

*От редакции.* В редакцию УФН поступила статья Ю. Л. Климонтовича «Флуктуационно-диссипационные соотношения. Роль конечности времени корреляции. Квантовое обобщение формулы Найквиста». В этой статье утверждается, что известная формула Каллена — Вельтона в квантовой области справедлива лишь при слабой диссипации, а квантовое обобщение формулы Найквиста в общем случае существенно отличается от общепринятого в литературе. Рецензенты, которым была направлена статья, не согласились с выводами Ю. Л. Климонтовича. Вместе с тем обсуждение (в частности, на семинарах) свидетельствует о том, что затронутые Ю. Л. Климонтовичем вопросы ясны далеко не всем. Кроме того, Ю. Л. Климонтович не только является известным специалистом в области статистической физики, он и автор книги «Статистическая физика» (М.: Наука, 1982), пособия для студентов-физиков. В этой книге (в § 5 гл. 11) квантовое обобщение формулы Найквиста также проводится необычным образом.

В такой ситуации редколлегия сочла уместным опубликовать статью Ю. Л. Климонтовича и одновременно статью В. Л. Гинзбурга и Л. П. Питаевского, в которой статья Ю. Л. Климонтовича критикуется с принятых в литературе позиций. Кроме того, в настоящем выпуске УФН помещена статья В. И. Татарского, имеющая непосредственное отношение к обсуждаемому кругу вопросов. При этом В. И. Татарский, так же как В. Л. Гинзбург и Л. П. Питаевский, считает справедливым обычно используемое выражение для квантовой формулы Найквиста.

Редакция УФН полагает, что три указанные статьи в своей совокупности достаточно полно освещают дискутируемые вопросы и позволят читателям самим прийти к соответствующим выводам. Редакция не предполагает дальнейшего обсуждения этих вопросов на страницах УФН.

5S6.758530.145

**ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ.  
РОЛЬ КОНЕЧНОСТИ ВРЕМЕНИ КОРРЕЛЯЦИИ.  
КВАНТОВОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ НАЙКВИСТА**

*Ю. Л. Климонтович*

СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| 1. Введение . . . . .   | 310 |
| 2. Термодинамический вывод формулы Найквиста . . . . .  | 313 |
| 3. Недиссипативные и диссипативные характеристики . . . . .   | 317 |
| 4. Термодинамическая форма ФДС. Формула Каллена — Вельтона . . . . .                                  | 318 |
| 5. Кинетическая форма флуктуационно-диссипационных соотношении (ФДС) . . . . .                        | 319 |
| 6. ФДС для флуктуации с конечными временами корреляции . . . . .                                      | 322 |
| 6.1. ФДС для газа Больцмана . . . . .   | 323 |
| 6.2. Формула Планка . . . . .   | 323 |
| 7. ФДС для системы двухуровневых атомов . . . . .   | 324 |
| 8. Система квантовых атомов-осцилляторов. Коэффициент диффузии. Квантовая формула Найквиста . . . . . | 325 |
| 9. Квантовая формула Найквиста для плазменного контура . . . . .                                      | 326 |
| 10. Формула Найквиста для цепи с нелинейным трением . . . . .   | 327 |
| 11. Зависимость ширины спектра колебаний классических и квантовых генераторов от мощности . . . . .   | 328 |
| 12. Квантовая формула Найквиста и лэмбовский сдвиг . . . . .  | 329 |
| 13. Заключение . . . . .  | 331 |
| Список литературы . . . . .   | 331 |

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Первое флуктуационно-диссипационное соотношение (ФДС) было установлено Эйнштейном в 1905 году в работе по теории броуновского движения. Оно имеет вид  $D = m\gamma kT$  и связывает коэффициент диффузии (в пространстве импульсов), характеризующий молекулярное движение среды, коэффициент трения  $\gamma$  и температуру  $T$ . Вскоре Ланжевеном был предложен иной способ описания броуновского движения на основе уравнения механики с учетом случайной силы — силы Ланжевена, характеризующей роль молекулярного движения. Для свободной частицы уравнение Ланжевена имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{1}{m} f(t) \quad (1.1)$$

Коррелятор случайной силы определяется выражением

$$\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad D = m\gamma kT \quad (1.2)$$

что отвечает нулевому приближению по малому параметру  $\tau_{\text{кор}} / \tau_{\text{рел}}$  — отношению времени корреляции молекулярных толчков к времени релаксации  $\tau_{\text{рел}} = 1/\gamma$ . В этом приближении спектральная плотность силы

$$\frac{1}{3} \langle f^2 \rangle_{\omega} = 2D \quad D = m\gamma kT \quad (1.3)$$

не зависит от частоты. Это означает, что шум, обусловленный молекулярным движением, является *белым шумом*.

Второе соотношение (1.3) показывает, что величина  $D$  играет двойную роль: не только коэффициента диффузии, но и интенсивности шума в уравнении Ланжевена. При этом существенно, что определение как коэффициента диффузии, так и интенсивности шума основано на распределении Максвелла для скоростей броуновских частиц.

В 1928 г. Найквист использовал уравнение Ланжевена

$$\frac{dq}{dt} = I - l \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} q = \xi(t) \quad (1.4)$$

для описания тепловых колебаний (броуновского движения) в электрическом контуре. Роль силы Ланжевена играет случайная э. д. с., спектральная плотность которой определяется выражением

$$\langle \xi^2 \rangle_{\omega} = 2RkT \quad (1.5)$$

— *формулой Найквиста*. В (1.4), (1.5)  $L$ ,  $C$ ,  $R$  — индуктивность, емкость и омическое сопротивление. Последнее соответствует  $m\gamma$  в формулах (1.2), (1.3). Через спектральную плотность э. д. с. выражаются спектральные плотности тока и заряда

$$\langle I^2 \rangle_{\omega} = \frac{\langle \xi^2 \rangle_{\omega}}{|Z(\omega)|^2} = \frac{2RkT}{|Z(\omega)|^2} \quad \langle q^2 \rangle_{\omega} = \frac{\langle I^2 \rangle_{\omega}}{\omega^2} \quad Z(\omega) = R - i \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad (1.6)$$

Одновременные моменты (дисперсии) определяются интегрированием по  $\omega$ :

$$\langle I^2 \rangle = \frac{kT}{L} \quad \langle q^2 \rangle = CkT \quad (1.7)$$

При получении этих формул использованы значения интегралов

$$L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2R}{|Z(\omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi} = 1, \quad \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2R}{\omega^2 |Z(\omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi} = 1 \quad (1.8)$$

Для расчета тепловых шумов в электрическом контуре Найквист мог бы использовать и метод Эйнштейна. Для этого надо записать соответствующее уравнение Фоккера — Планка для функции распределения  $f(q, I, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + I \frac{\partial f}{\partial q} - \omega_0^2 q \frac{\partial f}{\partial I} = \frac{D}{L^2} \frac{\partial^2 f}{\partial I^2} + \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{R}{L} I f \right), \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (1.9)$$

Равновесное решение этого уравнения

$$f = C \exp \left( -\frac{H(q, I)}{kT} \right), \quad \int f(q, I) dq dI = 1, \quad H = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \quad (1.10)$$

является примером распределения Гиббса для осциллятора в термостате. Найденные с помощью этого распределения выражения для одновременных моментов совпадают с (1.7).

Расчет спектральных плотностей тока и заряда проводится по известной схеме. Именно, наряду с (1.9) используется совпадающее с ним по виду уравнение для двухвременной функции распределения

$$f(q, I, t, q', I', t'). \quad (1.11)$$

С его помощью находим систему уравнений для двухвременных моментов

$$\frac{d}{d\tau} \langle qI \rangle_\tau = \langle II \rangle_\tau, \quad L \frac{d \langle II \rangle_\tau}{d\tau} + R \langle II \rangle_\tau + \frac{1}{C} \langle qI \rangle_\tau = 0, \quad \tau = t - t' > 0 \quad (1.12)$$

и дополняем ее «начальными условиями» (1.7), которые находим с помощью распределения Гиббса (1.10). Решение уравнений (1.12) и приводит к формулам (1.6) и, как следствие, к формуле Найквиста (1.5).

Мы привели два простейших примера классических ФДС. Многие ФДС рассматриваются в статистической физике (см., например, <sup>[17]</sup>) при описании кинетических, гидродинамических и диффузионных процессов в самых различных системах.

При формулировке ФДС для квантовых систем возникают дополнительные вопросы. Действительно, как, например, обобщить классическую формулу Найквиста (1.5) на квантовый случай? Впервые ответ был дан в работе Найквиста<sup>8</sup>. С учетом нулевых колебаний результат Найквиста состоит в следующем: в классической формуле надо произвести замену

$$kT \rightarrow \frac{1}{2} \hbar \omega \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT} \equiv kT_\omega. \quad (1.13)$$

Тогда приходим к квантовой формуле Найквиста

$$\langle \mathcal{E}^2 \rangle_\omega = 2RkT_\omega. \quad (1.14)$$

Выражение (1.7) для спектральной плотности тока принимает вид

$$\langle I^2 \rangle_\omega = \frac{2RkT_\omega}{|Z(\omega)|^2}, \quad \text{и} \quad \langle I^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2RkT_\omega}{|Z(\omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.15)$$

Операция (1.13) — замена средней энергии классического осциллятора (контра) на среднюю энергию квантового осциллятора, казалось бы, является естественной. Имеется, однако, и другая возможность обобщения формулы (1.5): замена (1.13) производится не на текущей частоте спектра  $\omega$ , а на собственной частоте  $\omega_0$ <sup>6,7,32</sup>, т. е.

$$kT \rightarrow \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_0}{2kT} \equiv kT_{\omega_0}. \quad (1.16)$$

Тогда классическая формула Найквиста (1.5) принимает вид

$$\langle \mathcal{E}^2 \rangle_\omega = 2RkT_{\omega_0}. \quad (1.17)$$

Итак, спектр, как и в классической теории, является белым шумом. Появляется, однако, зависимость от собственной частоты  $\omega_0$  — параметра функции Гамильтона в распределении Гиббса (1.10).

Сравним два приведенных квантовых обобщения формулы Найквиста.

1. Формула (1.14) содержит два параметра («ширины») линии или два соответствующих времени релаксации

$$\tau^0 \sim \frac{1}{\omega}, \quad \tau^{(\tau)} \sim \frac{\hbar}{kT}. \quad (1.18)$$

Первое из них характеризует спектр нулевых колебаний, а второе — тепловое движение. Эти времена не зависят от параметров системы — параметров функции Гамильтона и в этом отношении являются *универсальными* релаксационными характеристиками. В противоположность этому формула (1.17) не является универсальной, поскольку само понятие белого шума относительно.

2. Переход к классическому приближению (условие  $kT \gg \hbar\omega$ ) в (1.14) не является вполне определенным, так как  $\omega$  здесь — текущая частота спектра, а вклад нулевых колебаний наиболее существен на больших частотах.

3. Поскольку нулевые колебания приводят в (1.15) к расходящемуся интегралу, то необходимо ввести параметр  $\omega_{\max}$ . При этом для контура и  $LR$ -цепочки соответствующие вклады в  $L\langle I^2 \rangle$  равны

$$L\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \hbar \frac{R}{L} \ln \frac{\omega_{\max}}{\omega_0}, \quad L\langle I^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \hbar \frac{R}{L} \ln \left[ 1 + \frac{\omega_{\max}^2}{(R/L)^2} \right]. \quad (1.19)$$

Мы видим, что средняя кинетическая энергия контура *в состоянии равновесия линейно* зависит от диссипативного параметра  $R$ . От  $R$  зависит в (1.15) и другая часть интеграла, определяемая тепловыми флуктуациями.

Этот результат находится в противоречии со статистической теорией, согласно которой в состоянии равновесия одновременные корреляторы (здесь  $\langle I^2 \rangle$ ,  $\langle q^2 \rangle$ ) зависят лишь от температуры и параметров функции Гамильтона. В противном случае термодинамические функции (здесь  $\langle I^2 \rangle$ ,  $\langle q^2 \rangle$ ) зависели бы от характера процесса установления равновесного состояния. Тем самым возникло бы противоречие со вторым законом термодинамики.

Использование вместо (1.14) квантовой формулы Найквиста в виде (1.17) не приводит к указанным трудностям. Действительно, для контура и  $LR$ -цепочки ( $\omega_0 = 0$ ) средняя кинетическая энергия определяется формулами

$$L\langle I^2 \rangle_{\kappa} = kT_{\omega_0}, \quad L\langle I^2 \rangle_{LR} = kT, \quad (1.20)$$

и, следовательно, имеет место равновесие с термостатом.

4. Формулы (1.14), (1.17) приводят к существенно различному поведению функции  $(I^2)_{\omega}$  при больших и малых частотах.

Различие формул (1.14), (1.17) при расчете интегральных характеристик исчезает лишь при условии точного резонанса ( $R \rightarrow 0$ ), когда

$$\operatorname{Re} \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{R}{R^2 + [L\omega - (1/C\omega)]^2} \rightarrow \pi\delta \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right). \quad (1.21)$$

Таким образом, основные трудности, связанные с использованием квантовой формулы Найквиста (1.14), имеют место лишь при конечной ширине резонанса  $R/L$  (или конечном времени корреляции  $\tau_{\text{кор}} = L/R$ ).

Вопрос о формулировке квантовой формулы Найквиста есть часть общей проблемы определения интенсивности источников Ланжевена и соответствующих коэффициентов диффузии в квантовых системах. Она возникает, в част-

ности, как мы увидим в п. 12, и в квантовой электродинамике при расчете лэмбовского сдвига.

В настоящей работе анализируются ФДС в физических системах на различных уровнях статистического описания. Наиболее общими являются ФДС для флуктуации многочастичных функций распределения (см. разделы 5, 6). При их формулировке выявляется связь вопроса о формулировке ФДС с проблемой вывода необратимых уравнений статистической теории на основе обратимых уравнений классической и квантовой механики<sup>43,44</sup>.

Оказывается полезным деление ФДС на два класса: 1) ФДС для флуктуаций с бесконечными временами корреляции — «бесстолкновительное приближение». Этому приближению отвечают бесконечно узкие резонансы. 2) ФДС для флуктуации с конечными временами корреляции — «столкновительное приближение». Соответствующие спектральные плотности имеют конечные ширины, определяемые «интегралами столкновений» в соответствующих кинетических уравнениях.

Среди ФДС первого класса наиболее известной является формула Каллена — Вельтона. Она связывает в квантовой теории спектральные плотности внутренних термодинамических параметров с диссипативными частями соответствующих восприимчивостей. Ко второму классу относится, в частности, квантовая формула Найквиста (1.17). Интеграл столкновений в ней определяет «ширину» белого шума.

В ходе изложения подробно рассматриваются вопросы, по которым в литературе имеются различные точки зрения. Среди них: 1) вопрос о границах применимости формулы Каллена — Вельтона; 2) вопрос о квантовом обобщении классической формулы Найквиста (1.5).

В связи с изложенным проследим за тем, каким же образом устанавливается квантовая формула Найквиста (1.14). Известны два способа. Один из них основан на формуле Каллена — Вельтона и будет рассмотрен в п. 4. Другой базируется на втором законе термодинамики и некоторых дополнительных соображениях. Именно такой подход был использован в работе Найквиста<sup>8</sup>. Рассмотрим здесь более простой вариант, приведенный в работах<sup>9,10</sup>.

## 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ВЫВОД КВАНТОВОЙ ФОРМУЛЫ НАЙКВИСТА

Заменим, следуя работам<sup>9,10</sup>, рассматриваемый контур двумя последовательно включенными комплексными сопротивлениями, такими, что  $Z(\omega) = Z_1(\omega) + Z_2(\omega)$  и, в частности,  $R = R_1 + R_2$ . Полная мощность, выделяемая в цепи на частоте  $\omega$  при тепловых колебаниях,

$$P = R (I^2)_\omega = R \frac{(\mathcal{E}^2)_\omega}{|Z(\omega)|^2}. \quad (2.1)$$

Поскольку спектральная плотность э. д. с. как по формуле (1.14), так и по (1.17) пропорциональна  $R = R_1 + R_2$ , то мощность  $P$  пропорциональна  $(R_1 + R_2)^2$  и, следовательно, может быть представлена в виде суммы четырех вкладов  $P_1 + P_{12} + P_{21} + P_2$ . Из второго закона термодинамики следует равенство  $P_{12} = P_{21}$ . Запишем его в виде

$$\frac{R_2 (\mathcal{E}_1^2)_\omega}{|Z(\omega)|^2} = \frac{R_1 (\mathcal{E}_2^2)_\omega}{|Z(\omega)|^2}. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{(\mathcal{E}_1^2)_\omega}{R_1} = \frac{(\mathcal{E}_2^2)_\omega}{R_2} \quad (2.3)$$

и, следовательно, отношение спектральной плотности э. д. с. к соответствующему сопротивлению не зависит от номера подсистемы (от номеров 1, 2). На этом основании в<sup>9,10</sup> делается вывод, что отношение (2.3) является уни-

версальной функцией частоты и температуры  $f(\omega, T)$ . В наших обозначениях  $f(\omega, T) \equiv 2kT_\omega$ . Как же определить вид функции  $f(\omega, T)$  (или  $kT_\omega$ )?

Для этого в <sup>9,10</sup> используется равенство (1.15), связывающее среднюю кинетическую энергию  $L \langle I^2 \rangle$  с неизвестной пока функцией  $kT_\omega$ . Поскольку по (2.3)  $kT_\omega \equiv f(\omega, T)/2$  — универсальная функция частоты и температуры, для ее определения достаточно (?) рассмотреть частный случай бесконечно малого затухания ( $R \rightarrow 0$ ), когда под интегралом в (1.15) возможна замена (1.21). При этом функцию  $kT_\omega$  можно вынести из-под знака интеграла при значении  $\omega = \omega_0$ . Используя, наконец, формулу (1.20) для средней кинетической энергии квантового незатухающего осциллятора, приходим к выводу, что искомая функция  $kT_\omega$  на частоте  $\omega_0$  определяется выражением

$$\frac{1}{2} f(\omega_0, T) \equiv kT_{\omega_0} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_0}{2kT}. \quad (2.4)$$

Чтобы получить вид функции  $f(\omega, T)$  на произвольной частоте, в <sup>9,10</sup> делается следующий шаг: поскольку  $f(\omega, T)$  — универсальная функция, то ее можно восстановить по частному результату (2.4), полученному в приближении бесконечно узкого резонанса, путем замены  $\omega \rightarrow \omega_0$ . В результате приходим к следующему выражению для искомой функции:

$$\frac{1}{2} f(\omega, T) \equiv kT_\omega = \frac{1}{2} \hbar \omega \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT}, \quad (2.5)$$

и, следовательно, к квантовой формуле (1.14).

Сделанный заключительный шаг качественно меняет, однако, всю картину. Действительно, ведь функция (2.4) зависит лишь от температуры и параметров функции Гамильтона  $L, C$  (или  $\omega_0$ ), а функция (2.5) зависит от текущей частоты спектра  $\omega$  и, следовательно,  $\langle I^2 \rangle$  в (1.15) зависит от  $R$ .

Для такого радикального изменения нет оснований. Более того, функция (2.4) также удовлетворяет равенству (2.3), поскольку частота  $\omega_0$  относится ко всей цепи с суммарным импедансом  $Z(\omega)$ . Таким образом, на основании равенства (2.3) нельзя отдать предпочтение квантовому обобщению формулы Найквиста (1.14) по сравнению с (1.17).

Другой «вывод» квантовой формулы Найквиста в форме (1.14) основан на использовании формулы Каллена — Вельтона, связывающей спектральную плотность произвольного внутреннего параметра  $X$  с мнимой частью соответствующего тензора восприимчивости (см., например, § 124 в <sup>1</sup>):

$$(X_i X_j)_\omega = \hbar \operatorname{Im} \alpha_{ij}(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT}. \quad (2.6)$$

В разделе 4 мы увидим, что вывод формулы Найквиста (1.14) из квантовой формулы Каллена — Вельтона не является достаточно обоснованным. Здесь же лишь отметим, что интеграл по частотам от (2.6), определяющий одновременной коррелятор  $\langle X_i X_j \rangle$  в состоянии теплового равновесия, зависит только от температуры и параметров функции Гамильтона, но не от диссипативных параметров, например сопротивления  $R$  при расчете корреляторов  $\langle I^2 \rangle, \langle q^2 \rangle$ .

Такого рода несоответствие между следствиями квантовой формулы Найквиста и выводами статистической теории равновесного состояния давно привлекало внимание исследователей. Так, в работе Г. С. Горелика <sup>11</sup> «Некоторые применения второго закона термодинамики к электрическим флуктуациям» на примере  $RC$  — цепочки было показано, что средний квадрат флуктуаций заряда, т. е. величина  $\langle q^2 \rangle$  в равновесном состоянии не может зависеть от сопротивления  $R$ . В следующем году была опубликована работа В. Л. Гинзбурга <sup>9</sup> «Некоторые вопросы теории электрических флуктуаций». В ней автор писал: «Приведенные результаты (независимость  $\langle q^2 \rangle$  от  $R$ ), полученные в работе <sup>3</sup> (у нас <sup>11</sup>), совершенно парадоксальны, так как являются чисто классическими и противоречат квантовой формуле Найквиста (здесь

(1.14)), в то время как при их выводе, казалось бы, не делалось никаких классических предположений». Эта точка зрения за прошедшие годы не изменилась (см. <sup>10</sup>).

До сих пор основное внимание уделялось колебательному контуру. Рассмотрим некоторые следствия, к которым приводят два квантовых обобщения формулы Найквиста для диссипативных, но не колебательных систем. Начнем с  $LR$ -цепочки, когда  $C = \infty$  и, следовательно,  $\omega_0 = 0$ . Выражение для  $\langle I^2 \rangle$  совпадает в этом случае с классическим (см. (1.20)). Ситуация существенно меняется при использовании квантовой формулы Найквиста (1.14). Действительно, при этом

$$L \langle I^2 \rangle_\omega = \frac{2R/L}{\omega^2 + (R/L)^2} kT_\omega, \quad L \langle I^2 \rangle = L \int_{-\infty}^{\infty} \langle I^2 \rangle_\omega \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.7)$$

Из последней формулы следует, что средняя кинетическая энергия не равна  $kT$ . Более того, она зависит от сопротивления  $R$ .

Чтобы в еще большей степени подчеркнуть различие результатов (2.7), (1.20), запишем соответствующие формулы для отдельных заряженных частиц. Рассмотрим прямолинейный цилиндрический проводник длины  $l$  и поперечного сечения  $S$ . Величины  $L$ ,  $R$  определяются тогда следующим образом:

$$L = \frac{ml}{e^2 n S}, \quad R = \frac{ml}{e^2 n S} \nu, \quad \text{и} \quad \frac{R}{L} = \nu; \quad (2.8)$$

здесь  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $n$  — средняя концентрация электронов,  $\nu$  — частота столкновений электронов с фононами. Перейдем от  $L \langle I^2 \rangle$  к средней кинетической энергии электрона. Из (1.20)

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{1}{N} \frac{3}{2} kT; \quad (2.9)$$

$N$  — число частиц в образце. Из (2.7) получаем иной результат:

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{1}{N} \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\nu}{\omega^2 + \nu^2} kT_\omega \frac{d\omega}{2\pi} \neq \frac{3}{2N} kT. \quad (2.10)$$

Здесь, как и в (2.3), можно выделить вклад нулевых колебаний. Соответствующий интеграл логарифмически расходится (ср. с (1.19)). Более того, средняя кинетическая энергия электрона в состоянии равновесия зависит от частоты столкновений  $\nu$ .

Чтобы расширить класс «квантовых формул Найквиста», рассмотрим движение электрона в тепловом электромагнитном поле. Для этого естественно, казалось бы, поступить следующим образом.

Определим спектральную плотность силы Ланжевена, эквивалентной действию теплового электромагнитного поля (с учетом изотропности движения), следующим образом:

$$\frac{1}{3} \langle f^2 \rangle_\omega = \frac{1}{3} e^2 \langle \delta E \rangle_\omega^2 \equiv \frac{4\pi^2}{3} e^2 \rho_\omega = \frac{4}{3} e^2 \frac{\omega^2}{c^3} kT_\omega. \quad (2.11)$$

Для функции  $\rho_\omega$  здесь использована формула Планка.

Обозначим через  $\gamma(\omega) = 2e^2\omega^2/3mc^3$  коэффициент радиационного трения. Тогда выражение для спектральной плотности силы Ланжевена (в расчете на одну компоненту) можно представить в виде квантовой формулы Найквиста (1.14) с учетом зависимости коэффициента трения от частоты:

$$\frac{1}{3} \langle f^2 \rangle_\omega = 2m\gamma(\omega) kT_\omega. \quad (2.12)$$

В дипольном приближении (условие  $c/\omega \gg e^2/mc^2$ , эквивалентное неравенству  $\gamma(\omega) \ll \omega$ ) уравнение Ланжевена имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} + m\hat{\gamma}v = f(t), \quad \text{отсюда} \quad (-i\omega + \gamma(\omega))v_\omega = \frac{f_\omega}{m}. \quad (2.13)$$

$\hat{\gamma}$  — оператор радиационного трения. С его помощью находим выражение для спектральной плотности скорости частицы

$$m \langle v^2 \rangle_\omega = \frac{1}{m} \frac{(f^2)_\omega}{\omega^2 + \gamma^2(\omega)} = \frac{2\gamma(\omega)}{\omega^2 + \gamma^2(\omega)} \cdot 3kT_\omega \quad (2.14)$$

Это результат не является удовлетворительным по той же причине, что и формулы (2.7), (2.10). Действительно, для средней кинетической энергии электрона из (2.14) следует выражение (по сравнению с (2.10) здесь отсутствует множитель  $1/N$ , поскольку рассматривается движение одной частицы)

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\gamma(\omega)}{\omega^2 + \gamma^2(\omega)} kT_\omega \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что равенство

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (2.16)$$

выражающее условие равновесия невзаимодействующих между собой частиц и поля, выполняется лишь в нулевом приближении по параметру  $\hbar\gamma/kT$ . Мы еще вернемся к обсуждению этого вопроса.

Для RC-цепочки квантовая формула Найквиста (1.14) приводит к равенству

$$\frac{1}{C} \langle q^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/RC}{\omega^2 + (1/RC)^2} kT_\omega \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (2.17)$$

и, следовательно, средняя потенциальная энергия зависит не только от температуры, но и от сопротивления  $R$ .

Подведем первые итоги.

Квантовая формула Найквиста в виде (1.14) привлекательна своей «универсальностью» — наличием характерных времен корреляции (1.18), которые не зависят от параметров системы. Однако, во-первых, «термодинамический вывод» этой формулы не является убедительным, а, во-вторых, формула (1.14) приводит к следствиям, которые противоречат статистической теории равновесного состояния.

Запись квантовой формулы Найквиста в виде (1.17) не является, разумеется, универсальной. Определение условий ее применимости является частью общей проблемы обоснования уравнений Ланжевена для квантовых систем. Основой для этого служат, как будет показано на конкретных примерах, кинетические уравнения. Отметим лишь, что формула (1.17) согласуется с равенством (2.3), выражающим второй закон термодинамики, и не приводит к нефизическим следствиям.

В п. 4–6 будет рассмотрено соотношение квантовой формулы Найквиста и формулы Каллена — Вельтона. Мы увидим, что нет оснований считать формулу Найквиста следствием формулы Каллена — Вельтона. Более того, они относятся к двум предельным случаям: формула Каллена — Вельтона отвечает условию бесконечно узких резонансов, когда «частоты столкновений» стремятся к нулю, а формула Найквиста (1.17) — к белому шуму. Это означает, что время корреляции шума много меньше всех характерных времен задачи. Прежде, однако, более четко определим сами понятия диссипативных и недиссипативных характеристик.



3. НЕДИССИПАТИВНЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Выше утверждалось, что в состоянии равновесия **одновременные** корреляторы не зависят от диссипативных характеристик. Попробуем более четко определить сами понятия диссипативных и недиссипативных характеристик произвольной равновесной системы. Возможность введения двух различных видов характеристик обусловлена двойкой ролью взаимодействия частиц и полей в макроскопических системах.

Широкий класс систем частиц описывается функцией Гамильтона, в которой потенциальная энергия определяется потенциалом взаимодействия пар частиц  $\Phi(r)$ . Тогда термодинамические функции: средняя энергия, давление, **одновременные** моменты аддитивных функций динамических переменных (плотности частиц, заряда, тока и т. д.), определяются одночастичной  $f_1$  и двухчастичной  $f_2$  функциями распределения.

В равновесном состоянии при отсутствии внешних полей функция  $f_1(r) = 1$ , а  $f_2$  и соответствующая корреляционная функция  $g_2$  зависят лишь от модуля расстояния между частицами. Соответственно этому пространственные компоненты Фурье являются четными функциями волнового вектора, т. е.  $f_2(k) = f_2(-k)$ ,  $g_2(k) = g_2(-k)$ .

Функции  $f_2(|r|)$ ,  $g_2(|r|)$  и определяемые ими термодинамические функции являются недиссипативными характеристиками системы. Вклад взаимодействия в них может быть сколь угодно большим, т. е. нет общего требования малости взаимодействия.

Для примера приведем известное выражение для средней кинетической энергии частицы, сколь угодно сильно взаимодействующей с окружением. В классической теории средняя кинетическая энергия не зависит от взаимодействия и полностью определяется температурой. В квантовой же теории средняя кинетическая энергия определяется равенством (см. § 33 в <sup>1</sup> и § 67 в <sup>12</sup>)

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT + \frac{\hbar^2 n}{24mkT} \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} g_2(|r|) dr; \quad (3.1)$$

здесь  $n$  — средняя концентрация атомов.

Таким образом, в квантовой теории взаимодействие влияет на величину средней кинетической энергии. Однако этот вклад, в отличие от квантового вклада в формуле (2.15), которая является следствием квантовой формулы Найквиста (1.14), определяется *недиссипативной* функцией  $g_2(|r|)$ .

В неравновесном состоянии функция  $g_2(k, p, p', t)$ , зависящая теперь и от импульсов частиц, является комплексной. Ее действительная часть определяет недиссипативные характеристики, а мнимая часть — диссипативные (§ 58 в <sup>12</sup>). К числу последних относятся интегралы столкновений, через которые выражаются кинетические коэффициенты, в частности электрическое сопротивление  $R$ . Функция  $\text{Im } g_2(k, p, p', t)$  определяет процесс релаксации к равновесию. В равновесном же состоянии  $\text{Im } g_2 = 0$ . Вследствие этого обращаются в нуль и интегралы столкновений.

Естественно, что двухвременные характеристики и соответствующие спектральные плотности и в равновесном состоянии зависят от функции  $\text{Im } g_2$ . Однако при переходе к **одновременным** моментам зависимость от диссипативных характеристик пропадает.

В качестве другого примера рассмотрим ФДС для полностью ионизованной кулоновской плазмы (см., например, (74.3) в <sup>12</sup>):

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k} = \frac{8\pi}{\omega} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega, k)}{|\epsilon(\omega, k)|^2} \cdot \frac{1}{2} \hbar \omega \text{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT}. \quad (3.2)$$

Диэлектрическая проницаемость плазмы

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ \times \int dp \frac{f_a\left(p + \frac{1}{2}\hbar k\right) - f_a\left(p - \frac{1}{2}\hbar k\right)}{\hbar(\omega + i\Delta - kv)}, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

может рассматриваться и для комплексных частот.

С помощью (3.2), (3.3) найдем интегрированием по  $\omega$  пространственную спектральную плотность флуктуаций поля (см. (75.5) в <sup>12</sup>):

$$(\delta E \delta E)_k = 4\pi n k T \left[ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon(0, k)}\right) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon(i \cdot 2\pi l k T / \hbar, k)}\right) \right]. \quad (3.4)$$

Мы видим, что спектральная плотность (3.4) определяется функцией  $\varepsilon(0, k)$ , которая совпадает с вещественной частью функции  $\varepsilon(\omega, k)$  на нулевой частоте, и диэлектрической проницаемостью на мнимой частоте  $\varepsilon(i \cdot 2\pi l k T / \hbar, k)$ . Из формулы (3.3) следует, что в равновесном состоянии, когда  $f(p)$  — распределение Максвелла, функция  $\operatorname{Im} \varepsilon(i \cdot 2\pi l k T / \hbar, k)$  равна нулю. Вследствие этого спектральная плотность (3.4) полностью выражается через вещественную часть диэлектрической проницаемости, т. е. через *недиссипативную характеристику*.

#### 4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА ФДС. ФОРМУЛА КАЛЛЕНА — ВЕЛЬТОНА

Формула Каллена — Вельтона связывает спектральную плотность произвольного внутреннего параметра  $X_i$  с мнимой частью тензора восприимчивости  $\alpha_{ij}$ . Ниже допускается ограничение  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . Спектральная плотность определяется формулой (см. § 124 в <sup>1</sup> и (10.4.21) в <sup>6</sup>)

$$(X_i X_j)_\omega = \pi \sum_{nm} (X_i)_{nm} (X_j)_{mn} \delta(\omega - \omega_{nm}) (f_m + f_n). \quad (4.1)$$

Второе выражение, необходимое для установления формулы Каллена — Вельтона, определяет мнимую часть тензора  $\alpha_{ij}(\omega)$  (см. § 124 в <sup>1</sup> и (10.4.11) в <sup>6</sup>):

$$\operatorname{Im} \alpha_{ij}(\omega) = \frac{\pi}{\hbar} \sum_{nm} (X_i)_{nm} (X_j)_{mn} \delta(\omega - \omega_{nm}) (f_m - f_n). \quad (4.2)$$

Воспользуемся равенством, справедливым для распределения Гиббса:

$$\delta(\omega - \omega_{nm}) \frac{f_n + f_m}{f_m - f_n} = \delta(\omega - \omega_{nm}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT}. \quad (4.3)$$

Из (4.1)–(4.3) и следует формула Каллена — Вельтона (2.6).

Таким образом, возможность перехода от (4.1), (4.2) к формуле Каллена — Вельтона существенно связана с наличием в (4.1), (4.2) функций  $\delta(\omega - \omega_{nm})$ , отвечающих условию бесконечно узкого резонанса для каждого перехода  $n - m$ . Будем рассматривать  $\delta$ -функции как пределы распределений с шириной резонанса  $\Delta$  (например, функции  $(1/\pi) \Delta / [(\omega - \omega_{nm})^2 + \Delta^2]$  при  $\Delta \rightarrow 0$ ).

Переход к  $\delta$ -функциям оправдан при наличии «широких» функций  $(1/2) \hbar\omega_{nm} \operatorname{cth}(\hbar\omega_{nm}/kT)$ , ширины которых характеризуются двумя параметрами  $kT/\hbar \equiv \tau_{\hbar}^{-1}$ ,  $\omega_{nm}$ . Вернемся к вопросу о выводе квантовой формулы Найквиста (1.14). Он основан на следующем (см., например, §78 в <sup>4</sup>). В формуле (2.6), которая считается универсальной, полагается, что функция  $\operatorname{Im} \alpha(\omega)$  пропорциональна  $R/|Z(\omega)|^2$  при любых значениях  $R$ . Но при этом нарушается равенство (4.3) и, следовательно, выражения (4.1), (4.2),

теперь уже не сводятся к формуле Каллена—Вельтона (2.6). Отметим также, что интеграл по частотам  $\omega$ , найденный с помощью формулы Каллена — Вельтона (2.6), приводит к следующему выражению для одновременного коррелятора флуктуации произвольного внутреннего параметра  $X$ :

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i X_i)_\omega \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{nm} |X_{nm}|^2 (f_m + f_n). \quad (4.4)$$

Мы видим, что одновременной коррелятор зависит лишь от температуры и параметров функции Гамильтона.

Таким образом, формула (2.6) получается путем сопоставления выражений (4.1), (4.2), которые по отдельности определяют спектральную плотность флуктуации и мнимую часть соответствующей восприимчивости. Естественно, что диссипация содержится уже в формуле (4.1), так как она не может возникнуть лишь благодаря алгебраическому преобразованию выражения (4.1) (с помощью (4.2)) в формулу Каллена — Вельтона (2.6).

Тем самым формула (4.1), порождающая формулу Каллена — Вельтона, сама является примером флуктуационно-диссипационного соотношения. Тогда возникает вопрос: что же является диссипативным фактором в формуле (4.1)? Ответ на него и дается в следующем разделе.

#### 5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ФОРМА ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Для расчета кинетических флуктуаций (флуктуаций функций распределения) необходимы более общие ФДС, связывающие спектральные плотности флуктуаций функций распределения с мнимыми частями соответствующих восприимчивостей. Наиболее общими соотношениями такого рода являются ФДС для многочастичных функций распределения, эволюция которых к равновесному состоянию описывается соответствующими кинетическими уравнениями<sup>13,14,15,7</sup>. Эти ФДС, разумеется, чрезвычайно сложны для непосредственного использования, но, однако, весьма удобны для «старта» при переходе к описанию с помощью более простых функций распределения.

Заметим прежде всего, что спектральная плотность произвольного внутреннего параметра, входящая, в частности, в формулу Каллена — Вельтона, может быть выражена через спектральную плотность флуктуаций многочастичной функции распределения (матрицы плотности в квантовой теории):

$$(X_i X_j)_\omega = \sum_{nm} \sum_{n_1 m_1} (X_i)_{nm} (X_j^*)_{n_1 m_1} (\delta f_{nm} \delta f_{n_1 m_1})_\omega. \quad (5.1)$$

Таким образом, задача может быть сведена к расчету спектральной плотности флуктуации  $\delta f_N$ ,  $\delta f_{nm}$ . Сделать это можно следующим образом<sup>7,15</sup>.

В классической теории для системы  $N$  частиц можно ввести функции распределения в  $6N$ -мерном фазовом пространстве  $X$ :

$$f_N^M(x, t) = \delta(x - X(t)), \quad f_N(x, t) = \overline{f_N^M(x, t)}; \quad (5.2)$$

$X(t)$  —  $6N$ -мерный вектор координат и импульсов частиц системы.

Первая из функций (5.2) при неполном описании является случайной. Вторая определяет среднее распределение по ансамблю Гиббса. Одновременной коррелятор флуктуации  $\delta f_N = f_N^M - f_N$ , т. е. величина

$$\langle \delta f_N(x, t) \delta f_N(x', t) \rangle = \delta(x - x') f_N(x, t) - f_N(x, t) f_N(x', t), \quad (5.3)$$

может служить мерой неполноты статистического описания.

В квантовой теории вводятся две соответствующие матрицы плотности. В равновесном состоянии спектральная плотность многочастичной матрицы плотности определяется выражением<sup>6,7,15</sup>

$$(\delta f_{nm} \delta f_{n_1 m_1})_{\omega} = \pi \delta(\omega - \omega_{nm}) \delta_{nn_1} \delta_{mm_1} (f_m + f_n). \quad (5.4)$$

Его можно переписать в виде ФДС:

$$(\delta f_{nm} \delta f_{n_1 m_1})_{\omega} = \hbar \operatorname{Im} A_{nmn_1 m_1}(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT}, \quad (5.5)$$

если ввести соответствующую восприимчивость

$$A_{nmn_1 m_1}(\omega) = -\frac{\delta_{nn_1} \delta_{mm_1} (f_m - f_n)}{\hbar(\omega - \omega_{nm} + i\Delta)}, \quad \Delta \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Чтобы перейти от ФДС (5.5) к формуле Каллена — Вельтона (2.6), надо подставить выражение (5.5) в (5.1) и просуммировать по  $n_1, m_1$ . При этом мнимая часть тензора  $\operatorname{Im} \alpha_{ij}(\omega)$  выражается через (5.6):

$$\operatorname{Im} \alpha_{ij}(\omega) = \sum_{nm} \sum_{n_1 m_1} (X_i)_{nm} (X_j^*)_{n_1 m_1} \operatorname{Im} A_{nmn_1 m_1}(\omega). \quad (5.7)$$

Отметим еще два следствия ФДС (5.4). Интеграл по частотам в (5.4) (или (5.5)) приводит к следующему выражению для **одновременного** коррелятора:

$$\langle \delta f_{nm}(t) \delta f_{n_1 m_1}^*(t) \rangle = \frac{1}{2} \delta_{nn_1} \delta_{mm_1} (f_m + f_n) - \delta_{nm} \delta_{n_1 m_1} f_n f_{m_1}. \quad (5.8)$$

Второй член в правой части обеспечивает выполнение равенств  $\sum_n \delta f_{nn} = 0$ ,  $\sum_{n_1} \delta f_{n_1 n_1} = 0$ . Одновременный коррелятор (5.8) не зависит от диссипативных характеристик.

Второй результат следует непосредственно из (5.6): вещественная часть восприимчивости на нулевой частоте

$$\operatorname{Re} A_{nmn_1 m_1}(0) = \frac{\delta_{nn_1} \delta_{mm_1}}{\hbar \omega_{nm}} (f_m - f_n) \quad (5.9)$$

в равновесном состоянии, когда  $f_m > f_n$  при  $E_n > E_m$ , положительна.

В формулах (5.4)–(5.9)  $n$  и  $m$  — полные наборы квантовых чисел системы  $N$  частиц. Основываясь на них, можно перейти к одночастичному описанию. Тогда, например, выражения (5.4), (5.5) сохраняют свой вид, однако выражение для восприимчивости (5.6) заменится следующим:

$$A_{nmn_1 m_1}(\omega) = -\frac{1}{N} \frac{\delta_{nn_1} \delta_{mm_1} (f_m - f_n)}{\hbar(\omega - \omega_{nm} + i\Delta)}, \quad \Delta \rightarrow 0. \quad (5.10)$$

По сравнению с (5.5) здесь имеется множитель  $1/N$ , поскольку одночастичные функции распределения являются коллективными переменными аддитивного типа. При переходе к одночастичному описанию  $n, m$  — наборы квантовых чисел отдельных частиц.

Примером может служить ФДС для разреженного газа в приближении Больцмана

$$(\delta f_{p_1 p_1'} \delta f_{p_2 p_2'})_{\omega} = \hbar \operatorname{Im} A(\omega, p_1, p_1', p_2, p_2') \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT}. \quad (5.11)$$

Минимальная часть соответствующей восприимчивости определяется формулой

$$\operatorname{Im} A(\omega, p_1, p_1', p_2, p_2') = \frac{\pi}{N\hbar} \frac{(2\pi\hbar)^6}{V^2} \delta(p_1 - p_2) \times \\ \times \delta(p_1' - p_2') \delta\left(\omega - \frac{1}{\hbar} (E_{p_1} - E_{p_1'})\right) (f_1(p_1') - f_1(p_1)). \quad (5.12)$$

Вернемся, наконец, к вопросу об условиях допустимости приближения бесконечно узких резонансов ( $\Delta \rightarrow 0$ ), которое используется не только при выводе формулы Каллена — Вельтона (2.6), но и при выводе ФДС (5.5) для флуктуаций многочастичных функций распределения (5.5).

Каноническое распределение Гиббса  $f_n$  устанавливается за счет взаимодействия рассматриваемой системы с термостатом. Обозначим соответствующее время релаксации через  $\tau_{\text{рел}}$ . Уравнение Лиувилля не описывает этот процесс установления. Оно является обратимым, так как его решение определяется решением уравнений динамики, и разброс начальных условий — начальное распределение — лишь перемещается по фазовому пространству с сохранением объема (теорема Лиувилля). По этой же причине не меняется со временем и энтропия системы.

Для описания процесса релаксации на уровне многочастичных функций распределения необходимы соответствующие кинетические уравнения, учитывающие неполноту описания рассматриваемой системы. Впервые такого рода уравнение было введено М. А. Леонтовичем для газа Больцмана<sup>13</sup>. Неполнота описания в этом случае фактически обусловлена использованием (явным или неявным) условия ослабления начальных мелкомасштабных (с временами корреляции, много меньшими времени свободного пробега) корреляций<sup>7,12,14,18</sup>. Известны и другие виды кинетических уравнений для многочастичных функций распределения<sup>6,7,14</sup>. При этом каноническое распределение Гиббса определяется из условия равенства нулю соответствующего интеграла столкновений  $I_n$ .

Время  $\tau_{\text{рел}}$  характеризует установление равновесного состояния. При достижении равновесия каноническое распределение от  $\tau_{\text{рел}}$ , естественно, не зависит. Однако для флуктуации  $\delta f_N$ ,  $\delta f_{nm}$  это уже не так.

Действительно, можно выделить мелкомасштабные флуктуации, для которых  $\tau_{\text{кор}} \ll \tau_{\text{рел}}$ , и крупномасштабные с  $\tau_{\text{кор}} \gg \tau_{\text{рел}}$ . Интегралы столкновений в кинетических уравнениях определяются мелкомасштабными флуктуациями, так как лишь для них можно использовать условие ослабления начальных корреляций. Расчет же крупномасштабных (кинетических) флуктуаций проводится на основе самих кинетических уравнений<sup>5-7,12,16</sup>.

Конечность времени  $\tau_{\text{рел}}$  ограничивает значения  $\Delta$  со стороны малых значений. Используя неравенства, введенные в п. 4 на с. 318, приходим к двойному неравенству

$$\max \left( \frac{kT}{\hbar}, \omega_{nm} \right) \gg \Delta \gg \frac{1}{\tau_{\text{рел}}} \quad (5.13)$$

Правое неравенство указывает на учет лишь мелкомасштабных флуктуаций, а левое определяет возможность перехода к «приближению бесконечно узкого резонанса», т. е. введения функции  $\delta(\omega - \omega_{nm})$ . Поскольку условие  $\tau_{\text{кор}} \ll \tau_{\text{рел}}$  выделяет область флуктуаций, для расчета которых «столкновения» не играют существенной роли, то в этом смысле приведенные в п. 4,5 флуктуационно-диссипационные соотношения относятся к «бесстолкновительной области». Термин «бесстолкновительное приближение» широко используется в теории плазмы<sup>7,12,19</sup>. В случае газа это отвечает приближению свободномолекулярного течения (см., § 7 гл. 9).

Основное практическое значение имеют ФДС для одночастичных и двухчастичных функций распределения. В частности, по формуле (5.1) спектральная плотность аддитивных внутренних параметров (ток и заряд в случае электрического контура) связаны со спектральной плотностью флуктуаций одночастичной функции распределения.

Неравенства (5.13) сохраняют силу при переходе к описанию на основе одночастичных функций распределения. При этом  $\omega_{nm}$  — частоты перехода для отдельного атома с учетом перенормировки за счет влияния среды,  $\tau_{\text{рел}}$  — время релаксации, определяемое интегралами столкновений в соот-

ветствующих кинетических уравнениях для одночастичных функций распределения.

В классическом приближении левое неравенство (5.13) всегда выполняется. Формула Каллена — Вельтона в этом случае имеет вид

$$(X_i X_j)_\omega = 2 \frac{\text{Im } \alpha_{ij}(\omega)}{\omega} kT \quad (5.14)$$

и справедлива при любой ширине резонанса.

Вернемся к вопросу, поставленному в конце предыдущего раздела. Теперь мы можем дать на него ответ. Действительно, диссипативным фактором в ФДС (5.4) для спектральной плотности  $N$ -частичной функции распределения, а следовательно, и в формулах (4.1), (2.6) является функция  $\delta(\omega - \omega_{nm})$ . Ее «ширина» характеризуется временами мелкомасштабных — «бесстолкновительных» — флуктуаций, которые, в свою очередь, определяют «интегралы столкновений» в соответствующих кинетических уравнениях.

Если функцию  $\delta(\omega - \omega_{nm})$  в (5.4), (4.1) заменить, например, линией Лоренца ширины  $\Delta$ , то результат расчета будет существенно зависеть от того, на каком этапе производится предельный переход  $\Delta \rightarrow 0$ . При получении ФДС этот предельный переход проводился в окончательных выражениях. Если же величину  $\Delta$  положить тождественно равной нулю в исходных уравнениях, то они станут обратимыми и получение ФДС будет уже невозможно.

Параметр  $\Delta$  отделяет область мелкомасштабных — «бесстолкновительных» — флуктуаций. Одним из условий получения ФДС является *условие частичного ослабления начальных корреляций*. Существенна и другая причина: *отличие от нуля одновременного коррелятора, который служит мерой неполноты статистического описания*<sup>7,12,15</sup>. Таким образом, вопрос о формулировке ФДС тесно связан с проблемой необратимости<sup>43,44</sup>.

## 6. ФДС ДЛЯ ФЛУКТУАЦИЙ С КОНЕЧНЫМИ ВРЕМЕНАМИ КОРРЕЛЯЦИИ

Разделение флуктуаций на мелкомасштабные — «бесстолкновительные» и крупномасштабные (выбор параметра  $\Delta$ , удовлетворяющего неравенствам (5.13)) связан с введением бесконечно малых масштабов времени и длины<sup>6,7,12</sup>.

Начнем с формулировки ФДС для флуктуаций многочастичных функций распределения (матриц плотности), но теперь уже для области столкновений. Обозначим через  $\delta I_{nm}$  оператор, соответствующий линеаризованному интегралу столкновений. Тогда выражение для спектральной плотности флуктуаций будет определяться выражением

$$(\delta f_{nm} \delta f_{n_1 m_1})_\omega = \text{Re} \frac{i}{\omega - \omega_{nm} + i \delta I_{nm}} \delta_{nn_1} \delta_{mm_1} (f_m + f_n). \quad (6.1)$$

Оно переходит в (5.4) при замене  $\delta I_{nm} \rightarrow \Delta$  и  $\Delta \rightarrow 0$ .

Спектральную плотность (6.1) можно найти двумя способами: путем решения уравнения для двухвременного коррелятора с «начальным» (при  $t = t'$ ) условием (5.8) (в классической теории — с условием (5.3)) или путем решения соответствующего уравнения Ланжевена

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{nm} + \delta I_{nm} \right) f_{nm} = y_{nm}, \quad \langle y_{nm} \rangle = 0. \quad (6.2)$$

Спектральная плотность ланжевенского источника равна

$$(y_{nm} y_{n_1 m_1})_\omega = \frac{1}{2} (\delta I_{nm} + \delta I_{n_1 m_1}) \delta_{nn_1} \delta_{mm_1} (f_m + f_n). \quad (6.3)$$

Выражение (6.1) можно переписать в виде ФДС:

$$(\delta f_{nm} \delta f_{n_1 m_1})_\omega = \hbar \text{Im} A_{nmn_1 m_1}(\omega) \frac{f_m + f_n}{f_m - f_n}, \quad (6.4)$$

если ввести соответствующую восприимчивость (ср. с (5.10))

$$A_{nmn_1m_1}(\omega) = -\frac{1}{\hbar(\omega - \omega_{nm} + i\delta I_{nm})} \delta_{nn_1} \delta_{mm_1} (f_m - f_n). \quad (6.5)$$

Из-за конечности ширины резонанса теперь нет оснований использовать равенство (4.3), чтобы привести ФДС (6.4) к виду (5.5) и соответственно, к формуле (2.6).

Уже отмечалось, что классическое выражение (5.14) остается справедливой и при конечном времени корреляции флуктуаций (при конечной ширине резонанса). Доказательство для плазмы имеется, например, в § 64 в<sup>12</sup>. Оно переносится и на случай произвольных внутренних параметров.

Рассмотрим некоторые примеры ФДС для флуктуаций с конечным временем корреляции.

### 6.1. ФДС для газа Больцмана<sup>16,5,11</sup>

При расчете флуктуаций одночастичной матрицы плотности в больцмановском газе оператор  $\delta I_{nm}$  заменяется оператором  $\delta I_p$ , который определяется структурой линейризованного квантового интеграла столкновений Больцмана. Спектральная плотность флуктуаций  $\delta f_{pp'}$  определяется выражением

$$(\delta f_{p_1 p_1'} \delta f_{p_2 p_2'})_{\omega} = \frac{1}{N} \operatorname{Re} \frac{i}{\omega - (E_{p_1} - E_{p_1'})/\hbar + i\delta I_p} \times \\ \times \frac{(2\pi\hbar)^6}{V^2} \delta(p_1 - p_2) \delta(p_1' - p_2') (f(p_1) + f(p_1')). \quad (6.6)$$

Его можно представить в виде ФДС:

$$(\delta f_{p_1 p_1'} \delta f_{p_2 p_2'})_{\omega} = \hbar \operatorname{Im} A(p_1, p_1', p_2, p_2', \omega) \frac{f(p_1') + f(p_1)}{f(p_1') - f(p_1)}, \quad (6.7)$$

если ввести восприимчивость (ср. с (5.12))

$$A(p_1, p_1', p_2, p_2', \omega) = -\frac{1}{N\hbar} \frac{1}{\omega - [(E_{p_1} - E_{p_1'})/\hbar] + i\delta T_p} \times \\ \times \frac{(2\pi\hbar)^6}{V^2} \delta(p_1 - p_2) \delta(p_1' - p_2') (f(p_1') - f(p_1)). \quad (6.8)$$

Запись ФДС (6.7) в виде (5.11) теперь уже невозможна из-за конечности ширины резонанса.

ФДС (6.7) в отличие от (5.11) может быть использовано и для неравновесных состояний. Основываясь на нем, можно дать флуктуационное представление интеграла столкновений Больцмана<sup>7,17</sup>. Обычно флуктуационное представление интегралов столкновений используется лишь в рамках теории возмущений или поляризационного приближения<sup>6,7,19</sup>.

### 6.2. Ф о р м у л а П л а н к а

При расчете распределения теплового излучения в полости конечность времени корреляции флуктуаций определяется диссипативными граничными условиями. Учтем это путем введения эффективной проводимости,  $\gamma = 4\pi\sigma$  — соответствующий коэффициент затухания. Зависимость  $\gamma$  от частоты и волнового числа здесь не учитываем. Классическое выражение для пространственно-временной спектральной плотности флуктуации поля имеет вид ((3.12), гл. 14 в')

$$\frac{1}{4\pi} (\delta E \delta E)_{\omega, k} = \frac{4\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + \gamma^2\omega^2} kT, \quad \omega_k = ck. \quad (6.9)$$

В квантовом случае, следуя Планку, заменим  $kT$  на среднюю энергию осциллятора с номером  $k$  и частотой  $\omega_k$  (ср. с (1.16)):

$$kT \rightarrow kT_{\omega_k} = \frac{\hbar\omega_k}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_k}{2kT}. \quad (6.10)$$

Из формул (6.9), (6.10) следует, что и в квантовом случае одновременной коррелятор не зависит от  $\gamma$ . Это естественно, так как коррелятор  $(\delta E)_k^2$  — недиссипативная характеристика (см. раздел 3).

Переход от (6.9), (6.10) к формуле Планка возможен лишь в нулевом приближении по параметру  $\hbar\gamma/kT$  (точный резонанс), когда возможна замена (ср. с (1.21))

$$\frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \rightarrow \pi |\omega| \delta(\omega^2 - \omega_k^2). \quad (6.11)$$

При этом условии интегрирование по  $k$  приводит к формуле Планка.

Если не следовать Планку и вместо замены (6.10) взять, как в (1.13),  $kT \rightarrow kT_\omega$ , то одновременной коррелятор  $(\delta E)_k^2$  будет зависеть от  $\gamma$  и мы придем к тем же трудностям, что и для формулы Найквиста (1.14).

Итак, существуют два вида флуктуационно-диссипационных соотношений. К первому относится формула Каллена—Вельтона (2.6), ФДС (5.5), более частные ФДС для флуктуаций одночастичных функций распределения, например (5.11) для газа Больцмана. Во всех этих случаях выполняются неравенства (5.13). Они позволяют учитывать лишь мелкомасштабные флуктуации и использовать условия резонанса, при которых справедливо равенство (4.3). Оно детализируется для конкретных случаев.

Флуктуационно-диссипационные соотношения второго рода имеют место для долгоживущих корреляций, для которых времена  $\tau_{\text{кор}}$  сравнимы с  $\tau_{\text{ред}}$ . Это могут быть флуктуации функций распределения в кинетической теории, флуктуации локальных гидродинамических и термодинамических функций в гидродинамике, флуктуации тока и заряда в электрических цепях. К числу таких ФДС относится и формула Найквиста. При этом квантовые варианты формулы Найквиста (1.14), (1.17) не являются эквивалентными. Посмотрим, к какому из этих двух выражений приводит статистическая теория. Сделаем это на примере системы атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем. Последнее будет играть здесь роль термостата.

## 7. ФДС ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ

Впервые кинетическое уравнение — уравнение баланса населенностей энергетических уровней молекул с двумя квантовыми состояниями — было предложено в знаменитой работе А. Эйнштейна в 1916 г.

Рассмотрим интеграл столкновений с учетом всех переходов между дискретными уровнями (см. (2.1), гл. 19 в<sup>7</sup>):

$$I_n = \sum_m \left[ B_m^n \frac{1}{4\pi^2} (\delta E \delta E)_{\omega_{nm}} (f_m - f_n) - \frac{1}{2} A_m^n (f_m + f_n) \right]; \quad (7.1)$$

здесь  $B_m^n$ ,  $A_m^n$  — коэффициенты Эйнштейна. Спектральная плотность флуктуаций поля в равновесном состоянии

$$(\delta E \delta E)_{\omega_{nm}} = 4\pi^2 \frac{\omega_{nm}^2}{\pi^2 c^3} kT_{\omega_{nm}} \quad (7.2)$$

лишь множителем  $4\pi^2$  отличается от функции Планка  $\rho_{\omega_{nm}}$ . При выводе кинетического уравнения для функции  $f_n$  используются неравенства (5.13). Это и дает основание выделить в интеграле столкновений (7.1) резонансные вклады на частотах  $\omega = \omega_{nm}$ .



Расчет кинетических флуктуаций для системы двухуровневых атомов<sup>6,7</sup> приводит к следующему выражению для пространственно-временной спектральной плотности флуктуаций тока:

$$(\delta I \delta I)_{\omega, k} = \frac{2\gamma_{nm}}{\gamma_{nm}^2 + [\omega - (\omega_{nm}^2/\omega)]^2} \frac{N}{V} \omega_{nm}^2 |d_{nm}|^2 (f_m + f_n). \quad (7.3)$$

Его можно записать в виде ФДС:

$$(\delta I \delta I)_{\omega, k} = 3 \cdot 2 \operatorname{Re} \sigma(\omega) k T_{\omega_{nm}}, \quad (7.4)$$

если ввести обозначение для проводимости  $\sigma(\omega)$ .

Сопоставим ФДС (7.4) с квантовыми обобщениями (1.14), (1.17) классической формулы Найквиста. Величинам  $\delta I$ ,  $\sigma$  в (7.4) соответствуют э. д. с.  $\mathcal{E}$  и сопротивление  $R$ , а частоте перехода  $\omega_{nm}$  — собственная частота контура  $\omega_0$ . Мы видим, что ФДС (7.4) имеет структуру (1.17), а не (1.14).

Приближение двухуровневых атомов отвечает одному из двух предельных случаев. Другим является модель квантовых атомов-осцилляторов. Для нее существует более прямая связь с моделью колебательного контура.

### 8. СИСТЕМА КВАНТОВЫХ АТОМОВ-ОСЦИЛЛЯТОРОВ.

#### КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ. КВАНТОВАЯ ФОРМУЛА НАЙКВИСТА

Вернемся к кинетическому уравнению с интегралом столкновений (7.1). Используем его для системы одномерных квантовых атомов-осцилляторов с собственной частотой  $\omega_0$ . С помощью (7.1) находим

$$I_n = \gamma \left\{ \operatorname{cth} \left( \frac{\hbar \omega_0}{2kT} \right) \left[ \frac{n+1}{2} (f_{n+1} - f_n) + \frac{n}{2} (f_{n-1} - f_n) \right] - \left[ -\frac{n+1}{2} (f_{n+1} + f_n) + \frac{n}{2} (f_{n-1} + f_n) \right] \right\}; \quad (8.1)$$

здесь введено обозначение для коэффициента радиационного трения

$$\gamma = \frac{2e^2 \omega_0^3}{3mc^3}. \quad (8.2)$$

Используя выражение (8.1), запишем уравнение для средней энергии

$$\langle E \rangle = \sum_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 f_n(t). \quad (8.3)$$

Здесь удобны две формы записи этого уравнения:

$$\frac{d \langle E \rangle}{dt} = \gamma(\omega_0) (kT_{\omega_0} - \langle E \rangle) \equiv D - \gamma(\omega_0) \langle E \rangle. \quad (8.4)$$

Во втором случае используется выражение для квантового коэффициента диффузии

$$D = \gamma(\omega_0) kT_{\omega_0}. \quad (8.5)$$

Его можно рассматривать как квантовое обобщение формулы Эйнштейна для коэффициента диффузии в классическом уравнении Фоккера — Планка (1.9). Рассмотрим связь этого уравнения с квантовым уравнением для функции  $f_n$  с интегралом столкновений (8.1).

Именно, заменим уравнение для функции  $f_n(t)$  эффективным уравнением Фоккера — Планка для функции распределения значений энергии  $f(E, t)$ . Запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial f(E, t)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial E} \left( E \frac{\partial f}{\partial E} \right) + \frac{\partial}{\partial E} (\gamma F f), \quad \int_0^\infty f(E, t) dE = 1, \quad (8.6)$$

а коэффициент диффузии определим из условия, чтобы уравнение для средней энергии

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E f dE$$

совпадало с точным уравнением (8.4). В результате для коэффициента диффузии получим выражение (8.5). Наконец, от (8.6) можно перейти к уравнению Фоккера — Планка для функции распределения  $f(g, I, t)$  значений заряда и тока. Используя замену

$$E \rightarrow \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \quad \gamma \rightarrow \frac{R}{L}, \quad D \rightarrow \frac{D}{L}, \quad (8.7)$$

придем к уравнению Фоккера — Планка (1.9) с квантовым коэффициентом диффузии

$$D = RkT_{\omega_0} \quad (8.8)$$

и, как следствие, к квантовой формуле Найквиста (1.17) для спектральной плотности э. д. с. в соответствующем уравнении Ланжевена. Условия применимости уравнения Фоккера — Планка (1.9) с квантовым коэффициентом диффузии обсуждаются, например, в работе<sup>30</sup> при анализе квантовых свойств высокодобротных макроскопических резонаторов.

#### 9. КВАНТОВАЯ ФОРМУЛА НАЙКВИСТА ДЛЯ ПЛАЗМЕННОГО КОНТУРА

В п. 7, 8 собственные частоты  $\omega_{ab}$ ,  $\omega_0$  являются характеристиками отдельных атомов. Рассмотрим пример, когда собственная частота является характеристикой системы в целом. Примером будет служить плазменный контур с частотой Лэнгмюра для электронов плазмы  $\omega_e$ .

Уравнения Ланжевена для заряженных частиц плазмы очень сложны вследствие нелинейности кинетических уравнений. Можно, однако, найти модельное уравнение Фоккера — Планка для функции распределения коллективных переменных и с учетом квантовых эффектов. Поступим следующим образом.

Коэффициент трения определим через эффективную частоту столкновений  $\nu$ , а коэффициент диффузии — формулой

$$D = m\nu kT_{\text{эф}}. \quad (9.1)$$

Здесь  $T_{\text{эф}}$  — эффективная температура,

$$kT_{\text{эф}} = \frac{\int d\omega dk \delta(\omega - kv) ((kv)^2/k^2) (\delta E \delta E)_{\omega, k}}{\int d\omega dk \delta(\omega - kv) (kv/k^2) (\text{Im } \varepsilon(\omega, k) / |\varepsilon(\omega, k)|^2)}. \quad (9.2)$$

Спектральная плотность флуктуаций поля и диэлектрическая проницаемость с учетом квантовых эффектов определяются известными формулами (3.2), (3.3). Из выражений (3.2), (9.2) следует, что в классическом пределе, когда  $\hbar \rightarrow 0$ , эффективная (квантовая) температура  $T_{\text{эф}} = T$ . Формулу (9.2) можно рассматривать как следствие соотношения Эйнштейна  $D_{ij} \nu_j = A_i$  для плазмы<sup>6,7,19</sup>.

Уравнение Ланжевена для плазменного контура с собственной частотой  $\omega_e = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$  совпадает по виду с (1.4). При этом спектральная плотность случайной э. д. с. определяется выражением ( $T_{\text{эф}} = T_{\omega_e}$ )

$$(\mathcal{E}^2)_{\omega} = 2RkT_{\omega_e} \equiv 2R \frac{1}{2} \hbar \omega_e \text{cth} \frac{\hbar \omega_e}{2kT}. \quad (9.3)$$

Оно соответствует квантовой формуле Найквиста (1.17), в которой собственная частота  $\omega_0$  определяется собственной частотой электронных колебаний в плазме.

10. ФОРМУЛА НАЙКВИСТА ДЛЯ ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ТРЕНИЕМ

Расчет флуктуаций в нелинейных системах давно привлекает внимание исследователей<sup>21-28</sup>. Для цепи с нелинейным сопротивлением задача сводится к решению уравнения Фоккера — Планка с высшими производными<sup>22</sup>. Так, например, при квадратичной зависимости сопротивления от тока в уравнении для функции распределения  $f(I, q, t)$  появляются члены с третьей и четвертой производными. При этом, однако, теория не дает однозначного определения коэффициентов при высших производных. В них остается неопределенной константа, не связанная с диссипативными характеристиками цепи. При квадратичной нелинейности выбором этой константы можно обратиться в нуль коэффициенты при третьей и четвертой производных и тем самым свести уравнение для функции  $f(I, q, t)$  к обычному уравнению Фоккера — Планка.

Итак, уравнение Фоккера — Планка может быть использовано для расчета флуктуаций в цепи с нелинейным сопротивлением при условии, что функция  $R(I)$  является четной (§ 9, гл. 4 в<sup>6</sup>). Используем такую возможность для обобщения формул Эйнштейна и Найквиста на случай нелинейной цепи.

Запишем уравнения Ланжевена для тока и заряда в виде (ср. с (1.3))

$$\frac{dq}{dt} = I, \quad L \frac{dI}{dt} + R(I)I + \frac{1}{c}q - \frac{1}{2} \frac{dD(I)}{dI} = D^{1/2}(I) y(t) \equiv \xi(I, t); \quad (10.1)$$

$R(I)$  — четная функция тока. При квадратичной нелинейности

$$R(I) = R + \frac{R_1 L I^2}{kT}. \quad (10.2)$$

$R_1$  — нелинейное сопротивление в единицах  $L^2/kT$ . Случайная э. д. с. эквивалентная действию на контур хаотически движущихся зарядов, зависит теперь не только от времени, но и от силы тока. Она представлена в виде  $D^{1/2}(I) y(t)$ , где  $D(I)$  — неизвестная пока интенсивность шума,  $y(t)$  — случайный источник, определяемый двумя первыми моментами

$$\langle y(t) \rangle = 0, \quad \langle y(t) y(t') \rangle = 2\delta(t - t'). \quad (10.3)$$

Дополнительный член —  $(1/2) dD/dI$  в левой части уравнения (10.1) для  $I$  введен с целью упрощения уравнения Фоккера — Планка и придания ему вида, отвечающего общей структуре кинетических уравнений. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + I \frac{\partial f}{\partial q} - \omega_0^2 q \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial I} \left( D(I) \frac{\partial f}{\partial I} \right) + \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{R(I)}{L} I f \right). \quad (10.4)$$

Функцию  $D(I)$  находим из условия, чтобы в равновесном состоянии решение уравнения (9.4) также имело вид (1.10). В результате приходим к следующему выражению для коэффициента диффузии с учетом как квантовых эффектов, так и нелинейной зависимости сопротивления от тока:

$$D(I) = R(I) \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_0}{2kT} \equiv R(I) kT_{\omega_0}. \quad (10.5)$$

Как и для линейных цепей, одновременные корреляторы флуктуаций тока и заряда  $\langle I^2 \rangle$ ,  $\langle q^2 \rangle$  в равновесном состоянии зависят лишь от температуры и недиссипативных параметров  $L, C$ .

В частном случае  $LR$ -цепочки ( $1/C \rightarrow 0, \omega_0 \rightarrow 0$ ), что соответствует движению свободной броуновской частицы в среде с нелинейным трением, квантовые эффекты становятся несущественными и формула (9.4) принимает вид

$$D(I) = R(I) kT. \quad (10.6)$$

Переход от (10.5) к (10.6) соответствует нулевому приближению по параметру  $\hbar\omega_0/kT$ . Интересен другой предельный случай, когда параметр  $\hbar\omega_0/kT$  велик и, следовательно, вклад нулевых колебаний является доминирующим. Такая ситуация имеет место в квантовых генераторах света.

## 11. ЗАВИСИМОСТЬ ШИРИНЫ СПЕКТРА КОЛЕБАНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ОТ МОЩНОСТИ

В классическом генераторе томсоновского типа источником шума является не только тепловое движение зарядов в контуре, но и дробовой шум анодного тока<sup>26-28</sup>. В квантовых генераторах дробовой шум обусловлен дискретностью (атомарной структурой) рабочей среды<sup>6,7</sup>. Он может быть учтен путем введения в уравнения поля случайных источников поляризации. Здесь мы рассмотрим влияние теплового шума (с учетом квантовых эффектов и диссипативной нелинейности) на спектр колебаний в классических и квантовых генераторах.

Спектральная линия генератора имеет структуру, которая характеризуется по меньшей мере двумя параметрами: шириной спектра флуктуаций амплитуды и коэффициентом диффузии фазы. Чтобы не усложнять рассмотрение и наиболее просто выявить роль квантовых эффектов и диссипативной нелинейности, используем приближенное описание спектра с введением эффективной линии Лоренца. Ширина линии при этом определяется уравнениями для энергии в приближении первых моментов (гл. 4, 11 в<sup>6</sup>, гл. 12, 22 в<sup>7</sup>).

Уравнение Фоккера — Планка для функции распределения энергии колебаний в генераторе  $f(E, t)$  с учетом зависимости коэффициента диффузии от энергии может быть записано в виде (ср. с (4.10.3) в<sup>6</sup> и (1.8), гл. 12 в<sup>7</sup>)

$$\frac{\partial f(E, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} \left( D(E) E \frac{\partial f}{\partial E} \right) + \frac{\partial}{\partial E} [(a + bE) Ef]. \quad (11.1)$$

Коэффициент диффузии определяется выражением

$$D(E) = (\gamma + bE) \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_0}{2kT}. \quad (11.2)$$

По сравнению с (8.5) здесь введено нелинейное трение ( $\gamma \rightarrow \gamma + bE$ ) с коэффициентом нелинейности  $b$ , который соответствует  $R_1$  в (10.2). Величина

$$a = \gamma - a_0; \quad (11.3)$$

$a_0$  характеризует обратную связь. На пороге генерации  $a_0 = \gamma$  и  $a = 0$ . При отсутствии обратной связи ( $a_0 = 0$ ,  $a = \gamma$ ) из (11.1), (11.2) следует, что равновесное решение уравнения (11.1) совпадает с равновесным распределением энергии квантового осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$ .

С помощью уравнения (11.1) для распределения средней энергии по спектру получается выражение<sup>6,7</sup>

$$E(\omega) = \frac{2\lambda}{\omega^2 + \lambda^2} \langle E \rangle, \quad \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \langle E \rangle. \quad (11.4)$$

При этом полуширина спектра  $\lambda$  определяется формулой

$$\lambda = \frac{D[1 + (b/\gamma)\langle E \rangle]}{2\langle E \rangle}, \quad (11.5)$$

где

$$D = \gamma \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_0}{2kT} \equiv \gamma kT_{\omega_0} \quad (11.6)$$

— квантовый коэффициент диффузии линейной системы (совпадает с (8.5)).

В равновесном состоянии средняя энергия  $\langle E \rangle = kT_{\omega_0}$  и

$$\lambda = \frac{1}{2} (\gamma + bkT_{\omega_0}). \quad (11.7)$$

В режиме развитой генерации, но при достаточно малой нелинейности ( $b \langle E \rangle / \gamma \ll 1$ ) величина  $\lambda$  определяется выражением

$$\lambda = \frac{D}{2 \langle E \rangle} \equiv \frac{\gamma k T_{\omega_0}}{2 \langle E \rangle} \quad (11.8)$$

и убывает с увеличением мощности колебаний. В частности, в квантовом пределе ( $\hbar\omega_0 \gg kT$ ) из (11.8) следует известная формула Шавлова — Таунса для ширины спектра (см. <sup>23,32</sup>, гл. 11 в<sup>6</sup>). Там же — сравнение с формулами Хакена и Лэкса). Из (11.5) следует, что при дальнейшем увеличении энергии колебаний наступает насыщение (ширина линии  $\lambda \rightarrow Db/2\gamma$ ).

## 12. КВАНТОВАЯ ФОРМУЛА НАЙКВИСТА И ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ

Интерес к теории броуновского движения в квантовых системах в последние годы существенно возрос (см., например, работы <sup>29–31</sup>). В работе <sup>31</sup> квантовая формула Найквиста (1.14) используется для объяснения результатов экспериментальных исследований флуктуаций напряжения в переходах Джозефсона. Эти данные, по-видимому, еще недостаточны для однозначного выбора одного из двух выражений (1.14), (1.17).

Покажем, что в качестве «судьи» можно привлечь лэмбовский сдвиг — сдвиг уровней атома водорода из-за действия вакуумных (приближение  $T = 0$ ) флуктуаций электромагнитного поля. Лэмбовский сдвиг был впервые обнаружен в работе <sup>33</sup>.

Известны два способа расчета лэмбовского сдвига. Один из них основан на «вычитательном формализме» квантовой электродинамики. Первый расчет был выполнен Бете <sup>34</sup> (см. <sup>35–38</sup>). Второй способ, кажущийся на первый взгляд менее формальным, был предложен Вельтоном — одним из авторов формулы Каллена — Вельтона — в работе <sup>39</sup>. Он излагается в учебных пособиях <sup>40,41</sup>.

Покажем, что эти два способа расчета основаны фактически на двух разных квантовых формулах Найквиста: формуле (1.14) в методе Вельтона и формуле (1.17) при использовании «вычитательного формализма» квантовой электродинамики. Оба метода, однако, приводят к одной и той же формуле Бете для сдвига уровня. В чем же дело? Мы увидим, что метод Вельтона не является последовательным и предпочтение надо отдать «вычитательному формализму» и, следовательно, квантовой формуле Найквиста в виде (1.17).

Метод Вельтона основан на использовании уравнения Ланжевена (2.13) для расчета флуктуаций движения электрона в основном состоянии атома водорода. Совпадение результата расчета с формулой Бете оказывается при этом случайным, поскольку при определении сдвига энергии учитывается лишь изменение потенциальной энергии за счет флуктуационного смещения электрона. Учет же флуктуаций скорости, определяющих изменение кинетической энергии электрона, существенно меняет всю картину.

Действительно, обратимся к формуле (2.15), определяющей флуктуационный вклад в кинетическую энергию. При  $T = 0$  интеграл по  $\omega$  расходится как  $\omega^2$ . Поскольку не учитывается наличие флуктуаций электрон-позитронного вакуума, то область интегрирования ограничим условием  $\omega < \omega_{\max} = mc^2/\hbar$ . Используя обозначения  $\gamma(\omega)$  для коэффициента радиационного трения на частоте  $\omega$ ,  $\alpha = e^2/\hbar c$  для постоянной тонкой структуры, и  $|E_0| = me^4/2\hbar^2$  для энергии основного состояния атома водорода (или энергии ионизации), придем к результату

$$\frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \hbar \gamma(\omega_{\max}) \propto \frac{1}{\alpha} |E_0| \gg |E_0|. \quad (12.1)$$

Результат неудовлетворителен в двух отношениях. Во-первых, средняя кинетическая энергия при  $T = 0$  не равна нулю и зависит от диссипативной характеристики  $\gamma(\omega_{\max})$ . Во-вторых, имеется огромный отрыв температуры частицы  $(1/3) m \langle v^2 \rangle$  от температуры поля (здесь  $T = 0$ ). Это находится в явном противоречии с опытными данными.

Оба недостатка расчета по методу Вельтона исчезают при использовании для нахождения средней кинетической энергии электрона при взаимодействии с флуктуационным полем соответствующего кинетического уравнения для функции распределения скорости электрона  $f(p, t)$ <sup>6,42</sup>. В состоянии равновесия  $f(p)$  — распределение Максвелла, поэтому и в квантовой теории выполняется равенство (2.16), т. е. нет отрыва температур электронов и поля. Существенно, что при установлении равновесного распределения в интеграле столкновений играют роль компоненты спектральной плотности  $(\delta E \delta E)_{\omega, k}$  лишь при тех значениях  $\omega$  и  $k$ , для которых выполняются законы сохранения энергии и импульса частиц и квантов поля. Эти условия не выполняются при использовании уравнения Ланжевена (2.13), (2.12). В этом одна из причин непоследовательности метода Вельтона. Вторая причина обусловлена недостаточностью классической модели движения электрона в атоме, которая кладется в основу расчета.

Для расчета уширения и сдвига уровней атомов из-за действия флуктуационного электромагнитного поля может быть использована соответствующая система кинетических уравнений для диагональных и недиагональных матриц плотности  $f_n(t)$ ,  $f_{nm}(t)$ <sup>6,7,42</sup>. Интеграл столкновений  $I_n(t)$  в уравнении для функции  $f_n(t)$  в приближении неподвижных атомов определяется выражением (7.1).

Для расчета сдвига уровня используем выражение (9.2.8) из<sup>6</sup>

$$\Delta E_n = \frac{1}{3\hbar} \sum_{n_1} |d_{nn_1}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(\delta E \delta E)_{\omega}}{\omega - \omega_{n, n_1}}. \quad (12.2)$$

Оно определяет не полный, а лишь индуцированный вклад флуктуаций поля (полное выражение будет определено ниже). Индуцированный вклад является определяющим лишь при расчете квадратичного эффекта Штарка во внешнем поле.

Если в выражении (12.2) при расчете сдвига уровня использовать распределение Планка, что соответствует использованию квантовой формулы Найквиста (1.14) (см. уравнения (2.13), (2.12)), то при интегрировании по  $\omega$  возникает степенная расходимость. Для получения формулы Бете надо использовать в (12.2) для спектральной плотности поля выражение (7.2), т. е. спектральную плотность только на частотах перехода. Действительно, ведь именно эта функция входит в интеграл столкновений (7.1), определяющий установление равновесного распределения при взаимодействии с флуктуационным полем.

Таким образом, основываясь на структуре интеграла столкновений (7.1), при расчете сдвига уровня используем спектральную плотность  $(\delta E \delta E)_{\omega}$  лишь на частотах переходов  $\omega_{n_1 n}$ . Это эквивалентно введению шума (здесь — флуктуаций электромагнитного поля) по квантовой формуле Найквиста (1.17), а не (1.14).

Напомним, что формула (12.2) определяет лишь индуцированный вклад в сдвиг уровня энергии. С помощью кинетического уравнения для недиагональной матрицы плотности  $f_{nm}(t)$  можно учесть при расчете сдвига уровня не только индуцированные, но и спонтанные переходы (см. гл. 9 в<sup>6</sup>). Учет спонтанных переходов приводит к замене (полагаем сразу  $\omega = \omega_{n_1 n}$ ) (см. (9.4.7) в<sup>6</sup>)

$$(\delta E \delta E)_{\omega_{n_1 n}} \rightarrow (\delta E \delta E)_{\omega_{n_1 n}} + \frac{2\hbar\omega_{n_1 n}^3}{c^3}. \quad (12.3)$$

При  $T = 0$  правая часть равна  $4\hbar\omega_{n_1n}^3/c^3$ , если  $\omega_{n_1n} > 0$ , и равна нулю при  $\omega_{n_1n} < 0$ . В результате после подстановки (12.3) в (12.2) и интегрирования по  $\omega$  приходим к формуле Бете

$$\Delta E_n = \frac{2}{3\pi c^3} \sum_n |d_{n_1n}|^2 \omega_{n_1n}^3 \ln \frac{\omega_{\max}}{\omega_{n_1n}} \approx \frac{4e^4}{3m^2 c^3} \hbar |\psi_n(0)|^2 \ln \frac{\omega_{\max}}{\langle \omega_{n_1n} \rangle}. \quad (12.4)$$

При суммировании по  $n_1$  под знаком логарифма произведена замена  $\omega_{n_1n} \rightarrow \langle \omega_{n_1n} \rangle$ . Поскольку величина  $|\psi_n(0)|^2$  отлична от нуля лишь для S-состояния, то (с учетом  $\langle \omega_{n_1n} \rangle \sim E_n/\hbar$ ) формулу Бете (12.4) можно представить в виде

$$\Delta E_n = \frac{8}{3\pi} |E_0| \frac{\alpha^3}{n^3} \ln \frac{2n^2}{\alpha^2}; \quad (12.5)$$

$|E_0|$  — энергия основного состояния атома водорода,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $n$  — главное квантовое число. Учет дополнительных факторов приводит к некоторому уточнению формулы Бете<sup>35-38</sup>.

### 13. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, дан краткий обзор флуктуационно-диссипационных соотношений для различных физических систем на всех уровнях статистического описания. Наиболее общими, как мы видели, являются ФДС для многочастичных функций распределения. Они слишком сложны для непосредственного использования, но, однако, удобны, как исходные, при формулировке более простых ФДС.

На многих примерах было показано, что из двух методов, основанных соответственно на кинетических уравнениях и уравнениях Ланжевена, предпочтение следует отдать первому. Более того, именно на основе кинетических уравнений можно установить применимость уравнений Ланжевена и определить, в частности, спектральные плотности ланжевенских источников. На таком пути не возникают принципиальные трудности, к которым приводит, например, квантовая формула Найквиста (1.14).

Не все вопросы, разумеется, включены в обзор. Так, почти не рассматривались кинетические уравнения с запаздыванием — уравнения немарковского типа. К ним относятся уравнения с радиационным трением. Примером таких уравнений может служить кинетическое уравнение для недиагональной матрицы плотности системы атома — электромагнитное поле. Эффекты запаздывания проявляются в зависимости как диссипативных (например, ширины линии), так и недиссипативных (например, сдвига частоты или энергии) характеристик от текущей частоты спектра.

ФДС широко используются и в неравновесной статистической теории, в частности при построении самих кинетических уравнений. При этом устанавливаются и условия справедливости соответствующих ФДС. Справедливость получаемых ФДС подтверждается косвенно «работоспособностью» получаемых при этом уравнений \*).

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1976.
2. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1972.

\*) Автор пользуется возможностью поблагодарить Ю. С. Бараша за стимулирующую критику и А. А. Рухадзе на поддержку.

3. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика.— М.: Наука, 1971.
4. Ли́фшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2— М.: Наука, 1979.
5. Gantsevich S. V., Gurevich V. L., Katilus R.// Riv. Nuovo Cimento. 1979. V. 2. P. 1.  
Коган Ш. М., Шулман А. Я.// ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 862.
6. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов.— М.: Наука, 1980.
7. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика.— М.: Наука, 1982.
8. Nyquist H.// Phys. Rev. 1928. V. 32. P. 110.
9. Гинзбург В. Л.// УФН. 1952. Т. 46. С. 348.
10. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1975 (1-е изд.); 1981 (2-е изд.).
11. Горелик Г. С.// УФН. 1951. Т. 44. С. 33.
12. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы.— М.: Наука, 1975.
13. Леонтович М. А.// ЖЭТФ. 1935. Т. 5. С. 211.
14. Климонтович Ю. Л.// УФН. 1983. Т. 139. С. 689.
15. Климонтович Ю. Л.// Письма ЖЭТФ. 1982. Т. 36. С. 33.
16. Кадомцев Б. Б.// ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 943.
17. Климонтович Ю. Л.// Письма ЖЭТФ. 1982. Т. 8. С. 1005.
18. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.: Гостехиздат, 1946.
19. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов.— М.: Наука, 1971.
20. Климонтович Ю. Л.// ТМФ. 1971. Т. 8. С. 109.
21. Бункин Ф. В.// Радиотехн. и электрон. 1961. Т. 6. С. 3.
22. Стратонович Р. Л.// Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1970. Т. 13. С. 1512; Нелинейная неравновесная термодинамика.— М.: Наука, 1985.
23. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления.— М.: Мир, 1974.
24. Van Kampen N. G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry.— Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1983.
25. Бочков Г. Н., Ефремов Г. Ф. Нелинейные флуктуационно-диссипационные соотношения и стохастические модели.— Горький; ГГУ, 1980.
26. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1968.
27. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах.— М.: Наука, 1968.
28. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961.
29. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я.// ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 1340.
30. Додонов В. В., Манько В. И., Руденко В. Н.// Квант. электрон. 1980. Т. 7. С. 2124.
31. Лихарев К. К.// УФН. 1983. Т. 139. С. 169.
32. Haken H., Light V. I.— Amsterdam, New York; Oxford: North-Holland, 1984.
33. Lamb W., Rutherford R.// Phys. Rev. 1947. V. 72. P. 241.
34. Bethe H.// Ibidem. P. 339.
35. Гайтлер В. Квантовая теория излучения.— М.: ИЛ, 1958.
36. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.
37. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976.
38. Берестецкий В. Б., Ли́фшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1980.
39. Weldon Th.// Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1157.
40. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории.— М.: Наука, 1975.
41. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика.— М.: Наука, 1979.
42. Климонтович Ю. Л.// ЖЭТФ. 1968. Т. 54. С. 136.
43. Пригожин И. От существующего к возникающему.— М.: Наука, 1985.
44. Климонтович Ю. Л. Послесловие в книге И. Пригожина<sup>43</sup>.