

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145

**ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ
НА ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ
В АМОРФНЫХ И КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕДАХ*****А. И. Ахиезер, Н. Ф. Шульга*****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	385
2. Длина когерентности	387
2.1. Длина формирования излучения в квантовой теории	387
2.2. Длина когерентности в классической электродинамике	388
2.3. «Отрыв» фотона от излучающей частицы	390
3. Излучение релятивистской частицей в классической электродинамике	391
3.1. Поле движущегося электрона	391
3.2. Излучение в случае многих столкновений электрона на длине когерентности	393
3.3. Излучение на расстояниях, превосходящих длину когерентности	395
3.4. Спектральная плотность излучения	396
4. Эффект Ландау — Померанчука	397
4.1. Классический предел формулы Бете — Гайтлера	397
4.2. Оценки Ландау и Померанчука	399
4.3. Эффект Ландау — Померанчука и синхротронное излучение	399
4.4. Учет влияния многократного рассеяния на излучение методом кинетического уравнения	400
4.5. Усреднение по траекториям спектра излучения методом функционального интегрирования	402
4.6. Влияние многократного рассеяния на излучение Вавилова — Черенкова	404
5. Многократное рассеяние быстрых частиц в кристаллах	405
5.1. Возможность стохастического движения заряженной частицы в кристалле	405
5.2. Регулярные и нерегулярные движения релятивистских электронов при аксиальном каналировании	407
5.3. Рассеяние быстрой заряженной частицы цепочками атомов кристалла	409
6. Влияние многократного рассеяния на излучение ультрарелятивистских частиц в монокристаллах	413
6.1. Влияние многократного рассеяния на когерентное излучение при малых азимутальных углах рассеяния	413
6.2. Влияние многократного рассеяния на когерентное излучение при больших азимутальных углах рассеяния	416
6.3. Влияние многократного рассеяния на излучение в тонких слоях вещества	418
Список литературы	422

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие электромагнитные процессы, происходящие при взаимодействии быстрых заряженных частиц с веществом, такие, как упругое рассеяние, излучение и образование электрон-позитронных пар, разыгрываются в большой пространственной области вдоль импульсов частиц. Длина этой области — она называется длиной когерентности, быстро растет с ростом энергии частиц. Если эта длина велика по сравнению со средним расстоянием между атомами в среде, то, по сути дела, должно учитываться взаимодействие

падающей частицы со всеми атомами, находящимися в пределах длины когерентности. Впервые это четко было сформулировано Тер-Микаеляном¹ при изучении излучения релятивистских частиц в кристаллах.

Важность этого замечательного, поначалу столь парадоксального явления была вскоре оценена. Ландау и Померанчук² на его основе показали, что в аморфном теле рост длины когерентности с энергией приводит к существенному уменьшению тормозного излучения (эффект Ландау — Померанчука). Затем последовали открытия и других эффектов в электродинамике и в физике сильных взаимодействий (см., например, обзоры^{3–6}, посвященные данной теме и ссылки в них).

Взаимодействие частицы с атомами в пределах длины когерентности может носить как регулярный, так и стохастический характер.

Регулярное взаимодействие возможно (см. ниже) при прохождении частицы через кристаллическую среду. Влияние периодичности расположения атомов в кристалле на излучение ультрарелятивистской частицы впервые было отмечено в работе Вильямса⁷. Правильные критерии появления эффекта и строгая его количественная теория, однако, были даны только в работах Ферретти⁸, Тер-Микаеляна¹ и Юбералла⁹. В этих работах было показано, что при движении релятивистской частицы в кристалле возможны когерентные и интерференционные эффекты в излучении и что благодаря этим эффектам излучение частицы в кристалле может значительно превысить излучение в аморфной среде. Эффект возникает в случае, когда частица движется под малым углом к одной из кристаллографических осей и, кроме того, если в пределах длины когерентности находится большое число атомов решетки.

Стохастический характер взаимодействия частицы с атомами вещества имеет место в случае прохождения заряженной частицы через аморфную среду. Стохастичность обусловлена в этом случае многократным рассеянием проходящих частиц на атомах вещества. Влияние этого рассеяния на излучение впервые было отмечено и изучено в работах Ландау и Померанчука². В этих работах было показано, что многократное рассеяние ультрарелятивистской частицы в аморфной среде в пределах длины когерентности может привести к существенному уменьшению тормозного излучения. Эффект возникает, если средний квадрат угла многократного рассеяния на длине когерентности превысит квадрат характерного угла излучения релятивистской частицы.

Не следует, однако, думать, что стохастичность в процессе взаимодействия есть свойство, характерное только для аморфных тел. В действительности, и в случае кристалла, причем даже идеального и находящегося при абсолютном нуле температуры, взаимодействие может носить стохастический характер. Дело в том, что при движении частицы в кристалле ее траектория может быть стохастической, несмотря на абсолютную идеальность потенциала кристаллической решетки. В свою очередь это связано с числом интегралов движения частицы в кристаллическом поле (см. раздел 5).

В последние годы появился ряд работ^{10–12}, в которых обращено внимание на то, что эффект, аналогичный эффекту Ландау и Померанчука, может иметь место и при движении быстрой частицы в кристалле. В этом случае, однако, вследствие многократного рассеяния подавляется не обычное тормозное, а когерентное излучение релятивистской частицы. Существенным при этом является то, что при движении в кристалле условия возникновения эффекта подавления излучения выполняются при существенно более низких энергиях частиц и в значительно большей области частот излученных фотонов, чем в аморфной среде. По этой причине открываются новые возможности в исследовании влияния многократного рассеяния на излучение с помощью современных ускорителей.

Теории излучения релятивистских частиц в веществе посвящен ряд обзоров и монографий^{5,13–21}. Однако в настоящее время нет обзора, в котором бы с единой точки зрения излагалась теория излучения релятивистских частиц

в аморфных и кристаллических средах. Нет изложения также теории влияния многократного рассеяния на излучение быстрых частиц в кристаллах, хотя, как мы только что отмечали, в настоящее время имеются новые возможности для исследования этого эффекта. Подробному рассмотрению этих вопросов посвящен настоящий обзор.

Мы начинаем с введения понятия длины когерентности, которая естественным образом появляется в теории излучения релятивистских частиц в веществе. Затем излагается классическая теория эффекта Ландау — Померанчука в аморфных средах как в ее простейшей форме, данной авторами, так и в усовершенствованной форме, приданной ей Мигдалом²².

Наряду с методом кинетического уравнения, использованным в работах²², для описания эффекта Ландау — Померанчука возможно использование также и метода функционального интегрирования²³. Преимуществом этого метода является то, что с помощью него удастся единым образом в рамках первоначальной постановки задачи у Ландау и Померанчука построить количественную теорию излучения как в аморфных, так и в кристаллических средах, и, кроме того, выявить общие закономерности и отличительные особенности процессов излучения частиц в этих случаях, а также излучения в интенсивных внешних электромагнитных полях. Этому методу и полученным на его основе результатам посвящены разделы 4.5, 4.6 и 6 настоящего обзора.

В оригинальной работе² исследовалось излучение только в безграничной среде. Длина когерентности для процесса излучения при высоких энергиях может иметь макроскопический размер, так что размеры мишени могут быть как больше, так и меньше длины когерентности. Случай тонкой мишени детально исследован прежде не был. Теории излучения ультрарелятивистских частиц в тонком слое как аморфного, так и кристаллического вещества, посвящен раздел 6.3 настоящего обзора.

В конце обзора мы кратко останавливаемся на экспериментальных исследованиях, проводимых в области взаимодействия частиц высоких энергий с кристаллами.

2. ДЛИНА КОГЕРЕНТНОСТИ

2.1. Длина формирования излучения в квантовой теории

Процесс излучения релятивистской частицы в веществе разыгрывается в большой пространственной области вдоль ее импульса. Чтобы убедиться в этом, напомним, что сечение излучения определяется матричным элементом, содержащим под знаком интеграла по пространственным координатам множитель $\exp(i\mathbf{x}\mathbf{r})$, где \mathbf{x} — переданный импульс, $\mathbf{x} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}$, \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы электрона до и после излучения и \mathbf{k} — импульс излученного фотона (всюду $\hbar = c = 1$).

Экспонента $\exp(i\mathbf{x}\mathbf{r})$ определяет эффективные значения \mathbf{r} , вносящие вклад в матричный элемент. В релятивистской области процесс излучения разыгрывается, в основном, вдоль импульса частицы \mathbf{p} (ось z). Эффективная область z , очевидно, равна $z_{\text{eff}} \sim 1/\kappa_{\parallel}$, а эффективная область расстояний, перпендикулярных \mathbf{p} , равна $r_{\perp \text{eff}} \sim 1/\kappa_{\perp}$. Из законов сохранения энергии и импульса при излучении

$$\begin{aligned} E &= E' + \omega, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.1)$$

следует, что в релятивистском случае, когда \mathbf{p} , \mathbf{p}' и \mathbf{k} почти параллельны друг другу

$$\kappa_{\parallel} = p - p' - k \approx \frac{\omega m^2}{2EE'}. \quad (2.2)$$

где E и E' — энергии электрона до и после излучения, m — его масса. Отсюда следует, что $z_{\text{eff}} \sim 2EE'/m^2\omega$. Длина

$$l_c = \frac{2EE'}{m^2\omega} \quad (2.3)$$

называется длиной когерентности. Причина этого названия будет разъяснена дальше.

Длина когерентности l_c быстро растет с ростом энергии частицы и с уменьшением частоты излученного фотона и при достаточно больших E и малых ω она может достигать макроскопических размеров. По этой причине не всегда при исследовании процесса излучения можно ограничиваться учетом взаимодействия электрона с одной заряженной частицей, в частности, с одним заряженным ядром. Это значит, что если l_c больше размера атома, то необходим учет взаимодействия падающего электрона не только с атомным ядром, но и с атомными электронами. Это взаимодействие учитывается как эффект экранирования в теории тормозного излучения Бете — Гайтлера^{24,25}.

Если же l_c превосходит среднее расстояние между атомами среды, то необходим учет влияния как атомных электронов, так и многих атомов на процесс излучения частицы^{1,2}.

Заметим, что множитель $\exp(i\mathbf{xr})$ входит не только в матричный элемент процесса излучения, но также и в матричные элементы таких процессов, как упругое рассеяние, образование электрон-позитронных пар и другие. Поэтому понятие длины когерентности может быть введено не только для тормозного излучения, но и для упругого рассеяния, и для образования e^+e^- -пар и т. д. При этом длины когерентности будут различными для разных процессов, так как для этих процессов отличаются конкретные выражения законов сохранения энергии и импульса. Существенным является то, что в области высоких энергий длины когерентности всех этих процессов растут с энергией и при достаточно больших энергиях достигают макроскопических размеров.

2.2. Длина когерентности в классической электродинамике

Мы ввели понятие длины когерентности, исходя из рассмотрения матричного элемента процесса излучения в квантовой электродинамике. Но к этому понятию можно прийти и в классической электродинамике.

Рассмотрим с этой целью движение быстрой частицы в среде по траектории, близкой к прямолинейной. Такая частица будет, очевидно, излучать. При этом разность фаз $\Delta\varphi$ волн, излучаемых частицей под углом θ к ее импульсу в моменты времени t и $t + (l/v)$, будет равна

$$\Delta\varphi = \omega \frac{l}{v} - kl \cos \theta, \quad (2.4)$$

где l — путь, проходимый частицей за интервал времени $(t, t + (l/v))$.

Определим длину когерентности $l(\omega, \theta)$ как расстояние, на котором $\Delta\varphi = 1$. Тогда легко видеть, что

$$l(\omega, \theta) = \left(\frac{\omega}{v} - k \cos \theta \right)^{-1}. \quad (2.5)$$

В среде частота ω связана с волновым вектором излученной волны k соотношением $k = \omega\epsilon^{1/2}$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость, поэтому длина когерентности приобретает вид

$$l(\omega, \theta) = \frac{v}{\omega} (1 - v\epsilon^{1/2} \cos \theta)^{-1}. \quad (2.6)$$

Мы видим, что если $\cos \theta = 1/v\epsilon^{1/2}$, то длина когерентности обратится в бесконечность. Этот случай соответствует черенковскому излучению при равномерном движении заряженной частицы.

Такой подход к разъяснению физической сущности эффекта Вавилова — Черенкова принадлежит Франку²⁶ (см. также²⁷). Исходным в нем является рассмотрение фазовых соотношений для волн, излучаемых частицей с различных участков ее траектории. (Длину формирования излучения, т. е. длину, на которой излученные волны складываются и усиливают друг друга, Франк назвал зоной Френеля по аналогии с теорией дифракции.)

Подчеркнем, что понятие длины когерентности имеет смысл независимо от величины ε : она всегда определяет порядок величины пространственной области, для которой существенны интерференционные эффекты при излучении.

Легко видеть, что формула (2.5) соответствует формуле (2.3) для когерентной длины, полученной в предыдущем разделе в случае излучения релятивистской частицей. Для этого достаточно лишь положить в (2.5) $\theta = 0$ и $\varepsilon = 1$ и заменить величину $(1 - v)$ на $m^2/2E^2$. В результате мы получим формулу

$$l_c = \frac{2E^2}{m^2\omega}, \quad (2.7)$$

в которой нет различия между энергией частицы в начальном и конечном состояниях, в то время как в квантовой формуле (2.3) учитывается различие, обусловленное отдачей при излучении.

При получении выражения (2.5) для длины когерентности предполагалось, что траектория частицы представляет собой прямую линию или очень мало отличается от нее. Можно легко учесть также и изменение направления траектории, обусловленное столкновениями (упругими) частицы с атомами среды. Для этого нужно только в формуле (2.5) заменить v на $v_{\parallel} = v \cos \bar{\vartheta}_l$, где $\bar{\vartheta}_l$ — угол многократного рассеяния частицы на длине когерентности. Тогда мы придем к следующему выражению для длины когерентности, полученному в работе Галицкого и Гуревича²⁸

$$l(\omega, \theta) = v \cos \bar{\vartheta}_l (\omega - kv \cos \bar{\vartheta}_l \cos \theta)^{-1}. \quad (2.8)$$

Заметим, что среднее значение $\cos \bar{\vartheta}_l$ в веществе само по себе зависит от длины когерентности, поэтому формула (2.8) представляет собой, в действительности, уравнение для определения $l(\omega, \theta)$.

Учитывая малость характерных углов рассеяния и излучения релятивистской частицы в веществе, находим, что при $\varepsilon = 1$

$$l(\omega, \theta) = l_c (1 + \gamma^2 \bar{\vartheta}_l^2 + \gamma^2 \theta^2)^{-1}, \quad (2.9)$$

где $\gamma = E/m$ — лоренц-фактор частицы.

Из этого соотношения вытекает, что если на длине когерентности выполняется условие $\gamma^2 \bar{\vartheta}_l^2 \ll 1$, то

$$l(\omega, \theta) = l_c (1 + \gamma^2 \theta^2)^{-1}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) является общей и не зависит от того, в какой среде происходит излучение — в аморфной или кристаллической. Это означает, что сама по себе длина когерентности еще не определяет динамики процесса излучения. Иными словами, основываясь только на величине $l(\omega, \theta)$, мы не можем сказать, приводит ли интерференция в пределах длины когерентности к усилению или ослаблению интенсивности излучения. В частности, при равномерном движении формула (2.10) сама по себе тоже имеет смысл, хотя в этом случае при $\varepsilon = 1$ никакого излучения нет.

С ростом энергии частицы E и с уменьшением частоты ω излученной волны длина $l(\omega, \theta)$ растет. Растут при этом и средние значения $\bar{\vartheta}_l^2$. Поэтому с ростом $l(\omega, \theta)$ условие $\gamma^2 \bar{\vartheta}_l^2 \ll 1$ будет нарушаться.

Формула (2.9) показывает, что при $\gamma^2 \bar{\vartheta}_l^2 \gg 1$ длина когерентности будет уменьшаться по сравнению с длиной, определяемой формулой (2.10). Под-

черкнем, что этот результат свидетельствует только о том, что при $\gamma^2 \theta_1^2 \gg 1$ уменьшается размер пространственной области, в пределах которой существенны интерференционные эффекты при излучении, но по-прежнему основываясь только на величине $l(\omega, \theta)$, мы не можем сказать, как развивается процесс излучения в пределах длины когерентности.

2.3. «Отрыв» фотона от излучающей частицы

Длину когерентности можно интерпретировать также и как длину, на которой происходит «отрыв» фотона от излучающего его электрона^{29,30}.

Действительно, пусть электрон, сталкиваясь с атомом, излучает электромагнитную волну с частотой ω . Для ультрарелятивистских частиц излу-

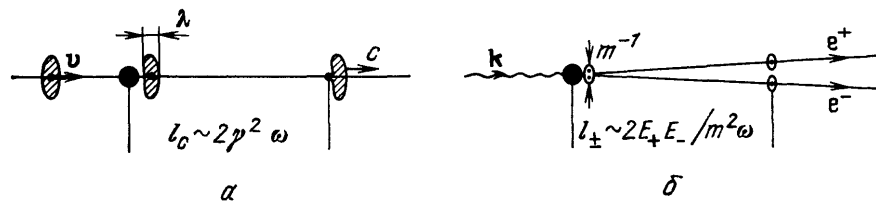


Рис. 1. Длины формирования процессов излучения (а) и образования электрон-позитронной пары (б) при высоких энергиях

чение происходит в основном под малыми углами $\theta \sim m/E$ к импульсу, поэтому в дальнейшем будем интересоваться излучением в направлении движения частицы.

Ясно, что сразу после столкновения с атомом излученная электроном электромагнитная волна (волновой пакет) не может достаточно далеко оторваться от него. Электрон и электромагнитную волну можно рассматривать как независимые объекты, только если волна отойдет от электрона по крайней мере на расстояние порядка длины этой волны $\lambda = 1/\omega$. Поскольку электрон и излученная им волна движутся в одном направлении, то относительная скорость их разбегания будет $v_{\text{отн}} \approx 1 - v$ (рис. 1, а). Поэтому интервал времени, в течение которого волна оторвется от электрона на расстояние λ , равен

$$\Delta t = \frac{\lambda}{v_{\text{отн}}} = \frac{2E^2}{m^2\omega}. \quad (2.11)$$

Расстояние, которое проходит электрон за время Δt , $l_c = v\Delta t$, совпадает с введенной ранее длиной когерентности.

При больших E и малых ω , как уже упоминалось, длина l_c имеет макроскопические размеры. Если в пределах этой длины частица столкнется со многими атомами среды, то необходимо учитывать интерференцию волн, излученных при этих столкновениях. Если же столкновения будут происходить на расстояниях, больших чем l_c , то акты излучения можно рассматривать как независимые.

Заметим, что не только процесс излучения, но и ряд других электродинамических процессов при высоких энергиях, таких, например, как образование электрон-позитронных пар, ионизационные потери энергии кластеров, электромагнитные ливни и другие, разыгрываются в большой пространственной области вдоль импульсов частиц, поэтому для таких процессов также необходимо принимать во внимание интерференционные эффекты во взаимодействии. Поясним, в чем здесь дело.

Рассмотрим вначале образование электрон-позитронной пары жестким фотоном в поле ядра. Электрон и позитрон можно рассматривать как свободные частицы лишь в случае, когда эти частицы разлетятся друг относительно

друга на расстояние, превышающее $2/m$. При высоких энергиях они вылетают, в основном, под малыми углами к импульсу фотона $\vartheta_{\pm} \sim m/E_{\pm}$, где E_- и E_+ — энергии электрона и позитрона, поэтому прежде чем электрон и позитрон разлетятся на расстояние $2/m$, они пройдут путь, по порядку величины, равный $l_{\pm} = 2E_{\pm}E_-/m^2\omega$ (рис. 1, б). Величина l_{\pm} представляет собой длину, на которой формируется электрон-позитронная пара. Так как характерные значения энергий E_+ и E_- образующихся частиц по порядку величины равны $E_+ \sim E_- \sim \omega/2$, то $l_{\pm} \sim \omega/2m^2$ и, следовательно, при достаточно больших ω эта длина может стать сколь угодно большой.

Обратим внимание на то, что длина l_{\pm} имеет ту же структуру, что и длина когерентности l_c в процессе излучения: различие заключается лишь в том, что начальная и конечная энергии электрона в процессе излучения заменяются здесь значениями энергий электрона и позитрона.

Относительная скорость, с которой разлетаются электрон и позитрон при образовании электрон-позитронной пары $v_{отн} \sim v(\vartheta_+ + \vartheta_-)$, мала по сравнению со скоростью поступательного движения частиц v , поэтому электрон и позитрон в течение длительного интервала времени движутся на близком расстоянии друг от друга. При этом ионизационные потери энергии частицами пары будут уменьшены по сравнению со случаем, когда частицы разнесены далеко друг от друга³¹. Связано это с тем, что основной вклад в ионизационные потери энергии заряженной частицы дает область прицельных расстояний $v/\omega_p \gg \rho \gg 1/m$, где ω_p — плазменная частота. Поэтому, если электрон и позитрон будут находиться на расстоянии s друг от друга меньшем, чем v/ω_p , то кулоновские электромагнитные поля электрона и позитрона будут погашать друг друга, в результате чего в этом случае основной вклад в ионизационные потери энергии будет давать область прицельных параметров $s \gg \rho \gg 1/m$. Ясно, что при этом ионизационные потери энергии системы, состоящей из электрона и позитрона, будут увеличиваться по мере разлета частиц.

При $s > v/\omega_p$ электрон и позитрон будут терять энергию на ионизацию как независимые частицы.

Аналогичный эффект имеет место и при прохождении быстрых молекул через тонкий слой вещества³². Ионизационные потери энергии атомов, образовавшихся в результате развала молекулы, в этом случае оказываются больше ионизационных потерь энергии в случае, когда эти атомы разлетятся далеко друг от друга. Этот эффект обусловлен когерентным сложением кулоновских полей разлетающихся атомов молекулы.

Приведенные примеры показывают, что если быстрые частицы в течение длительного интервала времени находятся на близких расстояниях, то эффективность их взаимодействия с атомами среды может отличаться от эффективности взаимодействия в случае, когда частицы находятся далеко друг от друга. При этом существенны интерференционные эффекты во взаимодействии, в результате которых выход различных реакций может как увеличиваться, так и уменьшаться по сравнению с выходом этих реакций в случае, когда частицы находятся далеко друг от друга.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

3.1. Поле движущегося электрона

Длина когерентности, как уже упоминалось, сама по себе еще не определяет динамику процесса излучения, и определяет только размер области, в пределах которой существенны интерференционные эффекты в излучении. Чтобы выяснить, к чему приводит интерференция, необходимо знание эволюции поля, создаваемого движущимся электроном. Этот вопрос с классической точки зрения мы изложим в настоящем параграфе.

Напомним, что потенциал поля $A(\mathbf{r}, t)$ движущегося электрона определяется волновым уравнением

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A(\mathbf{r}, t) = 4\pi e v(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (3.1)$$

где e — заряд электрона, $v(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ — скорость и траектория электрона во внешнем поле, $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция.

Запаздывающее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$A(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(\tau)|} v(\tau) \delta(\tau - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}(\tau)|). \quad (3.2)$$

Это выражение можно переписать в виде фурье-разложения

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{k} \left\{ \frac{v(t)}{k - \mathbf{k}v(t)} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))] - \right. \\ \left. - I(\mathbf{k}, t) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - kt)] \right\}, \quad (3.2')$$

где

$$I(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \exp[i(k\tau - \mathbf{k}\mathbf{r}(\tau))] \frac{d}{d\tau} \frac{v(\tau)}{k - \mathbf{k}v(\tau)}. \quad (3.3)$$

При равномерном движении заряда второе слагаемое в (3.2') обращается в нуль, а первое слагаемое определяет кулоновское поле электрона

$$A(\mathbf{r}, t) = A_v = ev \left[(z - vt)^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2} \right]^{-1/2}, \quad (3.4)$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, ось z параллельна \mathbf{v} , ρ — радиус-вектор в плоскости, ортогональной \mathbf{v} .

При наличии ускорения второе слагаемое в (3.2') определяет поле излучения частицы. Спектрально-угловая плотность излучения определяется величиной $I(\mathbf{k}, \infty)$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} |[I(\mathbf{k}, \infty)]|^2, \quad |\mathbf{k}| = \omega. \quad (3.5)$$

В дальнейшем мы будем интересоваться движением и излучением электрона в веществе. Скорость электрона в этом случае изменяется благодаря столкновениям с атомами среды. При высоких энергиях изменение скорости происходит в течение малых промежутков времени по сравнению со временем формирования излучения, так что можно считать, что скорость электрона меняется скачками при столкновениях с атомами. Поэтому мы должны рассмотреть, прежде всего, случай, когда скорость электрона в интервале времени $(-\infty, 0)$ была равна \mathbf{v} , а в интервале времени $(0, +\infty)$ была равна \mathbf{v}_1 ^{30,33}. Векторный потенциал $A(\mathbf{r}, t)$ при таком движении частицы до рассеяния ($t < 0$) представляет собой векторный потенциал кулоновского поля электрона (3.4). После рассеяния ($t > 0$), согласно (3.2),

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{k - \mathbf{k}v_1} [1 - e^{-i(k - \mathbf{k}v_1)t}] e^{-i\mathbf{k}v_1 t} + \frac{\mathbf{v}}{k - \mathbf{k}v} e^{-i\mathbf{k}v t} \right\}. \quad (3.6)$$

Эту формулу можно представить также в виде

$$A(\mathbf{r}, t) = \Theta(r - t) A_v + \Theta(t - r) A_{v_1}, \quad (3.7)$$

где $\Theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда ($\Theta(x) = 0$, если $x < 0$ и $\Theta(x) = 1$, если $x \geq 0$) и A_{v_1} — векторный потенциал кулоновского поля электрона, движущегося равномерно со скоростью \mathbf{v}_1 .

Аналогичные результаты легко получить и для запаздывающего потенциала электрического поля электрона.

Формулы (3.6) и (3.7) показывают, что до рассеяния окружающее электрон электромагнитное поле представляет собой кулоновское поле, движущееся с электроном со скоростью \mathbf{v} . Основной вклад в это поле вносят фурье-компоненты с волновыми векторами \mathbf{k} , направления которых близки к направлению скорости частицы \mathbf{v} ; именно, угол между эффективными значениями \mathbf{k} и \mathbf{v} по порядку величины равен m/E . После рассеяния ($t > 0$) кулоновское поле «срывается» с электрона и продолжает двигаться со скоростью \mathbf{v} в направлении начального движения частицы, постепенно перестраиваясь в поле излучения. Это значит (как показывает $\Theta(r-t)$ -функция в первом слагаемом в формуле (3.7)), что в области $r > t$, до которой не успел дойти сигнал о факте столкновения, поле будет кулоновским, несмотря на то, что электрон в точке $\mathbf{z} = \mathbf{v}t$ отсутствует — он движется после рассеяния в направлении \mathbf{v}_1 . При $r < t$, согласно (3.7), присутствует только второе слагаемое, представляющее собой кулоновское поле частицы, движущейся в направлении \mathbf{v}_1 . Таким образом, при $r = t$ происходит перестройка поля электрона, в результате которой и происходит излучение.

У рассеянного электрона связанное с ним кулоновское поле появляется не сразу. Согласно (3.6), в течение интервала времени $\Delta t \lesssim (k - \mathbf{k}\mathbf{v}_1)^{-1}$ фурье-компоненты потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, обладающие волновым вектором \mathbf{k} , практически отсутствуют. Так как основной вклад в потенциал $\mathbf{A}_{\mathbf{v}_1}$ вносят волновые векторы \mathbf{k} , направления которых близки к направлению скорости \mathbf{v}_1 (угол между эффективными значениями \mathbf{k} и \mathbf{v}_1 по порядку величины равен m/E), то интервал времени, в течение которого практически отсутствуют фурье-компоненты кулоновского поля рассеянного электрона, будет масштаба

$$\Delta t \sim \frac{2E^2}{m^2\omega}.$$

Образно выражаясь, можно сказать, что после первого столкновения электрон в течение интервала времени $\Delta t \sim 2E^2/m^2\omega$ находится в «полуголом» состоянии, т. е. в значительной степени без своего кулоновского поля *).

За это время электрон проходит расстояние $l_c = v\Delta t$, которое совпадает с введенной ранее длиной когерентности.

Полученные в этом разделе результаты иллюстрирует рис. 2, на котором схематически представлены эквипотенциальные поверхности поля электрона до и после рассеяния.

3.2. Излучение в случае многих столкновений электрона на длине когерентности

В предыдущем разделе было показано, что после столкновения электрон в течение длительного интервала времени находится в «полуголом» состоянии, т. е. в значительной степени без своего кулоновского поля. В течение этого интервала времени электрон может испытать много столкновений с атомами среды. Поэтому мы выясним теперь, что будет происходить в этом случае с окружающим электрон полем³⁰.

Рассмотрим, прежде всего, случай двух столкновений.

Если при $t = t_1 = 0$ в результате столкновения с атомом скорость электрона меняется от значения \mathbf{v} к значению \mathbf{v}_1 , а при $t = t_2$ испытывает изменение от \mathbf{v}_1 к \mathbf{v}_2 , то, согласно (3.2), векторный потенциал при $t > t_2$ будет определяться формулой

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left\{ \frac{\mathbf{v}_2}{k - \mathbf{k}\mathbf{v}_2} [1 - e^{-i(k - \mathbf{k}\mathbf{v}_2)(t - t_2)}] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{v}_1}{k - \mathbf{k}\mathbf{v}_1} (e^{i(k - \mathbf{k}\mathbf{v}_1)t_2} - 1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}t} + \frac{\mathbf{v}}{k - \mathbf{k}\mathbf{v}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}t} \right\}, \quad (3.8)$$

*) Понятие «полуголом» электрон было введено в работе Е. Л. Фейнберга³³ при изучении эволюции во времени вектора-состояния системы «электрон плюс фотон» после рассеяния электрона на атоме на большой угол.

где $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2(t - t_2)$ и \mathbf{r}_2 — координаты точки, в которой произошло второе столкновение.

Слагаемые в этом выражении, содержащие векторы \mathbf{v} и \mathbf{v}_2 , имеют ту же структуру, что и соответствующие слагаемые в формуле (3.6) — они определяют эволюцию поля в направлениях начального и конечного движений частицы. Слагаемое, содержащее \mathbf{v}_1 , определяет эволюцию поля в направлении промежуточного движения частицы.

Если второе столкновение произошло в момент времени $t_2 \ll (k - k\mathbf{v}_2)^{-1}$, то электрон в момент столкновения находился в «полуголом» состоянии. При этом, согласно (3.8), излучение волн с волновыми векторами \mathbf{k} , близкими по направлению к \mathbf{v}_1 , будет подавлено по сравнению с тем случаем, когда второе столкновение происходит в момент времени $t_2 \gg (k - k\mathbf{v}_1)^{-1}$.

Рассмотрим теперь случай, когда на длине когерентности происходит много ($N > 2$) столкновений в моменты времени $t = t_j \geq 0$, где $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда векторный потенциал при $t > t_N$ будет определяться формулой (3.2) с

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{I}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\mathbf{v}_j}{k - k\mathbf{v}_j} - \frac{\mathbf{v}_{j-1}}{k - k\mathbf{v}_{j-1}} \right) \exp[i(k - k\mathbf{v}_{j-1})t_j]. \quad (3.9)$$

Характерные углы рассеяния быстрой частицы в веществе малы: $|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}| \ll v$.

Если

$$(k - k\mathbf{v}_{j-1})t_j \ll 1, \quad (3.10)$$

то электрон во всех столкновениях будет находиться в «полуголом» состоянии. В этом случае

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{v}_N}{k - k\mathbf{v}_N} - \frac{\mathbf{v}}{k - k\mathbf{v}}. \quad (3.11)$$

Мы видим, что величина $\mathbf{I}(\mathbf{k})$ зависит только от начальной и конечной скоростей частицы и не зависит от её промежуточных скоростей.

Зная $\mathbf{I}(\mathbf{k})$, можно, согласно (3.5), найти спектрально-угловое распределение излучения. Спектральная же плотность излучения при этом будет определяться формулой

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi} \left\{ \frac{2\xi^2 + 1}{\xi(\xi^2 + 1)^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \ln [\xi + (\xi^2 + 1)^{1/2}] - 1 \right\}, \quad (3.12)$$

где $\xi = \gamma\vartheta/2$ и $\vartheta = |\mathbf{v}_N - \mathbf{v}|/v$ — угол рассеяния частицы ($\vartheta \ll 1$).

Отметим некоторые особенности процесса излучения при выполнении условия (3.10).

Первое слагаемое (3.11) определяет волны, распространяющиеся в направлении близком к направлению

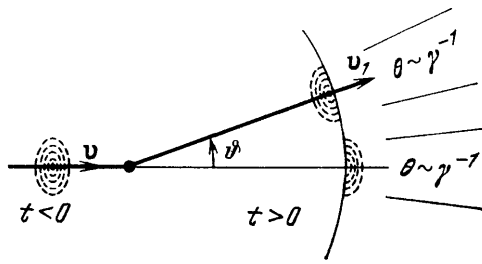


Рис. 2. Окружающее электрон поле до ($t < 0$) и после ($t > 0$) рассеяния на атоме на угол ϑ

конечного движения частицы \mathbf{v}_N , а второе — волны, распространяющиеся в направлении близком к \mathbf{v} . Излучение в основном происходит в конусы с углами растворов порядка m/E (рис. 2). Фазы волн, распространяющихся вблизи направлений \mathbf{v}_N и \mathbf{v} , противоположны, поэтому в зависимости от соотношения между углом рассеяния ϑ и углом раствора конуса излучения m/E будет иметь место различная интерференционная картина.

Если $\vartheta \ll m/E$, то происходит сильное сокращение полей, связанных с обоими слагаемыми в формуле (3.11). В этом случае величина $|\mathbf{I}(\mathbf{k})|$ будет пропорциональна ϑ , а спектральное распределение излучения будет про-

порционально ϑ^2 :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 \vartheta^2. \quad (3.13)$$

Для углов рассеяния, превосходящих угол раствора конуса излучения, $\vartheta \gg m/E$ сокращение полей практически не происходит. При этом спектральное распределение излучения слабо зависит от угла рассеяния:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \frac{4e^2}{\pi} \ln \gamma \vartheta. \quad (3.14)$$

Таким образом, мы видим, что при $\gamma \vartheta \ll 1$ и $\gamma \vartheta \gg 1$ характер излучения существенно различен. В первом случае имеет место сильная интерференция волн, излученных в направлениях начального и конечного движений частицы; во втором случае интерференция практически отсутствует.

3.3. Излучение на расстояниях, превосходящих длину когерентности

Полученными выше формулами можно пользоваться, когда путь, проходимый электроном в веществе, меньше или порядка длины когерентности. Иными словами, требуется, чтобы толщина вещества не превосходила длину когерентности. Если же толщина мишени T будет больше длины когерентности l , то для нахождения спектральной плотности излучения необходим специальный расчет. Такой расчет будет сделан в следующем разделе. Здесь же мы приведем только простые оценки величины спектральной плотности излучения в этом случае и установим условия, при которых многократное рассеяние существенно изменяет характер излучения частицы в веществе.

Для оценки спектральной плотности излучения при $T \gg l$ нужно, очевидно, разбить мишень на слои, толщина которых равна длине когерентности l , и просуммировать поля, возникающие на каждом из слоев. Интерференцию же излучения от отдельных слоев при этом можно не учитывать. Тогда на n -м участке пути спектрально-угловая плотность излучения будет определяться формулами (3.5) и (3.11). Суммарная же спектрально-угловая плотность излучения при этом будет равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} \approx \frac{e^2}{4\pi^2} \sum_n \left| \left[\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{v}_n}{k - \mathbf{k}\mathbf{v}_n} - \frac{\mathbf{v}_{n-1}}{k - \mathbf{k}\mathbf{v}_{n-1}} \right) \right] \right|^2, \quad (3.15)$$

где \mathbf{v}_n — скорость частицы в конце n -го участка и суммирование ведется по всем участкам пути, проходимого частицей в веществе мишени.

Основной вклад в интеграл по углам излучения дают значения $\theta \sim \max(\gamma^{-1}, |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n-1}|/v)$ в каждом слагаемом (3.15). Поэтому, используя (3.12) и учитывая, что число слоев равно T/l , получим окончательно

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \frac{T}{l} \frac{d\mathcal{E}_l(\gamma\vartheta_l)}{d\omega}, \quad (3.16)$$

где $d\mathcal{E}_l/d\omega$ — определяется формулой (3.12), ϑ_l — угол рассеяния на длине когерентности l и l определяется из соотношения (2.9) при $\theta \sim \max(\gamma^{-1}, \vartheta_l)$.

При выводе формулы (3.16) не использовался конкретный закон движения частицы, поэтому этой формулой можно пользоваться для оценки спектра излучения как в аморфной, так и в кристаллической среде, а также при движении частицы во внешних электромагнитных полях.

В случае аморфных тел средний квадрат угла многократного рассеяния частицы на единице длины определяется формулой^{5,34}

$$q = nv \int d^3\vartheta \vartheta^4 \sigma(\vartheta), \quad (3.17)$$

где n — плотность атомов и $\sigma(\vartheta)$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния частицы отдельным атомом среды на угол ϑ .

Заметим, что входящий (3.17) интеграл расходится логарифмически в области больших ϑ . В теории многократного рассеяния верхний предел в этом интеграле по порядку величины равен ³⁴ $\vartheta_{\max} \sim 1/ER_n$, где R_n — радиус ядра атома. В задачах, связанных с излучением, верхний предел интеграла следует положить равным $\vartheta_{\max} \sim m/E$ (см. § 19 монографии ⁵).

Подставляя соотношение (3.17) в (2.9), находим, что если $\gamma\vartheta_l \ll 1$, то $l \simeq 2\gamma^2/\omega$, а если $\gamma\vartheta_l \gg 1$, то $l \simeq (2/\omega q)^{1/2}$. Используя теперь эти выражения для l , получим, согласно (3.16),

$$\frac{d\xi}{d\omega} \approx \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 q T, & \gamma\vartheta_l \ll 1, \\ \frac{2e^2}{\pi} (2\omega q)^{1/2} T \ln(\gamma\vartheta_l), & \gamma\vartheta_l \gg 1. \end{cases} \quad (3.18a)$$

$$(3.18b)$$

Первая из этих формул совпадает с логарифмической точностью с формулой Бете и Гайтлера ^{24,28}, в которой не учитывается влияние многократного рассеяния на излучение. Вторая формула соответствует случаю, когда многократное рассеяние играет существенную роль в излучении (она только численным множителем отличается от результата Ландау и Померанчука ²).

При движении в кристалле под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей (оси z) среднее значение квадрата угла рассеяния частицы на упорядоченно расположенных атомах решетки может существенно превышать среднее значение квадрата угла рассеяния в аморфной среде (см. п. 5). При этом в широком интервале углов ψ ($R/d \gg \psi \gg \psi_c$) соотношение между этими величинами на единице длины определяется формулой

$$q_c \sim \frac{R}{4\psi d} q, \quad (3.19)$$

где R — радиус экранировки атома, d — расстояние между атомами в решетке вдоль оси z и ψ_c — критический угол осевого каналирования. Соответственно этому при малых и больших углах рассеяния спектральная плотность излучения в кристалле будет определяться формулами (3.18) с той лишь разницей, что величину q в (3.18) следует заменить на q_c . Первая из формул (3.18) при этом только численным множителем порядка единицы будет отличаться от соответствующего результата теории когерентного излучения релятивистского электрона в кристалле ^{5,17}. Вторая формула будет соответствовать случаю, когда многократное рассеяние оказывает значительное влияние на излучение частицы в кристалле.

Таким образом, приведенные соотношения позволяют на основе единого подхода дать оценки спектра излучения быстрой частицы как в аморфной, так и в кристаллической среде. Эти соотношения поясняют не только причину изменения характера излучения частицы в среде при $\gamma\vartheta_l \sim 1$, но и причину различия спектров излучения в кристалле и в аморфной среде при $\gamma\vartheta_l \ll 1$. Это различие обусловлено различием средних значений углов рассеяния в этих случаях.

3.4. Спектральная плотность излучения

В разделе 3.1 была получена общая формула (3.5) для спектрально-угловой плотности излучения частицы, движущейся с некоторым ускорением. Эту формулу мы использовали для оценки спектра излучения, разбив путь, проходимый частицей в веществе, на участки, равные длине когерентности. При этом учитывались интерференционные эффекты при излучении на каждом из участков, но не учитывалась интерференция между соседними участками. Теперь снимем это ограничение.

Будем исходить по-прежнему из общей формулы (3.5), в которой под $\mathbf{I}(\mathbf{k})$ будем понимать выражение

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{v}(t) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}(t))], \quad (3.20)$$

где ω и \mathbf{k} связаны соотношением $k = \varepsilon^{1/2} \omega$. Благодаря этому учитывается влияние поляризации среды на излучение, которое в предыдущем разделе не учитывалось.

Следуя работе Ландау и Померанчука², выполним в (3.5) интегрирование по углам излучения. Получаемую при этом спектральную плотность излучения можно представить в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2 k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \left(\mathbf{v}(T+\tau) \mathbf{v}(T) - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\sin k |\mathbf{r}(T+\tau) - \mathbf{r}(T)|}{|\mathbf{r}(T+\tau) - \mathbf{r}(T)|}, \quad (3.21)$$

где

$$\mathbf{r}(T+\tau) - \mathbf{r}(T) = \int_T^{T+\tau} dt \mathbf{v}(t).$$

Характерные углы рассеяния быстрой частицы в веществе малы, поэтому в формуле (3.21) можно положить

$$\mathbf{v}(T+\tau) \approx \mathbf{v}(T) \left[1 - \frac{1}{2} \vartheta^2(\tau) \right] + \boldsymbol{\vartheta}(\tau), \quad (3.22)$$

где $\boldsymbol{\vartheta}(\tau)$ — угол рассеяния на интервале времени $(T, T+\tau)$, причем $\vartheta \ll 1$.

Используя это выражение, находим с точностью до членов порядка ϑ^2

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx & -\frac{e^2 k}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\omega\tau} \left[\varepsilon^{-1} - \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \vartheta^2(\tau) \right] \times \\ & \times \sin \left\{ k \left[\nu\tau - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} dt \vartheta^2(t) + \frac{1}{2\tau} \left(\int_0^{\tau} dt \boldsymbol{\vartheta}(t) \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

При $\varepsilon = 1$ эта формула переходит в соответствующий результат работы¹⁷, в котором влияние поляризации среды на излучение не учитывалось.

Интерес, который представляет формула (3.23), заключается в ее общности и возможности с помощью этой формулы рассмотреть с единых позиций излучение в различных средах и внешних полях. В последнем случае $\boldsymbol{\vartheta}(\tau)$ является определенной функцией τ . Если же излучение происходит в среде, то формула (3.23) должна быть еще усреднена по случайному процессу, с которым связано рассеяние. Это усреднение должно проводиться по-разному в аморфных средах и в кристаллах.

4. ЭФФЕКТ ЛАНДАУ — ПОМЕРАНЧУКА

4.1. Классический предел формулы Бете — Гайтлера

Рассмотрим, прежде всего, тот случай, когда движение происходит в аморфной среде, причем угол рассеяния на длине когерентности достаточно мал ($\omega l \vartheta^2 \ll 1$). В этом случае в формуле (3.23) можно разложить подынтегральное выражение по углу рассеяния. В результате находим, что при $\varepsilon v^2 < 1$ *)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \frac{e^2 k}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv}{v^2} \left[1 - 2 \frac{\delta}{v} \left(1 - \frac{\delta}{v} \right) \right] |\mathbf{w}(v)|^2, \quad (4.1)$$

*) Здесь и далее для простоты предполагается, что ε близка к единице.

где

$$\delta = \omega(1 - v\varepsilon^{1/2}), \quad \mathbf{w}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) e^{ivt}.$$

Переменная интегрирования v связана с углом излучения $\boldsymbol{\theta}$ в формуле (3.5) соотношением $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{k}\mathbf{v}$.

Учитывая, что при больших энергиях излучение разыгрывается на длине (вдоль импульса частицы), значительно превосходящей размер атома, величина $|\mathbf{w}(v)|^2$ может быть записана в виде

$$|\mathbf{w}(v)|^2 = \sum_{n,k} \boldsymbol{\theta}_n \boldsymbol{\theta}_k \exp[iv(t_n - t_k)], \quad (4.2)$$

где $\boldsymbol{\theta}_n$ — угол рассеяния при столкновении с n -м атомом и t_n — момент времени, когда произошло столкновение.

В аморфной среде столкновения частицы с различными атомами случайны, поэтому входящая в (4.1) величина $|\mathbf{w}(v)|^2$ должна быть усреднена по случайным положениям атомов в среде. При столкновении с атомом, находящимся в точке $\mathbf{r}_n = (\boldsymbol{\rho}_n, z_n)$ угол рассеяния равен

$$\boldsymbol{\theta}_n = -\frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} dz u(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n, z),$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — прицельный параметр и $u(r)$ — потенциальная энергия взаимодействия частицы с атомом. Подставляя это соотношение в (4.1), получим после усреднения по $\boldsymbol{\rho}_n$ и интегрирования по v следующее выражение для спектральной плотности излучения

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 \frac{1}{2\gamma^2(1 - v\varepsilon^{1/2})}. \quad (4.3)$$

Здесь первый множитель представляет собой обычное выражение для спектра излучения быстрой частицы в аморфной среде в области малых частот без учета многократного рассеяния и поляризации среды

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 = \frac{2e^2 n T}{3\pi} \gamma^2 \int d^2 \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\theta}^2(\boldsymbol{\rho}). \quad (4.4)$$

В случае, когда потенциал атома представляет собой экранированный потенциал Кулона, входящий в (4.4) интеграл расходится в области малых значений $\boldsymbol{\rho}$. Из условия применимости формулы (4.4) $\gamma\boldsymbol{\theta} \ll 1$ вытекает, что интегрирование по $\boldsymbol{\rho}$ в (4.4) должно быть ограничено значением $\boldsymbol{\rho}_{\min} \sim 2Ze^2/m$, где $Z|e|$ — заряд ядра атома. Квантовые эффекты при излучении, однако, проявляются при $\boldsymbol{\rho}_{\min} \sim 1/m$, т. е. на **бóльших** расстояниях, чем $2Ze^2/m$; поэтому $\boldsymbol{\rho}_{\min}$ должно быть положено равным $1/m^5$. При этом величина $(d\mathcal{E}/d\omega)_0$ совпадает с логарифмической точностью со спектром излучения, даваемым формулой Бете и Гайтлера^{24,35}

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{БН}}}{d\omega} = \frac{16Z^2 e^6 n T}{3m^2} \left[\ln(183Z^{-1/3}) + \frac{1}{12} \right], \quad \omega \ll E. \quad (4.5)$$

Второй множитель в (4.3) описывает влияние поляризации среды на излучение *).

Формула (4.1) справедлива, если выполняется условие $\omega l \boldsymbol{\theta}_i^2 \ll 1$. При $\varepsilon = 1$ в случае аморфной среды это неравенство может быть записано в виде $\gamma^2 q l_c \ll 1$. Последнее неравенство при достаточно высоких энергиях частиц нарушается.

*) Влияние поляризации среды на излучение быстрой частицы в аморфной среде впервые было установлено Тер-Микаеляном³⁶.

4.2. Оценки Ландау и Померанчука

Если условие $\gamma^2 q l_c \ll 1$ не выполняется, то для определения спектра излучения частицы необходимо пользоваться общей формулой (3.23), которая должна быть усреднена по случайным значениям углов рассеяния частицы в веществе (эта случайность связана с хаотическим расположением атомов в аморфном теле). Точное проведение усреднения затрудняется тем, что угол рассеяния входит в спектральную плотность излучения под знаком синуса. Ландау и Померанчук, имея в виду получение оценок при $\gamma^2 q l_c \gg 1$, предложили² заменить среднее значение синуса синусом от среднего значения величины. При этом получается следующая формула для усредненного значения спектральной плотности излучения *)

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle \approx \frac{e^2 \omega T}{\pi \gamma^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 q \tau \right) \sin \left[(1 - \nu) \omega \tau + \frac{1}{12} \omega q \tau^2 \right]. \quad (4.6)$$

Влияние поляризации среды на излучение здесь не учитывается, т. е. полагается, что $\epsilon = 1$. В интересовавшем их случае $\gamma^2 q l_c \gg 1$ можно пренебречь слагаемым, пропорциональным τ под знаком синуса. При этом формула (4.6) приобретает вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{d\mathcal{E}_{\text{III}}}{d\omega} = \frac{e^2}{2} \left(\frac{3\omega q}{2\pi} \right)^{1/2} T. \quad (4.7)$$

Сравнение этой формулы с результатом Бете и Гайтлера (4.5) показывает, что при выполнении условия $\gamma^2 q l_c \gg 1$

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{III}}}{d\omega} \ll \frac{d\mathcal{E}_{\text{BH}}}{d\omega}.$$

Мы видим, что характер излучения быстрой частицы в аморфной среде существенно меняется при $\gamma^2 q l_c \sim 1$, т. е. в области энергий частиц и частот излученных фотонов, для которых средний квадрат угла многократного рассеяния на длине l_c становится сравним с квадратом характерного угла излучения релятивистской частицы $\theta^2 \sim \gamma^{-2}$.

Соотношения (4.6) и (4.7) носят оценочный характер. Несмотря на это, однако, представляемый вывод вскрывает существо эффекта — эффект обусловлен искривлением траектории частицы в аморфном теле в пределах длины когерентности, связанным с многократным рассеянием.

4.3. Эффект Ландау — Померанчука и синхротронное излучение

Существует интересное соответствие между эффектом Ландау — Померанчука и синхротронным излучением, т. е. излучением частицы, движущейся по окружности в однородном магнитном поле. Действительно, как мы видели, эффект Ландау — Померанчука связан с кривизной траектории частицы, обусловленной многократным рассеянием. Синхротронное же излучение связано с кривизной траектории частицы, обусловленной внешним магнитным полем. В последнем случае ускорение частицы определяется известной формулой

$$\dot{v} = \frac{eH}{E}$$

(H — напряженность магнитного поля). При этом угол рассеяния на интервале времени τ равен

$$\vartheta(\tau) = \frac{eH\tau}{E}.$$

*) Эта формула отличается множителем перед знаком синуса от соответствующей формулы работы² (см. обзор¹⁾).

Подставляя это выражение в общую формулу (3.23), получим следующее выражение для спектра излучения быстрой частицы в магнитном поле

$$\frac{d\mathcal{E}_H}{d\omega} = -\frac{2e^2\omega T}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left(1 - v^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2 H^2}{E^2} \tau\right) \times \\ \times \cos \omega\tau \cdot \sin \omega \left(v\tau - \frac{1}{24} \frac{e^2 H^2}{E^2} \tau^3 \right). \quad (4.8)$$

Эта формула путем несложных преобразований может быть приведена к известной формуле для спектра синхротронного излучения^{37,38}, содержащей функцию Эйри. Формула (4.8) имеет, однако, то преимущество, что она позволяет увидеть связь между эффектом Ландау и Померанчука и синхротронным излучением — в обоих случаях спектральная плотность представлена в виде интеграла по времени τ и мы можем непосредственно сравнить формулы, определяющие оба эффекта.

В случае эффекта Ландау — Померанчука под знаком синуса в (4.6) входят слагаемые, пропорциональные τ и τ^2 ; в случае же синхротронного излучения — слагаемые, пропорциональные τ и τ^3 . В обоих случаях в области достаточно малых частот линейные слагаемые по τ в осциллирующих множителях могут быть отброшены. При этом в аморфной среде спектру излучения определяется соотношением (4.7), а в магнитном поле, согласно (4.8),

$$\frac{d\mathcal{E}_H}{d\omega} \approx 0,52e^2 \left(\frac{eH}{E} \right)^{2/3} \omega^{1/3} T, \quad \omega \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, в обоих случаях с уменьшением ω интенсивность излучения уменьшается. Законы этого уменьшения, однако, различны, поскольку под знаком синуса в формуле синхротронного излучения входит слагаемое с τ^3 , а в формуле Ландау и Померанчука слагаемое с τ^2 . В свою очередь это различие в степенях τ связано с различием кривизны траекторий, обусловленных многократным рассеянием и магнитным полем.

4.4. Учет влияния многократного рассеяния на излучение методом кинетического уравнения

В предыдущих разделах было показано, что излучение быстрой частицы в аморфной среде ослабляется благодаря влиянию многократного рассеяния. Мы привели также оценки в том случае, когда эффект является значительным. Теперь мы перейдем к количественной теории эффекта Ландау — Померанчука. Существуют два метода, позволяющих развить количественную теорию этого эффекта — метод кинетического уравнения и метод континуального интегрирования. Начнем с изложения первого метода, принадлежащего Мигдалу²².

Будем исходить из формулы (3.5) для спектрально-угловой плотности излучения и представим ее в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau [\mathbf{k}\mathbf{v}] [\mathbf{k}\mathbf{v}'] \exp[-i\omega\tau + i\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})], \quad (4.10)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t + \tau)$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}(t + \tau)$ и $\omega = |\mathbf{k}|$.

Задача состоит в усреднении этого выражения по всем возможным траекториям частицы, т. е. в определении величины

$$K_j = \langle \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] ([\mathbf{k}\mathbf{v}] [\mathbf{k}\mathbf{v}']) \rangle,$$

где угловые скобки служат для обозначения усреднения.

Введем в рассмотрение две вероятностные функции: $W_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ — вероятность значений координат \mathbf{r} и скоростей \mathbf{v} в момент времени t и $W_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; \tau)$ — вероятность значений \mathbf{r}' и \mathbf{v}' в более поздний момент

времени $t + \tau$ при условии, что эти величины в момент времени t имеют значения \mathbf{r} и \mathbf{v} . Тогда величина K может быть представлена в виде

$$K = \int d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' d\mathbf{r} d\mathbf{v} \exp [ik(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] ([\mathbf{k}\mathbf{v}'] [\mathbf{k}\mathbf{v}]) W_1 W_2. \quad (4.11)$$

Вероятностные функции W_1 и W_2 удовлетворяют кинетическому уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} = n \int d\mathbf{v}' \sigma(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) [W(\mathbf{r}, \mathbf{v}'; t) - W(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)], \quad (4.12)$$

где $\sigma(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$ — сечение упругого рассеяния частицы отдельным атомом, при котором ее скорость изменяется от \mathbf{v} к \mathbf{v}' (при этом рассеяние происходит на угол $\vartheta = 2 \sin |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|/2v$). Кроме того, вероятностные функции должны удовлетворять следующим начальным условиям:

$$W_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), \\ W_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}),$$

где \mathbf{v}_0 — начальная скорость.

Из кинетического уравнения и начальных условий следует, что W_2 зависит только от разности координат $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$. В формулу (4.11) входит фурье-образ величины W_2

$$W_K(\mathbf{v}', \mathbf{v}; \tau) = \int d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \exp [ik(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] W_2(\mathbf{r}', \mathbf{v}'; \mathbf{r}, \mathbf{v}; \tau),$$

поэтому формулу (4.11) можно переписать в виде

$$K = \int d\mathbf{r} d\mathbf{v} d\mathbf{v}' [\mathbf{k}\mathbf{v}'] [\mathbf{k}\mathbf{v}] W_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) W_K(\mathbf{v}', \mathbf{v}; \tau). \quad (4.13)$$

Используя фурье-преобразование величины W_2 , очевидно, можно представить кинетическое уравнение для W_K в виде

$$\frac{\partial W_K}{\partial \tau} - i\mathbf{k}\mathbf{v}' W_K = n \int d\mathbf{v}'' \sigma(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') [W_K(\mathbf{v}'', \mathbf{v}; \tau) - W_K(\mathbf{v}', \mathbf{v}; \tau)], \quad (4.14)$$

причем $W_K(\mathbf{v}', \mathbf{v}; 0) = \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$.

Решение этого уравнения составляет теперь нашу главную задачу.

Характерные углы рассеяния и излучения релятивистской частицы в веществе малы, поэтому в последнем уравнении может быть выполнено разложение по этим углам. Удобно отсчитывать углы от направления движения фотона $\mathbf{k} = n\omega$. В приближении малых углов справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{v} \approx v \left(1 - \frac{1}{2} \vartheta^2\right) \mathbf{n} + \vartheta, \quad \vartheta \ll 1, \\ \mathbf{v}' \approx v \left(1 - \frac{1}{2} \vartheta'^2\right) \mathbf{n} + \vartheta', \quad \vartheta' \ll 1.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (4.14) и сохраняя два первых члена разложения, входящих в (4.14) величин по углам, приходим к уравнению Фоккера — Планка

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W_K - i\mathbf{k}\mathbf{v} \left(1 - \frac{1}{2} \vartheta'^2\right) W_K = \frac{1}{4} q \frac{\partial^2}{\partial \vartheta'^2} W_K \quad (4.15)$$

с начальным условием $W_K(\vartheta', \vartheta; 0) = \delta(\vartheta' - \vartheta)$, где q определяется соотношением (3.17).

Решение уравнения (4.14) следует искать в виде

$$W_K(\vartheta', \vartheta; \tau) = \exp(\alpha \vartheta'^2 + \beta \vartheta' \vartheta + \gamma),$$

где α , β и γ — некоторые функции, зависящие от τ и ϑ . Мы не будем здесь приводить подробностей решения уравнения (4.15). Этот вопрос хорошо изложен в работах^{5,16}.

Решение должно быть, очевидно, подставлено в формулу (4.13). В результате после интегрирования по углам излучения получим формулу Мигдала²² для спектра излучения быстрой частицы в аморфной среде

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 \Phi_M(s), \quad (4.16)$$

где $(d\mathcal{E}/d\omega)_0 = e^2 q T / 3\pi (1 - v)$ — спектр излучения без учета многократного рассеяния (см. формулу (4.4)), $s = \frac{1}{2} (1 - v) (\omega/q)^{1/2}$ и $\Phi_M(s)$ — функция, учитывающая влияние многократного рассеяния на излучение

$$\Phi_M(s) = 24s^2 \left(\int_0^\infty dx \operatorname{cth} x e^{-2sx} \sin 2sx - \frac{\pi}{4} \right). \quad (4.17)$$

Рассмотрим два предельных случая формулы (4.16). Если $s \rightarrow \infty$, то $\Phi_M \rightarrow 1$. Этот случай соответствует малым энергиям частиц. При этом много-

кратное рассеяние не оказывает влияния на излучение.

При малых значениях s функция $\Phi_M \approx 6s$ и выражение для $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$ приобретают вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{e^2}{\pi} (\omega q)^{1/2} T.$$

Эта формула только численным множителем отличается от оценочного результата Ландау и Померанчука (4.7).

График функции $\Phi_M(s)$ представлен на рис. 3. Мы видим, что изложенный метод кинетического уравнения позволяет не только уточнить коэффициент в формуле Ландау и Померанчука, но и описать промежуточную область перехода от результата Бете и Гайтлера к результату Ландау и Померанчука.

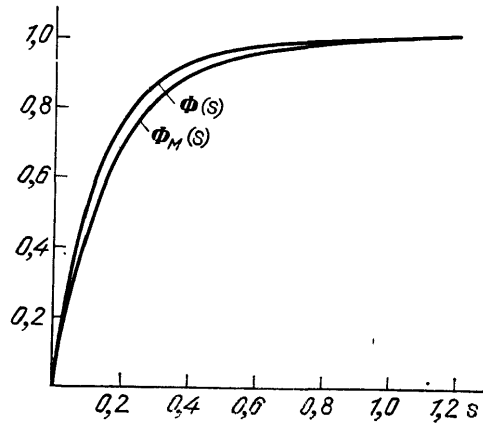


Рис. 3. Графики функций $\Phi_M(s)$ и $\Phi(s)$, определяющих влияние многократного рассеяния на излучение в аморфной среде и в кристалле

На основе метода кинетического уравнения впоследствии было изучено влияние и многих других факторов на излучение, таких, например, как отдача при излучении^{39,16}, влияние поляризации среды^{5,36}, влияние границ мишени⁴⁰, поглощение фотонов и другие. Были оценены также пределы применимости метода Фоккера — Планка для данной задачи и указана процедура повышения точности этого метода⁴¹. Исследовано также угловое распределение излучения и его поляризация⁴². При этом, однако, среда всегда предполагалась аморфной.

4.5. Усреднение по траекториям спектра излучения методом функционального интегрирования

Общая формула для спектральной плотности излучения (3.23) определяется углами рассеяния частицы в веществе. Эти величины в силу многократного рассеяния являются случайными, поэтому по ним должно проводиться усреднение. В методе Мигдала для того, чтобы произвести усреднение, использовалось кинетическое уравнение для распределения частиц по координатам и скоростям.

Исходным, однако, в этой задаче следует считать понятие траектории частицы, которая является случайной. Поэтому усреднение должно, по сути дела, производиться по случайным траекториям. Такое усреднение может

быть произведено с помощью метода функционального интегрирования. Этот метод получил в настоящее время широкое развитие в связи с различными задачами теории поля, не говоря уже о том, что с помощью этого метода, как показал Фейнман⁴³, удастся наглядно разъяснить связь между квантовой и классической механикой. Возможность использования метода функционального интегрирования для усреднения по случайным траекториям в задачах, связанных с излучением, была установлена в работах^{23,44}. Важность такого подхода заключается в том, что он позволяет единым образом учитывать влияние случайных факторов на излучение в различных задачах, таких как учет влияния многократного рассеяния на излучение в аморфных средах, в кристаллах, а также при излучении во внешних полях.

Процедура функционального интегрирования может быть сравнительно просто выполнена в том случае, если усредняемый функционал имеет гауссову форму, а случайный процесс является гауссовым. Такая ситуация имеет как раз место в рассматриваемой нами задаче.

Действительно, согласно (3.23), спектральная плотность излучения представляет собой функционал $d\mathcal{E}[\boldsymbol{\vartheta}(\tau)]/d\omega$ случайных значений угла рассеяния $\boldsymbol{\vartheta}(\tau)$, в который угол $\boldsymbol{\vartheta}$ входит квадратично под знаком синуса, т. е., этот функционал имеет гауссову форму. Что касается случайного процесса, связанного с многократным рассеянием, то в случае аморфного вещества этот процесс является, как известно^{5,34}, гауссовым. Это значит, что если в начальный момент времени распределение частиц по углам было дельтаобразным $P(\boldsymbol{\vartheta}, 0) = \delta(\boldsymbol{\vartheta})$, то к моменту времени τ это распределение будет иметь вид

$$P(\boldsymbol{\vartheta}, \tau) = (\pi q \tau)^{-1} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\vartheta}^2}{q \tau}\right). \quad (4.18)$$

Используя эту формулу, можно получить плотность вероятности того, что углы рассеяния $\boldsymbol{\vartheta}_n = \boldsymbol{\vartheta}(n\Delta)$ в моменты времени $t_n = n\Delta$ будут лежать в интервалах $(\boldsymbol{\vartheta}_n, \boldsymbol{\vartheta}_n + d\boldsymbol{\vartheta}_n)$ ⁴⁵

$$d\mathcal{P}_N = \frac{d\boldsymbol{\vartheta}_1 \dots d\boldsymbol{\vartheta}_N}{(\pi q \Delta)^N} \exp\left[-\frac{\boldsymbol{\vartheta}_1^2}{q \Delta} - \frac{(\boldsymbol{\vartheta}_2 - \boldsymbol{\vartheta}_1)^2}{q \Delta} - \dots - \frac{(\boldsymbol{\vartheta}_N - \boldsymbol{\vartheta}_{N-1})^2}{q \Delta}\right], \quad (4.19)$$

где $\Delta = \tau/N$, $n = 1, 2, \dots, N$.

С этой вероятностью и должен быть усреднен функционал $d\mathcal{E}[\boldsymbol{\vartheta}(\tau)]/d\omega$, причем при этом должен быть выполнен предельный переход к $N \rightarrow \infty$. Таким образом, основное выражение для усредненного спектра излучения имеет вид

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{P}_N \frac{d\mathcal{E}[\boldsymbol{\vartheta}(\tau)]}{d\omega}. \quad (4.20)$$

Обычно такое выражение сокращенно записывают в виде функционального интеграла по винеровской мере $d_W \boldsymbol{\vartheta}(\tau)$

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \int d_W \boldsymbol{\vartheta}(\tau) \frac{d\mathcal{E}[\boldsymbol{\vartheta}(\tau)]}{d\omega}. \quad (4.21)$$

Замечая, что

$$\boldsymbol{\vartheta}^2(\tau) = \frac{\partial}{\partial \mu} \exp(\mu \boldsymbol{\vartheta}^2(\tau))|_{\mu \rightarrow 0},$$

легко убедиться, что все слагаемые в подынтегральном выражении (3.23), содержащие обе компоненты вектора $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_x, \vartheta_y)$, факторизуются, поэтому при вычислении $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$ достаточно вычислить функциональный интеграл только по одной из компонент вектора $\boldsymbol{\vartheta}$. При этом среднее значение спектра излучения может быть представлено в виде:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = -\frac{e^2 k}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left[e^{-i\vartheta \tau} \left(\frac{1}{\varepsilon} - v^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) Q_{\omega}^2 - e^{-2i\omega \tau} \left(\frac{1}{\varepsilon} - v^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) Q_{-\omega}^2 \right]_{\mu \rightarrow 0}, \quad (4.22)$$

где

$$Q_{\omega} = \int dw \vartheta(t) \exp \left[\mu \vartheta^2(\tau) - \frac{i\omega}{\tau} \int_0^{\tau} dt \vartheta^2(t) + \frac{i\omega}{2\tau} \left(\int_0^{\tau} dt \vartheta(t) \right)^2 \right]. \quad (4.23)$$

Функциональный интеграл (4.23) имеет гауссов вид, поэтому он может быть вычислен аналитически с помощью известной процедуры вычисления таких интегралов⁴⁵. Мы приведем здесь лишь результат вычисления^{23,44}

$$Q_{\omega} = \left\{ D(0) \left[1 - \frac{i\omega q}{2\tau} \int_0^{\tau} dt D^{-2}(t) \left(\int_t^{\tau} dt' D(t') \right)^2 \right] \right\}^{-1/2}, \quad (4.24)$$

где $D(t) = \text{ch } r(t - \tau) + (\mu q/r) \text{sh } r(t - \tau)$, $r = (i\omega q/2)^{1/2}$.

Подставляя (4.24) в (4.22), легко показать, что с принятой точностью (отбрасываются слагаемые пропорциональные γ^{-2} и $(1 - \epsilon)$).

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{2e^2\delta}{\pi} T \left[\text{Im} \left(-r \int_0^{\infty} d\tau \text{cth } r\tau \cdot e^{-i\delta\tau} \right) - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.25)$$

Сделав здесь замену переменных $z = r\tau$ и перейдя от интегрирования по комплексной переменной z к интегрированию по действительной переменной $x = \text{Re } z$ в пределах от 0 до ∞ (рис. 4), запишем окончательное выражение для спектра излучения быстрой частицы в аморфной среде при $\epsilon v^2 < 1$ в виде

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right)_0 \Phi_M(s_p) \frac{1}{2\gamma^2 (1 - v\epsilon^{1/2})}, \quad (4.26)$$

где $\Phi_M(s_p)$ — функция Мигдала, введенная в предыдущем разделе, $s_p = \delta/2\sqrt{2} |r| = (1/4) \gamma^2 (1 - v\epsilon^{1/2}) \times (\omega/\omega_{\text{ЛП}})^{1/2}$ и $\omega_{\text{ЛП}} = q\gamma^4/4$.

Формула (4.26) учитывает наряду с многократным рассеянием и влия-

ние поляризации среды на излучение. При $\epsilon = 1$ она переходит в формулу (4.16). Таким образом, мы видим, что количественные результаты, касающиеся влияния как многократного рассеяния, так и поляризации среды на излучение, могут быть получены не только на основе метода кинетического уравнения, но и на основе метода функционального интегрирования.

4.6. Влияние многократного рассеяния на излучение Вавилова — Черенкова

При выводе формулы (3.23) не использовалась конкретная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ от частоты ω , поэтому формулой (3.23) можно пользоваться при изучении излучения быстрых частиц в веществе как при $\epsilon v^2 < 1$, так и в случае, когда $\epsilon v^2 > 1$. Первая из этих возможностей была рассмотрена в предыдущих разделах.

Обратим теперь внимание на некоторые особенности процесса излучения быстрых частиц в аморфной среде при $\epsilon v^2 > 1$. В этом случае, как известно⁴⁶, имеет место излучение Вавилова — Черенкова. Длина, на которой формируется это излучение в веществе имеет макроскопический размер (при прямолинейном движении частицы в отсутствие поглощения излученных волн эта длина фактически является бесконечной; см. раздел 2.2), поэтому важно знать, как сказывается на излучении Вавилова — Черенкова многократное рассеяние.

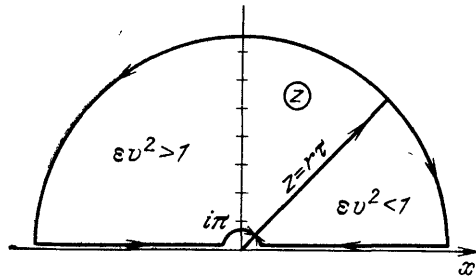


Рис. 4. Контуры интегрирования в формуле (4.25) по комплексной переменной z при $\epsilon v^2 < 1$ и $\epsilon v^2 > 1$

Для изучения влияния многократного рассеяния на излучение быстрой частицы в аморфной среде при $\epsilon v^2 > 1$ (и $\epsilon \approx 1$) можно воспользоваться полученной в предыдущем разделе формулой (4.25). Преобразуем вначале эту формулу к виду, удобному для анализа.

С этой целью выполним в (4.25) замену переменной интегрирования τ на $z = r\tau$ и перейдем затем от интегрирования по комплексной переменной z к интегрированию по действительной переменной $x = \operatorname{Re} z$ в пределах от 0 до $-\infty$ (при $\epsilon v^2 > 1$, в отличие от случая $\epsilon v^2 < 1$, для сходимости интеграла следует замыкать контур интегрирования в сторону отрицательной полуоси $x = \operatorname{Re} z$ — см. рис. 4). При указанной замене контура интегрирования необходимо учесть вычеты в особых точках функции $\operatorname{cth} z$. Результирующее выражение для спектральной плотности излучения при этом может быть представлено в виде^{47,48}

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = e^2 \omega v^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon v^2} \right) + \frac{1}{\pi} e^2 (\omega q)^{1/2} \mathcal{F}(s_p), \quad (4.27)$$

где

$$\mathcal{F}(s_p) = 4s_p \left\{ \operatorname{Im} \left[\Psi \left(\frac{\beta}{2} \right) + \frac{1}{\beta} - \ln \frac{\beta}{2} \right] - 2\pi \operatorname{Re} (e^{-i\pi\beta} - 1)^{-1} \right\};$$

здесь $\beta = -2(1+i)s_p$ и $\Psi(x) = d \ln \Gamma(x)/dx$ — логарифмическая производная Γ -функции.

Первое слагаемое в (4.27) определяет спектр излучения Вавилова — Черенкова⁴⁶. Второе слагаемое описывает влияние многократного рассеяния на это излучение.

Если $|s_p| \gg 1$, то $\mathcal{F}(s_p) \approx -1/6 |s_p|$. Поправка к спектральной плотности черенковского излучения, связанная с многократным рассеянием, в этом случае отрицательна.

При $|s_p| \rightarrow 0$ функция $\mathcal{F}(s_p) \rightarrow 1$ и, следовательно, излучение в этом случае оказывается больше черенковского.

При произвольных значениях s_p график функции $\mathcal{F}(s_p)$ представлен на рис. 5.

Таким образом, многократное рассеяние изменяет спектр излучения Вавилова — Черенкова, причем может происходить как уменьшение, так и увеличение излучения в зависимости от значения параметра s_p .

Полученные формулы справедливы, если среда, в которой происходит излучение, является прозрачной, т. е. если мнимая часть диэлектрической проницаемости равна нулю. Эффекты, связанные с поглощением волн, рассматривались в работе⁴⁸.

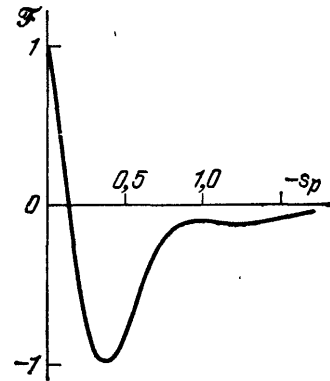


Рис. 5. График функции $\mathcal{F}(s_p)$, определяющей влияние многократного рассеяния на излучение Вавилова — Черенкова

5. МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ В КРИСТАЛЛАХ

5.1. Возможность стохастического движения заряженной частицы в кристалле

Мы рассмотрели влияние многократного рассеяния на излучение быстрой частицы, движущейся в аморфной среде. При этом было показано, что эффект существенно зависит от соотношения между средним квадратом угла многократного рассеяния частицы на длине когерентности и квадратом характерного угла ее излучения и возрастает с ростом отношения этих величин. Многократное рассеяние может оказать влияние на излучение заряженной частицы, движущейся не только в аморфной, но и в кристаллической среде. При этом многократное рассеяние будет происходить не на отдельных

атомах, а на группах атомов, например, на цепочках атомов в случае движения частицы вблизи кристаллографической оси.

Множественное рассеяние обычно связывается со стохастичностью и поэтому на первый взгляд кажется, что ему нет места при движении частицы в кристалле, представляющем собой регулярную структуру. В действительности, однако, стохастичность может возникнуть и при движении в кристалле, но причина ее будет лежать не в беспорядочном расположении атомов, как это имеет место в аморфном теле, а в особенностях самой динамики движения частицы в кристалле. Дело в том, что, как хорошо известно⁴⁹⁻⁵¹, даже при движении частицы в сравнительно простых полях, зависящих от двух координат, движение может носить не обязательно регулярный, но и стохастический характер. Все определяется числом интегралов движения в рассматриваемой задаче. Так, например, в случае системы с двумя степенями свободы, обладающей двумя интегралами движения, любое финитное движение будет регулярным, квазипериодическим. Если же имеется только один интеграл, то движение будет стохастическим.

Именно такая ситуация имеет место при движении быстрой заряженной частицы в кристалле под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей (оси z). В этом случае, как известно^{52,53}, изменение прицельного параметра между последовательными соударениями частицы с атомами решетки **мало** по сравнению с прицельным параметром. Движение частицы в кристалле в этих условиях определяется, в основном, непрерывным потенциалом цепочек атомов, расположенных параллельно оси z , т. е. потенциалом решетки, усредненным по координате z

$$U(\rho) = \frac{1}{T} \int dz \sum_k u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (5.1)$$

где $u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ — потенциальная энергия взаимодействия частицы с атомом кристалла, находящимся в точке \mathbf{r}_k , а $\rho = (x, y)$ — координаты в плоскости, ортогональной оси z .

В таком усредненном поле, очевидно, будет сохраняться составляющая импульса, частицы p_z , параллельная оси z . В плоскости же, перпендикулярной оси z , движение будет определяться уравнением

$$\ddot{\rho} = -\frac{1}{E_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho), \quad (5.2)$$

где $E_{\parallel} = (p_z^2 + m^2)^{1/2}$, $E_{\parallel} \approx E$.

Таким образом, мы приходим к задаче о двумерном движении частицы в поле $U(\rho)$.

Потенциал $U(\rho)$, в котором происходит движение частицы в кристалле, является периодической функцией координат x и y , поэтому может сложиться впечатление, что движение в таком поле может быть только регулярным, квазипериодическим. Но это не так. Движение частицы в плоскости (x, y) может быть и регулярным, и хаотическим. Все определяется числом интегралов движения уравнения (5.2).

Один интеграл движения (5.2) хорошо известен^{17,52,53}. Это интеграл энергии поперечного движения

$$E_{\perp} = \frac{1}{2} E \dot{\rho}^2 - U(\rho), \quad (5.3)$$

В зависимости от величины E_{\perp} движение частицы может быть как финитным (каналирование), так и инфинитным (надбарьерное движение) в плоскости (x, y) .

Если, кроме E_{\perp} , существует второй интеграл движения, то переменные в уравнении (5.2) разделяются и движение частицы в поле $U(\rho)$ будет регулярным. Существование второго интеграла движения в рассматриваемой

задаче, однако, вовсе не является обязательным. Напротив, как будет показано ниже, очень часто второй интеграл движения отсутствует. Движение частицы в кристалле в этом случае будет хаотическим. Таким образом, и в кристалле возможно нерегулярное движение частицы, причем этот вывод в равной степени относится к движению как каналированных, так и надбарьерных частиц.

Проведенное выше рассмотрение является классическим. Такое рассмотрение законно, если эффективная константа взаимодействия частицы с атомами решетки в пределах длины когерентности велика по сравнению с единицей и, кроме того, велико число квантовых состояний, определяющих движение частицы в кристалле. Указанные условия выполняются при достаточно больших энергиях E и малых значениях углов падения частиц на кристалл ψ ^{10,18}.

5.2. Регулярные и нерегулярные движения релятивистских электронов при аксиальном каналировании

В этом разделе мы рассмотрим движение релятивистского электрона в кристалле в условиях аксиального каналирования и покажем, что оно может быть как регулярным, так и нерегулярным.

В уравнения движения (5.2) входит потенциальная энергия $U(\rho)$ и мы должны иметь конкретное выражение для этой функции. В качестве примера рассмотрим движение релятивистского электрона в кристалле кремния вдоль оси $\langle 110 \rangle$. Эквипотенциальные поверхности непрерывной потенциальной энергии

$$U(\rho) = \text{const} \quad (5.4)$$

в этом случае изображены на рис. 6. Цифры у линий соответствуют значениям $U(\rho)$ в эВ. В центре ячейки эта величина принята равной нулю. Вычисления выполнены с учетом тепловых колебаний атомов в решетке, соответствующих комнатной температуре. В качестве потенциала отдельного атома решетки использован потенциал Мольера⁵³.

Функция $U(\rho)$ имеет глубокие минимумы при значениях координат, определяющих положения цепочек атомов в плоскости (x, y) , и седловые точки на прямых, соединяющих ближайшие цепочки. Каналированные электроны в рассматриваемом случае в зависимости от величины E_{\perp} могут двигаться в поле либо одной, либо двух цепочек атомов.

Изменение характера движения электрона естественно ожидать при таких значениях E_{\perp} , когда электрон имеет возможность попасть в область с отрицательной кривизной потенциальной энергии, где его движение является неустойчивым⁵⁴. Кривизна заведомо отрицательна в некоторой окрестности седловой точки, рассмотрим поэтому движение электрона при попереч-

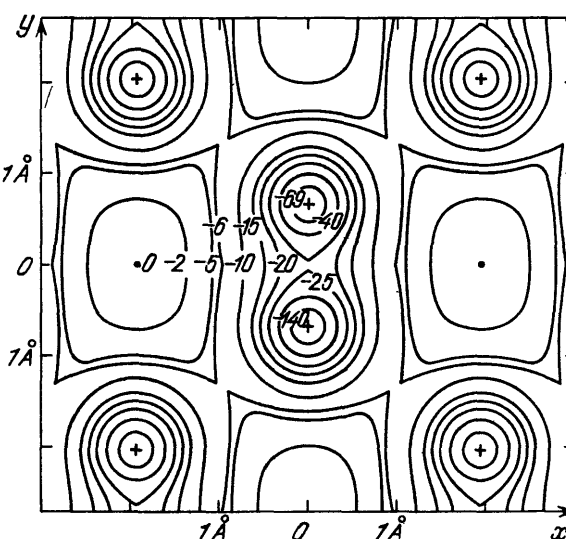


Рис. 6. Эквипотенциальные поверхности непрерывной потенциальной энергии $U(\rho)$ взаимодействия электрона с кристаллом кремния при движении частицы вдоль оси $\langle 110 \rangle$

ных энергиях, сравнимых со значением потенциальной энергии в седловой точке $U_c \approx -24\text{эВ}$.

Для того чтобы получить ответ на вопрос о существовании второго интеграла движения уравнения (5.2) в рассматриваемом случае $E_\perp \sim U_c < 0$ удобно воспользоваться методом сечений Пуанкаре^{50,51}. Этот метод особенно эффективен для систем с двумя степенями свободы, чье фазовое пространство четырехмерно (x, \dot{x}, y, \dot{y}) . В силу сохранения энергии поперечного движения фазовая траектория частицы лежит на трехмерной поверхности

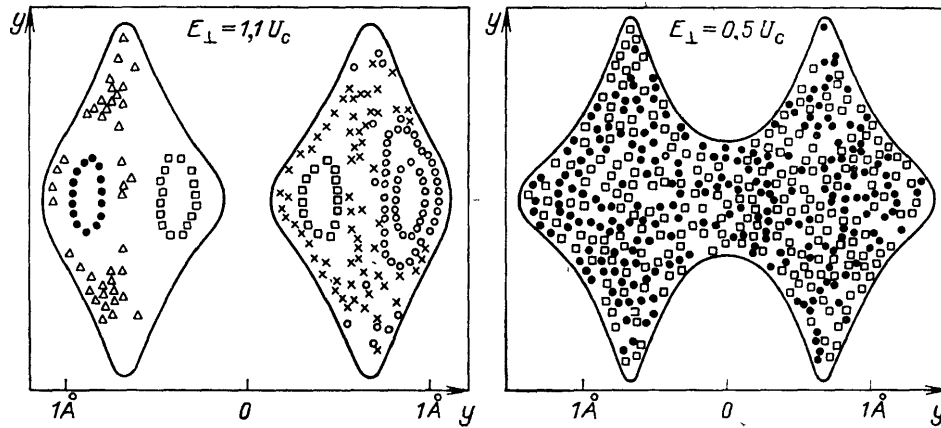


Рис. 7. Сечения Пуанкаре при аксиальном каналировании электронов в кристалле кремния вдоль оси $\langle 110 \rangle$

$E_\perp(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \text{const}$. Рассмотрим точки пересечения фазовой траектории с произвольной плоскостью, например плоскостью (y, \dot{y}) , т. е. положим $x = \text{const}$. Тогда в случае существования второго интеграла движения J совокупность последовательных пересечений траектории выбранной плоскости будет лежать на некоторой кривой $y = y(\dot{y}, J)$, определяемой этим интегралом движения. Если же второй интеграл отсутствует, то точки пересечения будут хаотически распределены по некоторой части этой плоскости, ограниченной сепаратрисой. Сечения Пуанкаре могут быть построены путем численного решения уравнения движения. Эта задача была поставлена и численным образом решена в работе⁵⁵.

На рис. 7 представлены сечения Пуанкаре $x = 0$ при $E_\perp = 1,1U_c$ и $E_\perp = 0,5U_c$. В этих случаях движение частицы происходит соответственно в одной и двух потенциальных ямах. Различные символы отвечают различным начальным условиям, тонкая линия изображает сепаратрису.

На рис. 8 представлены типичные траектории каналированного электрона в плоскости (x, y) , соответствующие различным начальным условиям при $E_\perp = 1,1 U_c$ и $E_\perp = 0,5U_c$.

Полученные результаты показывают, что при $E_\perp = 1,1U_c$ в зависимости от начальных условий наряду с квазипериодическим имеет место хаотическое движение частицы в канале. По мере увеличения E_\perp доля начальных условий, для которых движение является хаотическим, увеличивается. При $E_\perp = 0,5U_c$ явление динамического хаоса проявляется практически для всех начальных условий. Хаотизация обусловлена неустойчивостью траекторий каналированного электрона по отношению к изменению начальных условий в том смысле, что малое изменение начальных условий приводит к экспоненциальному разбеганию первоначально близких траекторий. Такая неустойчивость приводит на больших временах к движению, которое воспринимается как случайное.

Отметим теперь некоторые особенности физических процессов, связанных с хаотическим движением электрона в кристалле.

Прежде всего меняется характер излучения в условиях каналирования. При квазипериодическом движении спектр излучения электрона содержит резкие максимумы при частотах, для которых длина когерентности сравнима с длиной, проходимой электроном за период одного колебания (см., например, ⁵⁶). При хаотическом же движении электрона в канале периодически повторяющиеся участки траектории отсутствуют и, следовательно, спектр излучения в этом случае резких максимумов содержать не будет.

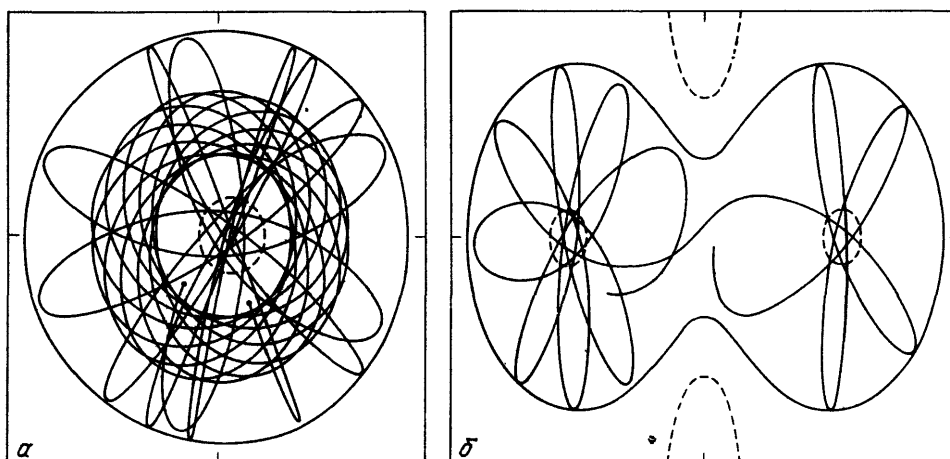


Рис. 8. Регулярные и хаотические траектории каналированного электрона в плоскости, перпендикулярной оси канала, при $E_{\perp} = 1,1 U_c$ (а) и $E_{\perp} = 0,5 U_c$ (б) (штриховые линии ограничивают области с положительной кривизной потенциальной энергии)

Далее, при квазипериодическом движении по траектории вида «розетки» электрон не подходит на близкие расстояния к ядрам атомов решетки. Поэтому выходы неупругих процессов, обусловленных малыми прицельными параметрами (ядерные реакции, рассеяние на большие углы и др.), при таком движении будут подавлены по сравнению с выходами процессов при хаотическом движении электрона в канале, когда он может подойти на близкие расстояния к ядрам. По этой же причине учет явления динамического хаоса должен привести к более быстрому деканалированию релятивистских электронов по сравнению со случаем ⁵⁷, когда это явление во внимание не принимается.

Заметим в этой связи, что в кристалле стохастичность может вызываться и взаимодействием частицы с неоднородностями потенциала кристаллической решетки, а также с примесями. Эти факторы тоже приводят к нарушению устойчивости движения каналированных электронов и, в частности, к ускорению деканалирования частиц ⁵⁸.

5.3. Рассеяние быстрой заряженной частицы цепочками атомов кристалла

Мы рассмотрели движение быстрого электрона в условиях каналирования и показали, что его движение в канале может быть как регулярным, так и хаотическим. Этот вывод, однако, относится не только к каналированным частицам. Действительно, движение электрона в канале становится неустойчивым, если его траектория проходит через область с отрицательной кривизной потенциальной энергии. Для надбарьерных частиц это условие выполняется, поэтому движение их в поле непрерывного потенциала цепочек ато-

мов кристалла также может быть и регулярным и нерегулярным. Характер движения надбарьерной частицы в кристалле при этом может быть определен на основе метода сечений Пуанкаре так же, как это было сделано в предыдущем разделе^{55,59}. Различие между двумя типами движения в этом случае заключается в следующем.

Быстрая частица в условиях надбарьерного движения сталкивается с цепочками атомов, расположенными параллельно оси z , вдоль которой происходит движение. Между последовательными столкновениями может существовать корреляция и может ее не быть. При наличии корреляции изменение прицельного параметра между последовательными столкновениями частицы с цепочками атомов **малó** по сравнению с прицельным параметром, так что траектория будет плавно изменяться с глубиной проникновения частицы в кристалл. Этот случай соответствует регулярному движению.

Отсутствие корреляций означает, что изменение прицельного параметра сравнимо с величиной самого параметра. Этот случай соответствует нерегулярному, хаотическому движению частицы в кристалле. При этом ее столкновения с разными цепочками атомов могут рассматриваться как случайные.

Большой разброс прицельных параметров при последовательных столкновениях соответствует, очевидно, картине хаотического распределения цепочек атомов — цепочки остаются параллельными друг другу и пронизывают весь кристалл, но расстояние между ними и их взаимное расположение в плоскости, ортогональной оси z , является как бы случайным. Иными словами, в этом случае можно исходить из картины, в которой столкновения частицы происходят с нерегулярно расположенными, но тем не менее параллельными друг другу цепочками. Движение же частицы в поле отдельной цепочки атомов определяется непрерывным потенциалом цепочки. Этот потенциал мы в дальнейшем будем считать аксиально симметричным.

Покажем теперь, что соотношение между прицельным параметром b и его изменением Δb при последовательных столкновениях с цепочками атомов зависит от энергии частицы и ориентации кристаллографических осей относительно ее импульса.

Предварительно заметим, что приближение непрерывных цепочек, когда последние выступают как объекты, на которых происходит рассеяние, имеет смысл только в том случае, когда достаточно мал угол ψ между импульсом частицы и осью цепочки, $\psi \ll R/d$ ^{17,52,53}.

В поле непрерывного потенциала отдельной цепочки атомов $U_r(\rho)$ (потенциала вида нити) сохраняется составляющая импульса, параллельная оси цепочки (оси z). При этом рассеяние возможно только вдоль азимутального угла φ в плоскости, ортогональной оси z . Этот угол определяется энергией поперечного движения частицы E_\perp ($E_\perp = E\psi^2/2$) и прицельным параметром цепочки b ^{17,60}

$$\varphi = \varphi(b) = \pi - 2b \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} \left(1 - \frac{U_r(\rho)}{E_\perp} - \frac{b^2}{\rho^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.5)$$

Угол же рассеяния частицы цепочкой ϑ связан с азимутальным углом φ соотношением

$$\vartheta = 2\psi \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (5.6)$$

Вследствие рассеяния на различных цепочках атомов происходит перераспределение частиц по углам φ (рис. 9). Ясно, что корреляции между столкновениями частицы с цепочками атомов могут проявляться только в том случае, если она движется вблизи одной из кристаллических плоскостей, в которой периодически расположены цепочки. Обозначим через α угол между

импульсом частицы и этой плоскостью (рис. 10). Тогда изменение прицельного параметра будет, очевидно, определяться соотношением

$$\Delta b \sim \frac{d_y}{\psi} \max(\alpha, \vartheta), \quad (5.7)$$

где d_y — расстояние между цепочками в плоскости (y, z) .

Мы интересуемся случаем, когда $\Delta b \ll b$. Это условие будет иметь место только, если $\alpha \ll (b/d_y) \psi$ и $|\varphi| \ll 1$. Последнее неравенство справедливо

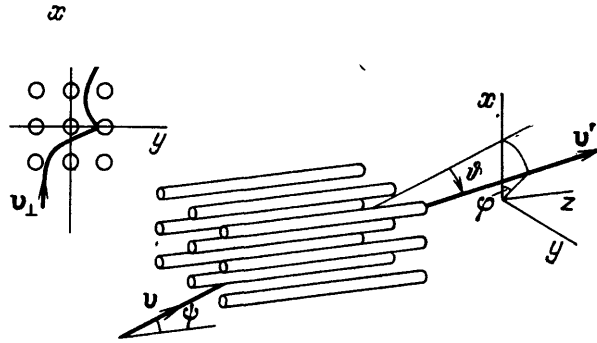


Рис. 9. Многократное рассеяние быстрой частицы на цепочках атомов кристалла

при $E_{\perp} \gg |U_r|$. При таких значениях E_{\perp} , согласно (5.5) и (5.6),

$$\vartheta \approx \psi \varphi, \quad \varphi(b) = \frac{1}{2E_{\perp}} \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} dy U_r((b^2 + y^2)^{1/2}). \quad (5.8)$$

Так как рассеяние происходит в основном при $b \sim R$, то неравенство $\Delta b \ll b$ будет справедливо при условиях

$$\alpha \ll \frac{R\psi}{d_y}, \quad \psi_c \left(\frac{d}{R} \right)^{1/2} \ll \psi, \quad (5.9)$$

где $\psi_c = (2U_0/E)^{1/2}$ — критический угол осевого каналирования^{52,53} и $U_0 = 2Ze^2/d$ (U_0 определяет по порядку величины значение потенциальной энергии $U_r(\rho)$ при $\rho \sim R$).

При выполнении этих условий траектория частицы будет плавно изменяться при последовательных столкновениях с цепочками атомов. Траекто-

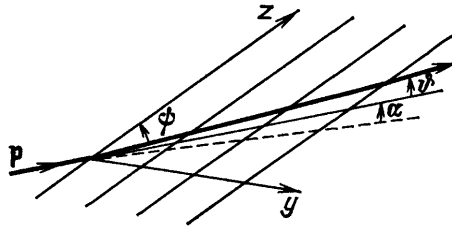


Рис. 10. Углы ψ и α , определяющие ориентацию кристаллографических осей относительно импульса частицы

рия в этом случае будет определяться непрерывным потенциалом плоскости, вблизи которой происходит движение^{52,53}:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} U_p(x), \quad U_p(x) = \frac{1}{T_y} \int_{-\infty}^{\infty} dy U(\rho), \quad (5.10)$$

где x — координата, ортогональная плоскости (y, z) , вблизи которой происходит движение, T_y — линейный размер кристалла вдоль оси y и $U(\rho)$ — потенциальная энергия, определяемая соотношением (5.1).

Таким образом, мы пришли к одномерной задаче о движении частицы в поле $U_p(x)$. Ясно, что движение в таком поле будет регулярным.

Если хотя бы одно из условий (5.9) нарушается, то при последовательных столкновениях частицы с цепочками атомов будет происходить значительный разброс прицельных параметров, $\Delta b \gtrsim b$. Столкновения частицы с разными цепочками при этом можно рассматривать как случайный процесс. Подчеркнем, что мы все время здесь рассматриваем область больших значений энергии падающих частиц. Движение частицы по отношению к цепочкам атомов, как мы видим, может носить как регулярный, так и хаотический характер, причем какая из этих возможностей осуществляется, зависит от углов падения частицы по отношению к кристаллографическим осям и плоскостям и, вообще говоря, от начальных условий. При нарушении условий (5.9) взаимодействие частицы с цепочками можно рассматривать как случайный процесс и описывать его с помощью кинетического уравнения.

Обозначим через $f(\varphi, z)$ функцию распределения частиц в кристалле по азимутальным углам φ на глубине z . Эта величина меняется вследствие рассеяния частиц на цепочках атомов согласно следующему кинетическому уравнению^{61,62}:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\varphi, z) = n d\psi \int_{-\infty}^{\infty} db [f(\varphi + \varphi(b), z) - f(\varphi, z)]. \quad (5.11)$$

Решение этого уравнения с учетом граничного условия $f(\varphi, 0) = \delta(\varphi)$, где $\delta(\varphi)$ — дельта-функция, представляет собой довольно сложную функцию угла φ

$$f(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos k\varphi \cdot \exp \left[-zn d\psi \int_{-\infty}^{\infty} db (1 - \cos \varphi(b)) \right]. \quad (5.12)$$

Существенные упрощения наступают при $\psi \gg \psi_c$, когда траектория частицы в плоскости, ортогональной оси z , близка к прямолинейной. Распределение частиц по углам в этом случае является гауссовым^{17,62}

$$f(\varphi, z) \approx (2\pi q_c z)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\varphi^2}{2q_c z} \right), \quad (5.13)$$

где $\varphi \approx \psi \cdot \varphi$, $q_c = \overline{\varphi^2}$ — средний квадрат угла рассеяния частицы в кристалле на единице длины,

$$\overline{\varphi^2} = n\psi d \int_{-\infty}^{\infty} db \varphi^2(b) \quad (5.14)$$

и $\varphi(b)$ определяется соотношением (5.8).

Если потенциал отдельного атома кристалла представляет собой экранированный потенциал Кулона, то, как легко проверить,

$$q_c = 4\pi^2 Z^2 e^4 n E^{-2} \frac{R}{\psi d}. \quad (5.15)$$

Сравнивая эту величину с отнесенным к единице длины средним квадратом угла многократного рассеяния быстрой частицы в аморфной среде q , находим, что

$$\frac{q_c}{q} \approx \frac{\pi}{2 \ln(183Z^{-1/3})} \frac{R}{\psi d}. \quad (5.16)$$

Таким образом, в широком интервале углов ψ ($\psi_c \ll \psi \ll R/d$ — условия применимости формулы (5.16)) среднее значение квадрата угла многократного рассеяния быстрой частицы в кристалле на цепочках атомов существенно превосходит среднее значение квадрата угла многократного рассеяния в аморфной среде. По этой причине влияние многократного рассеяния на излучение в кристалле может быть значительно больше, чем в аморфной среде и, следовательно, эффект Ландау — Померанчука в случае кристалла может прояв-

ляться более сильно. Благодаря этому открываются новые возможности в исследовании эффекта Ландау — Померанчука с помощью современных ускорителей.

6. ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ИЗЛУЧЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В МОНОКРИСТАЛЛАХ

6.1. Влияние многократного рассеяния на когерентное излучение при малых азимутальных углах рассеяния

Многократное рассеяние частиц приводит, как мы видели, к подавлению тормозного излучения при высоких энергиях в аморфных телах. Оно же приводит и к подавлению когерентного излучения в кристаллах. Чтобы описать этот эффект в кристаллах, необходимо усреднить общую формулу (3.23) для спектральной плотности излучения по углам рассеяния. В кристалле, в отличие от аморфной среды, рассеяние происходит только по азимутальному углу φ (см. рис. 9). Если этот угол мал ($\overline{\varphi^2} l_c \ll 1$), то согласно (5.13), распределение частиц по углам является гауссовым. Мы начнем рассмотрение с этого случая, являющегося простейшим.

Если азимутальный угол рассеяния φ мал, то входящий в формулу (3.23) угол рассеяния частицы θ (см. рис. 9) будет равен $\theta \approx \psi\varphi$. Процесс рассеяния по углам θ поэтому также будет гауссовым. При этом плотность вероятности того, что углы рассеяния в кристалле $\theta_n = \psi\varphi(n\Delta)$ в моменты времени $\tau_n = n\Delta$, где $n = 1, 2, \dots, N$, $\Delta = \tau/N$ и $N \gg 1$, будут лежать в интервалах $(\theta_n, \theta_n + d\theta_n)$, определяется соотношением

$$d\mathcal{P}_N = \frac{d\theta_1 \dots d\theta_N}{(2\pi q_c \Delta)^{N/2}} \exp \left[-\frac{\theta_1^2}{2q_c \Delta} - \dots - \frac{(\theta_N - \theta_{N-1})^2}{2q_c \Delta} \right]. \quad (6.1)$$

Используя это выражение, можно представить среднее значение спектра излучения быстрой частицы в кристалле в виде функционального интеграла^{23,44}

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{P}_N \frac{d\mathcal{E}[\theta(\tau)]}{d\omega} = \int d_W \theta(\tau) \frac{d\mathcal{E}[\theta(\tau)]}{d\omega}. \quad (6.2)$$

Формула (6.2) отличается от соответствующей формулы для аморфной среды (4.21) тем, что в кристалле угол рассеяния $\theta(\tau)$ имеет только одну компоненту, тогда как в аморфной среде $\theta(\tau)$ содержит две компоненты. Средние углы рассеяния в кристалле и в аморфной среде, как показывает формула (5.16), могут сильно различаться. Отсюда можно заключить, что формула для среднего значения спектра излучения в кристалле будет отличаться от формулы для среднего значения спектра излучения в аморфной среде тем, что в (4.22) следует заменить $Q_{\pm\omega}^2 \rightarrow Q_{\pm\omega}$ и $q \rightarrow 2q_c$. Таким образом мы приходим к следующему выражению для $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle_c$ ^{23,44}:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{d\mathcal{E}_{coh}}{d\omega} \Phi(s_c) \frac{1}{2\gamma^2 (1 - v\beta^{1/2})}, \quad (6.3)$$

где

$$\frac{d\mathcal{E}_{coh}}{d\omega} = \frac{2e^2}{3\pi} \gamma^2 q_c T$$

— соответствующий результат теории когерентного излучения быстрой заряженной частицы в кристалле^{5,17},

$$\Phi(s_c) = 48s_c^2 \left\{ -\frac{\pi}{4} + \int_0^{\infty} dx \frac{\exp(-2s_c x)}{(x \operatorname{sh} x)^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \left[\sin 2s_c x + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} (\sin 2s_c x + \cos 2s_c x) \right] \right\} \quad (6.4)$$

и $s_c = (1/4) \gamma^2 (1 - v\beta^{1/2}) (\omega/\omega_c)^{1/2}$, $\omega_c = q_c \gamma^4/2$.

Формула (6.3) определяет влияние как многократного рассеяния, так и поляризации среды на интенсивность когерентного излучения быстрой частицы в кристалле при $\epsilon v^2 < 1$ *).

При малых и больших значениях s_c функция $\Phi(s_c)$ имеет следующие асимптотики:

$$\Phi(s_c) \approx \begin{cases} 1, & s_c \gg 1, \\ 6\eta s_c, & s_c \ll 1, \end{cases} \quad (6.5a)$$

где

$$\eta = \int_0^\infty dx x^{-1/2} (\operatorname{ch} x - 1) (\operatorname{sh} x)^{-3/2} \approx 1,33.$$

Таким образом, при $s_c \gg 1$ формула (6.3) переходит в соответствующий результат теории когерентного излучения релятивистских частиц на цепочках атомов кристалла с учетом влияния поляризации среды на излучение

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} \frac{1}{2\gamma^2 (1 - v\epsilon^{1/2})}. \quad (6.6)$$

При $s_c \rightarrow 0$ формула (6.3) уточняет коэффициент в соответствующем результате работы ¹², найденном на основе качественных оценок. В этом предельном случае, согласно (6.5б),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c \approx \frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2}. \quad (6.7)$$

Мы видим, что при $s_c \ll 1$ ($\omega \ll \omega_c$) имеет место значительное подавление когерентного излучения, обусловленное многократным рассеянием.

При произвольных значениях s_c функция $\Phi(s_c)$ дана на рис. 3. Приведенные на этом рисунке кривые показывают, что функции $\Phi(s_c)$ и $\Phi_m(s)$ весьма близки друг к другу. Значения же переменных s_c и s при заданных E и ω могут сильно различаться, поэтому условия, при которых происходит изменение характера излучения в кристалле и в аморфной среде, различны.

Сравним теперь основные характеристики излучения быстрых частиц в кристалле и в аморфной среде в области малых частот.

Прежде всего отметим, что величина $d\mathcal{E}_{\text{coh}}/d\omega$ связана со спектральной плотностью излучения частицы в аморфной среде (4.5) соотношением

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{coh}}}{d\omega} = \frac{q_c}{q} \frac{d\mathcal{E}_{\text{BH}}}{d\omega}. \quad (6.8)$$

В интересующем нас интервале углов ψ ($\psi_c \ll \psi \ll R/d$), согласно (5.16), $q_c \gg q$, поэтому $\mathcal{E}'_{\text{coh}} \gg \mathcal{E}_{\text{BH}}$.

В области частот $\omega \gg \omega_p$, как известно ³, диэлектрическая проницаемость определяется соотношением $\epsilon = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$, где $\omega_p = (4\pi nZe^2/m)^{1/2}$ — плазменная частота. Входящая в (4.26) и (6.3) величина $2\gamma^2 (1 - v\epsilon^{1/2})$ в этой области частот может быть записана в виде

$$2\gamma^2 (1 - v\epsilon^{1/2}) \approx 1 + \frac{\gamma^2 \omega_p^2}{\omega^2}.$$

Формулы (4.26) и (6.3) при этом показывают, что как в аморфной среде, так и в кристалле поляризация среды оказывает влияние на излучение в области частот $\omega \lesssim \gamma\omega_p$. Многократное же рассеяние в аморфной среде и в кристалле оказывает влияние на излучение соответственно при $\omega \lesssim \omega_{\text{ЛП}}$ и $\omega \lesssim (2q_c/q)\omega_{\text{ЛП}}$. При $\psi_c \ll \psi \ll R/d$, согласно (5.16), $q_c \gg q$, поэтому изменение характера излучения в кристалле происходит при более низких энергиях и в большей области частот, чем в аморфной среде.

*) При $\epsilon = 1$ аналогичный результат был получен недавно ⁶³ и на основе метода кинетического уравнения.

На рис. 11 представлены результаты вычисления спектров излучения электронов с $\varepsilon = 1$ и 10 ГэВ в аморфной среде (штриховые кривые) и в кристалле (сплошные кривые) в случае, когда пучок падает на кристалл вольфрама под углом $\psi = 2$ мрад к кристаллографической оси $\langle 100 \rangle$. В качестве потенциала отдельного атома среды в вычислениях использован экранированный потенциал Кулона.

Полученные результаты показывают, что при излучении в кристалле область частот, в которой существенное влияние на излучение оказывает многократное рассеяние, значительно больше соответствующей области частот для

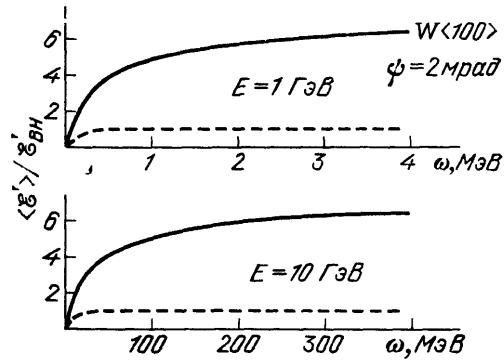


Рис. 11. Спектры излучения электронами фотонов малых энергий в кристалле вольфрама при движении под углом $\psi = 2 \cdot 10^{-3}$ рад к оси $\langle 100 \rangle$ (сплошные кривые) и в аморфной среде (штриховые кривые)

аморфной среды. Важным также является то, что при не очень высоких энергиях частиц в аморфной среде влияние многократного рассеяния на излучение нельзя рассматривать независимо от влияния поляризации среды, тогда как в кристалле такое рассмотрение проводить можно. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\omega_{\text{ЛП}} \ll \gamma \omega_p \ll \frac{2q_0}{q} \omega_{\text{ЛП}}.$$

Указанные неравенства, в частности, выполняются в случае, когда электрон с $E = 1$ ГэВ движется в кристалле вольфрама под углом $\psi = 2$ мрад к оси $\langle 100 \rangle$. При $E = 10$ ГэВ, как легко проверить, выполняются условия

$$\gamma \omega_p < \omega_{\text{ЛП}} \ll \frac{2q_0}{q} \omega_{\text{ЛП}}$$

и, следовательно, для этой энергии существует область частот, в которой, как в кристалле, так и в аморфной среде, влияние на излучение многократного рассеяния можно рассматривать независимо от влияния поляризации среды.

Таким образом, при движении ультрарелятивистских частиц в кристалле подавление когерентного излучения, обусловленное многократным рассеянием (аналог эффекта Ландау — Померанчука подавления тормозного излучения в аморфной среде), может проявляться при значительно более низких энергиях частиц, чем в аморфной среде.

До сих пор речь шла о динамической стохастичности, возникающей при движении частицы в заданном потенциале. Но в кристалле есть еще и другая стохастичность, связанная с тепловыми колебаниями атомов в решетке. Она тоже приводит к изменению спектра излучения — к небольшому уменьшению (на 10—25%) некогерентной части поперечника излучения по сравнению с результатом Бете — Гайтлера. В дальнейшем мы не будем касаться этого вопроса. Он впервые исследован Тер-Микаеляном¹ и подробно изложен в его монографии⁵. Влияние эффектов каналирования и надбарьерного движения быстрых частиц в кристалле на некогерентную часть сечения излучения исследовано в работах^{64,65}.

6.2. Влияние многократного рассеяния на когерентное излучение при больших азимутальных углах рассеяния

В предыдущем разделе было рассмотрено влияние многократного рассеяния на когерентное излучение быстрых частиц в кристалле при малых значениях азимутального угла рассеяния. При прохождении частицы через кристалл могут быть выполнены также условия, когда характерные значения азимутальных углов ее рассеяния на цепочках атомов не будут малы по сравнению с единицей. Рассеяние в этом случае не будет гауссовым процессом, поэтому этот случай требует особого исследования. Такое исследование может быть проведено в общем виде, если излучение носит дипольный характер, т. е. при выполнении условия $\gamma^2 \vartheta_l^2 \ll 1^*$.

Спектральная плотность излучения релятивистской частицы в дипольном приближении определяется формулой (4.1). Мы будем интересоваться далее излучением в области частот, для которых длина когерентности $l_c = 2\gamma^2/\omega$ велика по сравнению с длиной $2R/\psi$, на которой ускорение частицы при столкновении с каждой цепочкой атомов отлично от нуля. В этой области частот входящая в (4.1) величина $|\mathbf{w}(\nu)|^2$ определяется соотношением (4.2), в котором под углом ϑ_k следует понимать угол рассеяния при столкновении с k -й цепочкой и t_k — момент столкновения.

Соотношение (4.2) необходимо усреднить по углам рассеяния ϑ . Как и прежде, будем интересоваться излучением в том случае, когда столкновения частицы с разными цепочками являются случайными. Учитывая, что рассеяние при столкновении с каждой цепочкой связано с изменением азимутального угла φ (см. формулу (5.5)), получим после усреднения по φ ^{44, 66}

$$\langle |\mathbf{w}|^2 \rangle = 2\psi^2 \sum_{m, k} \cos \nu (t_m - t_k) (\langle \cos \varphi \rangle^{|m-k|} - \langle \cos \varphi \rangle^{|m-k+1|}), \quad (6.9)$$

где

$$\langle \cos \varphi \rangle = (\bar{a})^{-1} \int db \cos \varphi(b)$$

и \bar{a} — среднее расстояние между цепочками, $\bar{a} = (nd)^{-1/2}$.

Заметим, что в аморфной среде после усреднения $|\mathbf{w}|^2$ по углам двойная сумма по рассеивающим центрам (4.2) перешла в одинарную. В результате этого зависимость $\langle |\mathbf{w}|^2 \rangle$ от величин t_k выпала. В случае же кристалла двойная сумма после усреднения по углам остается и, следовательно, сохраняется зависимость величины $\langle |\mathbf{w}|^2 \rangle$ от t_k . Поэтому формула (6.9) должна быть еще усреднена по случайным моментам времен столкновения частицы с цепочками атомов t_k .

Процедура усреднения формулы (6.9) по t_k подробно описана в работе ⁴⁴ и мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе, а приведем только результирующее выражение для среднего значения $|\mathbf{w}|^2$ в предположении, что толщина мишени T значительно больше длины когерентности l :

$$\langle |\mathbf{w}|^2 \rangle = 4T\psi^2 \frac{\langle \sin^2(\varphi/2) \rangle}{\bar{\tau}} \frac{\nu^2}{\nu^2 + 4(\langle \sin^2(\varphi/2) \rangle / \bar{\tau})^2}, \quad (6.10)$$

где $\bar{\tau} = \bar{a}/\psi$ — среднее время свободного пробега частицы между последовательными столкновениями с цепочками атомов. При этом среднее значение спектральной плотности излучения приобретает следующий вид:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = T \frac{e^2 \psi \omega_d}{3\pi \gamma^2 (1 - v\epsilon^{1/2})} F(x), \quad (6.11)$$

где $\omega_d = 4\gamma^2 \langle \sin^2(\varphi/2) \rangle / \bar{\tau}$, $x = (2\omega/\omega_d) (1 - v\epsilon^{1/2})$ и

$$F(x) = x \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) \operatorname{arccotg} x + 3x^2 \left[1 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]. \quad (6.12)$$

*) Это условие соответствует малости поперечного смещения излучающей частицы на длине когерентности $l\vartheta_l$ по сравнению с длиной λ излученной волны ³⁵.

Эта формула справедлива при произвольных значениях азимутального угла рассеяния. Требуется только, чтобы выполнялись условия $l \gg 2R/\psi$ и $\gamma^2 \bar{\theta}_i^2 \ll 1$.

Рассмотрим некоторые предельные случаи формулы (6.11) при $\omega \gg \gamma\omega_p$.

Функция $F(x)$ при малых и больших значениях x имеет следующие асимптотики

$$F(x) \approx \begin{cases} 1 - \frac{7}{20x^2} + \dots, & x \gg 1, \\ \frac{3}{4}x(\pi + 2x \ln(ex^2) + \dots), & x \ll 1. \end{cases} \quad (6.13a)$$

$$(6.13b)$$

Аргумент этой функции в интересующей нас области частот может быть записан в виде $x = (\omega/\omega_d) [1 + (\gamma^2 \omega_p^2/\omega^2)]$. Из последнего соотношения, а также из асимптотик (6.13) вытекает, что спектральная плотность излучения быстрой частицы в кристалле существенно зависит от соотношения между частотами ω , $\gamma\omega_p$ и ω_d .

При выполнении условия $\omega_d \ll \gamma\omega_p$, согласно (6.11) и (6.13a), имеем

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = T \frac{2e^2 \psi^2 \omega_d}{3\pi [1 + (\gamma^2 \omega_p^2/\omega^2)]}. \quad (6.14)$$

Если кроме условия $\omega_d \ll \gamma\omega_p$ выполняется неравенство $\psi \gg \psi_c$, то эта формула переходит в соответствующий результат теории когерентного излучения (6.6) с учетом влияния поляризации среды на излучение.

Частота ω_d зависит от соотношения между ψ и ψ_c . Максимум ω_d достигается при $\psi \lesssim \psi_c$, т. е. когда характерные значения азимутальных углов рассеяния сравнимы с единицей. В этой области углов ψ имеем по порядку величины $\omega_d \sim 4\gamma^2 n d R \psi_c$. Сравнивая это значение ω_d с $\gamma\omega_p$, находим, что

$$\left(\frac{\omega_d}{\gamma\omega_p} \right)^2 \sim 4\gamma n d R^2.$$

Последнее соотношение показывает, что при $\psi \lesssim \psi_c$ в области достаточно больших γ всегда может быть выполненным неравенство $\omega_d \gg \gamma\omega_p$. В этом случае существуют три области частот ω , в которых излучение существенно различается: $\omega > \omega_d$, $\omega_d > \omega > \gamma\omega_p$ и $\gamma\omega_p > \omega$.

В области частот $\omega > \omega_d$ (по-прежнему предполагается выполненным условие $l \gg 2R/\psi$) формула (6.11) переходит в (6.14). Многократное рассеяние и поляризация среды в этой области частот не оказывают влияния на излучение. Излучение при этом определяется только особенностями взаимодействия частицы с полем отдельной цепочки атомов.

При $\omega_d > \omega > \gamma\omega_p$, согласно (6.11) и (6.13b),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle_c = \frac{1}{2} T e^2 \omega \psi^2. \quad (6.15)$$

В этой области частот многократное рассеяние частицы на цепочках атомов приводит к быстрому уменьшению спектральной плотности излучения с уменьшением частоты излученного фотона.

Заметим, что соотношение (6.15) может быть легко получено из оценочной формулы (3.16). Действительно, при $\psi \lesssim \psi_c$, согласно (6.6) и (5.12), $\bar{\theta}^2 \approx \approx 2\psi^2$ ¹⁷. Подставляя это соотношение в (3.16), приходим в дипольном приближении с точностью до численного коэффициента к формуле (6.15).

Сравнивая этот результат с соответствующим результатом для аморфной среды (3.18), видим, что при движении в кристалле многократное рассеяние частицы на цепочках атомов оказывает значительное влияние на излучение не только при $\gamma^2 \bar{\theta}^2 \gg 1$, как это имело место в аморфной среде, но и в случае, когда $\gamma^2 \bar{\theta}_i^2 \ll 1$. Связано это с нарушением условия гауссовости распределения частиц в кристалле по углам при $\psi \lesssim \psi_c$.

При $\omega < \gamma\omega_p$ формула (6.11) переходит в (6.14). В этой области частот значительное влияние на излучение частицы в кристалле оказывает поляризация среды.

Полученные в этом разделе формулы справедливы, если выполняется условие дипольности излучения частицы в кристалле $\gamma^2\bar{\vartheta}_l^2 \ll 1$. При $\psi \sim \psi_c$ по порядку величины $\bar{\vartheta}_l^2 \sim \psi_c^2$ и неравенство $\gamma^2\psi_c^2 \ll 1$ приводит к ограничению на энергию частицы E . Заметим в этой связи, что существует интервал энергий E , в котором одновременно выполняются условия $\gamma\psi_c \ll 1$ и $\gamma\omega_p \ll \omega_d$. А именно, эти неравенства выполняются, если $(4ndR^2)^{-1} \ll \gamma \ll md/4Ze^2$. Таким образом, существует интервал энергий E , в котором многократное рассеяние быстрой частицы в кристалле существенно сказывается на ее излучении при выполнении условия дипольности излучения.

6.3. Влияние многократного рассеяния на излучение в тонких слоях вещества

Полученные до сих пор результаты относились к случаю, когда толщина мишени велика по сравнению с длиной когерентности: $T \gg l$. Длина, на которой формируется излучение быстрой частицы в веществе, однако, быстро растет с ростом энергии частицы и с уменьшением частоты излученного фотона. Поэтому при достаточно больших E и малых ω и T может быть выполнено условие $T \ll l$, когда излучение формируется в **бóльшей** области, чем толщина мишени T . Покажем, что многократное рассеяние в этом случае, также как и при $T \gg l$, может оказать существенное влияние на излучение^{11,30,40}.

Спектральная плотность излучения при $T \ll l$, согласно (3.12), определяется только углом рассеяния частицы мишенью ϑ . Углы рассеяния различных частиц различны, поэтому формула (3.12) должна быть усреднена по распределению $f(\vartheta)$ вышедших из мишени частиц по углам

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \int d\vartheta f(\vartheta) \frac{d\mathcal{E}(\vartheta)}{d\omega}. \quad (6.16)$$

Обратим внимание на то, что при больших толщинах мишени $T \gg l$ мы проводили усреднение по углам рассеяния частицы внутри мишени. В рассматриваемом же случае усреднение проводится по углам рассеяния на выходе из мишени.

При малых и больших по сравнению с γ^{-2} значениях среднего квадрата угла рассеяния частицы $\bar{\vartheta}^2 = \int d\vartheta f(\vartheta) \vartheta^2$ формула (6.16) имеет следующие асимптотики:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right\rangle = \frac{2e^2}{3\pi} \begin{cases} \gamma^2\bar{\vartheta}^2, & \gamma^2\bar{\vartheta}^2 \ll 1, \\ 3 \ln \gamma^2\bar{\vartheta}^2, & \gamma^2\bar{\vartheta}^2 \gg 1. \end{cases} \quad (6.17a)$$

$$(6.17b)$$

Соотношения (6.17) показывают, что при малых и больших значениях параметра $\gamma^2\bar{\vartheta}^2$ излучение существенно различается. Связано это с тем, что фазы волн, излученных электроном в направлениях, близких к импульсам падающей и рассеянной частиц, противоположны, поэтому в зависимости от того, как эти волны будут интерферировать между собой, различным будет и излучение. Интерференция же указанных волн определяется параметром $\gamma\vartheta$ (см. раздел 3.2). Формула (6.16) справедлива как при излучении в аморфной среде, так и в кристаллической. Различие между спектрами излучения в этих случаях будет связано только с конкретным видом функции распределения $f(\vartheta)$, по которой производится усреднение.

В аморфной среде распределение частиц по углам является гауссовым со средним квадратом угла многократного рассеяния (3.17), пропорциональным толщине мишени T . Формула (6.17a) в этом случае дает с логарифмической точностью результат Бете — Гайтлера (4.5).

При движении в кристалле под малым углом ψ к одной из кристаллических осей, как показано в разделе 5.3, в широком интервале углов ψ ($\psi_c \ll \psi \ll R/d$) средние значения углов рассеяния существенно больше средних значений углов рассеяния в аморфной среде. Формула (6.17a) в этом случае дает результат, совпадающий с соответствующим результатом теории когерентного излучения (6.8), согласно которому в области малых частот интенсивность излучения электронов в кристалле \mathcal{E}'_{coh} значительно превосходит (по порядку величины в $R/4\psi d$ раз) интенсивность излучения \mathcal{E}'_{BH} в аморфной среде. Таким образом, усиление излучения электрона в кристалле

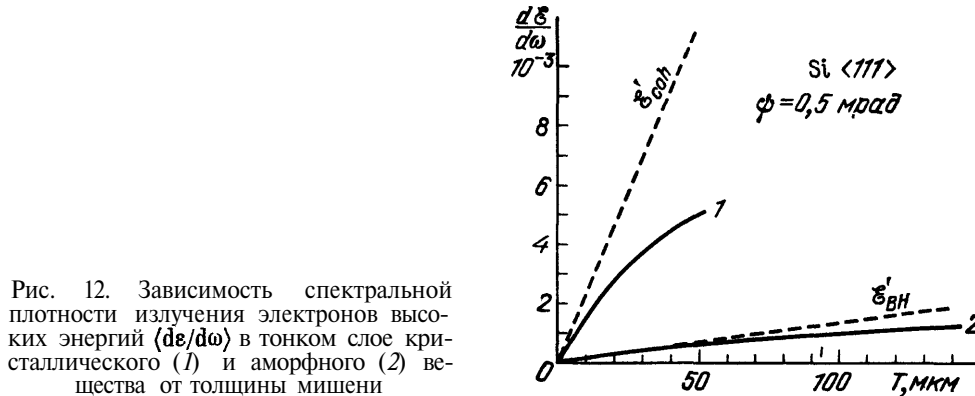


Рис. 12. Зависимость спектральной плотности излучения электронов высоких энергий $\langle d\mathcal{E}/d\omega \rangle$ в тонком слое кристаллического (1) и аморфного (2) вещества от толщины мишени

по сравнению с излучением в аморфной среде обусловлено увеличением средних углов рассеяния частицы в кристалле по сравнению со средними углами рассеяния в аморфной среде.

С ростом толщины мишени условие $\gamma^2 \bar{\theta}^2 \ll 1$ нарушается, причем в кристалле это условие нарушается гораздо быстрее, чем в аморфной среде. При $\gamma^2 \bar{\theta}^2 \gg 1$, согласно (6.17б), интенсивность излучения практически не зависит от T . Это означает, что при $\gamma^2 \bar{\theta}^2 \gg 1$ спектральная плотность излучения практически не зависит от числа соударений частицы с атомами среды, т. е. в этом случае имеет место эффект подавления излучения (тормозного в аморфной среде, когерентного — в кристалле) быстрых частиц в тонком слое вещества. Заметим, что формула (6.17б) отличается от соответствующих формул (4.7) и (6.7), описывающих подавление излучения в толстом слое аморфного и кристаллического вещества. Формулы (4.7) и (6.7) существенно зависят от T , E и ω ($\mathcal{E}'_{лп} \sim \langle \mathcal{E}'_c \rangle \sim T\omega^{1/2}/E$), тогда как в (6.17б) такие зависимости практически отсутствуют.

На рис. 12 представлена зависимость спектра излучения ультрарелятивистских электронов в тонком слое ($T \ll l$) аморфного и кристаллического вещества от толщины мишени T . Вычисления выполнены по формуле (6.1б) в предположении, что пучок падает на кристалл кремния под углом $\psi = 0,5$ мрад к оси $\langle 111 \rangle$ (кривая 1) и на разориентированный кристалл (аморфная среда, кривая 2).

Полученные результаты показывают, что при взаимодействии частиц с кристаллом могут быть созданы более благоприятные условия для изучения эффекта подавления излучения релятивистских частиц в тонком слое вещества, чем при взаимодействии с аморфной мишенью. А именно, эффект подавления когерентного излучения проявляется при меньших значениях T и E и в большем интервале частот ω , чем эффект подавления тормозного излучения.

Мы рассматривали до сих пор случай, когда углы падения частиц на кристалл велики по сравнению с критическим углом каналирования. Формулами (6.17), однако, можно пользоваться и при $\psi \lesssim \psi_c$. Требуется только, чтобы выполнялось условие $T \ll l$. Средние значения квадрата угла

рассеяния частицы кристаллом в этом случае по порядку величины равны ψ_c^2 ^{52, 53}. При этом формулы (6.17), справедливые при $T \ll l$, существенно отличаются от формул для спектра излучения каналированных частиц при $T \gg l$. В последнем случае спектр излучения зависит от T и $\omega(\epsilon'_{ch} \sim T\omega$ ^{17, 67}), тогда как при $T \ll l$ такие зависимости отсутствуют.

Отметим в заключение, что условие $T \ll l$ может быть выполнено в ряде экспериментов, аналогичных проводимым в последние годы по изучению излучения каналированных частиц ультравысоких энергий в тонких кристаллах^{68–70}. Для этого требуется только рассматривать излучение в более тонких кристаллах, чем кристаллы, используемые в экспериментах^{68–70}, и исследовать излучение при более низких частотах, чем характерные частоты излучения каналированных частиц, на исследование излучения, при которых было обращено основное внимание в этих экспериментах. В частности, при каналировании позитронов с $E = 20$ ГэВ через кристалл кремния толщиной $T = 100$ мкм (условия экспериментов^{68, 70}) требование $T \ll l$ выполняется в области частот $\omega \lesssim 5$ МэВ. При использовании же более тонких кристаллов область частот, в которой выполняется условие $T \ll l$, расширяется.

* * *

Заметим в заключение, что в настоящее время ведутся широкие исследования по проблеме взаимодействия релятивистских частиц с кристаллами и с экспериментальной точки зрения. Полученные данные находятся в качественном согласии с изложенными в данном обзоре результатами. Отметим некоторые из них.

Измеренные ориентационные зависимости угловых распределений рассеянных кристаллом частиц свидетельствуют о том, что в широком интервале углов падения частиц на кристалл по отношению к плотно упакованным

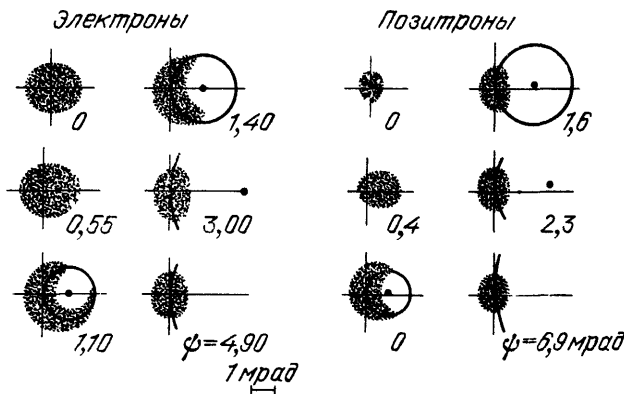


Рис. 13. Угловые распределения рассеянных на кристалле кремния с толщиной 185 мкм электронов и позитронов с энергией 1 ГэВ при различных значениях углов ψ падения частиц на кристалл по отношению к оси $\langle 110 \rangle$ ⁷¹. Точки — направление на ось

атомами кристаллографическим осям, рассеяние происходит, в основном, вдоль азимутального угла (рис. 13), и что средние значения углов рассеяния частиц в кристалле существенно больше средних углов рассеяния в аморфной среде^{71, 72}.

Ориентационные зависимости спектральных и поляризационных характеристик излучения указывают на то, что при прохождении ультрарелятивистских электронов и позитронов через кристаллы могут быть созданы условия, когда проявляются корреляции между последовательными столкновениями частицы с цепочками атомов, и когда корреляции отсутствуют^{5, 68–70, 73–75}. Первая из этих возможностей реализуется при прохождении частиц через кристалл вдоль плотно упакованных цепочек атомов кристаллографических плоскостей и проявляется в существовании резких максимумов в спектрально-угловых распределениях излучения. Типичный пример спектральных распределений излучения в этом случае представлен на рис. 14, Д, Е.

Вторая возможность реализуется при движении под малым углом к одной из кристаллографических осей, но вдали от плотно упакованных атомами кристаллографических плоскостей (см. рис. 14, Б). Излучение в этом случае в области малых частот значительно превосходит излучение частицы в

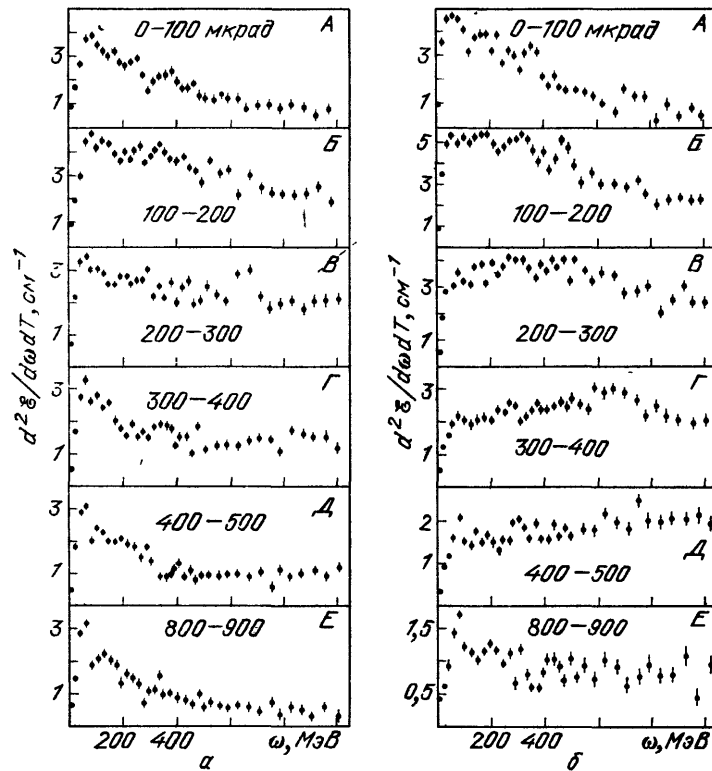


Рис. 14. Спектральная плотность излучения в зависимости от энергии гамма-квантов для различных диапазонов полярных углов ψ входа позитронов с энергией 10 ГэВ в кристалл кремния по отношению к его оси $\langle 111 \rangle$ ⁷⁴.

Толщина кристалла 113 мкм. Границы угловых диапазонов (мкрад) указаны на графиках. Отобраны позитроны, входящие в кристалл вблизи плоскости (110) (а) и вблизи плоскости (112) (б)

аморфной среде, но резкие максимумы в спектре излучения отсутствуют. Имеются также экспериментальные указания на существование эффекта подавления когерентного излучения быстрых частиц на цепочках атомов кристалла в области малых частот (рис. 14, Б и 15).

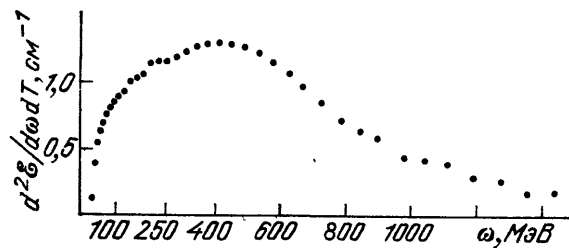


Рис. 15. Спектр излучения электронов с энергией 4,5 ГэВ, падающих на кристалл алмаза толщиной 1,7 мм под углом $\psi = 0,52$ мрад к оси $\langle 100 \rangle$ ⁷⁶

Следует, однако, отметить, что речь может идти только о качественном согласии результатов, упомянутых выше, а также многих других экспериментов с результатами изложенной теории. Связано это с тем, что эксперименты, как правило, проводились при некоторых дополнительных ограничениях, которые при количественном теоретическом анализе сложно учесть. Так, например, ориентационная зависимость средних углов рассеяния элек-

тронов в кристалле измерялась⁷² при условии, что частица при прохождении через кристалл излучает фотон, тогда как при прохождении через тонкий кристалл основная часть частиц падающего пучка проходит мишень без излучения. Разориентация кристаллографических осей относительно падающего пучка в экспериментах^{71,72,74,76} осуществлялась в пределах одной из кристаллографических плоскостей, так что при разориентации на относительно большие углы (ψ порядка нескольких критических углов каналирования ψ_c), частицы могут совершать как хаотическое, так и регулярное движение по отношению к цепочкам атомов.

Такая постановка экспериментов связана с тем, что основное внимание до сих пор обращалось на изучение взаимодействия частиц с кристаллами в условиях каналирования (как осевого, так и плоскостного) и не ставились специальные эксперименты для изучения взаимодействия с кристаллами надбарьерных частиц. Между тем, как показано выше, во взаимодействии надбарьерных частиц с цепочками атомов должно проявляться много важных и интересных эффектов при ультравысоких энергиях. Кроме того, в последние годы появились экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что даже при прохождении электронов ультравысоких энергий через кристаллы вдоль кристаллографических осей происходит весьма быстрое деканалирование частиц, т. е. переход их из подбарьерных в надбарьерные состояния (для электронов с энергией 1 ГэВ, проходящих через кристалл кремния, длина деканалирования составляет несколько десятков микрон^{77,78}), поэтому при прохождении электронов через кристаллы, толщина которых превосходит длину деканалирования, вклад надбарьерных частиц в физические процессы может быть не только значительным, но и определяющим. По этим причинам представляется целесообразным проведение целенаправленных экспериментов по изучению особенностей взаимодействия надбарьерных частиц с цепочками атомов кристалла. Такие эксперименты требуются как для количественной проверки теории, так и для выяснения условий, при которых надбарьерные частицы будут играть определяющую роль во взаимодействиях.

Харьковский физико-технический институт
АН УССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тер-Микаелян М. Л. Интерференционное излучение сверхбыстрого электрона в кристалле: Автореферат канд. диссертации. — М.: ФИАН СССР, 1952; // ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 296.
2. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. // ДАН СССР. 1953. Т. 92. С. 535, 735.
3. Фейнберг Е. Л. // УФН. 1956. Т. 28. С. 193.
4. Feinberg E. L., Pomrančuk I. // Nuovo Cimento Suppl. 1956. V. 3. P. 652.
5. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969.
6. Фейнберг Е. Л. // УФН. 1980. Т. 132. С. 255.
7. Williams E. // K. Danske Vidensk. Selsk. 1935. V. 13. P. 4.
8. Ferretti B. // Nuovo Cimento. 1950. V. 5. P. 118.
9. Ueberall H. // Phys. Rev. 1956. V. 103. P. 1055.
10. Ахиезер А. И., Болдышев В. Ф., Шultzга Н. Ф. // Физ. ЭЧАЯ. 1979. Т. 10. С. 51.
11. Шultzга Н. Ф., Фомин С. П. // Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 27. С. 126.
12. Насонов Н. Н., Шultzга Н. Ф. // УФЖ. 1982. Т. 27. С. 789.
13. Diambrini G. // Rev. Mod. Phys. 1968. V. 40. P. 611.
14. Timm U. // Fortschr. Phys. 1971. Bd 17. S. 765.
15. Рязанов М. И. // УФН. 1974. Т. 114. С. 393.
16. Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов. — М.: Атомиздат, 1973.
17. Ахиезер А. И., Шultzга Н. Ф. // УФН. 1982. Т. 137. С. 561.
18. Базылев В. А., Жеваго Н. К. // Ibidem. С. 605.
19. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. — Минск: Изд-во Бел. ун-та, 1982.
20. Гарибян Г. М., Янши. Рентгеновское переходное излучение — Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1983.

21. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное рассеяние и переходное излучение.— М.: Наука, 1984.
22. Мигдал А. Б.//ДАН СССР. 1954. Т. 96. С. 49; ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 633.
23. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Шульга Н. Ф.//ДАН СССР. 1984. Т. 277. С. 850; Препринт ХФТИ 84-25.— М.: ЦНИИатоминформ, 1984.
24. Bethe H., Heitler B.//Proc. Roy. Soc. 1935. V. 146. P. 83.
25. Гайтлер В. Квантовая теория излучения.— М.: Гостехиздат, 1956.
26. Франк И. М.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. С. 3.
27. Болотовский Б. М.//Тр. ФИАН СССР. 1982. Т. 140. С. 95.
28. Galitsky V. M., Gurevich I. I.//Nuovo Cimento. 1964. V. 32. P. 396.
29. Frish O. R., Olson D. N.//Phys. Rev. Lett. 1959. V. 3. P. 141.
30. Шульга Н. Ф.//Проблемы современной теоретической физики.— Киев: Наукова думка, 1982.— С. 256.
31. Чудаков А. Б.//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1955. Т. 19. С. 652.
32. Brandt W., Ratkowski A., Ritchie R. H.//Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 1325.
33. Фейнберг Е. Л.//ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 202; Проблемы теоретической физики: Сб. статей памяти И. Е. Тамма.— М.: Наука, 1972.
34. Росси Б. Частицы больших энергий.— М.: Гостехиздат, 1955.
35. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.
36. Тер-Микаелян М. Л.//ДАН СССР. 1954. Т. 94. С. 1033.
37. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля.— М.: Гостехиздат, 1951.
38. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1974.
39. Мигдал А. Б.//ДАН СССР. 1955. Т. 105. С. 77.
40. Терновский Ф. Ф.//ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 171, 491.
41. Гольдман И. И.//ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 1866.
42. Пафомов В. Е.//ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1222.
43. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.
44. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С., Насонов Н. Н., Шульга Н. Ф.//ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 763.
45. Гельфанд И. М., Яглом А. М.//УМН. 1956. Т. 11, вып. 1. С. 77.
46. Тамм И. Е., Франк И. М.//ДАН СССР. 1937. Т. 14. С. 107.
47. Пафомов В. Е.//Ibidem. 1973. Т. 213. С. 819.
48. Базылев В. А., Варфоломеев А. А., Жеваго Н. К.//ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 464.
49. Чириков Б. В.//АЭ. 1959. Т. 6. С. 630; Phys. Rep. 1979. V. 52. P. 263.
50. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.
51. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
52. Линдхард Й.//УФН. 1969. Т. 99. С. 249.
53. Gemtelli D. S.//Rev. Mod. Phys. 1974. V. 46. P. 129.
54. Арнольд В. И. Математические методы механики.— М.: Наука, 1979.
55. Болотин Ю. Л., Гончар В. Ю., Трутень В. И., Шульга Н. Ф.//Тезисы докладов XV Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.— С. 71.
56. Жеваго Н. К., Хоконов М. Х.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 56.
57. Белошицкий В. В., Кумахов М. А.//ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 462.
58. Базылев В. А., Глебов В. И., Головизнин В. В.//⁵⁵— С. 3.
59. Ходырев В. А.//Ibidem.— С. 12.
60. Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 250.
61. Белошицкий В. В., Кумахов М. А.//ФТТ. 1973. Т. 15. С. 1588.
62. Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П.//ЖТФ. 1982. Т. 4. С. 796; Препринт ХФТИ АН УССР 82-10.— Харьков, 1982.
63. Barishevskii V. G., Tikhomirov V. V.//Nucl. Instr. and Meth. Ser. A. 1985. V. 234. P. 430.
64. Шульга Н. Ф., Трутень В. И., Фомин С. П. Препринт ХФТИ АН УССР 80-32.— Харьков, 1980.
65. Базылев В. А., Головизнин В. В., Демур А. В.//ДАН СССР. 1985. Т. 283. С. 855.
66. Насонов Н. Н., Шульга Н. Ф. Препринт ХФТИ АН УССР 82-39.— Харьков, 1982.
67. Кумахов М. А.//ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 1489.
68. Мирошниченко И. И., Мерри Д. Д., Авакян Р. О., Фигут Т. Х.//Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 786; ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 1825.
69. Filatova N. A., Golovatyuk V. M., Isakov A. N. et al.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 46. P. 488.
70. Bak J. F., Bussly P. J., Atkinson M. et al.//Phys. Lett. Ser. B 1982. V. 110. P. 162.

71. Мореховский В. Л., Шраменко Б. И.//Труды VII Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.— С. 173.
72. Булгаков Н. К., Водопьянов А. С., Головатюк В. М. и др. Препринт ОИЯИ I-83-640.— Дубна, 1983.
73. Ганенко В. Б., Генденштейн Л. Э., Мирошниченко И. И. и др.//Письма ЖЭТФ, 1979. Т. 32. С. 397.
74. Булгаков Н. К., Водопьянов А. С., Войтковская И. и др. Препринт ОИЯИ I-83-731.— Дубна, 1983.
75. Ганенко В. Б., Пегушин Е. В., Рубашкин А. П. и др.//⁵⁵.— С. 75.
76. Авакян Р. О., Авакян Э. О., Аветисян А. Э., Армаганиян А. А. и др. Препринт Ер. ФИ-704(19)-84.— Ереван, 1984.
77. Адейшвили Д. И., Бочек Г. Л., Витько В. И., Коваленко Г. Д., Шраменко Б. И.//Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 10. С. 197.
78. Антипенко А. П., Болдышев В. Ф., Касилов В. И., Лапин Н. И. и др.//⁵⁵.— С. 88.