1987 г. Февраль *Том 151, вып 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

336.75:530.145

О КВАНТОВОЙ ФОРМУЛЕ НАЙКВИСТА И ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ КАЛЛЕНА–ВЕЛЬТОНА

(замечания о статье Ю. Л. Климонтовича)

В. Л. Гинзбург, Л. П. Питаевский

1. Напомним кратко, о чем идет речь.

В электрическом контуре, описываемом уравнением

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{q}{C}=\mathscr{E},\quad \frac{dq}{dt}=I, \tag{1}$$

под влиянием флуктуационной э. д. с. $\mathscr{E}$ возникают токи I, причем

$$\mathscr{E}_\omega=Z(\omega)I_\omega,\quad Z(\omega)=R-i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right);$$

здесь и ниже коэффициенты L, C и R считаются постоянными. В состоянии теплового равновесия с температурой T спектральная плотность э. д. с. определяется выражением

$$(\mathscr{E}^2)_\omega=Rf(\omega,T)=2R\left[\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}\right]=R\hbar\omega\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2kT}, \tag{2}$$

и, следовательно,

$$(I^2)_\omega=\frac{Rf(\omega,T)}{|Z(\omega)|^2},\quad \langle I^2\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Rf(\omega,T)}{|Z(\omega)|^2}\,\frac{d\omega}{2\pi},$$

Обозначения здесь совпадают с используемыми Ю. Л. Климонтовичем [1]н, но у него обычно вместо $f(\omega,T)$ фигурирует обозначение $2kT_\omega$ (в [2] положено $k=1$; в [3] в интегралах типа (3) нет множителя $1/2\pi$, в силу чего такой множитель появляется в формуле типа (2)).

В классическом пределе, когда $\hbar\omega\ll kT$, формула (2) принимает вид

$$(\mathscr{E}^2)_\omega=2RkT \tag{4}$$

и называется формулой Найквиста (или классической формулой Найквиста); формулу (2) называют квантовым обобщением формулы Найквиста или квантовой формулой Найквиста.

2. Классическая формула Найквиста (4) в условиях, когда справедливо уравнение (1), не вызывает сомнений (подробнее см. [4]). Что же касается квантовой формулы Найквиста (2), полученной Найквистом [5] (правда, без члена $\hbar\omega/2$) еще в 1928 г., то ее Ю. Л. Климонтович считает несправедливой и предлагает заменить следующей:

$$(\mathscr{E}^2)_\omega=R\hbar\omega_0\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega_0}{2kT},\quad \omega_0=(LC)^{-1/2}. \tag{5}$$

Эта формула Климонтовича в классическом пределе (точнее, при $\hbar\omega_0 \ll kT$) переходит, конечно, в формулу Найквиста (4). Но в квантовой области различие между квантовой формулой Найквиста (2) и формулой (5) может быть сколь угодно большим. Действительно, выражение (5) не зависит от текущей частоты ω, в то время как выражение (2) при $\hbar\omega \gg kT$ экспоненциально падает с ростом частоты ω. Естественно, переход в квантовую область требует понижения температуры T и(или) перехода к более высоким частотам ω. Насколько мы можем судить, квантовая область вполне достижима при этом и в условиях, когда еще пригодно само квазистационарное уравнение (1). Фактически, однако, экспериментальные данные, позволяющие непосредственно проверить формулу (2), неизвестны. Поэтому вопрос о справедливости или непригодности этой формулы еще не может считаться беспредметным.

Мы сразу же хотим отметить, что, по нашему убеждению, квантовая формула Найквиста (2) совершенно правильна. При этом, конечно, подразумевается, что справедливы предположения, при которых она получена,— в первую очередь речь идет о применимости макроскопического (феноменологического) уравнения (1) для рассматриваемого контура (см. также [2-6]).

К формуле (2) можно прийти тремя способами: первый из них можно назвать «термодинамическим»[3,5,6], второй основан на использовании флуктуационно-диссипационной теоремы и, конкретно, формулы Каллена и Вельтона [7] (см. также [3,4,6,8]); наконец, третий способ опирается на микроскопическое рассмотрение и способствует пониманию физической сути дела[4]. Ю. Л. Климонтович критикует [1] указанные способы и, конкретно, первый и второй из них. Нам тоже придется остановиться на этих способах (микроскопического анализа касаться не будем, отсылая к статье В. И. Татарского [4]). Уместно при этом подчеркнуть, что критика Ю. Л. Климонтовича, по существу, далеко выходит за пределы вопроса о квантовой формуле Найквиста. Действительно, в [1] утверждается, что формула Каллена — Вельтона в квантовой области справедлива лишь при очень сильных ограничениях, грубо говоря, лишь в условиях слабой диссипации. Между тем обычно считается, что формула Каллена — Вельтона справедлива и при сильной диссипации и, конкретно, в применении к контуру (1), при любых значениях сопротивления R. Именно поэтому из формулы Каллена — Вельтона и получается [2-4,6] квантовая формула Найквиста (2). Таким образом, если бы Ю. Л. Климонтович оказался прав, то это привело бы к важным изменениям в статистической физике, в частности к существенному ограничению области применимости формулы Каллена — Вельтона. Поэтому редколлегия журнала УФН и сочла целесообразным опубликовать статью Климонтовича [1] совместно с настоящей статьей, в которой мы приходим к заключению о справедливости не только квантовой формулы Найквиста (2), но и значительно более общей и важной формулы Каллена —Вельтона в ее обычном понимании.

3. Обратимся к «термодинамическому» выводу квантовой формулы Найквиста (2). Слово «термодинамический» поставлено здесь в кавычки, ибо этот вывод является термодинамическим лишь частично. А именно, из условия термодинамического равновесия следует, что для любого контура типа (1) имеет место выражение

$$(\mathscr{E}^2)_\omega = Rf(\omega,\ T), \tag{6}$$

где $f(\omega,\ T)$ — некоторая универсальная функция ω и T, т. е. функция, не зависящая от параметров контура L, C и R. Для того чтобы прийти к (6), рассматривают [3,6,9] два «двухполюсника» — разомкнутые контуры 1 и 2 с импедансами Z_1 и Z_2 и сопротивлениями $R_1 = \mathrm{Re}Z_1$ и $R_2 = \mathrm{Re}Z_2$. Если включить двухполюсники последовательно, то образуется замкнутая цепь с параметрами $Z = Z_1 + Z_2$, $R = R_1 + R_2$. В состоянии термодинамического равновесия флуктуационные э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, возникающие в двухполюсниках 1 и 2, приводят к выделению тепла в цепи со спектральной мощностью

$$P = R\,(I^2)_\omega = R\,\frac{(\mathscr{E}^2)_\omega}{|Z(\omega)|^2} = P_1 + P_2 + P_{12} + P_{21},$$

где

$$P_{12} = \frac{R_2 (\mathscr{E}_1^2)_\omega}{|Z(\omega)|^2}, \quad P_{21} = \frac{R_1 (\mathscr{E}_2^2)_\omega}{|Z(\omega)|^2}$$

— тепло, выделяющееся соответственно в двухполюснике 2 в силу флуктуации э. д. с. $\mathscr{E}_1$ (в двухполюснике 1) и в двухполюснике 1 в результате флуктуации э. д. с. $\mathscr{E}_2$. В тепловом равновесии $P_{12} = P_{21}$, в силу чего

$$\frac{(\mathscr{E}_1^2)_\omega}{R_1} = \frac{(\mathscr{E}_2^2)_\omega}{R_2}. \tag{7}$$

Подробнее этот результат получен в [9] и без возражений приведен также в [1] (см. формулу (2.3)). Поскольку параметры двухполюсников произвольны, т. е. равенство (7) справедливо при любых параметрах контуров 1 и 2, оно не может зависеть от этих параметров. Следовательно, в равновесии для любых контуров типа (1) имеем $(\mathscr{E}^2)_\omega/R = f(\omega, T)$, где f — универсальная функция, могущая зависеть от ω и T. Так мы и приходим к (6).

Средняя электрическая энергия в контуре

$$\overline{U} = \frac{\overline{q^2}}{2C} = \frac{1}{2C}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(J^2)_\omega}{\omega^2}\,\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{(\mathscr{E}^2)_\omega\, d\omega/2\pi}{\omega^2\,|Z(\omega)|^2} = \int_0^\infty \frac{GRf(\omega, T)\,d\omega/2\pi}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}, \tag{8}$$

где, очевидно, использовано выражение (6); аналогично, с тем же результатом, можно исходить из выражения для средней магнитной энергии

$$\overline{K} = \frac{L\overline{I^2}}{2}.$$

Поскольку функция $f(\omega, T)$ является универсальной, для ее нахождения можно рассмотреть любой контур. Проще всего использовать для этой цели слабо затухающий контур, для которого $R/L \ll 1/(LC)^{1/2} = \omega_0$. Тогда в (8) можно вынести функцию $f(\omega_0, T)$ за знак интеграла, который равен 1/4 (см. [3,6]), и, значит, $\overline{U} = f(\omega_0, T)/4$. С другой стороны, как известно, для сколь угодно слабо затухающего контура (осциллятора) с собственной частотой ω средние

$$\overline{U} = \overline{K} = \frac{\hbar\omega}{4}\,\mathrm{cth}\,\frac{\hbar\omega}{2kT}, \tag{8$'$}$$

где в связи с произвольностью частоты ω_0 индекс 0 опущен. Следовательно, $f(\omega, T) = \hbar\omega\,\mathrm{cth}\,(\hbar\omega/2kT)$, и мы приходим к квантовой формуле Найквиста (2). Разумеется, вторая часть доказательства — использование выражения (8′)— не является термодинамической, а использует результат квантовой статистики.

Все возражения Ю. Л. Климонтовича против приведенного вывода сводятся к следующему (см. [1], п. 2): функция $f(\omega_0, T) = \hbar\omega_0\,\mathrm{cth}\,(\hbar\omega_0/2kT)$ «также удовлетворяет равенству» (7), «поскольку частота ω_0 относится ко всей цепи с суммарным импедансом $Z(\omega)$». Мы, однако, не видим для такого заключения никаких оснований, ибо из (7) как раз следует независимость функции $f(\omega, T)$ от любых параметров цепи и, в частности, от собственной частоты ω_0 для всей цепи из двух двухполюсников (речь идет при этом о собственной частоте при $R_1 = R_2 = 0$). Допущение о зависимости величин $(\mathscr{E}^2_{1,2})_\omega$ от частоты ω_0 представляется совершенно неприемлимым и из физических соображений. Действительно, как же электрические шумы сопротивлений R_1 или R_2 двухполюсников 1 или 2 могут зависеть от собственной частоты ω_0 всей цепи, которая определяется самоиндукциями и емкостями обоих двухполюсников? Заметим, кстати, что импедансы двухполюсников Z_1 и Z_2 при данных R_1 и R_2 еще не определяют однозначно самоиндукции и емкости $L_{1,2}$ и $C_{1,2}$ (см., например, [3], гл. 13). Далее, как же шум может, как это следует из (5), не падать с ростом частоты ω при $\hbar\omega \gg kT$? Отметим, наконец, что приведенное доказательство универсальности функции $f(\omega, T)$ вполне аналогично выводу теоремы или закона Кирхгофа об универсальности при тепловом равновесии отношения интенсивности испускания излучения телом к его поглощательной способности (см. [8], § 63 и [9,10]). Мы не знаем, вызывал ли соответствующий вывод закона Кирхгофа возражения в прошлом веке, но в современной литературе такие возражения не встречаются, а сам закон Кирхгофа, несомненно, справедлив. Не сомневаемся, что то же можно сказать о выражении (6) с универсальной функцией $f(\omega, T)$.

Итак, мы не видим, хотя и искренне старались их найти, каких-либо «подводных камней», позволяющих сомневаться в справедливости «термодинамического» вывода квантовой формулы Найквиста (2). Этот вывод выше фактически полностью воспроизведен, и читатели сами смогут судить о степени его убедительности. Уместно лишь добавить, что в справедливости «термодинамического» вывода тем меньше оснований сомневаться, что тот же результат (т. е. квантовая формула Найквиста (2)) получается и двумя другими упомянутыми способами. Тем самым все эти способы оказываются взаимно согласованными и подкрепляют друг друга. В частности, как отмечалось в [3], «термодинамический» вывод квантовой формулы Найквиста (2) можно в некоторой степени рассматривать как вывод формулы Каллена — Вельтона, причем, конечно, и при сильной диссипации. Формула Каллена — Вельтона, однако, столь важна, что вопрос о ее выводе и условиях применимости вполне заслуживает особого обсуждения.

4. Рассмотрим некоторую характеризующее тело (систему) физическую величину x, среднее квантовомеханическое значение которой $\bar{x}$ при отсутствии возмущающего внешнего взаимодействия равно нулю. Если воздействие, описываемое возмущающей силой f, присутствует, то $\bar{x}_\omega = \alpha(\omega) f_\omega$, где используются фурье-компоненты величин $\bar{x}$ и f, а $\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$ — обобщенная восприимчивость (подробнее см. [8], § 123). В состоянии термодинамического равновесия с температурой T флуктуации величины x оказываются связанными с мнимой частью α'' восприимчивости α — в этом и состоит флуктуационно-диссипационная теорема или формула Каллена — Вельтона:

$$(x^2)_\omega = \hbar\alpha''(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT} = 2\hbar\alpha'' \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}\right]. \tag{9}$$

Вывод этого соотношения приведен, в частности, в [8], § 124. Считая, что мы имеем дело с электрическим контуром, выберем в качестве x силу тока I, причем $I_\omega = \mathcal{E}_\omega / Z(\omega) = i\omega f_\omega / Z(\omega)$, где $Z(\omega)$ — уже вводившийся выше импеданс цепи. Как легко видеть, в этом случае обобщенная восприимчивость $\alpha(\omega) = i\omega/Z(\omega)$ и $\alpha'' = \operatorname{Im} \alpha = \omega R / |Z|^2$, $R = \operatorname{Re} Z$. Поэтому из формулы Каллена — Вельтона (9) сразу же получаем (детальнее см. [2], § 78) квантовую формулу Найквиста (2).

Ю. Л. Климонтович, основываясь на приводимых им правильных формулах (4.1)—(4.3) *), записывает формулу Каллена — Вельтона в форме (2.6), отличающейся от (9) лишь использованием тензора α_{ij} вместо скаляра

---

*) Все формулы с двойной нумерацией (например, (4.1))— формулы из статьи [1].

α (переход от (2.6) к (9) отвечает изотропному случаю, когда $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$). Он считает, однако, формулы (4.1)—(4.3) приближенными, отвечающими «условию» бесконечно узкого резонанса для каждого перехода n — m». Между тем мы имеем здесь дело не с «условием», а с прямым следствием основных принципов квантовой статистической физики.

В самом деле, в квантовой статистической физике рассматриваются системы, описываемые эрмитовым оператором Гамильтона, находящиеся в сколь угодно большом, но конечном объеме. Согласно известным теоремам, собственные значения энергии такой системы вещественны и образуют дискретный спектр. Именно эти дискретные уровни энергии E_n определяют частоты перехода $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$. Если называть эти частоты перехода «резонансами», то эти резонансы «бесконечно узкие» по определению. Однако употребление термина «резонанс» в данном случае, скорее, только вводит в заблуждение. Уровни энергии макроскопического тела как целого (а именно о таких уровнях идет речь) расположены чрезвычайно густо, так что ни в каком реальном эксперименте резонансные свойства таких переходов наблюдать нельзя (если нет дополнительных правил отбора, выделяющих определенные группы уровней).

Разумеется, наличие определенных (резких), без какой-либо «ширины», уровней энергии используется не только при выводе формулы Каллена — Вельтона. Обычная формула для статистической суммы, определяющая все термодинамические величины системы,

$$Z = \sum_n e^{-E_n/T} \tag{10}$$

также подразумевает существование таких уровней и используется в современной статистической физике без всяких оговорок о «бесконечной узости резонанса».

5. Категоричность сделанных утверждений может показаться чрезмерной. Широко используется ведь понятие о «ширине уровня», и существует «теория ширины спектральных линий». Нужно, однако, правильно понимать смысл термина «уровень конечной ширины». Это понятие приближенное, точнее — применяется для приближенного описания свойств системы с непрерывным или квазинепрерывным (очень «густым») спектром в терминах дискретного спектра, что допустимо в ряде задач при определенной постановке вопроса.

Рассмотрим простой пример — возбужденное состояние некоторого атома. Тогда, если полностью пренебречь взаимодействием атома с поперечным электромагнитным полем, имеется система дискретных уровней с отрицательной энергией (как обычно, считаем, что при возбуждении все более высоких уровней их энергия $E_n \to 0$). Рассмотрим один из них, скажем $E_1^{(0)}$. Он давал бы определенный вклад exp $(-E_1^{(0)}/T)$ в статсумму (10); резкий резонанс $\hbar\omega_{10} = E_1^{(0)} - E_0^{(0)}$ при возбуждении светом из основного состояния $E_0^{(0)}$ и т. д. Учтем теперь возможность излучения атомом света. Это означает учет взаимодействия с поперечным электромагнитным полем (продольное поле и, конкретно, кулоновское поле ядра уже учтены при решении задачи об уровнях атома как «механической подсистемы», не взаимодействующей с поперечным полем). Но уровни «механической подсистемы» (в частности, уровень $E_1^{(0)}$) уже не являются собственными энергетическими уровнями полной системы атом + поперечное электромагнитное поле. Соответствующая волновая функция $\Psi_1^{(0)}$ также не является собственной функцией полной задачи — поэтому-то и происходит испускание света, т. е. переход в другое состояние. Аналогична ситуация в случае радиоактивного распада ядра и т. д. Поскольку рассматриваемое состояние 1 (при пренебрежении взаимодействия с поперечным полем, имеющее энергию $E_1^{(0)}$ и описываемое функцией $\Psi_1^{(0)}$) квазистационарно, его можно в известных пределах описывать как характеризуемое комплексной энергией

$$E_1 = E_1^{(0)} - i\hbar\frac{\gamma}{2}$$

и волновой функцией

$$\Psi_1 \sim e^{-iE_1t/\hbar} = e^{-\gamma t/2}e^{-iE_1^{(0)}t/\hbar}. \qquad (11)$$

Замена $E_1^{(0)} \to E_1$ может быть использована в выражении для диэлектрической проницаемости системы, в теории ширины спектральных линий и т. д. При этом если $\gamma \ll E_1^{(0)}$, то в соответствующих выражениях δ-функция заменяется на функцию Лоренца:

$$\delta(\omega - \omega_{01}) \to \frac{\gamma}{2\pi}\,\frac{1}{(\omega-\omega_{01})^2 + (\gamma^2/4)}. \qquad (12)$$

В квантовой статистике при доказательстве флуктуационно-диссипационной теоремы рассматривается полная (замкнутая) система, имеющая сколь угодно большой, но конечный объем (при учете поперечного электромагнитного поля можно считать, что система находится в большом «резонаторе» с идеально отражающими стенками). В таких условиях уровни системы E_n дискретны, хотя и расположены очень густо — тем ближе друг к другу, чем больше объем резонатора. На интервале энергий порядка ширины «уровней» y отдельных подсистем, входящих в полную систему, располагается обычно огромное число дискретных уровней E_n. Каждый из них дает δ-функционный вклад в $\alpha''(\omega)$, именно эти уровни определяют значение статсуммы (10) и фигурируют в левых частях равенств (4.1) и (4.2), используемых для доказательства теоремы Каллена — Вельтона.

Непоследовательность точки зрения Ю. Л. Климонтовича особенно ясно видна в примере колебательного контура. Разумеется, резонанс в колебательном контуре при наличии сопротивления имеет конечную ширину. На этом основании нельзя, однако, утверждать, что контур, рассматриваемый на микроскопическом уровне, не имеет определенных уровней энергии, что для него неверно выражение (10) для статсуммы, а потому он вообще не подчиняется второму началу термодинамики. Непоследовательно, конечно, было бы и считать, что понятие дискретных уровней энергии применимо к колебательному контуру для любых целей, кроме доказательства теоремы Каллена — Вельтона. Между тем Ю. Л. Климонтович полагает, по-видимому, что если в системе нет резко выраженного резонанса, то в ней установить связи флуктуации с восприимчивостью вообще нельзя.

Полезно подчеркнуть, хотя это и не имеет прямого отношения к предмету дискуссии, что знание «ширины» уровня γ отнюдь не эквивалентно знанию точных уровней энергии E_n. Для вычисления поправок к статсумме в результате взаимодействия атомов с поперечным полем еще недостаточно, вообще говоря, вычислить величину γ.

6. Отметим далее, что предлагаемое Ю. Л. Климонтовичем изменение формулы Найквиста прямо противоречит законам черного излучения. Действительно, из этих законов вместе с законом Кирхгофа, который уже упоминался, можно совершенно однозначно вывести формулы для корреляционных функций случайных источников электромагнитного поля, эквивалентные формуле Каллена — Вельтона [11]. Какое-либо изменение этих формул приведет к нарушению законов черного излучения. Утверждение же о том, что обычная теория приводит к формуле Планка только при малости затухания, основана на недоразумении (нужно лишь аккуратно делать вычисления, приведенные в [11]).

Преобразования типа (4.3) очень часто встречаются в современной статистической физике. Они нужны, например, для выяснения аналитических свойств гриновских функций (см., например, [2], гл. 4). Если встать на точку зрения Ю. Л. Климонтовича, то все эти свойства, являющиеся основой применения методов квантовой теории поля в статфизике, окажутся неверными. Фактически рухнет все здание современной статфизики. Приведем лишь один пример. Преобразование (4.3) используется при выяснении свойств динамического формфактора $\sigma(\omega, q)$, описывающего рассеяние нейтронов в жидкости. Именно это преобразование приводит к соотношению

$$\sigma(-\omega, q) = e^{-\hbar\omega/kT}\sigma(\omega, q)$$

(см. [2], формулу (86.14)). Но эта формула есть прямое выражение принципа детального равновесия при рассеянии, справедливость которого не вызывает сомнений.

7. Итак, формула Каллена — Вельтона является точным соотношением статистической физики. Входящие в нее корреляционные функции и обобщенные восприимчивости, однако, в большинстве случаев можно вычислить лишь приближенно. Поэтому может оказаться, что в силу этой приближенности они удовлетворяют лишь приближенно и соотношению Каллена — Вельтона (см. также [4]). Величина отклонений от этих соотношений может служить мерой применимости приближений. Именно с этой точки зрения следует, по нашему мнению, рассматривать обсуждение проблемы на базе кинетических уравнений, проведенное в статье Ю. Л. Климонтовича. Кинетические уравнения, как справедливо отмечает сам Ю. Л. Климонтович,— уравнения приближенные, и в силу приближенности возможны отклонения полученных с их помощью результатов от точных соотношений, что, конечно, не может бросить тень на сами эти соотношения.

В своей статье [1] Ю. Л. Климонтович затрагивает, помимо квантовой формулы Найквиста и формулы Каллена — Вельтона, также ряд в той или иной мере родственных вопросов. Как мы надеемся, выше удалось показать, что содержащаяся в [1] критика формул Найквиста и Каллена — Вельтона не обоснована. В такой ситуации останавливаться здесь на других вопросах, затронутых Ю. Л. Климонтовичем, нет оснований.

В заключение мы хотим поблагодарить за ознакомление с настоящей статьей и сделанные при этом замечания Ю. С. Бараша и В. И. Татарского.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР
Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климонтович Ю. Л.// УФН. 1987. Т. 151. С. 309 (в этом номере).
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2.— М.: Наука, 1978.
3. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1981 (новое издание 1987).— Гл. 14.
4. Татарский В. И.// УФН. 1987. Т. 151. С. 273 (в этом номере).
5. Nyquist H.// Phys. Rev. 1928. V. 32. P. 110.
6. Гинзбург В. Л.// УФН. 1952. Т. 46. С. 348.
7. Callen H. B., Welton T. A.// Phys. Rev. 1951. V. 83. P. 34.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1976.— Ч. 1. § 124.
9. Горелик Г. С.// УФН. 1951. Т. 44. С. 33.
10. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.— Ч. I. § 25.
11. Рытов С. М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.— М.: Изд-во АН СССР, 1953.