калибровочная инвариантность, 2) существование щели для подвижности, 3) невырожденность основного состояния сводят задачу квантования холловской проводимости к факту квантования заряда электрона. Качественные рассуждения Лафлина были обобщены в работах<sup>105,106</sup>, установивших при тех же предположениях 1–3) строгую теорему о топологическом характере усредненной холловской проводимости.

В приведенных, по-существу термодинамических, рассуждениях мы намеренно не конкретизировали вид гамильтонiana и целое число  $N_0$ , так как доказательство квантования  $\bar{\sigma}_{xy}$  справедливо при выполнении условий 1–3) безотносительно к виду многочастичного гамильтонiana 2D-электронов и типу классификации уровней энергии. В частности, оно применимо и к идеальному газу заряженных частиц при тех изолированных значениях магнитного поля  $B$ , когда происходит полное заполнение уровней Ландау. Сравнивая формулы (4.23) и (4.16), мы видим, что в этом случае число  $N_0$  совпадает с числом заполненных уровней Ландау, т. е. в условиях мысленного опыта Лафлина при изменении потока на  $\Phi_0$  с одного края цилиндра на другой переходит ровно один электрон на каждый заполненный уровень Ландау. Этот вывод следует также и из элементарного «микроскопического» рассмотрения (см., например, § 3.2.3 книги<sup>134</sup>). Естественно считать, что система Ландау не изменится при наличии слабой неупорядоченности. Однако важные вопросы роли неупорядоченности далеко выходят за рамки нашего обзора<sup>102–104</sup>.

#### 4.4. К в а з и ч а с т и ц ы с д р о б н ы м з а р я д о м

Через два года после открытия целочисленного квантования холловской проводимости Цуи, Штермер и Госсард<sup>92</sup>, измеряя при низких температурах  $T \leq 0,1$  К магнитосопротивление селективно легированных гетеропереходов  $\text{GaAs} - \text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  с максимально высокой для данных образцов подвижностью зарядов  $\mu$  ( $\mu \sim 10^6 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ ), обнаружили плато на зависимости  $\rho_{xy}(B)$  и одновременное обращение в нуль  $\rho_{xx}(B)$  при дробном ( $v = 1/3$ ) заполнении наименьшего уровня Ландау. Это явление получило название дробного квантового эффекта Холла. Дальнейшее изучение ДКЭХ в гетеропереходах (см. обзор<sup>90</sup>), а также в кремниевых МДП-структуратах<sup>93</sup>, показа-

ло, что дробное квантование холловской проводимости имеет место при рациональном заполнении  $v = q/p$ , где знаменатель  $p$  всегда нечетное число ( $v^{\text{exp}} = 1/3, 2/3, 4/3, 5/3, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 6/5, 2/7, 3/7, 4/7, 4/9, 5/9$ ). Каки для целочисленного КЭХ дробное квантование происходит с высокой точностью (для ступенек  $v = 1/3, 2/3$   $\Delta\rho_{xy}/\rho_{xy} \sim 3 \cdot 10^{-5}$ <sup>95</sup>), но наблюдается ДКЭХ при более низких температурах и только для образцов с малой концентрацией носителей тока и высокой подвижностью зарядов.

Формальные аргументы Лафлина, приводящие к целочисленному квантованию  $\bar{\sigma}_{xy}$ , легко обобщаются и на случай дробного квантования <sup>111</sup>. Так как всегда экспериментально в условиях квантования поперечной проводимости продольная проводимость обращается в нуль, в системе должна присутствовать щель для подвижности. К целочисленному квантованию приводило дополнительное предположение о невырожденности волновой функции основного состояния (см. предыдущий раздел). Напротив, гипотеза о конечнократном вырождении основного состояния позволяет в духе термодинамических аргументов Лафлина объяснить дробное квантование.

Действительно, в мысленном опыте Лафлина адиабатическое увеличение потока соленоида на один квант  $\Phi_0$  в силу калибровочной инвариантности и невырожденности основного состояния приводило только к переносу целого числа электронов. Если основное состояние  $p$ -кратно вырождено, то теперь для возвращения к исходной конфигурации минимально необходимо увеличить поток соленоида на  $p\Phi_0$  квантов потока. Пусть при этом в конечном итоге  $q$  электронов переходит от одного торца цилиндра на другой. Тогда холловская проводимость согласно (4.23) принимает дробные значения  $\bar{\sigma}_{xy} = \left(\frac{q}{p}\right) \frac{e^2}{h}$  (см. также <sup>1056</sup>), где приведены аргументы в пользу топологического характера квантования холловской проводимости в условиях ДКЭХ). Ниже мы увидим, что некоторые аномальные свойства возбуждений в ДКЭХ (их аномальная статистика) указывают на предпочтительность нечетных  $p$ , частично обосновывая эмпирическое правило нечетного знаменателя.

Первый вопрос, который возникает при изучении ДКЭХ — что формирует щель в спектре возбуждений? Ведь в этом случае энергия Ферми совпадает с энергией наименее высокого уровня Ландау и в одночастичной теории 2D-электронов щель в спектре возбуждений отсутствует. Поэтому для объяснения ДКЭХ необходим учет многочастичных эффектов — кулоновского взаимодействия зарядов.

Для постоянного магнитного поля обычно используются два физически эквивалентных способа описания электронов. В калибровке Ландау  $\mathbf{A} = (0, Bx)$  разделение переменных в уравнении Шредингера происходит в декартовых координатах и сохраняющимся квантовым числом, с которым связано вырождение энергии, является импульс  $k$  вдоль оси  $y$ . Соответственно волновая функция электрона на основном уровне Ландау в прямоугольной области размера  $L$  имеет вид

$$\Psi_{n=0, k}(x, y) = \pi^{-1/4} (a_0 L)^{-1/2} e^{iky} \exp\left[-\frac{1}{2a_0^2} (x - x_0)^2\right], \quad (4.24)$$

где  $a_0 = (eB)^{-1/2}$  — магнитная длина ( $\hbar = c = 1$ ),  $x_0 = ka_0^2$  — центр орбиты Ландау. Вырождение энергии по импульсу  $k$ , таким образом, означает наглядную независимость энергии электрона от положения центра орбиты в плоскости  $x, y$ . Число состояний  $N_t$  равно

$$N_t = \tilde{v} \int dS = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{eB}{2\pi} L^2 = \frac{L^2}{2\pi a_0^2} \equiv \frac{S}{S_0}. \quad (4.25)$$

В симметричной калибровке  $\mathbf{A} = (-y B/2, xB/2)$  уравнение Шредингера допускает разделение переменных в полярной системе координат. Теперь сохраняющимся квантовым числом, не влияющим на энергию, является угловой момент  $m$  электрона. Записанная в комплексных переменных  $z =$

$= x - iy$ ,  $\bar{z} = x + iy$  <sup>84, 107</sup> волновая функция электрона наименшей энергии имеет вид

$$\Psi_{n=0, m}(z, \bar{z}) = (2^{m+1}\pi m!)^{-1/2} z^m \exp\left[-\frac{1}{4a_0^2} |z|^2\right]. \quad (4.26)$$

Математическое удобство выбора (4.26) по сравнению с (4.24) заключается в том, что (4.26), за исключением одного и того же экспоненциального фактора для всех электронов, заполняющих уровень Ландау, есть голоморфная функция комплексных координат (представление (4.26) называют поэту голоморфным представлением <sup>84</sup>; применительно к КЭХ см. <sup>110a</sup>). Так как кулоновское взаимодействие сохраняет полный угловой момент

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

частиц, представление (4.26) является естественным базисом для построения волновых функций многочастичного гамильтониана.

Впервые теоретическое объяснение ДКЭХ было дано Лафлином <sup>107</sup>. В его модели несжимаемой квантовой электронной жидкости используется калибровка (4.26). Тао и Таулесс предложили подход <sup>113</sup> (использующий калибровку (4.24)), оперирующий представлениями о волне зарядовой плотности на орбиталах Ландау. Схема Лафлина, по-видимому, наиболее удачна описывает основные свойства симметрии многочастичной системы электронов в сильном магнитном поле. Но так как оба подхода имеют много качественно совпадающих предсказаний и, в частности, важное для целей нашего обзора предсказание существования квазичастиц с дробным зарядом, мы, подробно описав идеальное содержание схемы Лафлина, кратко сформулируем основные положения подхода Тао — Таулесса.

#### 4.4.1. Подход Лафлина

В условиях ДКЭХ магнитные поля столь велики (а неупорядоченность, слабая), что энергетическая щель  $\Delta$  между областями делокализованных состояний больше характерной (кулоновской) энергии электрон-электронных корреляций  $e^2/a_0 \ll \Delta$  ( $\Delta \sim \omega_c \sim eB/m^*$ ). Поэтому определенная комбинация одночастичных волновых функций (4.26) может являться достаточно хорошим приближением для описания основного и низших возбужденных состояний  $N$ -частичного гамильтониана  $H$  кулоновски взаимодействующих электронов на основном уровне Ландау

$$H = H_0 + \sum_j V(\mathbf{r}_j) + \sum_{i < j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad H_0 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m_j^*} (\mathbf{p}_j - e\mathbf{A}_j)^2; \quad (4.27)$$

здесь  $H_0$  — гамильтониан свободных 2D-электронов в поперечном магнитном поле,  $m^*$  — эффективная масса электронов ( $j$  — индекс частицы);  $V(\mathbf{r}_j)$  — потенциал решетки, обеспечивающий электронейтральность системы.

При простейшем типе дробного заполнения  $v = i/p$  ( $p$  — нечетное число) для описания основного состояния гамильтониана (4.27) Лафлин предложил пробную функцию вида

$$\Psi_L(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^p \exp\left(-\frac{1}{4a_0^2} \sum_{j=1}^N |z_j|^2\right). \quad (4.28)$$

Экспоненциальный фактор в (4.28) очевиден и не требует комментариев. Соображения, оправдывающие конкретный выбор предэкспоненциальной

функции  $f(z_1, z_2, \dots, z_N)$  сводятся к следующему. Функция  $F$  должна быть: 1) полностью антисимметричной по координатам  $z_j$  (принцип Паули). 2) однородным полиномом (см. представление (4.26)) степени

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

(сохранение полного углового момента  $M$ ). Наконец,  $f$  обязана минимизировать кулоновскую энергию. Это требование, строго учитываемое только для систем с конечным (небольшим) числом электронов  $N$ , позволяет записать ее в форме (4.28).

Действительно, кулоновская энергия электронов будет тем меньше, чем больше орбитальный момент  $m_{ij}$  каждой пары частиц. Поэтому напрашивается выбор функции  $f$  в виде произведения множителей  $(z_i - z_j)^{m_{ij}}$  (описывающих орбитальное движение пары  $ij$ ) с равными и максимально возможными при данном полном угловом моменте  $M$  степенями  $m_{ij} = m_{\max}$ . Требование 2) немедленно приводит к соотношению  $M = C_2^N m_{\max}$  ( $C_2^N = N(N-1)/2$  — число различных пар  $N$  электронов).

Для того, чтобы связать  $m_{\max}$  с индексом заполнения  $v$ , Лафлин использовал формальную, но точную аналогию модели 2D-электронов на основном уровне Ландау с теорией классической однокомпонентной плазмы<sup>107</sup>. Мы приведем качественные аргументы, оперирующие с такой квазиклассической величиной, как средняя площадь, «занимаемая» вращающейся квантовой частицей, позволяющие наглядно получить те же самые результаты. Легко видеть, что в сильном магнитном поле электрон, вращающийся вокруг общего центра инерции с моментом  $m$ , «заметает» площадь  $S_m$  в  $m$  раз большую (для  $m \gg 1$ ), чем площадь  $S_0 = 2\pi a_0^2$ , занимаемая квантом потока  $\Phi_0$  ( $S_m = \pi \langle m | r^2 | m \rangle \approx 2\pi a_0^2 m$ ). С другой стороны, при дробном заполнении  $v \equiv N/N_t = NS_0/S = 1/p$  максимальна площадь при однородном распределении заряда, приходящаяся на одну частицу  $S/N = pS_0$ . Поэтому  $m_{ij} = m_{\max} = p$ , и мы воспроизводим (4.28).

Более «строгое» обоснование выбора предэкспоненциальной функции можно получить в сферической геометрии, когда плоскость 2D-электронов компактифицирована в сферу, в центре которой находится монополь, создавший нормальное к поверхности сферы магнитное поле  $B^{108a}$ . В этом случае поток магнитного поля конечен, вырождение уровней Ландау конечно-кратно и задача о  $N$ -частичном заполнении уровня корректна. В рамках такого подхода в<sup>108a</sup> было показано, что функция Лафлина (4.28), записанная в переменных на сфере, является точной для трехчастичной задачи. Для  $N > 3$   $\Psi_L$  — всегда приближенная волновая функция основного состояния кулоновски взаимодействующих электронов и ее вариационная выделенность заключается в том, что она подавляет состояния, в которых пары частиц находятся на наиболее близких расстояниях друг от друга (см. также<sup>1086</sup>).

Хотя одно из требований, первоначально позволивших определить вид  $\Psi_L$ , — сохранение полного орбитального момента, важные особенности функции Лафлина связаны только с поведением на малых расстояниях. В работах<sup>112</sup> кулоновский потенциал был заменен короткодействующим отталкивательным. Несложный анализ показывает, что в этом случае функция Лафлина является точной волновой функцией основного состояния 2D-электронов на частично-заполненном,  $v = 1/p$  ( $p$  — нечетное), наимизшем уровне Ландау<sup>112</sup>.

В рамках описанной выше картины вращающихся вокруг общего центра масс 2D-электронов представляется правдоподобным, что изменение площади, занимаемой квантовой жидкостью Лафлина, за счет центробежных барьера возможно только квантами (несжимаемость). Так, изъятие одного электрона (создание дырки) при заполнении  $v = 1/p$  эквивалентно уменьшению

площади на  $S_p = p \cdot 2\pi a_0^2 = pS_0$ . Можно поставить вопрос, что будет, если изменить площадь на величину  $S_0$ , занимаемую квантом потока  $\Phi_0$ ?

Такое возбуждение, как легко заметить, эквивалентно помещению в какую-либо точку  $\xi$  жидкости бесконечно тонкого соленоида, поток в котором адиабатически изменяется на  $\Phi_0$ . В этом случае одночастичные волновые функции частиц (5.31) получат приращение орбитального момента на единицу  $z^m \rightarrow z^{m+1}$  (см. 4.22), (4.26)) и многочастичное состояние примет вид

$$\Psi_+ = \prod_{i=1}^N (z_i - \xi) \Psi_L(z_1, z_2, \dots, z_N) \equiv \hat{A}_\xi \Psi_L. \quad (4.29)$$

Волновая функция (4.29) по Лафлину<sup>107</sup> есть волновая функция квазидырки  $\tilde{h}$  с комплексной координатой  $\xi$ . Волновую функцию квазиэлектрона  $e$  легко образовать по аналогии с (4.29) действием на предэкспоненциальный множитель в  $\Psi_L$  (экспоненциальный множитель в голоморфном представлении можно убрать, внеся его в меру интегрирования<sup>133,110a</sup>) оператора  $\hat{A}_\xi^+$ , сопряженного с  $\hat{A}_\xi$ :

$$\Psi_- = \hat{A}_\xi^+ \Psi_L, \quad \hat{A}_\xi^+ = \prod_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\xi}{a_0^2} \right). \quad (4.30)$$

Квазидырки (квазиэлектроны) имеют конечные размеры  $R \sim a_0$  и конечную энергию возбуждения  $\tilde{\Delta} \sim (1/p^2) e^2/a_0$  (подробнее см.<sup>107</sup>). Поэтому квазичастицы в ДКЭХ представляют собой локальное изменение электронной плотности с зарядом  $\pm e^*$ , несущее квант потока  $\Phi_0$ . Физически поток реализуется существованием кругового тока вокруг квазичастиц.

Необычным свойством квазичастиц Лафлина является их дробный заряд  $e^* = \pm e/p$  ( $e$  — заряд электрона)<sup>107</sup>. Такое соотношение напрашивается уже в интуитивной картине, так как при заполнении  $v = 1/p$  один электрон приходится на  $p$  квантов потока. Но как и дробный заряд одномерных солитонов, дробный заряд двумерных квазичастиц есть топологическая характеристика и поэтому дробность появляется не как результат усреднения, а как точное квантовое число. Следуя<sup>123</sup>, дадим простой «топологический» вывод утверждения о дробном заряде квазичастиц при произвольном рациональном факторе заполнения  $v = q/p$ .

В условиях ДКЭХ изменение потока на квант  $\Delta\Phi = \pm\Phi_0$ , как мы видели, всегда связывается с локальным изменением электронной плотности (образование квазичастицы). Пусть  $v = q/p$ , и наша задача состоит в том, чтобы найти эффективный заряд квазичастицы  $e_v^*$ . Обход электрона по замкнутому контуру, включающему квант потока, изменит фазу его волновой функции на  $\Delta\phi_e = \pm 2\pi$ . Соответственно обход локализованного кванта потока вокруг покоящегося электрона даст изменение фазы квазичастицы  $\Delta\phi_{\tilde{e}} = \mp 2\pi$ . Если внутри контура поместить  $N$  электронов  $\Delta\phi_{\tilde{e}} = \mp 2\pi N$ . Но с другой стороны изменение фазы волновой функции всегда связано с полным потоком  $\Phi$  через контур (4.22):  $\Delta\phi_{\tilde{e}} = e_v^* \Phi$ . Вспоминая, что  $\Phi = N\Phi_0/v$ , и приравнивая изменение фазы квазичастицы, найденное двумя различными способами, имеем

$$e_v^* = \mp v e. \quad (4.31)$$

Легко видеть, что при факторе заполнения  $v = 1/p$  рождение в одной точке  $p$  квазичастиц эквивалентно образованию одного реального электрона (дырки)<sup>109,110b</sup>. Действительно,  $p$ -кратное применение оператора  $\hat{A}_\xi$  рождения квазидырки к волновой функции Лафлина (4.28) дает то же самое состояние,

но с одним «изъятым» электроном, так как

$$\Psi_h = (\hat{A}_\xi)^p \Psi_L = \prod_{i=1}^N (z_i - \xi)^p \Psi_L(z_1, z_2, \dots, z_N) \quad (4.32)$$

описывает волновую функцию лафлиновской квантовой жидкости с одним незанятым (в точке  $\xi$ ) электронным состоянием<sup>106</sup>.

#### 4.4.2. Подход Tao — Таулесса

В калибровке Ландау одночастичные состояния (4.24) являются плоскими волнами по одной координате (например,  $y$ ) и гауссовыми волновыми пакетами (размера  $a_0$ ) по другой координате. Поэтому задача размещения частиц по орбиталам Ландау (и минимизация их кулоновской энергии) взаимодействия в этом случае эффективно одномерна, так как сводится к задаче размещения центров  $x_0$  занятых орбиталей.

В схеме Тао — Таулесса<sup>113</sup> основное состояние частично заполненного ( $v = 1/p$ ) наизнешнего уровня Ландау отвечает образованию регулярной сверхрешетки (центров  $x_0$ ) с периодом  $a_p = pa$ ,  $a = L/N_t$  — расстояние между центрами орбиталей (см. рис. 9, *a*), где для удобства выбран фактор заполнения 1/2). По построению такое состояние  $p$ -кратно вырождено.

Элементарными возмущениями теперь являются состояния, когда электрон находится на одной из незанятых орбиталей основного состояния (частица) или отсутствует на занятых (дырка) (см. рис. 9, *б*). Качественно не

Рис. 9. *а* — Вырожденные по энергии конфигурации (*A* и *B*) сверхрешеток при  $v = 1/2$ . *б* — Сверхрешетка с электрон-дырочным возбуждением. *в* — Топологический дефект — солитон на орбиталах Ландау

вызывает сомнений, что, благодаря регулярному расположению кулоновских взаимодействующих электронов на орбиталах, образование пары частица-дырка требует конечной энергии возбуждения (буквенно это, конечно, характерная кулоновская энергия  $\tilde{\Delta} \sim e^2/a_0$ , расчеты в рамках теории возмущений по кулоновскому потенциалу позволяют определить малый численный множитель<sup>113</sup>).

Помимо одночастичных возбуждений в системе возможно коллективные состояния — топологически устойчивые солитоны и антисолитоны<sup>114,115</sup> (см. рис. 9, *в*). Их существование — неизбежное следствие конечно-кратного вырождения основного состояния. Солитоны в этом случае суть «доменные стенки», разделяющие вырожденные по энергии фазы, и с такой точки зрения солитоны в модели Тао — Таулесса полностью аналогичны солитонам соизмеримой волны зарядовой плотности (см. раздел 3). При дробном заполнении  $v = 1/p$  индекс соизмеримости сверхрешетки равен  $p$  и топологические возбуждения в рассматриваемой модели, подобно солитонам ВЗП, несут дробный заряд  $e^* = \pm e/p$ <sup>\*)</sup>. В этом пункте имеется полное совпадение предсказаний теорий Лафлина и Тао — Таулесса.

<sup>\*)</sup> Напомним, что электроны на уровнях Ландау поляризованы и, следовательно эффективно бессpinовые. Поэтому топологический заряд солитонов на орбиталах Ландау ( $N_m = 1$ ) в два раза меньше топологического заряда солитонов соизмеримой ВЗП (3.25).

#### 4.5. Иерархия квазичастиц и аномальная статистика

Как теория Лафлина, так и теория Тао — Таулесса в своей первоначальной форме объясняли квантование холловской проводимости только для простейших дробных значений фактора заполнения основного уровня Ландау  $v = 1/p$  ( $p$  — нечетное число). Так как дальнейшие экспериментальные исследования доказали существование плато на зависимости  $\sigma_{xy}$  ( $B$ ), отвечающие рациональному заполнению уровня  $v = q/p$ , были предприняты попытки соответствующим образом модифицировать теоретические модели ДКЭХ<sup>108,109,121</sup>. Модель ВЗП легко обобщается на рациональные факторы заполнения  $v = q/p$ , регулярно размещая кластеры из  $q$  частиц в сверхрешетку периода  $a_p = pL/N_t$  ( $L$  — размер системы,  $N_t$  — число орбиталей Ландау). Для объяснения в рамках модели Лафлина квантования  $\sigma_{xy}$  при  $v = q/p$  была выдвинута идея структурной иерархии квазичастиц<sup>108a,121</sup>.

Пусть  $v = 1/p$ , тогда 2D-электроны в сильном магнитном поле образуют конденсат (лафлиновская несжимаемая квантовая жидкость), возбуждения в котором (квазичастицы) имеют конечную энергию активации. Поскольку квазичастицы — локальные объекты, имеющие электрический заряд, они могут быть связаны примесями. При плотности 2D-электронов, лежащей в окрестности  $v = 1/p$ , плотность квазичастиц мала (увеличение числа электронов на 1 эквивалентно возбуждению  $p$  квазиэлектронов), все они пиннингованы примесями и при низких температурах не вносят вклад в проводимость. Поэтому  $\sigma_{xx} = 0$ , а  $\sigma_{xy}$  точно соответствует холловской проводимости частично заполненного ( $v = 1/p$ ) основного уровня Ландау. При дальнейшем изменении плотности электронов увеличивается плотность квазичастиц, появляются делокализованные квазичастичные состояния и, по аналогии с картиной Лафлина, они сами образуют конденсат, приводя к новому устойчивому фактору заполнения  $v_1 = q_1/p_1$ . На новом уровне структуры все предыдущие рассуждения остаются в силе и мы, таким образом, приходим к иерархической структуре квазичастиц и их конденсатов.

В соответствии с аргументами Лафлина пробная волновая функция конденсата квазичастиц с эффективным зарядом  $e^+ = \pm qe$  имеет вид<sup>121</sup>

$$\Psi_{L-H} = Q\{Z_j\} P\{Z_j\} \exp\left(-\frac{|q|}{4a_0^2} \sum_{j=1}^{N_S} |Z_j|^2\right) \quad (4.33)$$

( $Z_j$  — комплексная координата квазичастицы  $j$ ). Разбиение предэкспоненциальной функции на произведение двух сомножителей имеет следующий простой смысл. Полином  $P\{Z_j\}$  выбирается всегда симметричным:

$$P\{Z_j\} = \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^{2l} \quad (4.34)$$

( $l$  — целое положительное число), и его вариационная выделенность подробно обсуждалась на с. 64. Функция  $Q\{Z_j\}$  определяет свойства симметрии волновой функции квазичастиц относительно их взаимных перестановок. Для электронов требования ферми-статистики однозначно приводят к полиномиальной форме

$$Q(z_j) = \prod_{i < j} (z_i - z_j),$$

и согласно Лафлину (см. с. 64)  $2l + 1 = v^{-1}$ . Для квазичастиц, несущих наряду с зарядом магнитный поток  $\Phi_0$ , свойства симметрии многочастичной волновой функции оказываются значительно более сложными.

В отличие от трехмерного пространства (и пространств более высокой размерности), в двумерном пространстве квантовые неразличимые частицы, вообще говоря, могут иметь аномальную статистику<sup>116-120</sup>.

В функциональном подходе тип статистики частиц в пространстве размерности  $d$  определяется одномерными неприводимыми представлениями фундаментальной группы гомотопии конфигурационного пространства  $N$  неразличимых частиц  $\pi_1(M_{dN})$ . Нетрудно показать, что для  $d \geq 3$   $\pi_1(M_{3N}) = S_N$  ( $S_N$  — группа перестановок). Так как существуют только два типа неприводимых представлений  $S_N$  —  $\chi_+ = 1$ ,  $\chi_- = \pm 1$  (отвечающие четным и нечетным перестановкам), в пространствах высокой размерности  $d \geq 3$  реализуются только два типа статистик: Бозе — Эйнштейна  $\chi_+$  и Ферми — Дирака  $\chi_-$ . Для  $d = 2$   $\pi_1(M_{2N})$  является бесконечной неабелевой группой, ее одномерные унитарные представления имеют вид

$$\chi_\theta = \exp(-i\theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

и поэтому двумерные квантовые неразличимые объекты могут подчиняться аномальной (тэта) статистике, промежуточной между статистиками бозонов ( $\theta = 0$ ) и фермионов ( $\theta = \pi$ ).

В качестве простейшего примера рассмотрим связанную систему, состоящую из бесспиновой частицы заряда  $q$  и бесконечно тонкого соленоида с потоком  $\Phi$ , пронизывающим плоскость движения частицы (Вилчек предложил называть такую систему анионом (anyone)<sup>116</sup>). Потенциал  $A_\phi$  от соленоида, действующий на частицу в точке  $r$ , равен  $A_\phi = \Phi/2\pi r$  и в сингулярной калибровке (4.21) может быть полностью убран из области вне соленоида. Согласно общему требованию калибровочной инвариантности, преобразование потенциалов сопровождается фазовым вращением волновой функции. Поэтому в калибровке  $A_\phi = 0$  (4.21) волновая функция заряженной частицы в общем случае становится многозначной:

$$\Psi_\Phi(\phi) = e^{iq\Lambda} \Psi(\phi) = \exp\left(i \frac{q\Phi}{2\pi} \phi\right) \Psi(\phi), \quad (4.35)$$

$$\Psi_\Phi(\phi + 2\pi) = e^{i\theta} \Psi_\Phi(\phi), \quad \theta \equiv q\Phi \quad (4.36)$$

( $\Psi(\phi)$  — однозначная волновая функция частицы).

Система двух идентичных анионов эквивалентна (как легко показать, переходя к относительным координатам) одному аниону, но с потоком  $\Phi \rightarrow 2\Phi$ . Используя этот факт, легко обобщить (4.35) на многочастичную волновую функцию  $N$  тождественных анионов:

$$\Psi_\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i < j} \exp\left(i \frac{\theta}{\pi} \varphi_{ij}\right) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N); \quad (4.37)$$

здесь  $\mathbf{r}_i$  — двумерный вектор координат заряженной частицы,  $\varphi_{ij}$  — азимутальный угол пары  $ij$ ,  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  — однозначная волновая функция. Согласно (4.37) перестановка любых двух анионов ( $\Delta\varphi_{ij} = \pi$ ) умножает многочастичную функцию  $\Psi_\Phi$  на фазу  $e^{i\theta}$ . Поэтому при  $\Delta\Phi \equiv \theta/2\pi = q\Phi/2\pi$ , равном целому числу, анионы — бозоны, при  $\Delta\Phi$  полуцелом — фермионы. В общем случае имеет место аномальная статистика ( $\theta$ -статистика). Для согласования спина со статистикой удобно величину  $\Delta\Phi$  считать спином аниона \*). В терминах комплексных координат  $z_j, \bar{z}_j$  частиц многозначная волновая функция (4.37) принимает вид<sup>120</sup>

$$\Psi_\Phi = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\theta/\pi} f\{z_j, \bar{z}_j\}, \quad (4.38)$$

где  $f$  — однозначная функция координат.

Определим фазу  $\theta$  для квазичастиц в ДКЭХ в простейшем случае, когда квазичастицы-анионы «строются» из электронов (первый уровень структуры). Изменение фазы  $\Delta\Phi$  волновой функции квазичастицы при адиабатическом

\*) Подробное обсуждение проблемы дробного спина см. в работах 116-120.

обходе по замкнутому контуру, содержащему другую квазичастицу, равно  $\Delta\varphi = e^* \Phi_0$ , и при  $v = 1/p$  согласно (4.31)  $|\Delta\varphi| = 2\pi/p$ . Поэтому изменение фазы при перестановке квазичастиц равно  $\Delta\varphi/2 = \pi v = \theta$ . В соответствии с общей структурой (4.38) множитель  $Q \{Z_j\}$  в псевдоволновой функции квазичастиц Лафлина — Халперина (4.33) в этом случае равен

$$Q \{Z_j\} = \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^{\pm 1/p}. \quad (4.39)$$

Знаки  $+$  ( $-$ ) в (4.39) отвечают квазичастицам дырочного (электронного) типа.

В заключение раздела покажем, что аномальная статистика квазичастиц позволяет частично теоретически обосновать эмпирическое правило нечетного знаменателя<sup>125</sup>. Для этого рассмотрим два кластера, каждый из которых состоит из  $p$  квазиэлектронов. Так как каждая квазичастица подчиняется аномальной статистике с фазой  $\theta = \pi v$ , а перестановка двух кластеров идентична  $p^2$  перестановкам пар квазичастиц, параметр  $\theta_p$ , характеризующий статистику кластеров, равен  $\theta_p = p^2 \theta$ . Соответственно, при факторе заполнения  $v = q/p$  ( $q < p$ ;  $q, p$  — взаимно простые числа) перестановка двух кластеров умножает волновую функцию квазичастиц на фазу  $\exp(i\theta_p) = \exp(i\pi pq)$ . Но согласно теореме эквивалентности в ДКЭХ возбуждение  $p$  квазиэлектронов при  $v = q/p$  идентично образованию  $q$  электронов. В силу ферми-статистики электронов тот же фазовый фактор равен

$$e^{i\pi pq} = e^{i\pi q^2} \quad (4.40)$$

Если  $p$  — четное число, равенство (4.40) с необходимостью требует, чтобы и  $q$  было четным, и числа  $q, p$  не могут быть взаимно простыми. Иными словами при четных знаменателях  $p$  аномальная статистика запрещает одновременное образование в системе большого числа квазичастиц и конденсация квазичастиц в несжимаемую квантовую жидкость невозможна.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С момента появления первой работы по дробно заряженным солитонам прошло более 10 лет. За это время проблема дробного заряда была тщательно изучена как в теории поля, так и в физике твердого тела. Особенно важным представляется обнаружение реальных квазиодномерных и квазидвумерных систем, в которых имеют место явления, тесно связанные с эффектом дробления заряда. В этой новой области исследований идеи и методы, разрабатываемые параллельно в квантовой теории поля и физике твердого тела, неожиданно нашли обширную область соприкосновения. Можно надеяться, что дальнейший прогресс теоретических и экспериментальных работ позволит «превратить» пока еще необычное явление дробления заряда в привычное понятие современной фундаментальной физики.

Авторы благодарны Д. В. Волкову, И. О. Кулику, Л. Б. Окуню, Л. П. Питаевскому и В. Л. Покровскому за интерес к работе и ценные советы. Мы глубоко признательны также Б. Л. Альтшулеру, С. Н. Артеменко, С. А. Бразовскому, А. Ф. Волкову, Я. И. Когану, В. А. Миранскому, М. А. Ольшанецкому и Д. Е. Хмельницкому за многочисленные полезные обсуждения затронутых в обзоре вопросов.

Харьковский государственный университет  
им. А. М. Горького  
Физико-технический институт низких температур АН УССР,  
Харьков

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ\*

*Дробный заряд в квантовой теории поля*

1. Jackiw R., Rebbi C.//Phys. Rev. Ser. D. 1976. V. 13. P. 3398.  
Jackiw R.//Rev. Mod. Phys. 1978. V. 49. P. 681.
2. Shankar R., Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1978. V. 141. P. 349.
3. Goldstone J., Wilczek F.//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 988.
4. Semenoff G., Matsumoto H., Umetsawa H.//Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 113. P. 371.  
Midorikawa S.//Ibidem. 1984. V. 138. P. 111.
5. Bardeen W. A., Elitzur S., Frishman Y., Rabinovici E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 218. P. 445.
6. Frishman Y., Gepner D., Yankielowicz S.//Phys. Lett. Ser. B. 1983. V. 130. P. 66.
7. Paranjape M. B., Semenoff G. W.//Ibidem. V. 132. P. 369.
8. Niemi A. J., Semenoff G. W.//Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 30. P. 803; 1985. V. 32. P. 471.
9. Capri A. Z., Ferrari R., Picasso L. E.//Ibidem. 1984. V. 30. P. 2136; 1985. V. 32. P. 2037.
10. MacKenzie R., Wilczek F.//Ibidem. 1984. V. 30. P. 2194.
11. Blanckenbecler R., Boyanovsky D.//Ibidem. 1985. V. 31. P. 2089; Boyanovsky D., Blanckenbecler R.//Ibidem. P. 3234.
12. Mignaco J. A., Rego Monteiro M. A.//Ibidem. P. 3251.
13. Keil W., Kobes R.//Ibidem. V. 32. P. 2231.
14. Aitchison I. J. R., Fraser C. M.//Ibidem. V. 31. P. 2605.

*Флуктуации дробного заряда*

15. Kivelson S., Schrieffer J. R.//Ibidem. Ser. B. 1982. V. 25. P. 6447.
16. Kivelson S.//Ibidem. V. 26. P. 4269.
17. Bell J. S., Rajaraman R.//Phys. Lett. Ser. B. 1982. V. 116. P. 151; Nucl. Phys. Ser. B. 1983. V. 220. P. 1.
18. Jackiw R., Kerman A. K., Klebanov I., Semenoff G.//Ibidem. V. 225. P. 233.
19. Frishman Y., Horowitz B.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 27. P. 2565.

*Дробный заряд при конечных температурах*

20. Niemi A. J.//Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 251. P. 155.
21. Midorikawa S.//Phys. Rev. Ser. D. 1985. V. 31. P. 1499.

*Фермион-бозонная дуальность в одномерных моделях квантовой теории поля*

22. Coleman S.//Ibidem. 1975. V. 11. P. 2088.
23. Mandelstam S.//Ibidem. P. 3026.
24. Swicca J. A.//Fortschr. Phys. 1977. Bd 25. P. 303.
25. Yuan K. H.//Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 29. P. 1744.
26. Noan C. M.//Ibidem. 1985. V. 31. P. 2035.

*Киральная аномалия*

27. Джекив Р. Теоретико-полевые исследования в алгебре токов //Трейман С., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов. — М.: Атомиздат, 1977.— С. 68.
28. Jackiw R. Topological Investigations of Quantized Gauge Theories //Lectures of the Les Houches Summer School 1983: Preprint MIT-CTP-1089.
29. Fujikawa K.//Phys. Rev. Ser. D. 1980. V. 21. P. 2848.
30. Roskies R., Shapospnik F.//Ibidem. 1981. V. 23. P. 558.

*Суперсимметричная квантовая механика*

31. Witten E.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 185. P. 513; 1982. V. 202. P. 253.
32. Генденштейн Л. Э., Криве И. В.//УФН. 1985; Т. 146. С. 553.

\*) В обзоре затрагиваются многочисленные вопросы квантовой теории поля и физики твердого тела. Поэтому список литературы не претендует на полноту. В некоторых случаях мы ограничились цитированием только первых оригинальных работ и обзоров. (После того, как обзор был сдан в редакцию, появились две важные обзорные работы, подробно рассматривающие дробный заряд в квантовой теории поля<sup>135</sup> и современное состояние КЭХ<sup>136</sup>.)

*Пайерлсовский диэлектрик (обзоры)*

33. Булаевский Л. Н.//УФН. 1975. Т. 115. С. 261.  
 34. Toombs G. A.//Phys. Rept. 1978. V. 40. P. 182.

*Солитоны в пайерлсовском диэлектрике  
(первые работы и обзоры)*

35. Бразовский С. А.//Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 28. С. 656; ЖЭТФ, 1980, т. 78. С. 677.  
 36. Su W. P., Schrieffer J. R., Heeger A. J.//Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1698; Phys. Rev. Ser. B. 1980. V. 22. P. 2099.  
 37. Rice M. J.//Phys. Lett. Ser. A. 1979. V. 71, P. 152.  
 Rice M. J., Timonen J.//Ibidem. V. 73. P. 368.  
 38. Su W. P., Schrieffer J. R.//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46. P. 738.  
 39. Heeger A. J., MacDiarmid A. G.//Chem. Scripta. 1981. V. 17. No. 1—5. P. 115.  
 40. Brasovskii S. A., Kirova N. N.//Sov. Sci. Rev. Ser. A: Phys. Rev. 1984. V. 5. P. 99.  
 41. Streitwolf H. W.//Phys. Stat. Sol. Ser. b. 1985. V. 127. P. 11.  
 42. Криве И. В., Рожавский А. С., Кулак И. О.//ФНТ. 1986. Т. 12. С. 1221.

*Модель Гросса — Невё и теоретико-полевые модели  
пайерлсовского диэлектрика*

43. Gross D., Neveu A.//Phys. Rev. Ser. D. 1974. V. 10. P. 3235.  
 44. Dashen R. F., Hasslacher B., Neveu A.//Ibidem. 1975. V. 12. P. 2443.  
 45. Криве И. В., Рожавский А. С.//Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 31, С. 647.  
 46. Криве И. В., Рожавский А. С. ЖЭТФ. Т. 81. С. 1811.  
 Krive I. V., Rozhavsky A. S.//Sol. State Commun. 1981. V. 39. P. 427.  
 47. Jackiw R., Schrieffer J. R.//Nucl. Phys. Ser. B. 1981. V. 190. P. 253.  
 48. Криве И. В., Рожавский С. С.//ФНТ. 1981. Т. 7. С. 921.  
 49. Криве И. В.//ФНТ. 1983. Т. 9. С. 314.  
 50. Осипов В. А., Федяин В. К.//Кр. сообщ. ОИЯИ. 1984. Т. 4. С. 33.

*Полиацетилен, карбин и т.п.*

51. Овчинников А. А., Украинский И. И. Квенцель Г. Ф.//УФН. 1972. Т. 108. С. 81.  
 52. Bredas J. L., Themans B., Andre J. M., Chance R. R., Bougeaux D. S., Silbey R.//Proc. of the Intern. Conference on Conducting Polymers. Les Arcs, 1982.  
 53. Rice M. J., Bishop A. R., Campbell D. K.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2136.  
 54. Rice M. J., Mele E. J.//Phys. Rev. Ser. B. 1982. V. 25. P. 1339.

*Волна зарядовой плотности, солитоны фазы  
и нелинейная проводимость*

55. Lee P. A., Rice T. M., Anderson P. W.//Sol. State Commun. 1974. V. 14. P. 703.  
 56. Бразовский С. А., Дзялошинский И. Е.//ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 2338.  
 57. Rice M. J., Bishop A. R., Krumhansl J. A., Trullinger S. E.//Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 432.  
 58. Makai K.//Ibidem. 1977. V. 39. P. 46; Phys. Rev. Ser. B. 1978. V. 18. P. 1641.  
 59. Криве И. В., Рожавский А. С.//ФНТ, 1980, Т. 6, С. 1272.  
 60. Артеменко С. Н., Волков А. Ф.//ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 2019; Т. 81. С. 1873.  
 61. Grüner G.//Comm. Sol. State Phys. 1983. V. 10. P. 183.  
 Grüner G., Zettl A.//Phys. Rept. 1985. V. 119. P. 118.  
 62. a) Bardeen J., Ben-Jacob E., Zettl A., Grüner G.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 493.  
 б) Bardeen J.//Ibidem. 1979. V. 42. P. 1498; 1980. V. 45. P. 1978.  
 63. Fleming R. M.//Sol. State Commun. 1982. V. 43. P. 167.  
 64. Fleming R. M., Dunn R. G., Schneemeyer L. F.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 4099.  
 65. Krive I. V., Rozhavsky A. S.//Sol. State Commun. 1985. V. 55. P. 691; ФНТ. 1986. Т. 12. С. 134.  
 66. Krive I. V., Rozhavsky A. S.//Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 113. P. 313.  
 67. Горьков Л. П., Долгов Е. Н.//ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 396.

*Эффекты трехмерности в системах Пайерлса — Фрёлиха*

68. Горьков Л. П. УФН. 1984. Т. 144. С. 381.  
 69. Jerome J., Schulz H. J. // Adv. Phys. 1982. V. 31. P. 299.

*Одномерная квантовая электродинамика (модель Швингера)*

70. Schwinger J. // Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 2425.  
 71. Coleman S., Jackiw R., Susskind L. // Ann. Phys. (N. Y.). 1975. V. 93. P. 267.  
 72. Coleman S. // Ibidem. 1976. V. 101. P. 239.  
 73. Красников Н. В., Матвеев В. А., Рубаков В. А., Тавхелидзе А. Н., Токарев В. Ф. // ТМФ. 1980. Т. 45. С. 313.

*Туннелирование в квантовой теории поля*

74. Волошин М. Б., Кобзарев И. Ю., Окуни Л. Б. // ЯФ. 1974. Т. 20. С. 1229.  
 75. Coleman S. // Phys. Rev. Ser. D. 1977. V. 15. P. 2929.  
 76. Stone M. // Ibidem. 1976. V. 14. P. 3568.  
 77. Callan C. G., Coleman S. // Ibidem. 1977. V. 16. P. 1762.  
 78. Волошин М. Б. // ЯФ. 1985. Т. 42. С. 1017.

*Топология в теории поля  
(обзоры)*

79. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. // Phys. Rept. 1980. V. 66. P. 213.  
 80. Stora R. // Cargese Lectures 1983: Preprint LAPP-TH-94.  
 81. Фаддеев Л. Д., Шаташвили С. Л. // ТМФ. 1984. Т. 60. С. 206.  
 82. Zumino B., Wu Y.-S., Zee A. // Nucl. Phys. Ser. B. 1984. V. 239. P. 477.  
 83. Jackiw R. Chern-Simons Terms and Cocycles in Physics and Mathematics: Preprint. CTP No. 1230. — 1984.

*Электрон в магнитном поле и двумерная  
квантовая электродинамика*

84. Ахагоров Y., Casher A. // Phys. Rev. Ser. A. 1979. V. 19. P. 2461.  
 Дубровин Б. А., Новиков С. П. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 1006.  
 Грендштейн Л. Э. // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39. С. 234; ЯФ. 1985. Т. 41. С. 261.  
 85. Deser S., Jackiw R., Templeton S. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 975; Ann. Phys. (N. Y.). 1982. V. 140. P. 372.  
 86. Niemi A., Semenoff G. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2077.  
 87. Redlich A. N. // Ibidem. 1984. V. 52. P. 18; Phys. Rev. Ser. D. 1984. V. 29. P. 2366.  
 88. Jackiw R. // Ibidem. P. 2375.  
 Hughe R. // Phys. Lett. Ser. B. 1984. V. 148. P. 215.  
 89. Коган Я. И., Морозов А. Ю. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 3.

*Квантовый эффект Холла  
(эксперимент)*

90. Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 494.  
 Фон Клизинг К. // УФН. 1986. Т. 150. С. 107.  
 91. Tsui D. C., Gossard A. C. // Appl. Phys. Lett. 1983. V. 38. P. 550.  
 Paalanen M. A., Tsui D. C., Gossard A. C. // Phys. Rev. Ser. B. 1982. V. 25. P. 5566.  
 92. Tsui D. C., Störmer H. L., Gossard A. C. // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1559.  
 Tsui D. C. et al. // Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 28. P. 2274.  
 93. Пудалов В. М., Семеничинский С. Г. // Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 39. С. 143.  
 Гаврилов М. Г., Кон З. Д., Кукушкин И. В., Тимофеев В. Б. // Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 39. С. 420.  
 94. Von Klitzing K. // Physica. Ser. B. 1984. V. 126. P. 242.  
 95. Störmer H. L. // Ibidem. P. 250.  
 96. Stahli E., Weiss D., Weimann G., von Klitzing K., Ploog K. // J. Phys. Ser. C. 1985. V. 18. P. L783.

*Теоретико-полевые модели квантового эффекта Холла*

97. Ishikawa K.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1615; Phys. Rev. Ser.D. 1985. V. 31. P. 1432.
98. Freedman M. H., Sokoloff J. B., Widom A., Srivastava Y.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1587.
- Widom A., Freedman M. H., Srivastava Y. N.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 6588.
99. Johnson K. Three Dimensional Q. E. D. and the Fractional Quantum Hall Effect: Preprint CTP. No 1231, —1984.
100. Abouelsaood A.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1973.

*Теория целочисленного квантового эффекта Холла*

101. Laughlin R. B.//Phys. Rev. Ser. B. 1981. V. 23. P. 5632.
102. Aoki H., Ando T.//Sol. State Commun. 1981. V. 38. P. 1079.
- Prange R. E.//Phys. Rev. Ser. B. 1981. V. 23. P. 4802.
- Thouless D. J.//J. Phys. Ser. C. 1981. V. 14. P. 3475.
- Prange R. E., Joynt R.//Phys. Rev. Ser. B. 1982. V. 25. P. 2943.
103. Halperin B. I. //Ibidem. P. 2185.
- Laughlin R. B.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 2304.
104. Хмельницкий Д. Е.//Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 454.
105. a) Niu D., Thouless D. J.//J. Phys. Ser. A. 1984. V. 17. P. 2453.
- б) Niu Q., Thouless D. J., Wu Y.-S.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 3372.
106. Avron J. E., Seiler R.//Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 259.
- Avron J. E., Seiler R., Simon B.//Ibidem. 1983. V. 30. P. 1097.

*Теория дробного квантового эффекта Холла*

107. Laughlin R. B.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1395.
108. a) Haldane F. D. M., Rezayi E. H.//Ibidem. 1985. V. 54. P. 237; Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 2529.
- б) Haldane F. D. M.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 605.
109. Anderson P. W.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 28. P. 2264.
110. a) Girvin S. M., Jack T.//Ibidem. 1984. V. 29. P. 5617.
- б) Girvin S. M.//Ibidem. P. 6012.
111. Tao R., Wu Y.-S.//Ibidem. V. 30. P. 1097.
112. Pokrovsky V. L., Talaurov A. L.//J. Phys. Ser. C. 1985. V. 18. P. L691; Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 68.
- Trugman S. A., Kivelson S.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 15280.
113. Tao R., Thouless D. J.//Ibidem. 1983. V. 28. P. 1142.
- Tao R.//Ibidem. 1984. V. 29. P. 636.
114. Su W. P.//Ibidem. V. 30. P. 1069.
115. Giuliani G. F., Quinn J. J.//Ibidem. 1985. V. 31. P. 3451.

*Дробный спин, дробная статистика и дробный заряд*

116. Wilczek F.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1144; V. 49. P. 957.
117. Goldhaber A. S.//Ibidem. V. 49. P. 905.
118. Jackiw R., Redlich A. N.//Ibidem. 1983. V. 50. P. 555.
119. Wilczek F., Zee A.//Ibidem. V. 51. P. 2250.
120. Laidlow M. G. G., De Witt C. M.//Phys. Rev. Ser. D. 1971. V. 3. P. 1375.
- Wu Y.-S.//Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 2103; V. 53. P. 111.
121. Halperin B. I.//Ibidem. P. 1583.
122. Agarwal D., Schrieffer R., Wilczek F.//Ibidem.. P. 722.
123. Покровский В. Л., Талапов А. Л.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 372.
124. Thouless D. J., Wu Y.-S.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 31. P. 1191.
125. Tao R., Wu Y.-S.//Ibidem. P. 6859.
- Tao R.//J. Phys. Ser. C. 1985. V. 18. P. L1003.

*Монографии*

126. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
127. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 2.—М.: Наука, 1971.
128. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2.—М.: Наука, 1978.
129. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.

130. Ах и е з е р А. И., Б е р е с т е ц к и й В. Б. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1969.
131. Г р и б А. А., М а м а е в С. Г., М о с т е п а н е н к о В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.
132. Л и ф ш и ц И. М., Г р е д е с к у л С. А., П а с т у р Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982.
133. В а r g m a n V.//Rev. Mod. Phys. 1962. V. 34. P. 829.
134. У а й т Р. Квантовая теория магнетизма. — М.: Мир, 1985.
135. N i e m i A. J., S e m e n o f f G. W.//Phys. Rept. 1986. V. 135. No. 3.
136. Р а ш б а Э. И. Т и м о ф е е в В. Б.//ФТП. 1986. Т. 20. С. 977.