

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530[.162+.182]+532.517.4

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ**Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин,
Д. Д. Соколов**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Беспорядок и порядок	7
3. Перемежаемость случайной величины	9
4. Эволюция случайной величины	11
5. Случайная среда	12
6. Короткокоррелированная случайная среда и винеровский процесс	15
7. Перемежаемость в нестационарной среде	17
8. Быстрое динамо	21
9. Корреляционные свойства самовозбуждающихся магнитных полей	23
10. Вихрь и деформация в потоке несжимаемой жидкости	26
11. О структуре перемежаемого поля	28
Список литературы	31

1. ВВЕДЕНИЕ

ХІХ век и начало нашего века прошли под огромным влиянием термодинамики. Ее развитие и применение к широчайшему кругу явлений (тепловые машины, химия и многое другое) сыграли огромную роль в развитии науки и техники. Огромным достижением было обоснование термодинамики как следствия статистической механики, основанной на классической механике.

Термодинамика имеет дело со средними величинами. Идея усреднения глубоко проникла и в другие области. Со времен Рейнольдса и до сих пор так описывают турбулентные течения в гидродинамике. Этот простой и удобный способ подхода к сложным явлениям дал много практических результатов.

Однако термодинамика и усредненный подход имеют свои пределы. Ярким примером незаконного применения термодинамики является печально знаменитая «теория тепловой смерти Вселенной». Сейчас мы хорошо понимаем, что при наличии дальнедействующих сил тяготения унылое однородное распределение газа в бесконечном пространстве вовсе не является ни состоянием с максимальной энтропией при данной энергии, ни конечным состоянием эволюции.

В начале века к термодинамике добавилось учение о флуктуациях. В однофазной среде с данными средними значениями плотность вероятности флуктуации подчиняется гауссовскому закону $P(A) \sim \exp[-\alpha(A - \bar{A})^2]$; здесь A — рассматриваемая величина, например число частиц в заданном объеме, \bar{A} — ее среднее «термодинамическое» значение, α — коэффициент, также выражаемый через термодинамические функции и их производные.

Первые шаги статистической механики привели к распределению молекул по скоростям, также подчиняющемуся гауссовскому закону $P(v) \sim \exp[-(v - \bar{v})^2/2kT]$. Еще раньше теория вероятности получила гауссовское распределение для суммы многих случайных величин. Все это создало почву для обожествления гауссовского распределения. В действительности, часто в природе осуществляются существенно негауссовские распределения. Классическая статистическая физика включает в себя фазовые переходы, часть которых связана со спонтанным нарушением симметрии.

Удивительным и необъяснимым лишь с термодинамической точки зрения явлением кажется самопроизвольное возникновение упорядоченных структур в природе — ледяных узоров на стекле зимой, закономерно расположенных узоров конвективных ячеек в жидкости или слоев в драгоценных яшме и агате. Кажущимся нарушением термодинамики выглядит всякое живое вещество. Ответ на вопрос об уменьшении энтропии в этих процессах прост. Увеличение энтропии системы в целом с учетом теплопередачи при конденсации инея или с учетом сгорания пищи в живом во много раз превосходит уменьшение энтропии при образовании структур. Однако понимание и описание процессов образования структур требуют принципиального выхода за рамки усредненного описания. В некотором смысле нам надо снова вернуться к огромному числу возможных реализаций, над которыми восторжествовала термодинамика, и отыскать из них те, что формируют порядок на фоне общего беспорядка.

Можно пытаться связать эффекты упорядочения с тонкими свойствами молекул, атомов, элементарных частиц, например, связать отражательную асимметрию живого с нарушением P -инвариантности в элементарных частицах. Принципиально иной подход заключается в объяснении спонтанного порядка игрой случая в ансамбле большого числа частиц *). Нечто похожее содержится в синергетике. Однако она делает главный упор на рассмотрение нелинейных процессов⁴⁸, описываемых нелинейными уравнениями, отводя случаю лишь роль малой затравки.

Цель нашей статьи — показать появление структурности в случайной среде в явлениях переноса, описываемых на определенном этапе линейными дифференциальными уравнениями. Здесь случайность является основным механизмом возникновения структуры, а нелинейность, включающаяся позднее, предотвращает неограниченный рост получающихся образований. Структуры, возникающие в случайной среде, имеют своеобразный характер: они имеют вид пиков, появляющихся в случайных местах и в случайные моменты времени. Промежутки между ними характеризуются малой интенсивностью и большой протяженностью.

Общее название такой картины — «перемежаемость». Термин появился при изучении поля скорости и температурных пятен в турбулентной среде³. Явление перемежаемости изучалось также для гидродинамической турбулентности в связи со стимулированным Л. Д. Ландау уточнением гипотезы Колмогорова — Обухова (см., например, монографию⁴) и в теории распространения волн в случайных средах⁵. Другим примером служит эффект локализации в квантовой теории неупорядоченных сред, всесторонне изученный И. М. Лифшицем и его учениками⁶.

Перемежаемость обнаружена в вычислительных экспериментах в магнитной гидродинамике^{7, 44} и теории образования галактик, подтвержденной астрономическими наблюдениями структуры Вселенной⁸.

С физической точки зрения перемежаемость возникает благодаря фазированному воздействию случайной среды на переносимую в ней величину.

*) Любопытно, что на двойственность и дополнительность этих подходов обратил внимание еще Демокрит, который, с одной стороны, «понял, что если у атомов будет одна и та же природа, то они не смогут произвести различные вещи»¹, но «считал случай причиной закономерного устройства существующего»².

Например, в потоке проводящей жидкости со случайным полем скорости и вложенным начальным магнитным полем найдутся такие места, в которых течение будет наиболее эффективно усиливать магнитное поле за счет растяжения магнитных линий потоком⁹. Конечно, возникновение таких областей — редкое, маловероятное событие. Но в этих максимумах будет сосредоточиваться почти вся энергия генерируемого поля, поэтому ими нельзя пренебречь, они вносят главный вклад в среднее и средний квадрат. Однако

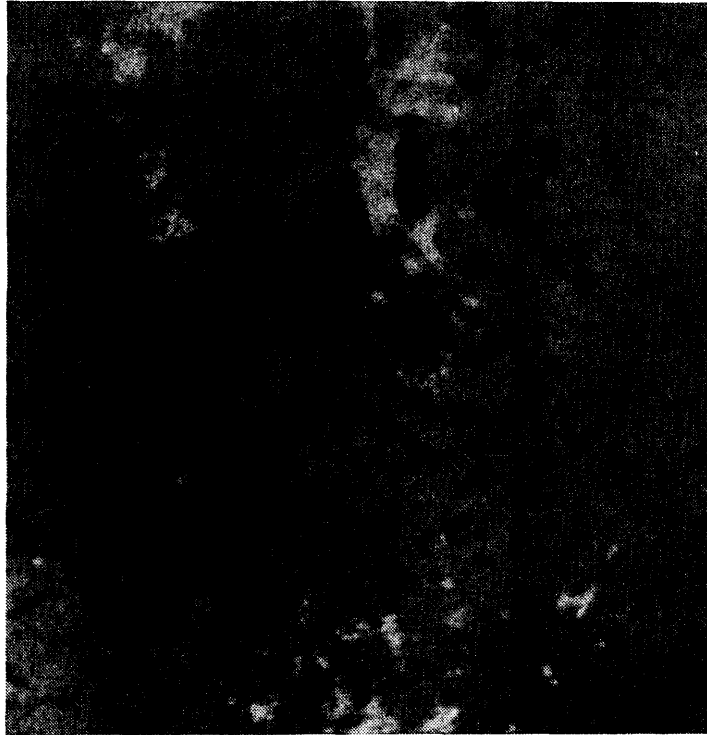


Рис. 1. Магнитограмма, полученная на обсерватории Кит-Пик в 1982 г. (по ⁴⁹).
Характерный размер ячеек сетки 30 000 км

первых двух моментов недостаточно для полной характеристики распределения. Главным признаком перемежаемости является именно аномальное по сравнению с гауссовским соотношение между последовательными статистическими моментами. В терминах фурье-анализа перемежаемость характеризуется не только медленным убыванием фурье-гармоник с ростом волнового числа, но и их определенной сфазированностью. Сумма высоких гармоник со случайными фазами давала бы нечто похожее на функцию Вейерштрасса, иначе говоря, фрактальную кривую вместо отдельных пиков¹⁰. С другой стороны, сумма специально сфазированных плоских волн дает **δ -функцию или несколько δ -функций**. Для сравнения отметим пример перемежаемости, порожденной нелинейностью. Амплитуда электромагнитных колебаний в резонаторе с просветляющим (нелинейным) элементом оказывается существенно негауссовской¹¹. Интересно обсуждаемое в этой работе предложение использовать многофотонный фотоэффект для регистрации высоких моментов распределения амплитуды поля.

В пространственно однородной в статистическом смысле среде перемежаемость является чрезвычайно резко выраженным явлением: при наличии неустойчивости, например при самовозбуждении магнитного поля, отношение средних квадратов поля, сосредоточенного и не сосредоточенного в пи-

ках, растет экспоненциально по времени^{9, 26}. В случае пространственно ограниченной среды оказывается, что характерное расстояние между высокими пиками начинает с некоторого времени превышать размеры системы. После этого средние по пространству и по ансамблю перестают совпадать, причем средние по пространству растут медленнее средних по ансамблю. Таким образом, перемежаемость в ограниченной задаче выражена менее резко¹².

Большой интерес представляет вопрос о структуре перемежаемого распределения. Асимптотически во времени типично образование высоких

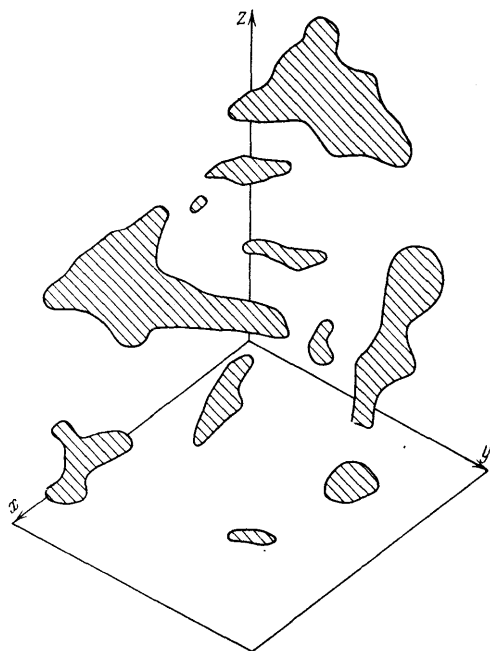


Рис. 2. Концентрации магнитных полей (выделены штриховкой) по данным численного эксперимента⁷

изолированных пиков; обычно в пространстве эти пики соответствуют пятнам поля, разделенным обширными областями пониженной интенсивности. Однако в качестве промежуточной асимптотики возможно, а может быть типично, образование ячеистой или сетчатой структуры: тонких каналов повышенной интенсивности («богатой фазы»), отделяющих друг от друга изолированные острова «бедной фазы». Примером такой промежуточной перемежаемости является структура Вселенной⁸. Ниже мы рассматриваем только далекую асимптотику $t \rightarrow \infty$. В этом пределе ячеистая структура Вселенной разрушается и после сгущивания вещества возникает новая перемежаемая структура. В оптике задача о возникновении структур часто рассматривается в случае, когда свет проходит пластинку со случайным профилем. Это соответствует эволюции случайного начального условия в детерминированной среде. На небольшом расстоянии от поверхности пластинки

снова возникает структура каустик, которая с увеличением расстояния замыкается, влияние случайности постепенно стирается. Эффекты перемежаемости типа пиков интенсивности обнаруживаются и в более простой задаче о распространении волн в среде со случайным коэффициентом поглощения^{5, 13}. В частности, оказывается, что средняя величина светового потока, проходящего большую толщину случайной среды, определяется не типичным значением потока, проходящего через среду в окрестности наудачу выбранной точки, а отдельными очень редкими яркими точками (эта идея высказана в⁶).

Явление перемежаемости обнаруживается как наблюдательно (рис. 1), так и в численных экспериментах (рис. 2).

Отметим, что задача о возникновении перемежаемости в некотором смысле обратна известной задаче о возникновении хаоса из упорядоченного движения в динамической системе, которая описывается небольшим числом обыкновенных дифференциальных уравнений (об этой задаче см., например,¹⁴).

Мы уделим вначале большое внимание элементарным вопросам, обсуждение которых позволит выявить природу перемежаемости и ввести необходимые понятия. Затем явление перемежаемости будет рассмотрено на примере переноса пассивного скаляра и бездивергентного *) вектора в короткокоррелированной случайной среде, что допускает аналитическую трактовку.

*) Безвихревой (потенциальный) вектор сводится к градиенту скаляра.

Переменяемость, порожаемая случайностью, рассматривается в приложениях к двум физическим задачам. В первой, более простой задаче изучается поведение частицы в заданном случайном потенциале. Вторая задача относится к вопросу генерации и переноса вектора (магнитного поля, вихря) в турбулентном потоке, поддерживаемом внешним источником. Эти различные физические задачи имеют глубокое математическое сходство по типу возникающих решений, неоднородных в пространстве и времени, и по методу нахождения этих решений. Особенности векторного поля см. в разделе 11.

2. БЕСПОРЯДОК И ПОРЯДОК

Простейшее представление о беспорядке связано с предположением о равновероятности всех возможных элементарных событий. Этим предположением часто пользуются при оценке жизненных ситуаций, подбрасывая монету, или в примерах из курсов теории вероятностей. Даже на таком уровне теории возникают нетривиальные особенности. Например, если два игрока в орлянку бросают монету N раз, то интуиция подсказывает, что число моментов, когда никто из игроков не «сидит в выигрыше», пропорционально N . В действительности число ничейных ситуаций пропорционально не N , а $N^{1/2}$, поскольку число ничьих растет по закону случайного блуждания¹⁵. Таким образом, относительное число ничьих, иначе говоря, смен лидера, в продолжении игры уменьшается как $N^{1/2}/N \sim N^{-1/2}$. Это служит математическим доказательством народной мудрости: «Играй, да не отыгрывайся».

Предположение о равновероятности часто оказывается чрезмерно грубым для реальной действительности. Например, исходя из этих представлений, естественно ожидать, что пассажир, спускающийся в случайный момент времени на станцию метро, имеет равные шансы уехать в любом из двух направлений, если он садится в первый подошедший поезд. На самом деле вероятность уехать в одну из сторон может значительно превышать $1/2$. (Кажется, на этот эффект впервые обратил внимание А. М. Будкер.) Это связано с корреляцией в движении поездов. Скажем, они ходят в обе стороны через равные промежутки Δt , но поезд влево приходит на $\delta t \ll \Delta t$ раньше, чем поезд вправо *). Тогда вероятность уехать вправо мала, порядка $\delta t/\Delta t$.

Как правило, вероятность как мера на некотором множестве элементарных событий бывает неизвестна. Содержательные выводы теории возникают потому, что нас интересуют обычно некоторые функции, заданные на этом множестве, свойства которых мало зависят от точно неизвестного распределения вероятностей. Это более реалистическое представление о беспорядке связано с гауссовским, нормальным распределением. Гауссовский беспорядок обычно обусловлен суммой действий многих слабо зависимых примерно одинаковых случайных причин, как это вытекает из центральной предельной теоремы¹⁵. Это распределение полностью определяется двумя неслучайными параметрами — средним значением и дисперсией, или разбросом около среднего.

Кроме одномерной гауссовской величины часто рассматриваются гауссовские векторы и бесконечномерные гауссовские величины — гауссовские поля. Гауссовское поле представляет собой набор гауссовских величин в каждой точке пространства. В двух далеких точках пространства эти величины практически независимы, в близких — зависимость сильная. Расстояние, на котором происходит существенное ослабление корреляций, называется корреляционной длиной. Для того чтобы описать скалярное однородное гауссовское поле $\varphi(\mathbf{x}, \omega)$, ω — случайный параметр, достаточно задать двухточечную корреляционную функцию $B(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \varphi(\mathbf{x}, \omega) \times \varphi(\mathbf{y}, \omega) \rangle$; скобки означают среднее по ансамблю реализаций, т. е. по па-

*) Конечно, в реальной жизни это не всегда выдержано. Но речь идет лишь о корреляциях, в существовании которых читатель может убедиться лично.

раметру ω . Эта функция полностью определяет гауссовское поле, через нее могут быть в принципе выражены все необходимые его характеристики. Аналогично строятся гауссовские векторные и тензорные поля.

Теперь мы можем в самых общих чертах ответить на вопрос о том, как в принципе случай, беспорядок может породить порядок. Оказывается, уже гауссовское поле содержит элементы порядка. Общий фон гауссовского поля создают случайные, беспорядочные изменения величины ϕ с амплитудой порядка $B^{1/2}(0)$. На их фоне выделяются редкие высокие пики. В общем случае около пика изоповерхности подобны трехосным эллипсоидам. Однако чем выше пик (чем больше отношение его высоты к среднеквадратичному уклонению), тем более вероятна близость трех осей, тем ближе поверхность к сферической. Поэтому вблизи вершины эти пики не острые, а имеют правильную форму поверхностей вращения, меридиан которых в изотропном случае подобен графику функции $B(r)$, $r = |x - y|$; см. ¹⁶. Можно оценить высоту наибольшего пика в шаре данного радиуса, расстояние между пиками и т. п. ^{12, 17}. Заметим, однако, что ситуация с отдельными пиками вовсе не является единственной. Пики возникают одновременно с гауссовским распределением вероятности при сложении многих некоррелированных случайных функций, т. е. в условиях, соответствующих центральной предельной теореме. Изоповерхности гладкие, и функция $B(r)$ не имеет особенности в нуле в том случае, если коэффициенты Фурье разложения достаточно быстро спадают при больших значениях волнового вектора (k) — иначе может возникнуть фрактальная ситуация (см. ¹⁰).

В более сложных случаях (неаддитивных) нетривиален вопрос о геометрической структуре областей максимального значения искомой величины. Это могут быть поверхности, изолированные друг от друга или образующие ячеистую структуру. Это могут быть тонкие нити, соединенные между собой узлами (сетчатая структура) или состоящие из отдельных замкнутых линий и т. п. Эти важнейшие закономерности в еще большей степени проявляются в случае векторных полей. Линии магнитного поля нигде не начинаются и не кончаются, поэтому в магнитной гидродинамике можно ожидать возникновения тонких трубок, в которых сосредоточено поле. Изолированные пики поля, очевидно, запрещены. Но вернемся к гауссовскому случаю.

Разумеется, подобные пики можно заметить и наблюдая много реализаций одной гауссовской случайной величины. Существование пиков общеизвестно, однако они не играют значимой роли при обычных операциях с гауссовской случайной величиной, например, при обработке экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Грубо говоря, можно, игнорируя пики произвольной высоты, считать, что гауссовская величина имеет максимум амплитуды, в три раза превышающий стандартное отклонение (правило Гаусса). Но во многих задачах такой подход может привести к грубым ошибкам. Рассмотрим в качестве примера сверхдлинный трубопровод, прочность которого с высокой точностью постоянна, но отягощена малой случайной гауссовской ошибкой. Если стандартное отклонение ошибки во много раз меньше запаса прочности трубопровода, то, исходя из наивной идеологии, можно предполагать, что трубопровод будет обладать высокой надежностью, т. е. будет разрушаться с очень малой вероятностью. Именно такой логикой и пользуются при проектировании трубопроводов. Но такой вывод верен только для короткого трубопровода. Однако для того чтобы пришел в аварийное состояние сверхдлинный трубопровод, вовсе не нужно, чтобы он был поврежден во многих местах, вполне достаточно одного повреждения. Оно может быть вызвано очень редким уклонением, ничего общего не имеющим со стандартным. Фактическая длина трубопровода, на которой можно ожидать, скажем, десяти стандартных уклонений, 10 000 км при длине корреляции вдоль трубы порядка метра. Ситуация может резко усугубиться для негауссовского распределения, например логнормального, т. е. когда по Гауссу распределен логарифм случайной (неотрицательной) величины.

Когда распределение вероятностей случайной величины убывает на бесконечности медленнее, чем гауссовское, то высоких пиков, естественно, больше и расположены они чаще, т. е. элемент структурности, связанный с пиками, выражен в таком поле сильнее. Подобное усиление роли пиков может быть связано с разными причинами, но наиболее очевидная состоит в том, что теперь ошибка начинает формироваться не под воздействием многих независимых сравнимых по интенсивности причин, а на первый план выступает одна из них. Обращаясь снова к примеру трубопровода, легко понять, что подобная ситуация возникает тогда, когда он проходит по местности с очень сильно и быстро меняющимися свойствами. Такой средой, например, является вечная мерзлота, где оттаявшие участки перемежаются с мерзлыми. Известно, что это самым отрицательным образом сказывается на оценке надежности трубопровода по сравнению дисперсии и запаса прочности. В этом случае необходимы принципиально другие соображения, того же типа, как при изучении проводимости неупорядоченных металлических сред.

Когда случайная ошибка, которой отягощено измерение, имеет негауссовский хвост распределения, то применение при обработке результатов метода наименьших квадратов может привести к серьезным ошибкам. В частности, экспериментатор должен предварительно селективировать результаты, связанные с грубыми промахами в работе. Эти промахи не имеют общей природы со случайной ошибкой гауссовского типа, которая возникает при нормальной работе, и их поэтому бессмысленно усреднять вместе с такой ошибкой. Селекция подобных промахов не очень сложна при обработке сравнительно небольших объемов информации, когда экспериментатор постоянно контролирует результаты. Однако в тех случаях, когда необходимо полностью доверить обработку данных компьютеру, положение усложняется. Необходимо развитие специальных методов, защищенных от влияния грубых промахов. Такие методы принято называть робастными (см. о них, например,¹⁸⁾).

Нетрудно привести примеры распределений вероятности, которые дают менее контрастные пики, чем гауссовское распределение. Таково, например, распределение случайной величины $\xi = \varphi^2 / (\sigma^2 + \varphi^2)$, где величина φ — гауссовская. Очевидно, что ξ вообще не может иметь пиков, существенно превышающих стандартные отклонения.

Случайные величины с медленно спадающим распределением вероятностей не столь уж редки в физике. Первый пример такой величины был придуман еще Коши. Рассмотрим световой луч, отражающийся от зеркала, повернутого под случайным равномерным углом, и найдем точку, в которой луч достигает экрана. Координата этой точки является случайной величиной со столь медленным убыванием распределения, что у нее не существует среднего значения¹⁵. Более того, среднее арифметическое многих случайных величин, распределенных по Коши, имеет то же распределение, что и одна величина. В. А. Амбарцумян¹⁹ показал, что интенсивность излучения источника, проходящего через среду со случайным образом распределенными облаками, которые поглощают случайную долю интенсивности, будет иметь очень медленно убывающее распределение, к которому неприменима гауссовская идея усреднения.

3. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Практически в любом эксперименте физик имеет дело со случайной величиной ξ . Обычно ее считают распределенной по гауссовскому нормальному закону, который полностью определяется средним $\langle \xi \rangle$ и дисперсией σ^2 . Большинство значений случайной величины располагается вблизи среднего, в области размером порядка среднеквадратичного отклонения, равного σ , т. е. корню квадратному из дисперсии. Величина ξ может принимать зна-

чения, сильно отличающиеся от среднего $\langle \xi \rangle$, однако вероятность больших отклонений крайне мала. На этом основан успех метода наименьших квадратов, широко используемый при обработке экспериментальных данных. Гауссовская величина обычно возникает как сумма большого числа малых примерно одинаково распределенных независимых или слабо зависимых случайных величин. Это обосновано центральной предельной теоремой.

Рассмотрим, однако, случайную величину мультипликативного типа, т. е. являющуюся произведением большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин. Пусть, скажем, ξ_j , $j = 1, \dots, N$, принимает с одинаковой вероятностью $1/2$ значения 0 и 2. Тогда случайная величина, равная произведению

$$\xi = \prod_{j=1}^N \xi_j = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_i \dots \xi_N$$

почти для всех возможных реализаций ξ_j , принимает нулевое значение. Исключением является лишь одна реализация, когда все ξ_j принимают значение 2. Вероятность этой уникальной реализации крайне мала, при больших N она равна 2^{-N} . С другой стороны, ξ в этой реализации очень велика и равна 2^N .

Случайная величина ξ оказывается распределенной удивительным образом. Она вовсе не похожа на гауссовскую. Практически все значения ξ нулевые, кроме одного, очень большого. Но именно этим значением определяется среднее

$$\langle \xi \rangle = \frac{\text{сумма всех реализаций}}{\text{число реализаций}} = \frac{0+0+\dots+0+2^N}{2^N} = 1.$$

Средний квадрат

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{\text{сумма квадратов реализаций}}{\text{число реализаций}} = \frac{0+0+\dots+0+2^{2N}}{2^N} = 2^N$$

экспоненциально растет с ростом N . Еще быстрее растут следующие моменты: $\langle \xi^3 \rangle$, $\langle \xi^4 \rangle$, \dots , $\langle \xi^p \rangle = 2^{(p-1)N}$. Скорость роста моментов равна

$$\gamma_p \equiv \frac{\log_2 \langle \xi^p \rangle}{N} = p - 1. \quad (1)$$

Отсюда видим, что с ростом p растет и скорость роста момента. В пределе $p \rightarrow \infty$ $\gamma_p \rightarrow p$.

Мы назовем случайную величину рассмотренного простейшего типа *перемежаемой случайной величиной*. Подчеркнем, что это понятие связано с представлением о большом N , т. е. с большим числом сомножителей. Подобно тому, как гауссовская величина является типичной характеристикой суммы большого числа случайных величин, перемежаемая случайная величина, по-видимому, служит характеристикой произведения большого числа сомножителей.

Представленный простой пример может показаться патологическим из-за наличия нулей. Однако появление перемежаемости вовсе не связано с нулями. Пусть, например, ξ_j распределены в окрестности единицы. Тогда логарифм произведения

$$\ln \xi = \ln \xi_1 + \ln \xi_2 + \dots + \ln \xi_N$$

представляет собой сумму большого числа случайных величин, сосредоточенных вблизи нуля. Поэтому в пределе больших N $\ln \xi \sim N^{1/2} \eta$, где η — гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Таким образом,

$$\xi(\eta) \sim \exp(N^{1/2} \eta)$$

распределена по логнормальному закону. Величина η в основном принимает значения в интервале $(-\mu\sigma, \mu\sigma)$, $\mu \sim 1$. Когда $\eta < 0$, ξ близко к нулю, при $\eta > 0$ ξ велико, порядка $\exp(N^{1/2}\sigma)$. Среднее значение логнормальной величины равно⁴

$$\langle \xi \rangle = \int \xi(\eta) P(\eta) d\eta \sim \int \exp(N^{1/2}\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta \sim \exp\frac{N\sigma^2}{2}.$$

Оно, в отличие от отдельной реализации, растет монотонно и экспоненциально. Также экспоненциально растут и другие статистические моменты

$$\langle \xi^p \rangle \sim \exp\frac{Np^2\sigma^2}{2}.$$

Скорость роста p -го момента

$$\gamma_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle \xi^p \rangle}{N} = p^2 \frac{\sigma^2}{2} \quad (2)$$

неограниченно возрастает с ростом p .

Таким образом, этот более реалистический пример сохраняет все черты перемежаемости. Отметим, что контраст между индивидуальной реализацией и средними характеристиками не столь резкий, как в первом примере.

Строго говоря, вычисление моментов по асимптотически логнормальному распределению не вполне корректно^{50, 51}. Правильнее вначале вычислить $\langle \xi^p \rangle$ для любого N , а затем перейти к пределу $N \rightarrow \infty$. Поскольку в интеграл $\langle \xi^p \rangle$ основной вклад вносят значения $\eta \sim p^2\sigma^2 N^{1/2}$, а истинное распределение хорошо соответствует гауссовскому в области $|\eta| < CN^{1/2}$, C — постоянная, зависящая от вида распределения, то для справедливости формулы (2) необходимо, чтобы $p^2\sigma^2 < C$, т. е. достаточная малость $p^2\sigma^2$. Если отдельные множители ξ_j не могут принимать с ненулевой вероятностью достаточно больших значений, то скорость роста при больших $p^2\sigma^2$ должна быть похожа на величину (1). Подчеркнем, что подобная трудность не возникает при вычислении моментов от аддитивной величины. Поэтому логнормальное распределение для мультипликативной величины не является столь универсальным, как нормальное для аддитивной величины. В этом смысле рассмотрение мультипликативной случайной величины не сводится только к ее логарифмированию.

4. ЭВОЛЮЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Мультипликативные случайные величины естественно возникают в эволюционных задачах подобно тому, как аддитивные случайные величины появляются при обработке экспериментальных данных. В эволюционной задаче роль N играет время. Конечно, случайные величины аддитивного характера могут возникать и в эволюционных задачах. Рассмотрим простой пример

$$\frac{d\psi}{dt} = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс, скажем, гауссовский с дисперсией σ^2 , с быстрым убыванием временных корреляций. Пусть для простоты ξ обновляется через время τ , т. е. ее значения на временных интервалах $[0, \tau)$, $[\tau, 2\tau)$, ... являются независимыми и одинаково распределенными. Тогда интеграл, дающий решение уравнения, сводится к сумме независимых случайных величин, к которой при $t \gg \tau$ применима центральная предельная теорема, т. е.

$$\psi(t) \underset{t \gg \tau}{\sim} \langle \xi \rangle t \pm \tau\sigma\eta\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} *),$$

где η — гауссовская величина с нулевым средним и единичной дисперсией.

*) Отметим, что эта формула справедлива и при гораздо менее ограничительных предположениях о ξ ^{4, 52, 53}.

Когда $\langle \xi \rangle \neq 0$, решение с ростом t сближается со своим средним $\langle \psi \rangle$, т. е. происходит *самоусреднение*. При $\langle \xi \rangle = 0$, очевидно, $\langle \psi \rangle = 0$, решение, нормированное на $t^{1/2}$, *сходится к предельному* распределению, в данном случае к гауссовскому. Относительные флуктуации не растут, а в первом случае даже затухают. Формально это выражается в том, что высокие моменты сводятся к произведению более низких моментов:

$$\langle |\psi|^{p+q} \rangle \sim \langle |\psi|^p \rangle \langle |\psi|^q \rangle.$$

Другими словами, при больших t для описания ψ достаточно знать ее среднее и средний квадрат.

Этих средних явно недостаточно для описания эволюционного уравнения неустойчивого типа

$$\frac{d\psi}{dt} = \xi(t) \psi, \quad (3)$$

решение которого имеет мультипликативный вид

$$\psi(t) = \psi_0 \exp \int_0^t \xi(s) ds \sim \prod_{n=0}^{t/\tau} \exp \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \xi(s) ds,$$

т. е.

$$\ln \psi \sim \langle \xi \rangle t + \tau \sigma \eta \left(\frac{t}{\tau} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Таким образом, решение является перемежаемой случайной величиной. Флуктуации $\psi(t)$ растут как $\exp \{ \tau \sigma \eta (t/\tau)^{1/2} \}$. Более точно, таким образом растет отношение двух реализаций ψ , соответствующих двум реализациям η . Теперь средним значением ξ и его средним квадратом можно характеризовать лишь логарифм ψ на больших временах.

Обратим еще раз внимание на то, что, строго говоря, пользоваться формулой (4) для вычисления средних $\langle \psi^p \rangle$ можно лишь при малых $\tau \sigma$. Фактически второй член правой части (4) не стремится к нулю или бесконечности лишь при $\sigma \sim \tau^{-1/2}$, в так называемом приближении коротких временных корреляций. В этом случае $\xi(t) - \langle \xi \rangle$ пропорциональна броуновскому (винеровскому) случайному процессу w_t , для которого $\langle w_t \rangle = 0$ и $\langle w_t^2 \rangle = t$. Мы будем часто использовать это приближение и уточним далее (п. 6) способ предельного перехода $\tau \rightarrow 0$.

5. СЛУЧАЙНАЯ СРЕДА

Явление перемежаемости, заключающееся в возникновении редких, но сильных пиков в поведении случайной величины, выглядит крайне вырожденным и вряд ли представляющим интерес с точки зрения нормального бухгалтера. Однако маловероятное событие иногда может быть столь катастрофическим, что оказывает драматическое воздействие на нашу жизнь.

Гораздо богаче на редкие события случайная среда (случайное поле), состоящая из континуума случайных величин.

Рассмотрим, например, среду¹², характеризуемую случайным потенциалом $U(x, \omega)$. Параметр ω нумерует реализации потенциала, так что при фиксированном ω потенциал представляет собой обычную детерминированную функцию координат. Пусть для определенности U распределен по Гауссу с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Потенциал является случайным полем аддитивного типа, его можно представлять себе как сумму несфазированных фурье-гармоник таких, что при $k \rightarrow 0$ амплитуда убывает достаточно быстро, обеспечивая сходимости фурье-интегралов.

Равновесная концентрация вещества в такой среде *)

$$n = n_0 \exp \left(-\frac{U}{kT} \right) \quad (5)$$

уже не является гауссовской в силу нелинейной зависимости от U . Это очевидно при $\sigma/kT \gg 1$, но кажется естественным, что при $\sigma/kT \ll 1$ зависимость линейна:

$$n \approx n_0 \left(1 - \frac{U}{kT} \right), \quad \langle n \rangle \approx n_0.$$

В самом деле, найдем значение потенциала, соответствующее наиболее вероятному количеству вещества. Поскольку

$$P_U(n) = \exp \left(-\frac{U}{kT} - \frac{U^2}{2\sigma^2} \right),$$

то максимум экспоненты соответствует $U_{\max}/\sigma = -\sigma/kT$, где $P_{\max} = \exp(\sigma^2/2k^2T^2)$. Однако при точном рассмотрении последовательных статистических моментов

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= n_0 \exp \frac{\sigma^2}{2k^2T^2}, \\ \langle n^2 \rangle^{1/2} &= n_0 \exp \frac{\sigma^2}{k^2T^2}, \dots, \langle n^p \rangle^{1/p} = n_0 \exp \frac{p\sigma^2}{2k^2T^2} \end{aligned}$$

выясняется, что они тем больше, чем выше их номер p : $\langle n^2 \rangle \gg \langle n \rangle^2$, $\langle n^4 \rangle \gg \langle n^2 \rangle^2$, ..., т. е. последовательные средние определяются вовсе не наиболее вероятным значением потенциала σ/kT , а $p^{1/2}\sigma/kT$. Поэтому пользоваться линейным приближением, вообще говоря, нельзя даже при малых σ/kT . Прогрессивное увеличение моментов объяснимо только тем, что в распределении концентрации имеются редкие высокие пики. В принципе, как уже отмечалось в п. 2, высокие пики имеются и в гауссовском потенциале, где $\langle U^p \rangle^{1/p}$ растет как $p^{1/2}$ с увеличением p . Но этот рост несравнимо слабее экспоненциального роста моментов концентрации. Важно другое, слабая перемежаемость потенциала, которой самой по себе можно было бы пренебречь, оказывается резко выраженной в распределении концентрации (5), нелинейно зависящей от U .

По корреляционным свойствам U легко найти и корреляционные свойства n , распределенной по логнормальному закону (5). Такая задача недавно рассматривалась Мандельбротом и Салаи (частное сообщение) в применении к проблеме образования крупномасштабной структуры Вселенной. По заданной корреляционной функции плотности вещества ρ была найдена корреляционная функция плотности числа галактик Δ в предположении, что $\Delta = \exp(\text{const} \cdot \rho)$. Для обычно принимаемого спектра $\rho_k \sim k^{-3}$ для корреляционной функции Δ получилась степенная зависимость от взаимного расстояния, согласующаяся с наблюдаемой корреляционной функцией, впервые построенной Тотсуи и Кихарой⁵⁵ и исследованной Пиблсом⁵⁶.

Концентрация является решением линейного уравнения со случайным коэффициентом v ,

$$\text{div}(\kappa \nabla n - nv) = 0,$$

где в приближении подвижности $v = (\kappa/kT)\nabla U$, κ — коэффициент диффузии. В этом принципиальное отличие перемежаемости от структур, уже изучавшихся в синергетике, в основе которой лежат процессы, описываемые нелинейными уравнениями.

Линейные скалярные уравнения со случайным размножением и диффузией характерны для ряда задач биологии или кинетики химических и ядер-

*) Такой закон возникает не только в термодинамике, но и в химической кинетике, где роль U играет энергия активации.

ных реакций^{20, 21}, в²¹ рассмотрены и некоторые нелинейные задачи. Рассмотрим явление перемежаемости на примере простого уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \kappa \Delta \psi + U(x, \omega) \psi, \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x). \quad (6)$$

Потенциал U распределен по Гауссу с некоторым характерным расстоянием убывания пространственных корреляций l . Решение уравнения (6) можно записать^{25, 34} в виде, подобном решению простого бездиффузионного уравнения (3):

$$\psi(x, t) = M_x \left(\exp \int_0^t U(\xi_s) ds \right) \psi_0(\xi_t), \quad (7)$$

где M_x означает усреднение по всем траекториям броуновского движения $\xi_s(x) = (2\kappa)^{1/2} w_s(x)$, выходящего из точки ξ_s в момент $s = 0$ и приходящего в момент $s = t$ в точку x .

Для любой ограниченной неотрицательной начальной функции $\psi_0(x)$ и любого $\kappa > 0$ с вероятностью единица решение (7) асимптотически при $t \rightarrow \infty$ растет как $\exp [t \cdot 6\sigma^2 \ln (\kappa t/l^2)^{1/2}]$, точнее, существует предел¹²

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \psi}{t (\ln \kappa t/l^2)^{1/2}} = (6\sigma^2)^{1/2}. \quad (8)$$

Такая зависимость от времени объясняется тем, что определяющий вклад в решение (7) вносит траектория, быстро попадающая в высокий максимум потенциала. Оценим величину этого максимума. В области размером R ($\rightarrow \infty$) содержится $\sim (R/l)^3$ корреляционных ячеек. Вероятность достигнуть некоторого U_0 в одной ячейке порядка $P \sim \exp(-U_0^2/2\sigma^2)$. Условие $P (R/l)^3 \sim 1$ дает оценку

$$\max U \sim \left(6\sigma^2 \ln \frac{R}{l} \right)^{1/2}.$$

Для типичной траектории $R/l \sim (\kappa t/l^2)^{1/2}$, что уже дает сверхэкспоненциальный рост $\psi \sim \exp [t (3\sigma^2 \ln t)^{1/2}]$. В действительности еще больший вклад дает не типичная, а менее вероятная, так называемая оптимальная траектория (по И. М. Лифшицу), которая за время t уходит на большее расстояние $R/l \sim \kappa t$, компенсируя свой малый статистический вес большим множителем $\max U$ (см.¹²).

Обратим внимание, что, хотя предел (8) не зависит от молекулярной диффузии, при $\kappa = 0$ решение, как ясно из (6), будет расти лишь экспоненциально (со скоростями роста, различными в разных точках). Это связано с тем, что от κ зависит время l^2/κ выхода на сверхэкспоненциальный режим. Таким образом, в зависимости от порядка предельных переходов ($t \rightarrow \infty$, $\kappa \rightarrow 0$) или ($\kappa \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$) получаются различные результаты. Отметим, что результат (8) не следует понимать в том смысле, что диффузия κ увеличивает скорость роста ψ . Более детальное исследование²² показывает, что при учете следующих членов разложения скорость роста ψ падает с ростом κ .

Последовательные статистические моменты поля уже при $\kappa = 0$ ведут себя сверхэкспоненциально. В самом деле,

$$\langle \psi^p(x, t) \rangle = \langle \exp(pUt) \rangle = \exp(p^2\sigma^2 t^2).$$

Также происходит рост и при $\kappa \neq 0$ в пределе $t \rightarrow \infty$; см.¹². Следовательно, моменты $\langle \psi^p \rangle^{1/p}$ растут гораздо быстрее самой функции и так, что скорость роста увеличивается с номером момента. Такой прогрессивный рост моментов объясняется наличием резких пиков в решении $\psi(x, t)$, т. е. перемежаемостью распределения ψ . Пики имеются в каждой реализации решения, соответствующей определенной реализации потенциала. Они располагаются в редких высоких максимумах потенциала U . Для сравнения отметим, что

в эволюции случайной величины пики имелись лишь в отдельных редких реализациях.

Мы рассматривали неограниченный объем. В ограниченном объеме $\psi \sim \exp(\max U \cdot t)$, где $\max U$ — случайная, например, гауссовская, величина. Для гауссовского потенциала моменты по-прежнему растут как $\exp(p^2 \sigma^2 t^2 / 2)$. Однако, если потенциал ограничен сверху величиной \bar{U}^* , то $\psi \sim \langle \psi^p \rangle^{1/p} \exp(\bar{U} t)$, т. е. в главном порядке перемежаемость отсутствует. Таким образом, явление перемежаемости в стационарном потенциале связано с присутствием бесконечных нефизических «хвостов» в распределении потенциала.

Более физично появление перемежаемости в потенциале (среде), зависящем от времени и стационарном лишь в среднем. В этом случае можно ожидать более медленного (экспоненциального) роста решения, поскольку максимумы потенциала будут присутствовать лишь конечное время.

6. КОРОТКОКОРРЕЛИРОВАННАЯ СЛУЧАЙНАЯ СРЕДА И ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Перейдем к изучению перемежаемости в среде, стационарной лишь в среднем. Для этого нужно прежде всего задать свойства этой среды. Обычно это делается на языке средних и среднеквадратичных характеристик, например, задается диэлектрическая проницаемость среды или — в магнитной гидродинамике — средняя спиральность. В более детальных подходах случайная среда характеризуется корреляционным тензором или даже некоторыми характеристиками этого тензора. Так, говоря о колмогоровской турбулентности, часто имеют в виду показатель энергетического спектра в инерционном интервале. Для наших целей подобное описание оказывается недостаточным. Интересуясь маловероятными состояниями поля, эволюционирующего в случайной среде, мы должны как-то описать и соответствующие маловероятные состояния среды. Проще всего это сделать в случае предельно нестационарной по времени среды. Мы будем называть такие среды короткокоррелированными.

Опишем для конкретности короткокоррелированный потенциал U . Его удобно представлять себе как предел потенциалов $U^\Delta(t, x)$, которые постоянны по t на интервалах длины Δt : $(0, \Delta t)$, $(\Delta t, 2\Delta t)$, ..., и независимы на разных таких интервалах. В пределе $\Delta t \rightarrow 0$

$$\langle (U(t, x) - \langle U \rangle) (U(t', y) - \langle U \rangle) \rangle = 2\delta(t - t') V(x, y). \quad (9)$$

Таким образом, при малых Δt отклонение потенциала от среднего значения порядка $(\Delta t)^{-1/2}$. Стационарность в среднем означает независимость от времени функции $V(x, y)$.

Соотношение (9) представляет собой характеристику нашего потенциала на языке корреляционного тензора. Однако оно не полностью определяет рассматриваемый потенциал. Действительно, с помощью (9) можно вычислить корреляторы типа $\langle U(t_1, x) U(t_2, x) \dots U(t_n, x) \rangle$, заданные в одной пространственной точке, поскольку короткокоррелированный потенциал является при естественных ограничениях гауссовским по времени. Однако высокие корреляции потенциала в разных пространственных точках, вообще говоря, не расщепляются в парные корреляции и их вычисление не сводится к формуле (9). В более сложных ситуациях некороткокоррелированной среды (см. о них*) гауссовским приближением нельзя пользоваться и для временных корреляций.

Удобное для нас представление короткокоррелированного потенциала и других характеристик короткокоррелированной среды связано с понятиями белого шума и винеровского процесса.

*) Эффективное ограничение потенциала в квантовой теории может быть связано с принципом Паули.

Винеровский процесс w_t хорошо известен в физике как описание броуновского движения частицы. Точнее, это — математическая абстракция броуновского движения в пределе, когда масса частицы и время между столкновениями стремятся к нулю. Величина w_t означает координату в момент t броуновской частицы, вышедшей из точки 0 в момент $t = 0$. Винеровский процесс нестационарен: за время t броуновская частица уходит от своего начального положения на расстояние, пропорциональное $t^{1/2}$. В одномерном пространстве броуновская частица временами возвращается в место старта, несмотря на удаление в среднеквадратичном от начала пути. В двумерии возвращения также происходят, но очень редки, трехмерный винеровский процесс невозвратен. Это легко понять, вспоминая, как устроены фундаментальные решения уравнения теплопроводности в пространствах различной размерности: $f_1(x, t) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-x^2/2Dt)$ на прямой, $f_2(\rho, t) = (1/2\pi t) \exp(-\rho^2/2Dt)$ на плоскости, $f_3(r, t) = (2\pi t)^{-3/2} \exp(-r^2/2Dt)$ в трехмерном пространстве. Вероятность возвращения в малую окрестность нуля после момента $t = t_0$ равна

$$\int_{t_0}^{\infty} f(0, t) dt.$$

Этот интеграл расходится степенным образом на прямой, логарифмическим — на плоскости, сходится — в трехмерном пространстве. Последнее и означает, что при достаточно большом t_0 в трехмерном пространстве возвращений не происходит.

В силу того, что любой малый фиксированный промежуток времени много больше времени между столкновениями, которое устремлено к нулю, закон $w_{t+\Delta t} - w_t = w_{\Delta t} \sim (\Delta t)^{1/2}$ справедлив и при малых Δt . Поэтому траектория винеровского процесса недифференцируема в классическом смысле. В настоящее время говорят, что эта траектория — фрактал. Показатель $1/2$ в выражении для $w_{\Delta t}$ называется порядком гёльдеровской производной. Напомним, что приращение $w_{\Delta t}$ является случайной величиной. С точки зрения разложения dw_t/dt в интеграл Фурье эта величина является белым шумом, имеет плоский спектр. Белый шум — обобщенная производная винеровского процесса — представляет собой короткокоррелированный процесс, который, в отличие от винеровского процесса, стационарен.

Напомним еще раз, что винеровский процесс описывает реальное броуновское движение лишь в некотором приближении, как промежуточная асимптотика. Будем рассматривать броуновскую частицу как шар массы M , движущийся под действием соударений с шарами-молекулами массы m . В моменты соударений с молекулами броуновская частица скачкообразно меняет импульс, т. е. траектория броуновской частицы в моменты соударений имеет одну производную по Гёльдеру (но не имеет настоящей производной), скорость ее является θ -функцией, а ускорение и сила δ -функциями. В этом приближении спектр скорости не плоский и не является белым шумом. Воспользуемся теперь малостью массы молекул m и предположим, что пролетное время между соударениями броуновской частицы τ мало. Устремляя m и τ к нулю так, чтобы на частицу в пределе действовала стационарная в среднем по времени случайная сила, мы приходим к известной задаче Ланжевена о движении частицы массы M под действием короткокоррелированной силы — белого шума. Эта сила складывается из суммы большого числа некоррелированных δ -функций малой интенсивности. Траектория такой частицы имеет, очевидно, полторы гёльдеровские производные, а ее скорость — половину гёльдеровской производной и не является белым шумом. Устремим, наконец, к нулю массу M броуновской частицы. Лишь в этом пределе получается винеровский процесс, имеющий половину гёльдеровской производной во всех точках и скорость в виде белого шума.

Понятие о винеровском (броуновском) процессе естественно связывается с представлением о диффузии. Однако мы собираемся использовать винеровский процесс и для конструирования потенциала, описывающего случайные взаимодействия. Нестандартность ситуации подчеркивается даже терминологией — математическое понятие, к которому мы пришли, рассматривая траекторию движущейся частицы, начинает фигурировать в качестве коэффициента в уравнении переноса! Дело в том, что характеристики случайной среды (например, скорость), в которой происходит перенос, диффузия и самовозбуждение скаляра (примеси) или вектора (вихря, магнитного поля), входят в уравнения переноса в виде коэффициентов, подобно потенциалу в уравнение Шрёдингера. В этом смысле постановка задачи отличается от постановки задачи Ланжевена, в которой в уравнении движения фигурирует заданная случайная сила. В данном случае потенциал играет роль «приводного ремня», связывающего источник энергии (через характеристики среды) с самовозбуждающейся примесью.

Способ получения короткокоррелированного процесса из винеровского мы применим и для описания случайных сред. Будем считать, что в каждой пространственной точке задан свой винеровский процесс, так что всю совокупность винеровских процессов нужно характеризовать как функцию t и x : $w_t(x)$. Тогда случайный короткокоррелированный потенциал задается в виде

$$U(t, x, \omega) = \frac{dw_t(x)}{dt}.$$

Винеровские процессы в различных точках x и y , вообще говоря, не являются независимыми. Для полного задания случайной среды необходимо тем или иным способом задать эту зависимость. К счастью, для многих интересующих нас задач важно лишь, что для близких точек зависимость сильная, а при удалении точек она стремится к нулю. Поэтому мы можем прибегать к приему дискретизации пространства, считая, что свойства случайной среды постоянны в пространственных ячейках некоторого корреляционного размера и независимы в различных ячейках. В этом случае винеровский процесс можно заменить конечномерным приближением — случайным блужданием на решетке. Иногда приходится также прибегать к приему дискретизации времени.

В литературе обычно говорят о случайных средах, в которых выполнено свойство (9), как о **δ -коррелированных**. Мы будем говорить о короткокоррелированных средах, имея в виду только что проведенное более детальное описание такой среды.

Отметим, что мы будем использовать в некоторых случаях стандартный винеровский процесс и для описания диффузионных процессов.

7. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим простой случай нестационарного потенциала, представляющего собой белый шум по времени с независимыми значениями в разных пространственных ячейках некоторого корреляционного размера:

$$U(t, x, \omega) = \frac{dw_t(x)}{dt},$$

где w_t — винеровский процесс. Пользуясь этим обобщенным потенциалом, мы будем понимать уравнение (6) как разностное по времени, т. е. вначале выполнен предельный переход по стремлению к нулю корреляционного времени потенциала, а затем $\Delta t \rightarrow 0$ в уравнении (6). Такой порядок предельных переходов соответствует подходу Ито²³. Можно применить и подход Стратоновича²⁴, соответствующий в данном случае обратному порядку указанных предельных переходов. Вывод о наличии перемежаемости не зависит от избранного подхода.

Уравнение (6) явно решается без диффузии, т. е. при $\kappa = 0$

$$\psi(t, x, \omega) = \psi_0(x) \exp\left(w_t - \frac{\sigma t}{2}\right). \quad (10)$$

Появление дополнительного множителя $e^{-\sigma t/2}$ в экспоненте связано с тем, что при дифференцировании винеровского процесса, имеющего лишь половинную производную, надо учитывать квадрат его дифференциала и пользоваться равенством $(dw_t)^2 = \sigma dt$ (см., например, ²³).

Типичное значение процесса w_t при больших t порядка $t^{1/2}$, т. е. с вероятностью единица решение (10) в любой точке затухает как $\exp(-\sigma t/2)$. Однако с малой вероятностью винеровский процесс принимает значения, сколь угодно превышающие $t^{1/2}$. Поэтому на фоне общего убывания несомненно имеются редкие высокие пики решения.

Убедиться в этом можно и вычислив последовательные статистические моменты решения. Предположим, что начальная $\psi_0(x)$ распределена независимо от U или является детерминированной функцией. Применяя формулу

$$\langle \exp(pw_t) \rangle = \exp\left(p^2 \frac{\sigma t}{2}\right),$$

находим

$$\langle \psi^p \rangle = \langle \psi_0^p \rangle \exp\left[\frac{p(p-1)}{2} \sigma t\right],$$

т. е. скорости экспоненциального роста γ_p/p возрастают с увеличением номера момента как $\sigma(p-1)/2$. Итак, типичная реализация $\psi(t, x)$ убывает с ростом t как $\exp(-\sigma t/2)$, среднее значение ($p=1$) совпадает с $\langle \psi_0 \rangle$, средний квадрат растет как $\exp(\sigma t)$, четвертый момент — как $\exp(6\sigma t)$ и т. д.

Рост моментов объясняется нетривиальным вкладом редких событий. Иными словами, среди полного набора реализаций $\psi(t, x, \omega)$ в некоторых пространственных точках найдутся растущие по времени реализации. Как ясно из вида решений (10) и свойств винеровского процесса, эти редкие функции представляют собой функции временного роста.

В большом, но конечном объеме или при локализованном начальном распределении $\psi_0(x)$ мы сталкиваемся со своеобразным нарушением привычного представления об эргодичности, понимаемой как равенство средних по статистическому ансамблю и пространственных (выборочных) средних.

В отличие от статистических, выборочные моменты в конечном объеме V затухают с вероятностью единица:

$$\mu_p \equiv \frac{1}{V} \int \psi_0^p(x) \exp\left(pw_t(x) - p \frac{\sigma t}{2}\right) d^3x \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \exp\left(-p \frac{\sigma t}{2}\right).$$

Сами выборочные моменты (в отличие от статистических) являются случайными величинами. Однако скорость их затухания $\tilde{\gamma}_p = -p\sigma/2$ — детерминированная величина. Заметим, что поправка к $\tilde{\gamma}_p$ порядка $\eta t^{1/2}$, где η — нормально распределенная случайная величина с единичной дисперсией.

Различие выборочных и статистических моментов можно понимать следующим образом. При локализованном начальном распределении или в ограниченном объеме в большинстве реализаций высокие пики существуют лишь конечное время. С некоторого момента расстояние между этими пиками превысит размер области, занятой полем, и пики сохраняются лишь в экспоненциально малом числе реализаций. Этой малой вероятности достаточно для того, чтобы пики внесли вклад в статистическое среднее, определяемое всеми реализациями. Но пространственное среднее по данной реализации μ_p , разумеется, перестает чувствовать пики с ростом времени. Время вымирания пиков порядка $\tau_p \ln(Vr_0^{-3})$, где $\tau_p = 2/\sigma(p-1)$ — характерное время роста

момента данного порядка, r_0 — корреляционный размер потенциала. Таким образом, при $t > \tau_p \ln(Vr_0^{-3})$ в данном объеме не укладываются пики, существенно влияющие на p -й выборочный момент.

Как доказано в ²², перемежаемость сохраняется и при наличии диффузии, по крайней мере в пределе малых κ . Конечно, скорости роста теперь зависят от κ . При $\kappa \rightarrow 0$ величины $\gamma_p(\kappa)$ непрерывны, поэтому кривые $\gamma_p(\kappa)$ не совпадают при малых κ . С ростом κ они обращаются в нуль при некоторых значениях $\kappa_2, \kappa_3, \dots$. Оказывается, $\gamma_1(\kappa) \equiv 0$, $\gamma(\kappa) < 0$ и обращается в нуль при некотором $\kappa_0 \leq \kappa_2$. Зависимость $\gamma_p(\kappa)$ для целых p можно найти явно из моментных уравнений. Однако уже из того, что соответствующая $p = 1$, $\langle \psi \rangle = \text{const}$, а типичная ψ экспоненциально убывает при $\kappa < \kappa_0$, следует, что экспоненциально растут все $\langle \psi^p \rangle$ с $p > 1$, по крайней мере при $\kappa < \kappa_0$. Таким образом, при $\kappa < \kappa_0$ перемежаемость выражена так же сильно, как и при $\kappa = 0$. При $\kappa > \kappa_0$ перемежаемость обнаруживается только в высоких статистических моментах.

Обоснование обрисованной в общих чертах в этом и предыдущем разделах картины зависимости скоростей роста от коэффициента диффузии κ достаточно сложно технически (см. ²²), некоторые важные детали до сих пор не выяснены. Задача резко упрощается, если член $\kappa \Delta$ в рассматриваемом уравнении заменить на некоторый близкий к нему интегральный оператор $\kappa \bar{\Delta}$. Для построения этого оператора вспомним, что диффузионный член $\kappa \Delta$ описывает броуновское движение, уходящее за время t на расстояние порядка $(\kappa t)^{1/2}/l$ (здесь l — размер дискретизации). Однако с малой вероятностью броуновская частица может уйти на любое сколь угодно большое расстояние. Интегральный оператор $\kappa \bar{\Delta}$ описывает такое случайное движение частицы, при котором она в момент t равномерно распределена в шаре радиуса $(\kappa t)^{1/2}/l$ и не может выходить из этого шара. В статистической физике подобные операторы хорошо известны и используются, например, при изучении известной модели Кюри — Вейсса ²⁵. Мы ограничимся рассмотрением дискретного пространства, в котором оператор $\kappa \bar{\Delta}$ действует по закону

$$\kappa \bar{\Delta} \varphi(t, x) = \frac{\kappa}{N(t)} \sum_{x' \in V(t)} [\varphi(t, x') - \varphi(t, x)],$$

где $V(t)$ — шар с центром в точке x радиуса $(\kappa t)^{1/2}/l$, $N(t)$ — число точек дискретного пространства в этом шаре. (Лапласиан в дискретном пространстве определяется следующим образом:

$$\kappa \Delta \varphi(x) = \frac{\kappa}{N} \sum [\varphi(x') - \varphi(x)],$$

где суммирование ведется по точкам пространства, ближайшим к точке x , N — число таких точек.)

Продемонстрируем технику вычислений с оператором $\kappa \bar{\Delta}$ на примере нахождения собственных значений оператора

$$\kappa \bar{\Delta} + U(x, \omega)$$

со случайным стационарным гауссовским потенциалом U , заданным в некоторой фиксированной области G (эти результаты получены одним из авторов, С.А.М., совместно с Л. Н. Богачевым).

Рассмотрим задачу

$$\kappa \bar{\Delta} \varphi_\lambda(x) + U(x, \omega) \varphi_\lambda(x) = \lambda \varphi_\lambda(x). \quad (11)$$

Поскольку собственная функция φ_λ не зависит от времени, то левую часть можно представить в виде

$$\kappa \bar{\Delta} \varphi_\lambda - \kappa \varphi_\lambda(x) + U \varphi_\lambda(x), \quad (12)$$

где

$$\bar{\varphi}_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{x' \in G} \varphi_\lambda(x').$$

Подставляя (12) в (11), получаем дисперсионное соотношение

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{N} \sum_{x \in G} \frac{1}{\lambda + \kappa - U(x, \omega)} \equiv F(\lambda, \omega). \quad (13)$$

Случайная функция $F(\lambda, \omega)$ с вероятностью единица имеет N полюсов первого порядка на действительной оси (поскольку с вероятностью единица все значения $U(x, \omega)$ в различных пространственных точках дискретного пространства также различны). Поэтому дисперсионное уравнение с вероятностью единица имеет ровно N действительных корней. Они дают собственные значения задачи (11), которые, конечно, являются случайными числами. Скорость роста в эволюционной задаче определяется максимальным значением потенциала U в области G , причем из дисперсионного соотношения (13) можно найти поправки при малых κ , на которые скорость роста отличается от U_{\max} .

Аналогичные вычисления показывают, что в бесконечном пространстве решение эволюционного уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = U(x, \omega) \varphi + \kappa \bar{\Delta} \varphi$$

растет по закону

$$\frac{\ln \varphi(x, t)}{t} = \left(3\sigma^2 \ln \frac{\kappa t}{l^2} \right)^{1/2} - \kappa + O\left(\left(\ln \frac{\kappa t}{l^2} \right)^{-1/2} \right). \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что первый член асимптотики (14) меньше, чем в задаче с настоящим лапласианом (8). Он соответствует наивному результату, полученному без учета оптимальной (по И. М. Лифшицу) траектории, уходящей на расстояние $\kappa t/l$. Этот эффект, конечно, нельзя описать с помощью оператора $\kappa \bar{\Delta}$. Более того, в некоторых случаях в теории случайных сред мы имеем дело лишь с приближенными уравнениями. Например, в одноэлектронном приближении в теории металлов потенциал представляет собой вовсе не настоящий очень глубокий потенциал атомных ядер, а тот остаток, который эффективно сохраняется из него после учета того обстоятельства, что нижние электронные уровни заняты и, в силу принципа Паули, последний электрон не может спуститься слишком глубоко в потенциальную яму. Конечно, при детальном описании принцип Паули не эквивалентен введению какого-либо потенциала. Сказанное означает, что в этих случаях у нас нет оснований доверять тонким эффектам, связанным с возможностью ухода случайной траектории на экстремально большое расстояние. Поэтому результат (14) дает в этих случаях не точное значение скорости роста, а лишь его нижнюю оценку, которая не зависит от малодостоверных деталей строения уравнения.

Что касается вычисления в рассматриваемом приближении поведения статистических моментов в стационарной среде, а также вычисления поведения истинного решения, выборочных и статистических моментов в нестационарной среде, то они не связаны с аномально далеко уходящими траекториями и оператор $\kappa \bar{\Delta}$ воспроизводит все известные в данном случае свойства диффузии. Зависимость скоростей роста от вязкости в этом приближении указана на рис. 3.

Рассмотренные свойства скоростей роста характерны и для задачи о переносе векторов в случайной среде, например, магнитного поля в турбулентном течении проводящей жидкости (турбулентное гидромагнитное динамо)⁹.

Основное отличие состоит в том, что при достаточно малых коэффициентах диффузии может экспоненциально расти и типичная реализация векторного поля. В векторном случае пики решения соответствуют структурным образованиям типа жгутов или слоев магнитных линий. Следующие разделы посвящены векторному случаю.

8. БЫСТРОЕ ДИНАМО

Для случайного обновляющегося течения проводящей жидкости с хорошими эргодическими свойствами справедлива следующая теорема^{9,26}. Первоначально слабое магнитное поле экспоненциально растет в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса. Скорость роста в этом пределе не зависит от магнитного числа Рейнольдса (быстрое динамо). Скорости роста последовательных статистических моментов прогрессивно растут с номером момента так, что четвертый момент растет быстрее квадрата второго и т. д. Это свидетельствует о перемежаемом в пространстве и времени распределении генерируемого поля.

Вычислим явно в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса скорости роста типичной реализации магнитного поля и всех его моментов для потока с короткими, **δ-образными** временными корреляциями. Теорема существования поля в таком потоке и некоторые оценки скоростей роста моментов ранее получены в работе Б. Л. Розовского²⁷. Мы выведем также замкнутые эволюционные уравнения для четных моментов магнитного поля. Они напоминают уравнения Шрёдингера с матричным потенциалом, а задача нахождения для них скоростей роста в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса аналогична задаче о нахождении края спектра в рамках квазиклассического приближения.

Применяемый нами метод асимптотического исследования основан на том, что скорости роста магнитного поля и его моментов в трехмерном случайном потоке в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса совпадают со скоростями роста, вычисленными при полном отсутствии магнитной диффузии²⁶. Поэтому можно применять лагранжев подход. Это сводит задачу к изучению эволюции магнитного поля $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$ вдоль лагранжевой траектории

$$\xi_t = \mathbf{x} + \int_0^t \mathbf{v}(s, \xi_s) ds,$$

которая определяется только заданным бездивергентным полем скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. Согласно закону индукции за малое время Δt магнитное поле изменится следующим образом:

$$H_i(t + \Delta t, \xi_{t+\Delta t}) = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial v_i(t, \xi_t)}{\partial x_j} \Delta t \right) H_j(t, \xi_t) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Пусть средняя скорость течения равна нулю. Тогда короткокоррелированное поле скорости удобно представлять себе как предел скоростей $v^\Delta \sim (\Delta t)^{-1/2}$, которые не зависят от времени на интервалах длины Δt и независимы на различных временных интервалах. В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ такое поле скорости переходит в белый шум с коррелятором

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{y}) \rangle = \frac{l}{v} \delta(t - t') V_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

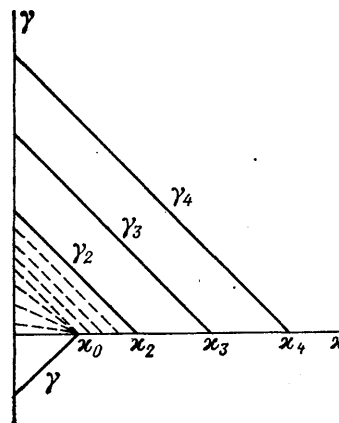


Рис. 3. Зависимость скорости роста скалярного поля от коэффициента диффузии. Штрихами схематически показаны зависимости скоростей роста от коэффициента диффузии для нецелых моментов при $1 < p < 2$.

где l, v — характерные масштаб и скорость, угловые скобки означают усреднение по распределению поля скорости.

Предположение о δ -коррелированности поля скорости эквивалентно тому, что каждый элемент матрицы $W_{ij} \equiv (\partial v_i / \partial x_j) \Delta t$ является винеровским процессом с нулевым средним и некоторой дисперсией. Дополнительно предположим, что поле скорости статистически однородно по пространству и имеет изотропное распределение вероятностей. Тогда матрица W_{ij} может быть представлена в виде

$$W_{ij} = aw\delta_{ij} + \sigma w_{ij}, \quad (16)$$

где a, σ — постоянные, w и каждый из элементов w_{ij} — независимые винеровские процессы с единичной дисперсией. Изотропия первого члена очевидна. Каждая реализация второй матрицы, вообще говоря, не изотропна. Но распределение w_{ij} изотропно, потому что оно сохраняется при действии ортогонального преобразования. Поскольку матрица w_{ij} — гауссовская, для доказательства этого факта достаточно преобразовать ее с помощью ортогональной матрицы, $\tilde{w}_{ij} = U_{ie} w_{ek} U_{kj}$, и убедиться, что корреляция $\langle \tilde{w}_{ij} \tilde{w}_{mn} \rangle$ совпадает с $\langle w_{ij} w_{mn} \rangle$. Бездивергентность поля скорости означает дополнительно, что обращается в нуль след матрицы W_{ij} ; отсюда

$$W_{ij} = \sigma \left(w_{ij} - \frac{1}{3} w_{ll} \delta_{ij} \right),$$

$$\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} (\Delta t)^2 = \langle W_{ij} W_{ij} \rangle = 8\sigma^2 \Delta t, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}} (\Delta t)^2 = \langle W_{ij} W_{kl} \rangle = \sigma^2 \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \Delta t,$$

где w_{ll} — след матрицы w_{ij} ; здесь знак $\langle . . . \rangle$ означает усреднение по винеровскому процессу, черта — усреднение по распределению поля скорости.

Может показаться, что к выражению (16) необходимо добавить член вида $e_{ijk} w_k$, где e_{ijk} — единичный антисимметричный тензор. В силу того, что винеровский процесс не меняет своего распределения при пространственном отражении, такое выражение имеет изотропное распределение вероятностей, однако оно является, в отличие от W_{ij} , не тензором, а псевдотензором. Отметим, что важное для процесса генерации магнитных полей свойство спиральности течения (см., например, ^{33, 35}) связано с псевдоскалярной частью корреляционной функции поля скорости. На используемом нами языке матрицы W_{ij} спиральность выражается через корреляторы типа $\langle W_{ij} v_k \rangle$.

Выведем уравнение для квадрата магнитного поля на лагранжевой траектории. Из формул (15), (16) получаем

$$H^2(t + \Delta t) = H^2(t) + \left(2W_{ij} \frac{H_i H_j}{H^2} + W_{ij} W_{ik} \frac{H_j H_k}{H^2} \right) H^2(t).$$

Величина $2W_{ij} H_i H_j / H^2$ как линейная комбинация винеровских процессов также является винеровским процессом с нулевым средним и дисперсией $8\sigma^2/3$, вычисляемой с помощью (17). Заменяя второй член в круглых скобках на $8\sigma^2 \Delta t/3$ (в силу центральной предельной теоремы и мгновенности корреляций винеровского процесса по сравнению с Δt), находим, устремляя затем Δt к нулю, искомое уравнение

$$\frac{dH^2}{H^2} = \left(\frac{8}{3} \right)^{1/2} \sigma w_{dt} + \frac{8}{3} \sigma^2 dt.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$H^2(t) = H^2(0) \exp \left[\left(\frac{8}{3} \right)^{1/2} \sigma w_t + \frac{8}{3} \sigma^2 t \right]. \quad (18)$$

На больших временах, $\sigma^2 t \gg 1$, первым случайным слагаемым можно пренебречь, поскольку w_t растет пропорционально $t^{1/2}$. Таким образом, ско-

рость роста магнитного поля равна

$$\gamma \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln H}{t} = \frac{4}{3} \sigma^2.$$

Найдем скорости роста вторых моментов модуля магнитного поля. Возводя решение (18) в p -ю степень, усредняя по полю скорости и пользуясь формулой $\langle \exp(pw_i) \rangle = \exp(p^2 t/2)$, получим

$$\begin{aligned} \gamma_{2p} &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle H^{2p} \rangle}{t} = \frac{8}{3} p \sigma^2 + \frac{4}{3} p^2 \sigma^2, \\ \frac{\gamma_{2p}}{2p} &= \frac{4\sigma^2}{3} + \frac{2\sigma^2}{3} p, \end{aligned} \tag{19}$$

где p — любое. Для второго момента, $p = 1$, скорость роста совпадает с вычисленным ранее^{28,29} другими методами значением $\gamma_2/2 = (3/4) v/l$ в однородном изотропном течении с продольной корреляционной функцией

$$B(r) = \exp \left[-\frac{3}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right],$$

для которого

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} (\Delta t)^2 = 6 \frac{v}{l} \Delta t,$$

где v и l — характерная амплитуда и масштаб поля скорости.

Мы получили скорость роста поля и его моментов вдоль лагранжевой траектории. Из однородности ясно, что такими же будут скорости роста в данной точке x .

Теперь нетрудно понять, как эволюционирует магнитное поле в нестационарной в среднем короткокоррелированной среде. В этом случае величина a оказывается функцией времени, так что в (18) $\sigma^2 t$ надо заменить на

$$\int_0^t \sigma^2(s) ds$$

Если σ достаточно быстро убывает с ростом t , то рост поля может стать степенным, а перемежаемость исчезнуть.

Пространственная структура моментов при $\mathbf{v}_m = 0$ описывается собственными векторами некоторого оператора A_2 , однако соответствующее случайное магнитное поле оказывается, конечно, обобщенным. Для того чтобы найти структуру моментов при малых, но конечных v_m , необходимо исследовать задачу в следующем приближении. Нахождение скоростей роста и собственных функций в двух последовательных приближениях типично для квазиклассического приближения³⁰.

9. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА САМОВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Способность гидродинамических движений проводящей жидкости усиливать магнитное поле служит основой магнетизма небесных тел и представляет интерес при изучении динамики жидкометаллических масс в реакторах-размножителях и металлургических установках. Движения, как правило, имеют случайный, турбулентный характер. Поэтому генерируемое магнитное поле является случайным.

Хорошо изучен процесс самовозбуждения среднего поля, с которым связываются магнитные поля планет, крупномасштабные поля Солнца и подобных ему звезд и поля спиральных галактик³¹⁻³⁵. В последние годы возрос интерес к случайной составляющей магнитного поля в связи с проблемой тонкоструктурных солнечных магнитных полей (см., например,³⁶) и флуктуаций галактического магнитного поля^{37, 38}.

Скорость роста флуктуационного магнитного поля найдена в предыдущем разделе на примере короткокоррелированного течения. Пространственная структура поля является перемежаемой. Для приложений важно получить количественные характеристики этого распределения. Простейшей характеристикой служит корреляционная функция $\langle H_i(t, x) H_j(t, y) \rangle$, равная $g(r) \exp(2\gamma_2 t)$, $r = |x - y|$ для однородного изотропного случая.

При заданном корреляционном тензоре однородного, изотропного, отражательно симметричного несжимаемого течения с короткими временными корреляциями нахождение корреляционной функции сводится к решению уравнения типа Шрёдингера с переменной массой, но без мнимой единицы перед временной производной³⁹. Это уравнение изучено численно

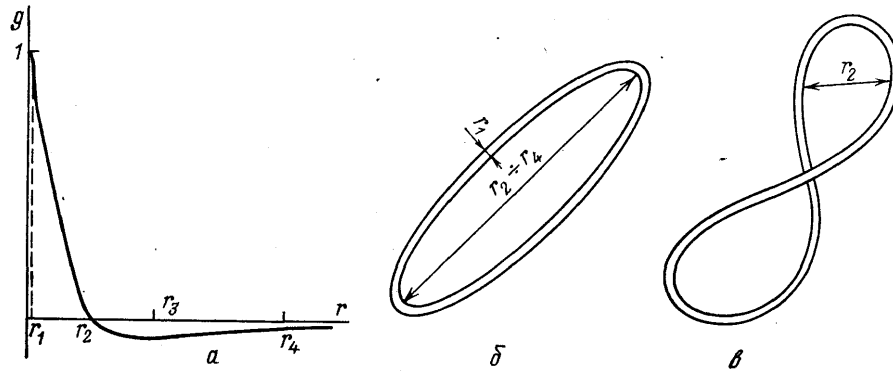


Рис. 4. *a* — Первая мода корреляционной функции магнитных полей, возбуждающихся в зеркально-симметричном короткокоррелированном течении: схематический вид концентраций возбуждающегося поля. *б* — Во время растяжения жгутов. *в* — Во время складывания жгутов в восьмерку

в работах^{28, 40} и асимптотическими методами³⁰ при $R_m = lv/v_m \gg 1$ в^{29, 41}. Выпишем спектр, полученный асимптотическим методом,

$$\gamma_2(k) = \frac{3}{4} \frac{v}{l} - \frac{\pi^2 k^2}{5} \left[\left(\frac{2}{\ln R_m^{-1}} \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{\ln R_m^{-1}} \right)^3 \right] \frac{v}{l} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Вид корреляционной функции, соответствующей первой моде, показан схематично на рис. 4. Масштаб $r_1 \sim R_m^{-1/2} l$ отвечает толщине скин-слоя $g(r_1) = 0,82$, в точке r_2 корреляционная функция обращается в нуль, а в точке r_3 достигает минимума. Такие положения r_2 и r_3 зависят от деталей строения $B(r)$ так же, как $g(r_4) \approx -R_m^{-5/4}$ и $r_4 = l$, место выхода на экспоненциальную асимптоту.

Мы предлагаем интерпретировать эти характерные точки следующим образом. Будем считать процесс складывания петли в восьмерку с последующим удвоением элементарным процессом генерации поля (см., например,³⁴⁻³⁵). Область (r_2, r_4) соответствует разбросу длин вытягиваемых петель. Номер моды соответствует числу поворотов в восьмерке. Точка r_2 соответствует длине переворачиваемой части восьмерки. Антикорреляционный хвост связан с условием бездивергентности (замкнутости петель), т. е.

$$\int_0^\infty g r^2 dr = 0.$$

Существует некоторое число силовых линий, выходящих из корреляционной ячейки и уходящих на бесконечность. Их доля может быть оценена отно-

шением

$$\int_{r_4}^{\infty} gr^2 dr / \int_0^{r_1} gr^2 dr \approx \left(1 + \frac{2}{\ln r_2}\right)^{-1}.$$

Возбуждаемое флуктуационное поле представляет собой набор тонких случайно ориентированных жгутов, образующих сильно вытянутые петли. Характерную толщину жгута можно считать равной по порядку величины $lR_m^{-1/2}$. На масштабах от $lR_m^{-1/2}$ до $lR_m^{-1/4}$ поле изменяется в $\ln R_m / \pi R_m^{-1/4}$ раз, что составляет, например, для Солнца, $R_m \approx 10^8$, примерно 10^{-2} .

При достаточно больших магнитных числах Рейнольдса возбуждается несколько мод. Легко найти, что критическое значение для k -й моды имеет вид

$$R_m^k = \exp \frac{4\pi k}{\sqrt{15}},$$

что составляет

$$R_m^1 \approx 26, \quad R_m^2 \approx 6,6 \cdot 10^2, \quad R_m^3 \approx 1,7 \cdot 10^4.$$

Опыт численных расчетов показывает, что эти асимптотические оценки несколько занижены, реально $R_m^1 \approx 10^2$.

При еще большем R_m скорости роста первой и второй мод практически равны. При $R = 10^8$ $(\gamma_1 - \gamma_2)/\gamma_1 \approx 0,1$. В этом случае естественно ожидать, что коррелятор представляет собой сумму двух мод со сравнимыми коэффициентами.

Вторая мода изображена на рис. 5. Здесь $r_1 = 1,8R_m^{-1/2}l$, $r_2 \approx l \cdot 0,1R_m^{-1/4}$, $r_3/l = 0,6R_m^{-1/4}$, $g(r_1) \approx 0,82$, $g(r_3) \approx (-1/8)R_m^{-1/4}$, $g(r_4) \sim R_m^{-5/4}$. Мы интерпретируем вторую моду как сложение дважды перекрученных и вытягиваемых восьмерок, качественно изображенных на рис. 5.

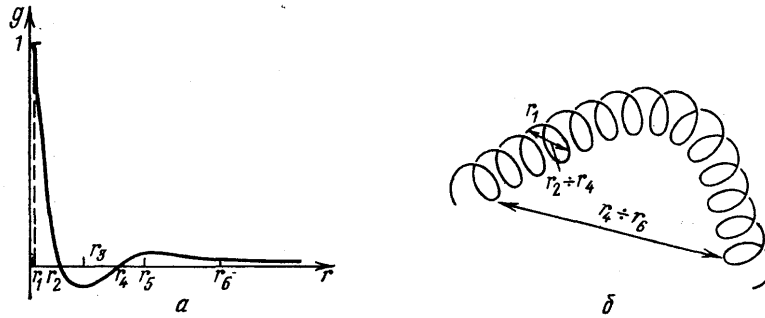


Рис. 5. *a* — Вторая мода корреляционной функции магнитных полей, возбуждающихся в зеркально-симметричном короткокоррелированном течении. *б* — Схематический вид концентраций возбуждающегося поля

Обсудим кратко приложения полученных результатов. В Галактике $R_m \approx 10^6$ (определенное при учете амбиполярной диффузии³⁵), так что $(\gamma_1 - \gamma_2)/\gamma_2 \approx 0,2$; значит, вторая гармоника должна быть представлена слабее. Именно так и выглядит коррелятор, построенный Дакгесаманским и Шутенковым³⁸ на основе наблюдений. На Солнце $R_m \approx 10^8 - 10^9$, и обе моды возбуждаются с одинаковой легкостью. Помимо основного масштаба турбулентности ожидается наличие еще двух выделенных масштабов $lR_m^{-1/2}$ и $lR_m^{-1/4}$. Первый масштаб с Земли и с околоземной орбиты ненаблюдаем; если принять для оценки, что $l \approx 10^4$ км (масштаб супергрануляции), то $lR_m^{-1/2} \approx 1$ км. Масштаб $lR_m^{-1/4}$ соответствует размеру ~ 100 км и хорошо изве-

стен из наблюдений¹³⁶. Подчеркнем, что и в наблюдениях, и в теории он порядка размеров области одной полярности. Строение этих тонкоструктурных элементов и напряженность поля в них не связаны со средним полем, т. е. они не должны коррелировать с фазой солнечного цикла, что также соответствует наблюдениям.

10. ВИХРЬ И ДЕФОРМАЦИЯ В ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Мы много внимания уделили характеристике перемежаемости на языке высоких моментов. Однако этот язык еще не слишком привычен в физике. Поэтому мы хотим в рамках простого примера, заимствованного из гидродинамики, показать, какого рода физическую информацию можно извлекать из знания высоких моментов. В этом специально подобранном примере низкие моменты (первый и второй) являются малоинформативными.

Как известно, интеграл квадрата вихря тождественно равен интегралу квадрата деформации по области, на границе которой скорость несжимаемой жидкости равна нулю (теорема Д. К. Бобылева, см.^{42, 43}). Однако для интегралов от старших степеней вихря и деформации таких тождеств уже нет. С помощью этих интегралов можно установить, что образует сосредоточенные структуры в течении — вихрь или деформация, а что распределено по всему объему жидкости. Другими словами, с помощью интегралов от старших степеней вихря и деформации можно характеризовать перемежаемость течения.

Цель настоящего раздела — установить связь между перемежаемостью и интегралами от вихря и деформации. Подчеркнем, что речь идет о свойствах, которыми обладает любое соленоидальное векторное поле. Мы пользуемся гидродинамической терминологией лишь для конкретности изложения и указания возможных приложений, но не используем ни уравнений движения жидкости, ни теоремы Кельвина — Гельмгольца и т. д. Результаты сохраняют силу и для магнитных полей (бездивергентных псевдовекторов). В этом случае нужно рассматривать связь интегралов от степеней плотности тока и тензора $(\partial H_i/\partial x_j + \partial H_j/\partial x_i)/2$.

Напомним, что вихрь характеризует вращение данной частицы жидкости. При твердотельном вращении с угловой скоростью ω скорость равна $\mathbf{u} = [\omega \mathbf{r}]$, вихрь во всех точках пространства одинаков, $\text{rot } \mathbf{u} = 2\omega$. В гидродинамике идеальной жидкости вихрь вморожен в жидкость в том же смысле, что и магнитное поле. В двумерном случае это означает просто равенство нулю субстанциальной производной вихря. Тензор деформации $D_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$ при наличии вязкости определяет скорость диссипации энергии, которая равна $(1/2) \nu |D_{ij}|^2$, где ν — вязкость жидкости.

При анализе движения несжимаемой жидкости естественно высунуть степень завихренности движения. На первый взгляд для этого достаточно сопоставить средние квадраты вихря и тензора деформации (средние их значения в изотропном случае, конечно, равны нулю). Однако по теореме Бобылева эти величины равны друг другу, т. е. все потоки несжимаемой жидкости при данном среднеквадратичном значении деформации одинаково завихрены в среднеквадратичном смысле. Для потоков сжимаемой жидкости интеграл от квадрата вихря всегда меньше интеграла от квадрата тензора деформации.

Прежде чем перейти к рассмотрению интегралов от высших степеней вихря и деформации, докажем теорему Бобылева для случая дифференциального вращения вокруг начала координат с угловой скоростью вида $\omega = \omega(r^2)$. Это движение является двумерным, интегрирование нужно вести по плоскости x, y . Полагая

$$\Omega = \text{rot } \mathbf{u}, \quad \delta^2 = D_{ij}D_{ij}, \quad A^{(2)} = \frac{1}{2} \Omega^2 - \delta^2,$$

имеем

$$\int A^{(2)} dS = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{dr^2 \omega^2}{dr^2} dr^2 = 2\pi u^2 (\infty).$$

Итак, рассматриваемый интеграл обращается в нуль, если нет движения на бесконечности (или на границе). Для получения тождества в общем случае достаточно убедиться, что величина $A^{(2)}$ является дивергенцией. Действительно, с одной стороны,

$$\Omega^2 = e_{ikl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} e_{imn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

где мы воспользовались формулой

$$e_{ikl} e_{imn} = \delta_{km} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{lm}.$$

С другой стороны,

$$\delta^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

В силу несжимаемости

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

т. е. разность $\frac{1}{2} \Omega^2 - \delta^2$ является дивергенцией. Для сжимаемой жидкости легко получается, что

$$\int A^{(2)} d^3r = - \int (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 d^3r = - \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 d^3r.$$

Таким образом, среднеквадратичная завихренность максимальна для несжимаемой жидкости.

Теперь легко проверить, что интегралы от более высоких степеней вихря и деформации уже не связаны тождественно. В самом деле, для разности четвертых степеней имеем

$$\int A^{(4)} d^3r \equiv \int \left(\frac{1}{4} \Omega^4 - \delta^4 \right) d^3r = 2 \int \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} d^3r.$$

И этот интеграл, вообще говоря, не равен нулю. Без труда выписываются выражения для интеграла от разности $2p$ -х степеней $\int A^{(2p)} d^3r = \langle A^{(2p)} \rangle$.

Легко понять смысл величины $\langle A^{(2p)} \rangle$. Если для больших p эта величина положительна, то в местах быстрого изменения скорости сосредоточен в основном вихрь, в противном случае там сосредоточена деформация. Например, для дифференциального вращения с угловой скоростью $\omega = \omega_0 \exp [-(r/r_0)^2]$ имеем $\langle A^{(4)} \rangle = (3/16) \omega_0^4 r_0^3$. Поэтому, когда течение несжимаемой жидкости представляет собой систему отдельных вихрей, то величина $\langle A^{(4)} \rangle$ и другие величины $\langle A^{(2p)} \rangle$ должны быть положительны. Если же в движущейся жидкости происходит перемещение больших объемов жидкости так, что на их границе образуется сравнительно мало вихрей, то в местах быстрого изменения скорости сосредоточена в основном деформация. В самом деле, на границах этих объемов поле скорости имеет вид $u_i = c_{ij} x_j$, причем в силу несжимаемости $c_{ii} = 0$. В тех точках, где движущийся объем раздвигает покоящуюся жидкость, и там, где жидкость смыкается за движущимся объемом, матрица c_{ij} близка к диагональной и, как легко проверить, деформация много больше вихря. На боковых поверхностях движущегося объема течение близко к течению Куэтта $u = u_x(y)$, в котором квадраты вихря и деформации совпадают в каждой точке. Поэтому при движении больших объемов $\langle A^{(2p)} \rangle < 0$. Это движение неустойчиво, поскольку тангенциальный разрыв на границе движущегося объема распадается, образуя

систему вихрей в виде двойных спиралей⁴⁵, так что вихрь остается сосредоточенным в местах быстрого изменения поля скорости, а деформация распределяется по всему объему, занятому течением.

В общем случае величина $\langle A^{(2p)} \rangle$ пропорциональна $\omega_0^{2p} V$, где ω_0 — амплитуда градиента скорости, а V — размер области, занятой перепадом поля скорости. Поэтому средние от различных степеней вихря и деформации могут давать то положительную, то отрицательную разность. Это означает, что в течении присутствует иерархия образований разного масштаба, так что образования одного масштаба — в основном вихри, а другого — движущиеся без вращения объемы. Конечно, знак $\langle A^{(2p)} \rangle$ может меняться и во времени и зависеть от числа Рейнольдса.

Рассмотренные характеристики распределения вихря интересны и в частном случае турбулентности. Мы имеем в виду прежде всего однородную турбулентность в бесконечном пространстве (все интегралы нормируются на единицу объема), в которой выполнено условие эргодичности, так что средние по пространству и по ансамблю совпадают. В конечном объеме это совпадение средних может нарушаться, однако и в этом случае рассмотрение пространственных средних, которыми являются величины $\langle A^{(2p)} \rangle$, сохраняет интерес.

В турбулентности моменты $\langle A^{(2p)} \rangle$ характеризуют отклонение турбулентности от гауссовской, для которой высшие моменты поля скорости выражаются через вторые и, таким образом, все $\langle A^{(2p)} \rangle$ равны нулю. Поскольку в турбулентности средние от степеней вихря и деформации определяются вязкостью, то величины $\langle A^{(2p)} \rangle$ характеризуют перемежаемость в самом мелком масштабе. О других характеристиках перемежаемости, описывающих ее, в частности, в инерционном интервале, см.⁴; характеристики перемежаемости случайных магнитных полей, возбуждающихся в турбулентности, рассмотрены в разделе 8.

Еще одной характеристикой перемежаемости является корреляция, показывающая, сосредоточены ли вихри в нити или в слои. Деформация, по-видимому, имеет тенденцию сосредоточиваться в пятна. Для построения подобных корреляций нужно рассмотреть разноточечные моменты, для которых в принципе можно выводить эволюционные уравнения методами, описанными в разделе 6.

Для магнитного поля роль вихря играет плотность тока. Поэтому, если величина типа $\langle A^{(2p)} \rangle$ положительна, это означает, что токи, создающие магнитное поле имеют тенденцию группироваться в систему линейных или поверхностных токов. Токи, создающие магнитное поле с отрицательным $\langle A^{(2p)} \rangle$, не образуют подобных структур.

С другой стороны, магнитное поле является вихрем вектор-потенциала, который в этом смысле аналогичен скорости. Поэтому знак рассматриваемых высоких моментов позволяет судить, сконцентрировано ли само поле.

11. О СТРУКТУРЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОГО ПОЛЯ

Крайнее выражение идеи перемежаемости состоит в том, что вихрь (или магнитное поле) сосредоточен в узких трубках, так что его можно записать в виде

$$\Omega = \Phi n \delta_2 [\mathbf{r} - \xi(l, t)];$$

здесь $\xi(l, t)$ — функция, задающая расположение нити в пространстве с помощью параметра l , например длины вдоль нити, t — время. Далее, δ_2 — двумерная функция Дирака в плоскости, перпендикулярной нити в каждой точке, а n — единичный вектор, касательный к линии ξ . Очевидно, что плоскость, в которой задано δ_2 , так же как и вектор n , поворачиваются от точки к точке и с течением времени.

В ряде случаев при решении гидродинамических задач отдельные вихри вводятся как прием дискретизации для решения уравнений в частных произ-

водных, например, в методе Чорина — Оппенгейма. Гидродинамика дискретных вихрей подробно рассмотрена в содержательной монографии⁴⁶.

В работе⁴⁷ предлагается использовать представление о совокупности дискретных вихревых нитей в качестве основы описания развитого гидродинамического течения. Подчеркнем, что лишь при наличии перемежаемости отдельные вихревые (или магнитные) линии становятся реальными объектами. Значение Φ для них определяется реальной длиной процесса, а не тем, какую сетку допускает ЭВМ, имеющаяся в распоряжении того или иного автора.

Из условия соленоидальности вихря ($\text{div } \Omega = 0$) следует, что множитель Φ , характеризующий интегральную интенсивность в данной плоскости ($\int \Omega \, dS = \Phi$), должен быть постоянным вдоль всей нити. Более того, величина Φ для каждой данной линии к тому же не зависит и от времени!

Хорошо известно явление растяжения вихря: для данной «лагранжевой» частицы жидкости в пренебрежении вязкостью вихрь преобразуется пропорционально расстоянию бесконечно близких точек на линии, направленной по вихрю

$$\Omega(t, \xi) = \Omega_0 \nabla_r \xi(\mathbf{r}, t),$$

где $\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$ — уравнение движения частицы с лагранжевой координатой ξ , $\xi(0, t) = \mathbf{r}$. Именно это растяжение с усилением вихря противостоит в трехмерном движении демпфирующему влиянию вязкости и потому принципиально важно для теории турбулентности. Трехмерность движения необходима, Ω_z выражается через v_x и v_y , но рост Ω_z зависит от $\partial v_z / \partial z$. Поэтому двумерное приближение и оказывается нетипичным. Однако в приближении перемежаемости константа Φ не меняется, даже если Ω и \mathbf{n} направлены по z и $\partial v_z / \partial z$ отлично от нуля.

Кажущееся противоречие разъясняется самым тривиальным образом: в области, где находится много приблизительно параллельных линий с одинаковым направлением вихря, среднее значение

$$\Omega = \Phi n \psi,$$

где ψ — среднее число линий на единицу площади сечения. Растяжение вдоль z несжимаемой жидкости сопровождается ее сжатием в плоскости x, y : если $\partial v_z / \partial z > 0$, то

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_z}{\partial z} < 0,$$

что и приводит к росту плотности линий.

Отметим также, что приближение отдельных дельта-функциональных вихревых линий годится для расчета общего движения линий и жидкости, но не годится для расчета вязкой диссипации энергии. Вязкость определяет фактическую толщину линий.

В магнитном случае все сказанное очень близко к первоначальным идеям Фарадея. При изображении магнитного поля системой линий величина поля характеризуется именно плотностью расположения линий, что как раз и соответствует одинаковому, постоянному потоку вдоль каждой линии. Магнитная силовая трубка в среднем растягивается и при этом становится тоньше в турбулентном потоке, магнитная вязкость утолщает ее. Таким образом, возможно, устанавливается определенная характерная толщина для данного потока и данного магнитного числа Рейнольдса.

При наличии многих изогнутых и закрученных вихревых или магнитных трубок вязкость обуславливает их взаимодействие, возможность перезамыкания и аннигиляции противоположно направленных трубок и замкнутых трубок поля.

В нашем веке, сто лет спустя, отдельные вихревые линии реально обнаружены во вращающемся сверхтекучем жидком гелии. Интенсивность каждой линии задается квантовым условием, она пропорциональна постоянной Планка, и уже отсюда видно, что эта интенсивность не зависит от времени при любом движении жидкости.

Как влияет на вихревые линии вязкость? Очевидно, что изолированная линия (прямая и простирающаяся от $-\infty$ до $+\infty$) будет обретать конечную толщину, сохраняя, однако, интегральную интенсивность.

Наконец, можно поставить вопрос о том, *почему* в турбулентном потоке, сосредоточенным в трубках (в описанном выше приближении — в одномерных нитях) оказывается именно вихрь, а не сама скорость? (Заметим сразу, что линия тока не галилей-инвариантна.) Общим для них является условие $\operatorname{div} \Omega = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Однако тонкая затопленная струя жидкости с данным потоком неустойчива, тогда как изолированная прямая вихревая нить обладает определенной упругостью и устойчива.

То же относится и к магнитной гидродинамике; концентрируется в трубке поле (причем ток течет азимутально), а не ток. Однако интересно было бы выяснить, нет ли таких исключительных условий, когда возникали бы струи жидкости и каналы, вдоль которых течет ток.

Концепция турбулентного потока, состоящего из отдельных вихревых нитей, очевидно, представляет собой только самое грубое приближение к действительности. Непосредственно из этой концепции вытекает необходимость разработки удобного метода расчета динамики системы вихрей в типичном трехмерном (3 D) нестационарном случае.

Однако этим отнюдь не исчерпывается задача. Дробные показатели в законах Колмогорова указывают на фрактальный характер вихревых нитей. Фрактальной может (должна!) быть отдельная нить, когда мы прослеживаем за ее изгибами и пытаемся определить ее длину. Но фрактальным может быть также иерархическая картина объединения малых вихрей в изолированные, «перемежающиеся» более крупные вихри.

При разработке этой картины следует помнить, что параллельные вихри отталкиваются друг от друга. В этом легко убедиться, подумав о сверхтекучем гелии. При данном моменте вращения минимальной энергии соответствует твердотельное вращение. Наилучшим приближением к твердотельному вращению является равномерное (с постоянной плотностью) распределение квантовых вихрей. Такое распределение обладает определенной упругостью. Зависимость энергии вращения от момента инерции легко пересчитать на зависимость давления решетки вихрей от плотности. Далее можно найти и эффективную поперечную скорость звука. Характерно также, что квантовый вихрь с удвоенным моментом неустойчив и распадается на два единичных вихря.

Таким образом, нет детерминированного процесса слияния нескольких вихрей в один. Параллельные вихри (кроме того, что они вертят друг друга) еще и отталкиваются. Нет аналогии между параллельными токами (которые притягиваются) и параллельными вихрями. Любопытно, что магнитные жгуты (концентрации магнитных силовых линий) по признаку взаимодействия лежат посередине между электрическими токами и гидродинамическими вихрями: магнитные жгуты не создают внешних полей, а значит, и не взаимодействуют.

Возвращаясь к вихрям, подчеркнем, что их сближение (так же как и сохранение, несмотря на вязкость) связано с растяжением вдоль вихря (см. выше). Как и следовало ожидать, возникновение турбулентной структуры связано с перекачкой энергии из крупномасштабного движения и работы сил давления. Турбулентное движение является типичным примером далекой от равновесия диссипативной структуры. Напомним, наконец, что в максимальном энергонесущем масштабе турбулентное движение может быть очень разным. Вспомните: 1) однородную турбулентность за решеткой, 2) турбу-

лентность в прямой трубе, 3) жидкость между двумя цилиндрами — очень различное поведение в зависимости от вращения внутреннего или внешнего цилиндра, 4) конвективное движение, вызванное подогревом жидкости, и 5) то же в условиях, когда существенную роль играет общее вращение жидкости, например, в крупномасштабных атмосферных явлениях. В этих весьма различных условиях может быть различной и структура поля скорости, могут быть различными приближенные подходы к истинной картине.

Основные гипотезы теории турбулентности состоят в том, что: 1) есть каскад масштабов и 2) в масштабе меньше энергонесущего (максимального) свойства турбулентности всегда одинаковы. Эти гипотезы очень правдоподобны — однако необходимо дополнить их количественной или хотя бы полуколичественной оценкой того отношения масштабов, на котором забывается специфика энергонесущего движения и возникает универсальная картина движения.

Отметим, наконец различие между гидродинамической и магнитогиродинамической задачами. Гидродинамическая задача является замкнутой и нелинейной. Мгновенное поле вихря полностью определяет поле скорости несжимаемой жидкости, независимо от того, задан ли вихрь плавной функцией координат или системой δ -линий.

В магнитной линейной задаче поведение поля V ищем на фоне независимо заданного поля скорости. Отсюда видно, в частности, что возникает гибридная задача: поведение магнитного поля на фоне скорости, заданной совокупностью вихревых линий ($\Omega = \sum_j \Phi_j \delta_{2j}$). Возникнут ли при этом магнитные силовые жгуты? Будут ли эти жгуты совпадать в пространстве с вихревыми линиями?

Благодарим А. М. Яглома за полезные замечания.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lactantius. De ira dei.— Kempten, 1919.—P. 105.—(Bibliothek der Kirchenväter. Bd 36).
2. Philoponus. Scholia in Aristotelem/Coll. C. A. Brandis.— Paris, 1836.
3. Batchelor G. K., Townsend A. A.//Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1949. V. 199. P. 238.
Batchelor G. K., Howells I. D., Townsend A. A.//J. Fluid Mech. 1959. V. 5. P. 113, 139.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика.— М.: Наука, 1967.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Т. II.— М.: Наука, 1978.
6. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем.— М.: Наука, 1982.
7. Meneguzzi M., Frisch U., Pouquet A.//Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1060.
8. Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B. // Ibidem. 1984. V. 52. P. 1488.
9. Молчанов С. А., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.//УФН. 1985. Т. 145. С. 593.
10. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д.//Ibidem. Т. 146. С. 493.
11. Зельдович Я. Б., Кузнецова Т. И.//УФН. 1972. Т. 106. С. 47.
12. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 2061.
13. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайной неоднородной среде.— М.: Наука, 1978.
14. Dimensions and Entropies in Chaotic Systems/Ed. Y. Mayer-Kress.—Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1985.
15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, т. I, 1965; т. II, 1967.
16. Носко В. П.//Труды советско-японского симпозиума по теории вероятностей.— Хабаровск; Новосибирск, 1969.
17. Ренъи А. //Трилогия о математике/Ред. Б. В. Гнеденко.— М.: Мир, 1980.
18. Stability Problems for Stochastic Models/Eds A. Dold, B. Eckmann.— Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1984.

19. Амбарцумян В. А.//ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 223.
20. Михайлов А. С., Упоров И. В.//УФН. 1984. Т. 144. С. 79.
21. Зельдович Я. Б.//ДАН СССР. 1983. Т. 270. С. 1369.
22. Zeldovich Ya. B., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. Intermittency. Diffusion and Generation in a Random Fluid//Sov. Sci. Rev., Math. Phys./Ed. S. P. Novikov. — New York: Gordon and Breach, 1986.
23. Гихман И. И., Скороход А. А. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.
24. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1966.
25. Кац М.//Устойчивость и фазовые переходы. — М.: Мир, 1973.
26. Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.//Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1984. V. 30. P. 341.
27. Розовский Б. Л.//Труды 4-й Международной Вильнюсской конференции по теории вероятности и математической статистике. — Вильнюс: Мокслас, 1985. — Т. 4. С. 256.
28. Новиков В. Г., Рuzмаикин А. А., Соколов Д. Д.//ЖЭТФ, 1983. Т. 85. С. 909.
29. Артамонова О. А., Соколов Д. Д.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1986. Т. 27, № 3. С. 8.
30. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
31. Моффатт К. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980.
32. Паркер Е. Космические магнитные поля. — М.: Мир, 1982.
33. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитогидродинамика средних полей и теория динамо. — М.: Мир, 1984.
34. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б.//УФН, 1972. Т. 106. С. 431.
35. Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnetic Fields in Astrophysics. — New York: Gordon and Breach, 1983.
36. Stenflo J. O.//Basic Mechanisms of Solar Activity: Proc. of Symposium IAU No. 71. — Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1976. — P. 69.
37. Chibisov G. V., Ptuskin V. S.//Proc. of the 17th Intern. Cosmic Ray Conference. — Paris, 1980. — V. 2. P. 233.
38. Дагкесаманский Р. Д., Шутенков В. Р.//Препринт ФИАН СССР № 145. — Москва, 1985.
39. Казанцев А. П.//ЖЭТФ, 1967. Т. 53. С. 1806.
40. Маслова Т. Б., Новиков В. Г., Рuzмаикин А. А. Препринт ИПМ АН СССР № 130. — Москва, 1986.
41. Kleesgin N. I., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.//Plasma Astrophysics. — Sukhumi: ESA, 1986.
42. Bobylioff D. K.//Math. Ann. 1983. V. 4. P. 72.
43. Deissler R. G.//Rev. Mod. Phys. 1984. V. 56. P. 223.
44. Frisch U.//Fluid Dynamics and Climate Dynamics: Corso LXXXVIII. — Bologna, Italy, 1985. — P. 71.
45. Зельдович Я. Б., Колыхалов П. И.//ДАН СССР. 1982. Т. 266. С. 302.
46. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. — М.: Наука, 1981.
47. Агиштейн М. Е., Мигдал А. А. Препринт ИКИ АН СССР № 1102. — Москва, 1986.
48. Математическое моделирование: Процессы в нелинейных средах// Под ред. А. А. Самарского, С. П. Курдюмова, В. А. Галактионова. — М.: Наука, 1986.
49. Giovanelli R. G., Secrets of the Sun. — Cambridge: Univ. Press, 1984.
50. Новиков Е. А.//Прикл. мат. и мех. 1971. Т. 35. С. 266.
51. Mandelbrot B.//Lect. Not. Phys. 1972. V. 12. P. 333.
52. Taylor G. I.//Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1921. V. 20. P. 196.
53. Lumley J. L.//Lect. Not. Phys. 1972. V. 12. P. 1.
Rosenblatt M.//Ibidem. P. 27.
54. Гельфанд И. М., Яглом А. М.//УМН. 1956. Т. 11, вып. 1. С. 77.
55. Totsuji H., Kihara T.//Publ. Astron. Soc. Japan. 1969. V. 21. P. 221.
56. Пибле Дж., Структура Вселенной в большом масштабе. — М.: Мир, 1983.
57. Андреев А. Ф., Каган М. Ю.//ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 54.