

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.955

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ МАГНОНЫ**М. И. Каганов, А. В. Чубуков****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	537
2. Спиновый гамильтониан. Типы магнетиков	539
3. Переход к бозонам	543
4. Системы без нулевых колебаний	548
5. Системы с нулевыми колебаниями	552
6. Особенности низкоразмерных систем	564
7. Квантовые фазовые переходы	569
8. Дипольное взаимодействие — источник нулевых колебаний	571
9. Заключение	573
Приложение. Полная амплитуда рассеяния в изотропном гейзенберговском ферро- магнетике	574
Список литературы	576

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре речь пойдет о магнонах — квантах элементарных возбуждений спиновой подсистемы магнитоупорядоченных кристаллов. Мы будем изучать только магнитные диэлектрики, в которых электронные (орбитальные) возбуждения отделены от основного состояния энергиями порядка атомной ε_a . Нас же будут интересовать возбуждения, энергии которых значительно меньше ε_a .

Спиновая волна (магнон) — одна из ветвей низкоэнергетических возбуждений кристалла. Если ограничиться длинноволновыми колебаниями $ak \ll 1$ (a — межатомное расстояние, \mathbf{k} — волновой вектор), то описание низкоэнергетических возбуждений может быть произведено феноменологически на основе континуального приближения¹⁻³. В таком подходе общая система уравнений, описывающая длинноволновые колебания, состоит из линейаризованных уравнений электродинамики, теории упругости (включающих уравнения оптических колебаний), а также уравнений Ландау — Лифшица для плотностей магнитных моментов. Естественный способ вывода законов дисперсии элементарных возбуждений состоит в исключении из системы линейаризованных уравнений векторов намагниченностей и смещений, после чего «остаются» только уравнения макроскопической электродинамики, но с пространственной и временной дисперсией диэлектрической и магнитной проницаемостей. В результате законы дисперсии элементарных возбуждений суть различные решения дисперсионного уравнения

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (1.1)$$

Таким путем получают выражения, связывающие частоты ω ветвей возбуждений — поляритонов и светомагнонов (магнитных поляритонов) — с волновым вектором \mathbf{k} ⁴. Понимание строения кристалла и его элементов симметрии позволяет, не решая уравнений Ландау — Лифшица и теории упру-

гости, высказать ряд соображений о пространственно-временной дисперсии тензоров $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mu_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ ⁵.

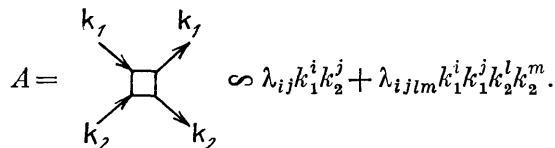
Строго говоря, при произвольном направлении распространения волны в кристалле каждая из ветвей колебаний есть связанное колебание всех величин, входящих в задачу (например, распространение светомэгнона сопровождается колебаниями не только магнитного, но и электрического полей). Однако в широком интервале волновых векторов с достаточной степенью точности можно выделить основную или основные колеблющиеся величины и пренебречь колебаниями остальных. Это можно сделать либо за счет различия скоростей распространения различных процессов, либо за счет малости констант взаимодействия между ними. В случае светомэгнона (ветви, в которой наиболее существенно проявляются колебания магнитной подсистемы) малость его скорости по сравнению со скоростью света c часто позволяет пренебречь колебанием электрического поля, а слабость магнон-фононного взаимодействия — пренебречь упругими колебаниями атомов решетки. Тем самым мы приходим к чисто магнитным колебаниям, квантами которых и являются магноны ^{*}).

Уравнения, описывающие длинноволновые магнитные колебания, это уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad B_i = \mu_{ik}(\omega, \mathbf{k}) H_k, \quad (1.2)$$

в которых пространственно-временная дисперсия $\mu_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ определяется только магнитной структурой кристалла: числом подрешеток, знаком и величиной обменного взаимодействия между магнитными моментами, энергией анизотропии, а также величиной и направлением внешнего магнитного поля. Все эти величины могут быть введены феноменологически, что позволяет вычислить законы дисперсии магнонов ¹⁶. Сравнение полученных таким путем формул с результатами эксперимента дает возможность определить феноменологически введенные константы.

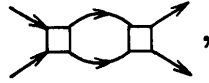
Феноменологических формул для энергий магнонов достаточно для описания широкого круга явлений: резонансных эффектов, температурной зависимости намагниченности и магнонной теплоемкости при температурах T , низких по сравнению с температурой перехода T_c (и вдали от точек ориентационных переходов) и т. д. Однако многие эффекты (релаксационные явления, температурную зависимость спектра и точек ориентационных переходов по магнитному полю и др.) в рамках простой феноменологической модели объяснить нельзя. Конечно, можно для каждого явления вводить новые феноменологические константы (например, для релаксационных явлений ввести время жизни спиновой волны τ), однако такой подход мало информативен. Ясно, что последовательная теория перечисленных выше нелинейных явлений требует учета взаимодействия между магнонами, а также взаимодействия магнонов с другими элементарными возбуждениями. Взаимодействие между магнонами имеет главным образом обменное происхождение и потому не мало. Следовательно, его надо учитывать полностью, не ограничиваясь первыми членами теории возмущений. Правда, на малых волновых векторах взаимодействие эффективно слабое, так как амплитуда A рассеяния магнонов друг на друге пропорциональна волновым векторам. Например, в изотропном ферромагнетике амплитуда рассеяния на нулевой угол



$$A \propto \lambda_{ij} k_1^i k_2^j + \lambda_{ijlm} k_1^i k_1^j k_2^l k_2^m.$$

^{*}) Сравнительная простота спектра отдельных ветвей элементарных возбуждений делает наглядным взаимодействие между ними: учет взаимодействия необходим вблизи пересечения ветвей (вблизи резонанса).

Эта амплитуда перенормируется обменным взаимодействием. Уже в первом порядке теории возмущений поправка к A



не изменяя ее зависимости от волновых векторов, меняет важный коэффициент λ_{ijlm} на величину, пропорциональную

$$\int \frac{d^3k}{\varepsilon_k} \sim \int \frac{d^3k}{k^2}.$$

Этот интеграл «садится» на верхний предел, что показывает неприменимость континуального приближения.

Последовательный вывод магнитных свойств должен исходить из микроскопического рассмотрения, основанного на учете взаимодействия друг с другом реальных атомов. Такой путь («из первых принципов») очень сложен⁷. С другой стороны, обменное взаимодействие между атомными спинами, играющее столь важную роль в магнитных явлениях, слабо влияет на структуру кристаллической решетки. Это оправдывает полуфеноменологический подход: рассматривается определенная кристаллическая решетка, в узлах которой расположены фиксированные по величине *) спины \mathbf{S}_i (\mathbf{l} — радиус-вектор узла решетки). Взаимодействие между спинами задается модельным спиновым гамильтонианом, содержащим набор констант. Считается, что они могут быть вычислены на основе квантовой теории атомов^{7,8}.

По сути дела, задача об определении магнитных свойств вещества сводится к исследованию свойств решеточного газа спиновых стрелок.

2. СПИНОВОЙ ГАМИЛЬТОНИАН. ТИПЫ МАГНЕТИКОВ

Число типов магнетиков, существующих в природе, очень велико. В частности, они различаются числом магнитных атомов (спиновых стрелок) в элементарной ячейке кристалла, которое может достигать нескольких десятков. Однако усложнение структуры ячейки кристалла не приводит к принципиально новым свойствам спектра спиновых волн. Например, число низлежащих ветвей спектра магнонов не превышает трех вне зависимости от общего числа магнитных атомов в ячейке⁹. Достаточно общие представления о свойствах волн различных типов можно получить, изучая простые спиновые модели — кристаллы с одним, двумя магнитными атомами на ячейку. Ими мы и ограничимся.

Упорядоченные магнетики естественным образом делятся на ферро- и антиферромагнетики. В простейшем случае они описываются одним и тем же обменным гамильтонианом, но с разным знаком обменного интеграла J :

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \sum_{i, \Delta} J(\Delta) \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+\Delta}, \quad (2.1)$$

где $J > 0$ для ферромагнетика и $J < 0$ для антиферромагнетика. Вектор Δ соединяет ближайших соседей в решетке: поскольку речь не идет о металлах, в которых свободные электроны обеспечивают дальное действие между спинами (РККИ-взаимодействие), можно ограничиться взаимодействием только ближайших соседей. Здесь следует отметить, что гамильтониан (2.1) является простейшим, но отнюдь не единственным возможным обменным гамильтонианом ферромагнетика (в равной степени следующие ниже утверждения относятся и к антиферромагнетикам). Во-первых, может быть существенным взаи-

*) Это оправдано тем, что нас интересуют возбуждения с энергией $\varepsilon \ll \varepsilon_a$ (см. выше).

модействие между выбранным атомом и следующими за ближайшими к нему. Во-вторых, возможны ситуации, когда взаимодействие затрагивает больше, чем пары спинов (так, например, обстоит дело в твердом $^3\text{He}^{10}$). И, наконец, для $S \neq 1/2$ в обменном гамильтониане могут наряду с билинейным по спинам слагаемым присутствовать также слагаемые вида $(S_i S_{i+\Delta})^n$, где $2 \leq n \leq 2S$. Конечно, любое усложнение гамильтониана ведет к усложнению соответствующей фазовой диаграммы (так, например, при большом антиферромагнитном обмене между следующими за ближайшими соседями изначально ферромагнитная структура превращается в гелимагнитную¹¹). Описанию возможных типов сложных магнитных структур посвящено большое число работ^{11,12}. Их рассмотрение не является целью настоящего обзора. Свою задачу мы видим в ином: на примере простейших моделей пройти путь от микроскопического гамильтониана до макроскопических характеристик, не вводя феноменологических параметров и не разрешая себе ограничиваться вычислениями по порядку величины. По этой причине мы рассмотрим только стандартный гейзенберговский гамильтониан (2.1) *).

Энергию анизотропии мы выберем в следующем виде:

$$\mathcal{H}_a = -\frac{1}{2} \sum_{i, \Delta} g(\Delta) S_i^z S_{i+\Delta}^z. \quad (2.2)$$

Это также не единственно возможный вид энергии анизотропии: в общем случае в нее могут входить и слагаемые с другими проекциями спинов (и не обязательно одинаковыми). Выбор энергии анизотропии в виде (2.2) обусловлен тем, что дает возможность на сравнительно простом примере рассмотреть ряд принципиальных свойств магнетиков. По тем же причинам, что и обменная энергия, энергия анизотропии определяется только взаимодействием с ближайшим окружением магнитного атома. Надо, правда, иметь в виду, что в общем случае $g(0) \neq 0$, в то время как $J(0) \equiv 0$ (обменное взаимодействие спина атома с самим собой, естественно, отсутствует). Слагаемое, содержащее $g(0)$, описывает одноионную анизотропию. Оно имеет физический смысл для $S \neq 1/2$. Оставшаяся часть, содержащая $g(\Delta \neq 0)$, описывает разноионную анизотропию, которую часто интерпретируют как анизотропию обменного взаимодействия.

Анизотропия, описываемая формулой (2.2), возникает как результат спин-орбитального взаимодействия. В анизотропную часть спиновой энергии входит, кроме того, энергия диполь-дипольного взаимодействия спинов (μ — магнетон Бора):

$$\mathcal{H}_{dd} = 2\mu^2 \sum_{i \neq i'} [(S_i S_{i'}) R_{ii'}^{-3} - 3(S_i R_{ii'}) (S_{i'} R_{ii'})] R_{ii'}^{-5}. \quad (2.3)$$

В отличие от (2.2) диполь-дипольное взаимодействие нельзя ограничить ближайшими соседями. Из него можно выделить изотропное по спинам слагаемое и слагаемое со структурой энергии анизотропии. Они создают дальнотяствующие поправки к $J(\Delta)$ и $g(\Delta)$, которые проявляются в зависимости энергии спиновой волны от направления квазиволнового вектора \mathbf{k} при $k \rightarrow 0$. Кроме этого, в \mathcal{H}_{dd} есть слагаемые, роль которых не сводится к перенормировке $J(\Delta)$ и $g(\Delta)$. Эти слагаемые не только вносят вклад в угловую зависимость спектра при $k \rightarrow 0$, но и приводят к ряду «тонких» эффектов, на которые мы обратим внимание ниже (см. раздел 8). До рассмотрения «тонких» эффектов диполь-дипольным взаимодействием мы будем попросту пренебрегать. Как будет видно из дальнейшего, это может быть оправдано, если безразмерная константа анизотропии превосходит 4π .

*) Отметим, что излагаемый ниже формализм, позволяющий проводить расчет при произвольном спине, применим и к более сложным структурам, например, к гели- и метамангнетикам.

Суммарный гамильтониан, включающий, наряду с \mathcal{H}_{ex} и \mathcal{H}_a , зеемановскую энергию $2\mu\mathbf{H}\mathbf{S}_i$, таков:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i, \Delta} (J(\Delta) \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+\Delta} + \beta(\Delta) S_i^z S_{i+\Delta}^z) - \sum_i [\alpha (S_i^z)^2 - 2\mu\mathbf{H}\mathbf{S}_i]; \quad (2.4)$$

здесь $\beta(\Delta) \equiv g(\Delta \neq 0)$, а $\alpha \equiv g(\Delta = 0)$. Из квантовой механики известно, что анизотропия всегда возникает в результате релятивистских взаимодействий и потому должна быть мала по сравнению с обменом в меру малости отношения $(v/c)^2$, где v — скорость орбитального движения электрона, а c — скорость света. Так действительно обстоит дело в большом числе реальных магнетиков (см. ниже, табл. VII). Однако в последние годы стало известно много веществ, в которых энергия разнорионной анизотропии порядка обменной энергии и которые потому с хорошей точностью можно отнести к изинговским или планарным магнетикам (соответствующие примеры приведены ниже в табл. VII). Как правило, такая ситуация возникает вследствие малости по тем или иным причинам обменного (изотропного в спиновом пространстве) взаимодействия между магнитными ионами.

В целях упрощения геометрической стороны рассмотрения и для того, чтобы избежать громоздких формул, мы ограничимся простой кубической решеткой со взаимодействием ближайших соседей ($J(\Delta) \equiv J$, $\beta(\Delta) \equiv \beta$). Конечно, это идеализация: запись энергии анизотропии в виде (2.2) подразумевает, что элементарная ячейка по крайней мере тетрагональная. Однако усложнение структуры элементарной ячейки, как правило, ни к каким качественным изменениям не приводит *).

Разнообразие магнитных структур, описываемых простейшим гамильтонианом (2.3), связано с тем, что знаки констант анизотропии и обмена могут быть произвольными. Прежде чем перечислять разные случаи, заметим, что роль одноионной и разнорионной анизотропии (пока они малы) практически одинакова. Единственное отличие — при $S = 1/2$, когда слагаемое, содержащее одноионную анизотропию, сводится к константе. Для простоты в настоящем обзоре мы не учитываем разнорионную анизотропию. Читатель может найти соответствующие результаты в оригинальных работах^{13,14}.

В первую очередь опишем различные варианты основных состояний и фазовых диаграмм, считая спины классическими векторами. Это, в частности, даст нам возможность сопоставить определенные знаки констант, входящих в гамильтониан (2.3), типам магнитных структур.

Начнем с ферромагнетиков. Когда $\alpha > 0$, то в отсутствие магнитного поля при $T < T_c \sim JS$ магнитные моменты имеют преимущественное направление вдоль или против оси z . Это — легкоосный (ЛО) ферромагнетик. Сколь угодно малое поле, направленное по оси z , ликвидирует фазовый переход из парамагнитной фазы в ферромагнитную. Перехода нет и при любом косом направлении магнитного поля \mathbf{H} (когда $H_z \neq 0$). Однако здесь с ростом поля происходит плавное укладывание магнитных моментов на направление поля, причем средний магнитный момент M становится параллельным \mathbf{H} только в пределе бесконечно большого поля. Ситуация иная, если поле \mathbf{H} направлено строго перпендикулярно оси z . В этом случае существует определенное критическое поле $H_c \propto \alpha$, ниже которого есть отличный от нуля параметр порядка M_z , а при $H > H_c$ средний магнитный момент M направлен по полю, т. е. $M_z = 0$ (рис. 1). Выделенность случая $H_z = 0$ связана с тем, что при такой геометрии в функционал Гинзбурга — Ландау поле входит в комбинации с четными степенями параметра порядка³. Критическое поле H_c зависит от температуры и обращается в ноль при температуре Кюри

*) Следует, правда, отметить, что в некоторых веществах (CeBi, CeSb) эффект Яна — Теллера приводит к сильному изменению обменного интеграла по одному из направлений, почти не меняя параметров решетки (это замечание принадлежит В. Л. Покровскому).

ЛО-магнетика. Фазовая диаграмма ЛО магнетика в поперечном поле приведена на рис. 1, б. Обратим внимание, что точки ориентационного перехода при низких температурах ($T \ll T_c$) в поле $H \approx H_c$ и точки Кюри перехода в нулевом поле ($T = T_c$) расположены на одной линии фазовой диаграммы. В этом смысле состояние при $H > H_c(T)$ даже при $T \rightarrow 0$ принадлежит парамагнитной фазе.

Когда $\alpha < 0$, то при $T < T_c$ спины расположены в плоскости x, y . Это — легкоплоскостной (ЛП) ферромагнетик. По сравнению с ЛО ферромагнетиком роли H_z и H_\perp здесь меняются местами: линия фазовых переходов

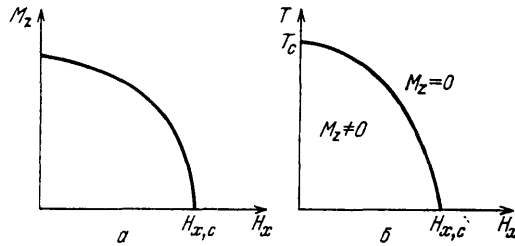


Рис. 1. а — Полевая зависимость z -компоненты магнитного момента для ЛО ферромагнетика в поперечном поле H_x . б — Фазовая диаграмма ЛО ферромагнетика в поперечном поле

II рода (такого же типа, как и на рис. 1) существует только при $H_\perp \neq 0$. Отметим, что в поле H_\perp сохраняется группа симметрии Z_2 , отражающая инвариантность относительно замены $M_z \leftrightarrow -M_z$.

Перейдем теперь к антиферромагнетикам *). Если исходить из классического описания, то при $\alpha > 0$ (ЛО антиферромагнетик) и $H = 0$ спины будут расположены в «шахматном» порядке параллельно оси z . В поле $H \parallel Z$ антипараллельное расположение соседних спинов сохранится вплоть до поля $H_1 \propto (J\alpha)^{1/2}$, когда произойдет фазовый переход I рода (спин-флоп-переход),

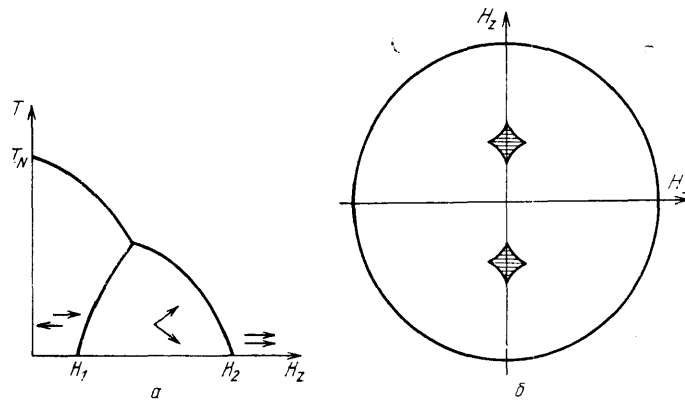


Рис. 2. а — Фазовая диаграмма ЛО антиферромагнетика в переменных H_z, T ; стрелки обозначают направления магнитных моментов подрешеток в разных фазах. б — Фазовая диаграмма ЛО антиферромагнетика на плоскости $H_\perp H_z$; заштрихованы области существования спин-флоп-перехода

при этом спины подрешеток устанавливаются почти перпендикулярно полю. С дальнейшим ростом H угол между подрешетками уменьшается, и в поле $H_2 \propto J$ магнитные моменты подрешеток «схлопываются». Это — переход II рода (спин-флип-переход). Обе точки перехода (H_1 и H_2), естественно, зависят от температуры^{15,16}. Фазовая диаграмма в переменных H_z, T изображена на рис. 2, а. Стрелки изображают направление магнитных моментов подрешеток в разных фазах.

При произвольном направлении магнитного поля спин-флип-переход происходит всегда, а спин-флоп-переход — только если направление H

*) Здесь и далее, говоря об антиферромагнетике, мы будем опускать знак модуля у обменного интервала J .

почти параллельно оси z ¹⁷. Фазовая диаграмма на плоскости H_\perp, H_z при $T < T_N$ изображена на рис. 2, б. Подчеркнем, что в отличие от ферромагнетика линия перехода $H = H_2(T)$ ($H_2(T_N) = 0$) есть при любом направлении H . Соответственно состояние при $H > H_2(T)$ парамагнитно.

В ЛП антиферромагнетике ($\alpha < 0$) при $H = 0$ спины упорядочиваются антипараллельно в плоскости xy . В магнитном поле произвольного направления происходит только спин-флип переход в парамагнитное состояние при $H = H_2(T) \propto J$. Отметим, что для ЛП антиферромагнетика принципиален учет существующего в кристаллах с определенной (например, ромбоэдрической) симметрией и опущенного в (2.3) дополнительного слагаемого, описывающего так называемое взаимодействие Дзялошинского и имеющего вид¹⁸

$$\frac{1}{2} \sum_{l, \Delta} d(\Delta) (\mathbf{n}_z [\mathbf{S}_l \mathbf{S}_{l+\Delta}]), \quad |\mathbf{n}_z| = 1.$$

Взаимодействие Дзялошинского релятивистского происхождения, и потому коэффициент d такого же порядка, как и α . Это взаимодействие приводит в случае ЛП антиферромагнетика к слабому ферромагнетизму, т. е. скосу подрешеток в нулевом магнитном поле^{15, 18}.

Приведенный перечень возможных типов упорядочения и соответственно фазовых диаграмм, конечно, не исчерпывает существующих в природе магнитных структур, даже тех, которые описываются моделью, аналогичной (2.3). В частности, константа анизотропии может зависеть от температуры и менять знак, что приводит к превращению ЛП магнетика в ЛО магнетик и наоборот. Пример фазовой диаграммы магнетика, у которого $\alpha > 0$ при $T > T_1$ и $\alpha < 0$ при $T < T_1$, приведен на рис. 3. Отметим, что парамагнитная фаза занимает всю незаштрихованную область, кроме отрезка оси ординат $0 < T < T_1$. Подобного рода усложнения мы заниматься не будем, так как нас интересуют свойства магнетиков вблизи $T = 0$.

Завершая обсуждение свойств различных типов магнетиков, отметим, что каждый из рассмотренных типов, конечно же, имеет своего представителя среди реальных магнитных веществ (соответствующие примеры собраны ниже в табл. VII, приведенной в начале раздела 6). В настоящем обзоре мы коснемся главным образом теоретических исследований поведения магнетиков с произвольным спином при низких температурах. Хотя мы и приведем ряд уже хорошо известных формул, речь, в основном, все-таки пойдет о тонких эффектах. Поэтому мы не будем останавливаться на экспериментальном подтверждении основных свойств ферро- и антиферромагнетиков (таких как закон Блоха для ферромагнетиков или зависимость $C \propto T^3$ для теплоемкости антиферромагнетиков). Там же, где нам известны эксперименты по изучению «тонких» эффектов, мы приведем соответствующие ссылки.

3. ПЕРЕХОД К БОЗОНАМ

Микроскопический расчет свойств магнетиков на основе гамильтониана (2.3) в принципе можно производить непосредственно в терминах спиновых операторов^{19–21}. Такой подход, использующий в качестве нулевого приближения одночастичный гамильтониан, хорош и нагляден, когда нелокальное обменное взаимодействие мало по сравнению с одночастичным^{22–24}. В обратном предельном случае, которым мы и интересуемся, наглядность этого подхода теряется, и нам представляется более естественным введение обычных

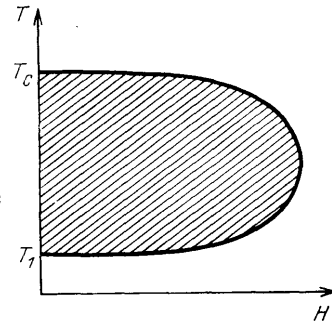


Рис. 3. Фазовая диаграмма магнетика, у которого константа анизотропии меняет знак при понижении температуры.

$\alpha > 0$ при $T > T_1$ и $\alpha < 0$ при $T < T_1$. Область, в которой $M_z \neq 0$, заштрихована

бозе-квазичастиц — магнонов. Задача о построении бозевских аналогов спиновых гамильтонианов неоднократно ставилась и решалась, начиная с пионерской работы Гольштейна и Примакова²⁵⁻³⁴. Основная трудность на этом пути заключается в том, что необходимо связать конечномерное — $(2S + 1)$ -мерное спиновое пространство (S — узельный спин) — с ∞ -мерным пространством бозонов. Обычно это достигается введением оператора проектирования, отсекающего лишние состояния^{27,34}. Правда, при таком подходе каждая задача требует анализа роли этого оператора. Можно, в принципе, обойтись и без оператора проектирования, сопоставляя спиновым операторам периодические функции от операторов Бозе:

$$S^z = f(\hat{N}), \quad S^- = a^+ F(\hat{N}), \quad S^+ = (S^-)^+,$$

где

$$F(x) = \{[S(S+1) - f(x)(f(x)-1)](x+1)^{-1}\}^{1/2}, \quad \hat{N} = a^+ a, \\ f(x) = S - (2S+1)[x(2S+1)^{-1}];$$

квадратные скобки в последней формуле обозначают дробную часть аргумента. Такой путь (преобразование Голдхирша^{31,32}) позволяет явно выписать точный бозевский аналог спинного гамильтониана, правда, в виде бесконечного ряда, члены которого суть произведения произвольного числа операторов рождения и уничтожения (аналитические выражения для соответствующих коэффициентов получены только для $S = 1/2$ и $S = 1$ ³²). Ясно, что в общем случае с таким гамильтонианом работать невозможно. Существует, однако, широкий класс задач, для которых выполняется критерий слабой неидеальности бозе-газа магнонов. Примеры мы обсудим ниже, а пока заметим, что, как всегда, слабая неидеальность дает возможность ограничиться при расчетах низшими ангармонизмами, т. е. использовать только первые члены разложения операторов проекций спина в ряды по нормальным произведениям бозе-операторов. Так, для всех обсуждаемых ниже эффектов, обязанных неидеальности бозе-газа, достаточно взять три первых члена в точных разложениях Голдхирша:

$$S_1^z + S = a_1^+ a_1, \quad S > 1, \\ = a_1^+ a_1 - \frac{1}{2} a_1^+ a_1^+ a_1 a_1, \quad S = 1, \\ = a_1^+ a_1 - a_1^+ a_1^+ a_1 a_1 + \frac{2}{4} a_1^+ a_1^+ a_1 a_1 a_1, \quad S = \frac{1}{2}, \quad (3.1)$$

$$S_1^- = (S_1^+)^+ = (2S)^{1/2} \left\{ a_1 - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2S} \right)^{1/2} \right] a_1^+ a_1 a_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[2 \left(1 - \frac{1}{2S} \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{1}{S} \right)^{1/2} - 1 \right] a_1^+ a_1^+ a_1 a_1 \right\}, \quad S > \frac{1}{2}, \\ = a_1 - a_1^+ a_1 a_1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} a_1^+ a_1^+ a_1 a_1, \quad S = \frac{1}{2}.$$

При $S > 1$ эти формулы могут быть получены из компактного преобразования Гольштейна — Примакова

$$S_1^z = -S + a_1^+ a_1, \\ S_1^+ = (2S)^{1/2} a_1^+ \left(1 - \frac{a_1^+ a_1}{2S} \right)^{1/2}, \\ S_1^- = (2S)^{1/2} \left(1 - \frac{a_1^+ a_1}{2S} \right)^{1/2} a_1, \quad (3.2)$$

модификацией которого и является точное преобразование Голдхирша. Фактически, однако, ситуация более простая: поскольку преобразование Голь-

штейна — Примакова само по себе не выводит систему из физического подпространства (матричный элемент между состояниями $|2S\rangle$ и $|2S+1\rangle$ равен нулю), то при низких по сравнению с T_c температурах использование преобразования Гольштейна — Примакова приводит к правильным результатам и для $S = 1, 1/2$. Это подтверждается и прямым расчетом^{35,36}: возникающие на этапе перехода к бозонам и при нормальном упорядочении бозе-операторов расходящиеся ряды по $1/S$ в окончательных ответах не проявляются. Поэтому ниже мы всюду пользуемся преобразованием (3.2), рассматривая его (при произвольном S !) как точное *).

Сформулируем условия, при которых газ магновов можно считать слабо неидеальным. Как мы уже говорили (см. раздел 1), обменное взаимодействие между магнонами не мало, и потому слабая неидеальность бозе-газа может быть только следствием малой плотности квазичастиц. Во всех случаях необходимым условием малой плотности магновов является малость температуры T по сравнению с температурой перехода T_c (или T_N) при $H = 0$. Однако этого не всегда достаточно, поскольку в большинстве магнитных структур, описываемых гамильтонианом (2.3), есть нулевые колебания, приводящие к ненулевой плотности бозонов $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle$ в основном состоянии. Эта плотность также должна быть мала. В ферромагнетиках малость $\langle a_1^\dagger a_1 \rangle$ при $T = 0$ обеспечивается малостью отношения α/J . В антиферромагнетиках ситуация сложнее, так как уже в отсутствие анизотропии состояние с «шахматным» расположением квантовых спинов не есть собственное состояние спинового гамильтониана, т. е. в антиферромагнетике нулевые колебания обусловлены обменом и поэтому, вообще говоря, плотность бозонов при $T = 0$ не имеет параметрической малости **).

В обзоре будут рассмотрены главным образом те задачи, в которых возможно корректное использование теории возмущений. Поэтому мы ограничимся ферромагнетиками со слабой анизотропией, а в случае антиферромагнетиков рассмотрим, в основном, область полей вблизи спин-флип-перехода, когда структура близка к ферромагнитной. Подчеркнем: речь идет о произвольном узелном спине S (т. е. о $S \sim 1$), и потому мы не пользуемся возможностью получить малую плотность магновов как результат квазиклассичности спина. Другими словами, мы не используем часто применяемое разложение по $1/S$.

Бозевские аналоги спиновых гамильтонианов существенно различаются в зависимости от того, имеются ли в системе нулевые колебания или нет ***). Если нулевых колебаний нет, то основное состояние магнетика совпадает с его классическим основным состоянием. В этом случае в бозе-гамильтониане должны быть представлены только слагаемые, содержащие равные числа операторов рождения и уничтожения магновов:

$$\mathcal{H} = E_{\text{кл}} + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{N} \sum_{1, 2, 3, 4} \Phi_{12}^{34} a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 \Delta (1 + 2 - 3 - 4) + \dots \quad (3.3)$$

Индексы 1, 2, 3, 4 соответствуют $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$. В гамильтониане (2.4) такой ситуации отвечает ЛО ферромагнетик в продольном поле, а также ЛП ферромагнетик и антиферромагнетик в достаточно сильном поле, направленном вдоль избранной оси. Значения энергии магнона $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ и амплитуды Φ_{12}^{34} при-

*) С таким же успехом при слабой неидеальности бозе-газа можно пользоваться и другим известным преобразованием — преобразованием Дайсона — Малеева^{27, 28}. Выбор преобразования — в большой степени дело вкуса и привычки каждого, кто работает с бозевскими аналогами спиновых гамильтонианов.

**) Расчеты, правда, показывают, что в изотропном антиферромагнетике плотность $\kappa = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle$, вычисленная в гармоническом приближении, оказывается численно очень малой: $\kappa = 0,078$ ^{37, 38}.

***) Речь идет о макроскопических нулевых колебаниях, которые отличаются от нулевых колебаний отдельной частицы. Последние есть всегда, так как $\max S^z = S$, а $\hat{S}^2 = S(S+1)$.

Таблица I

Значения энергии магнона и затравочной амплитуды двухчастичного рассеяния для систем без нулевых колебаний. Для ЛП ферромагнетика и антиферромагнетика предполагается, что магнитное поле H_z по величине превышает критическое поле перехода в «парамагнитную» фазу

Модель	Спектр $\varepsilon_{\mathbf{k}}$	Амплитуда Φ_{12}^{34}
1. ЛО и ЛП ферромагнетика в продольном поле (ЛО: знак +, ЛП: знак —)	$J(0)S(1 - v_{\mathbf{k}}) \pm \pm 2\tilde{\alpha}S + 2\mu H_z$	$-\frac{J(0)}{4} \left\{ v_{2-3} + v_{1-3} - 2S \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2S} \right)^{1/2} \right] (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \right\} \pm \alpha$
2. Изотропный антиферромагнетик выше спин-флин-перехода	$2(\mu H_z - J(0)S) + J^{(i)}S(1 - v_{\mathbf{k}})$	$\frac{J^{(i)}}{4} \left\{ v_{2-3} + v_{1-3} + 2S \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2S} \right)^{1/2} \right] \times \right. \\ \left. \times (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \right\}$

ведены в табл. I. Мы используем обозначения

$$\tilde{\alpha} = \alpha \left(1 - \frac{1}{2S} \right), \quad v_{\mathbf{k}} = \frac{J(\mathbf{k})}{J^{(i)}},$$

где $J(\mathbf{k})$ — \mathbf{k} -я фурье-компонента обменного взаимодействия $J(\Delta) \equiv J$:

$$J(\mathbf{k}) = J \sum_{\Delta} e^{i\mathbf{k}\Delta}.$$

В случае, когда нулевые колебания есть, структура бозе-гамильтониана существенно иная: появляются слагаемые с неравными числами операторов рождения и уничтожения магнонов^{25,35,39}:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = E_{\text{кл}} + \sum_{\mathbf{k}} \left[A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} B_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}) \right] + \\ + N^{1/2} \Phi_0 a_0^{\dagger} + \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{1,2,3} \Phi_{12}^3 a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} a_3 + \\ + \frac{1}{N} \sum_{1,2,3,4} (\Phi_{123}^4 a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} a_3^{\dagger} a_4 + \Phi_{12}^{34} a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} a_3 a_4) + \\ + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{1,2,3, \\ 4,5,6}} \Phi_{123}^{456} a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} a_3^{\dagger} a_4 a_5 a_6 + \text{э.с.}.. \quad (3.4) \end{aligned}$$

В гамильтониане (2.4) этой ситуации отвечают ЛО ферромагнетик в поле, не параллельном избранной оси кристалла, ЛП ферромагнетик и антиферромагнетик в любом поле, кроме тех случаев, которые были рассмотрены выше. Коэффициенты Φ_0 , $A_{\mathbf{k}}$, $B_{\mathbf{k}}$ в (3.4) для некоторых моделей собраны в табл. II. Формулы для затравочной энергии основного состояния $E_{\text{кл}}$ и коэффициентов при ангармонических слагаемых мы здесь не приводим — они слишком громоздки. Отметим только, что в то время как слагаемые типа $\Phi_{123}^4 a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} a_3^{\dagger} a_4$ с четным суммарным числом бозе-операторов существуют всегда, когда есть нулевые колебания, члены, содержащие нечетное число операторов, возникают только, когда ось квантования располагается под углом θ , $0 < \theta < \pi/2$, к избранной оси магнетика. В классике ($S \rightarrow \infty$) угол θ определяется из

Т а б л и ц а II

Значения коэффициентов в линейной и квадратичной по бозе-операторам формах для гамильтонианов ряда систем, содержащих нулевые колебания. θ — угол между осью квантования и избранной осью кристалла (для антиферромагнетика направление избранной оси задается внешним магнитным полем)

Модель	Φ_0	A_k	B_k
1. ЛП ферромагнетик в продольном поле	$-i(2NS)^{1/2} \sin \theta \times (\mu H_z - \tilde{\alpha} S \cos \theta)$	$J(0)S(1-v_k) + 2\mu H_z \cos \theta + \tilde{\alpha} S(1-3\cos^2 \theta)$	$\alpha S [1-(2S)^{-1}]^{1/2} \sin^2 \theta$
2. ЛО ферромагнетик в поперечном поле	$-i(2NS)^{1/2} \cos \theta \times (\mu H_x - \tilde{\alpha} S \sin \theta)$	$J(0)S(1-v_k) + 2\mu H_x \sin \theta + 2\tilde{\alpha} S \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$	$\alpha S [1-(2S)^{-1}]^{1/2} \sin^2 \theta$
3. Изотропный антиферромагнетик в поле	$-i(2NS)^{1/2} \sin \theta \times (\mu H_z - J(0)S \cos \theta)$	$J(0)S(1-v_k) + 2\mu H_z \cos \theta + J(0)S(v_k \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta)$	$J(0)S v_k \sin^2 \theta$

условия $\Phi_0 = 0$. В общем случае (при конечном S) уравнение для определения угла θ сложнее (см. ниже), и Φ_0 не обязано быть равным нулю.

Подчеркнем, что приведенные в табл. I и II значения коэффициентов как гамильтониана (3.3), так и гамильтониана (3.4) не удовлетворяют целому ряду естественных требований. Так, обменная часть Φ_{12}^{34} не удовлетворяет принципу Адлера *), не все анизотропные слагаемые обращаются в нуль при $S = 1/2$; спектр, получаемый непосредственной диагонализацией квадратичной формы в (3.4), неустойчив на малых k при $S \neq 1/2$. Наличие этих паразитных свойств демонстрирует необходимость ангармонических перенормировок, описание которых — главное содержание следующих разделов.

Для систем, описываемых гамильтонианом (3.3), все эффекты, обязанные ангармонизмам, проявляются только при конечной температуре. Здесь возникают задачи о вычислении температурных перенормировок энергии спиновой волны (включая перенормировку щели в анизотропном случае), намагниченности, а также о вычислении параметров релаксации. Этим вопросам будет посвящен раздел 4.

В системах, описываемых гамильтонианом (3.4), ситуация сложнее, так как наряду с температурными эффектами существуют также ангармонические эффекты при $T = 0$, обязанные квантовым флуктуациям (см. раздел 5).

Сформулированные выше задачи, как правило, решались в рамках квазиклассического приближения ($S \gg 1$), когда ангармонизмы достаточно было учесть во втором порядке теории возмущений. Напомним, мы интересуемся произвольными значениями S . В этом случае очевидна специфика магнитных систем с преобладающим обменным взаимодействием: обязанные ему ангармонизмы в общем случае произвольных волновых векторов не малы, и требуется суммирование всех членов соответствующих рядов теории возмущений **).

*) Согласно принципу Адлера ⁴⁰, амплитуда рассеяния голдстоуновских бозонов должна обращаться в нуль при стремлении к нулю импульсов взаимодействующих квазичастиц.

**) Отметим для ясности, что при малых волновых векторах k полная амплитуда взаимодействия магновов хотя и мала в меру малости k , но отнюдь не совпадает с затравочной, так как вклад в перенормировку амплитуды вносят виртуальные магны с произвольными волновыми векторами.

Сильное взаимодействие между квазичастицами — это то, что отличает магны от фононов. У фононов *всегда есть нулевые колебания*, однако коэффициенты при ангармонизмах и плотность квазичастиц зависят от одного и того же параметра Θ/ϵ_0 (Θ — температура Дебая, а ϵ_0 — характерная атомная энергия, $\epsilon_0 \sim Ms^2$, M — масса иона, s — скорость звука), и если $\Theta/\epsilon_0 \ll 1$ (что обычно имеет место за счет малости отношения m/M , m — масса электрона), то одновременно малы и взаимодействие, и плотность квазичастиц при $T \ll \Theta$. В этом смысле фононы похожи на магны в системах с $S \gg 1$. Правда, в отличие от фононов, для магнов возможны ситуации, когда нулевые колебания отсутствуют, и поэтому одночастичные возбуждения — собственные состояния спинового гамильтониана. В этих случаях магнов, скорее, напоминает частицу в периодическом поле (зонную частицу), чем фонон. Заметим, что и для магнов, и для фононов возможны ситуации, когда распадные процессы запрещены законами сохранения (так обстоит дело, например, для поперечных фононов и магнов в изотропном антиферромагнетике), и потому время жизни квазичастицы равно бесконечности, несмотря на наличие нулевых колебаний.

4. СИСТЕМЫ БЕЗ НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Как ясно из предыдущего, речь пойдет о системах, в которых основное состояние характеризуется максимально возможной намагниченностью и потому совпадает с классическим. Этому требованию, как сказано, удовлетворяют изотропные ферромагнетики, ЛО ферромагнетики в продольном поле, а также одноосные ЛП ферромагнетики и антиферромагнетики в достаточна сильном магнитном поле, направленном вдоль избранной оси. Во всех этих системах спектр длинноволновых одночастичных состояний при $T = 0$ имеет вид

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_0 + JS(\mathbf{k}\mathbf{a})^2, \quad (4.1)$$

где значения ϵ_0 для двух конкретных случаев определены в табл. I (постоянная Планка принята равной единице). При произвольной геометрии обменного взаимодействия вместо $JS(\mathbf{k}\mathbf{a})^2$ в формулу (4.1) входит величина $(1/2) A_{ij}k_i k_j$, где

$$A_{ij} = 2S \sum_{\Delta} J(\Delta) \Delta_i \Delta_j$$

— тензор обратных эффективных масс.

При конечных температурах спектр (4.1) не точен, так как рассматриваемая спиновая волна взаимодействует с тепловыми магнами, благодаря чему перенормируются ее характеристики (щель ϵ_0 и тензор эффективных масс A_{ij}), а также становится конечным ее время жизни $\tau(\mathbf{k})$.

Перенормировка энергии и время жизни магнана определяются действительной и мнимой частями следующей диаграммы:



$$, \quad (4.2)$$

содержащей полную амплитуду рассеяния на нулевой угол $\mathbf{r}_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}}$. Ее расчет (при произвольном S) требует суммирования «обменной лестницы», т. е. ре-

шения интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{[shaded box]} \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad p \end{array} = \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{[white box]} \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad p \end{array} + \begin{array}{c} k \quad q \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \text{[white box]} \text{---} \text{[shaded box]} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ p \quad l \quad p \quad k \end{array}, \\
 & \begin{array}{c} q \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{[shaded box]} \\ \swarrow \quad \searrow \\ l \quad p \end{array} = \begin{array}{c} q \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{[white box]} \\ \swarrow \quad \searrow \\ l \quad p \end{array} + \begin{array}{c} q \quad m \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \text{[white box]} \text{---} \text{[shaded box]} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ l \quad n \quad p \quad k \end{array}.
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Аналитическое решение этих уравнений возможно благодаря специфике обменного взаимодействия: ядра интегральных уравнений факторизуются. В качестве примера решения интегральных уравнений в приложении на основе формализма Гольштейна — Примакова (см. (3.2)) вычислена полная амплитуда рассеяния на нулевой угол в изотропном ферромагнетике.

В общем случае анизотропного магнетика без нулевых колебаний полная амплитуда рассеяния естественным образом выражается в виде суммы

$$r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}} = (r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}})_{\text{ex}} + (r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}})_{\text{rel}}. \quad (4.4)$$

Первое слагаемое обменного происхождения и определяет перенормировку тензора эффективных масс при не слишком низких температурах. Второе слагаемое релятивистской природы. Оно определяет перенормировку щели, и — при очень низких температурах — тензора эффективных масс. Оба слагаемых дают вклад в затухание спиновой волны с $k \neq 0$. При $k = 0$ затухание определяется только $(r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}})_{\text{rel}}$. Обменная и релятивистская части амплитуды $r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}}$ по-разному восприимчивы к обменным перенормировкам. Для релятивистской части главная перенормировка сводится к замене константы одноионной анизотропии α на $\tilde{\alpha} = \alpha [1 - (2S)^{-1}]$ ^{41,42}; константа разноионной анизотропии не меняется вовсе *). Нетривиальные перенормировки релятивистской части полной амплитуды возникают в более высоких порядках по α/J и β/J . Для обменной части $r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}}$ перенормировка более существенна: она приводит к изменению структуры амплитуды — исчезает «паразитное» конечное слагаемое при нулевых значениях импульсов квазичастиц и тем самым восстанавливается принцип Адлера.

В табл. III приведены формулы для перенормировок щели и эффективной массы, а также для времени жизни магнона в различных случаях^{1,14,19,24,27,41-44}. Отметим, что при расчете перенормировок спектра в главном по температуре порядке достаточно ограничиться значением $r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}}$ при $T = 0$, поскольку характерные волновые векторы виртуальных магнонов близки к максимальным. При вычислении $\tau(\mathbf{k})$ температурной зависимостью амплитуды пренебречь нельзя, так как все характерные волновые векторы задачи порядка $a^{-1} (T/J S)^{1/2}$, а функции распределения порядка единицы.

Из формул, приведенных в табл. III, видно, что перенормировка эффективной массы за счет $(r_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\mathbf{k}\mathbf{p}})_{\text{ex}}$ содержит нетривиальный спиновый множитель

$$Q(S) = 1 + \frac{4\Gamma}{3(2S - \Gamma)} + \frac{W - 1}{3S}, \quad (4.5)$$

где

$$W = \frac{3}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \approx 1,52 \quad (4.6)$$

*) Замена $\alpha \rightarrow \alpha [1 - (2S)^{-1}]$ естественна, так как для $S = 1/2$ слагаемое $\alpha \sum_i (S_i^z)^2$ сводится к константе.

Таблица III

Температурные перенормировки щели и эффективной массы, а также времена жизни магнов для систем, не содержащих нулевых колебаний. Множитель $Q(S)$ определен в тексте (формулы (4.5) — (4.7)). Явные выражения для коэффициентов A и A' мы не приводим, так как соответствующие температурные поправки к спектру меньше времен жизни квазичастиц с теми же волновыми векторами.

$$Z_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-nx}/n^p); \text{ в предельных случаях: } Z_p(x) \approx \zeta(p) \text{ при } x \ll 1 \text{ и } Z_p(x) \approx e^{-x} \text{ при } x \gg 1; \tau = T/4\pi JS$$

Модель	Щель в спектре $\epsilon_0(T)$	Обратная эффективная масса	Обратное время жизни магнона	
			γ_0	γ_k
1. ЛО и ЛП ферромагнетики в продольном поле (ЛО: знак +, ЛП: знак -)	$2\mu H_z \pm 2\alpha S \times \left[1 - \frac{2}{S} \tau^{3/2} Z_{3/2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right) \right]$	$JS \left[1 - \frac{\pi}{S} Q(S) \tau^{5/2} Z_{5/2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right) \right],$ $\tilde{\alpha} S \ll T;$	$\frac{12}{\pi S} \tilde{\alpha} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{J^{(1)}} \right) \tau^2 \times$ $\times Z_2 \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right)$	$\frac{3}{\pi S} \tilde{\alpha} \left(\frac{\tilde{\alpha}}{J^{(1)}} \right) (ak) \tau^{3/2} \times$ $\times Z_{3/2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right),$ $\tilde{\alpha} S \gg JS (ka)^2;$ $\frac{J}{6\pi S} \tau^2 (ak)^4 \ln^2 \frac{T}{JS(ak)^2},$ $\tilde{\alpha} S \ll JS (ka)^2 \ll T;$ $\frac{J}{4S} (ak)^3 \tau^{5/2} Z_{5/2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right),$ $JS (ka)^2 \gg T, \tilde{\alpha} S$
2. Изотропный антиферромагнетик выше спин-флип-перехода	$2\mu H_z - 2J(0) S \times$ $\times \left[1 - \frac{2}{S} \times \right.$ $\times \left. \left(1 + \frac{W-1}{S} \right)^{-1} \times \right.$ $\times \left. \tau^{3/2} Z_{3/2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right) \right]$	$JS \left[1 - \frac{A'}{S} \tau^{3/2} Z_{3/2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right) \right]$ $\tilde{\alpha} S \gg T$	$\frac{12}{\pi S} J^{(1)} \times$ $\times \left(1 + \frac{W-1}{S} \right)^{-2} \times$ $\times \tau^2 Z_2 \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right)$	$\frac{3J(0)}{\pi S} \left(1 + \frac{W-1}{S} \right)^{-2} \times$ $\times (ka) \tau^{3/2} Z_{3/2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right)$

— интеграл Уотсона⁴⁵,

$$\Gamma = \frac{3}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{(1 - \cos x) \cos y \, dx \, dy \, dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \approx 0,2. \quad (4.7)$$

Для простой кубической решетки со взаимодействием ближайших соседей выражение для $Q(S)$ впервые получил Ф. Дайсон²⁷ на основе специально разработанного формализма^{*}). Напротив, время жизни магнона подобного множителя не имеет, и, таким образом, правильный результат для затухания совпадает с результатом, получающимся уже во втором порядке теории возмущений.

Формулы из табл. III существенны для уточнения дисперсионных зависимостей как таковых. Менее важны они при вычислении свободной энергии и ее производных (кроме замены α на $\tilde{\alpha}$), поскольку при вычислении макрохарактеристик температурная перенормировка энергии играет меньшую роль, чем учет отклонения закона дисперсии магновов при $T = 0$ от квадратичного.

В табл. III приведены формулы почти обменных магнетиков (анизотропия \ll обмен).

Строго говоря, условие малости анизотропии не является необходимым для получения строгих результатов при произвольном спине: существенно лишь, что основное состояние «классическое», а температура мала по сравнению с T_c . При произвольном значении отношения $|\alpha|/J$ не только расчеты, но и окончательные формулы весьма громоздки. Мы ограничимся выражениями для перенормировки щели $\Delta\epsilon_0(T)$. При произвольном $|\alpha|/J$ температурная зависимость $\Delta\epsilon_0(T)$ остается той же, что и при $|\alpha|/J \ll 1$, но появляется дополнительный множитель, явно зависящий от спина и отношения $|\alpha|/J$. Наиболее интересен случай ЛО ферромагнетика: здесь при определенном значении константы анизотропии

$$\alpha = \alpha_c = J(0) S [W - (2S)^{-1}(W - 1)]^{-1}$$

(см. (4.6)) амплитуда рассеяния r_{00}^{00} расходится, что заставляет учитывать при расчете перенормировки щели с помощью (4.3) конечность импульса виртуального магнона⁴². Расчет показывает, что при $\alpha = \alpha_c$ температурная поправка к ϵ_0 меняет знак, а затухание γ_0 имеет максимум (рис. 4). Природа резонансного эффекта — в изменении при $\alpha = \alpha_c$ характера низколежащих двухчастичных возбужденных состояний: при этом значении α энергия связанного состояния двух магновов с $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$ опускается ниже $2\epsilon_0$ — нижней границы энергий континуума двухчастичных возбуждений^{46,47}.

Отметим, что речь шла о связанных состояниях, возникающих за счет релятивистского взаимодействия. Обменные связанные состояния в трехмерном пространстве существуют только при больших волновых векторах квазичастиц⁴⁸⁻⁵¹. Мы не останавливаемся на этом вопросе, так как он вы-

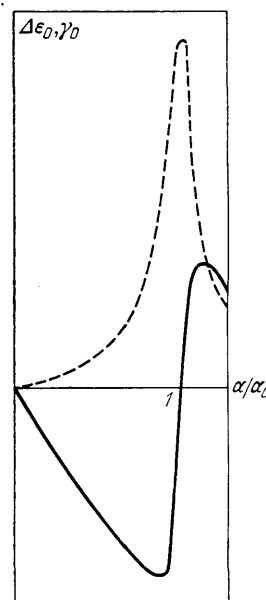


Рис. 4. Коэффициент затухания γ_0 и температурная поправка $\Delta\epsilon_0$ к щели в спектре ЛО ферромагнетика как функции константы одноионной анизотропии⁴². Сплошная линия — $\Delta\epsilon_0$, штриховая — γ_0 .

^{*}) Использованный Дайсоном неэрмитов бозе-гамильтониан можно получить из гейзенберговского с помощью преобразования, предложенного С. В. Малеевым²⁸.

ходит за рамки интересующих нас проблем, касающихся поведения длинноволновых магнонов. Отметим только, что для расчета обменных связанных состояний необходимо знать $|r_{12}^{34}|$ при произвольных значениях импульсов (см. ^{46,51}).

5. СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Как мы уже говорили, для многих систем из-за нулевых колебаний квантовое основное состояние не совпадает с классическим. Для таких систем задача состоит не только в вычислении температурных перенормировок, но и в корректном определении магнитных характеристик при $T = 0$. Среди моделей, описываемых гамильтонианом (3.2), нулевыми колебаниями обладают те, в которых ось квантования не совпадает с избранной осью кристалла: ЛО ферромагнетик в наклонном поле, ЛП ферромагнетик и антиферромагнетик — последние почти всегда, за исключением ситуации, когда сильное поле приложено вдоль избранной оси.

В терминах бозе-операторов эти модели описываются гамильтонианом вида (3.4) (значения коэффициентов см. в табл. II). Структура этого гамильтониана такая же, как и для неидеального бозе-газа частиц с конденсатом ^{11,52,53}. Формальная аналогия между гамильтонианами (в обоих случаях в квадратичной форме есть недиагональные слагаемые $a_k^+ a_{-k}^+$ и $a_k a_{-k}$) позволяет воспользоваться при расчетах беляевской техникой для бозе-систем с конденсатом, хорошо разработанной для газа с малой плотностью частиц, но сильным взаимодействием между ними ⁵³. Эта ситуация буквально относится к слабоанизотропным магнетикам, у которых взаимодействие между магнонами сильное (обменное), а малость плотности обусловлена малостью температуры и анизотропии по сравнению с обменом.

Расчет в рамках стандартной диаграммной техники Беляева подразумевает введение трех функций Грина: нормальной G^{+-} и двух аномальных (G^{++} и G^{--}), которые в силу эрмитовости гамильтониана равны между собой. Для этих функций можно написать систему уравнений Дайсона, из которой находится дисперсионное уравнение для спектра спиновых волн:

$$D(\mathbf{k}, \omega) \equiv (\omega - i\Sigma_A(\mathbf{k}, \omega))^2 + (A_{\mathbf{k}} - \Sigma_s(\mathbf{k}, \omega))^2 - (B_{\mathbf{k}} - \Sigma^{++}(\mathbf{k}, \omega))^2 = 0, \quad (5.1)$$

где

$$\Sigma_{s,A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} (\Sigma^{+-}(\mathbf{k}, \omega) \pm \Sigma^{+-}(-\mathbf{k}, -\omega)), \quad (5.2)$$

а $\Sigma^{+-}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\Sigma^{++}(\mathbf{k}, \omega)$ — собственно-энергетические части нормальной и аномальной гриновских функций. Нормальная гриновская функция обычным образом связана с величиной $\kappa_{\mathbf{k}} = \langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \rangle$:

$$\kappa_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega G^{+-}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\omega t} |_{t \rightarrow +0}. \quad (5.3)$$

Расчет показывает, что в главном порядке по анизотропии значение $\kappa_{\mathbf{k}}$ отличается от классического (которое можно получить тривиальной диагонализацией квадратичной формы в (3.4)) только естественной квантовой перенормировкой константы анизотропии $\alpha \rightarrow \alpha [1 - (2S)^{-1}]^{29,35,54-58}$:

$$\kappa_{\mathbf{k}} = (A_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}) (2\varepsilon_{\mathbf{k}})^{-1} + A_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{-1} n_{\mathbf{k}}, \quad (5.4)$$

где $n_{\mathbf{k}}$ — бозевская функция, а

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \{A_{\mathbf{k}}^2 - B_{\mathbf{k}}^2 [1 - (2S)^{-1}]\}^{1/2} \quad (5.5)$$

— спектр спиновых волн (опять же в главном по α/J порядке). Подчеркнем, что простота результата не означает простоты его получения: расчет перенормировки коэффициента $B_{\mathbf{k}}$ ($B_{\mathbf{k}} \rightarrow B_{\mathbf{k}} [1 - (2S)^{-1}]^{1/2}$) требует решения

интегрального уравнения

$$\text{C} = \text{C} + \text{C}, \quad (5.6)$$

ядро которого факторизуется благодаря структуре обменного взаимодействия.

С той же точностью угол θ , задающий направление намагниченности, определяется из условия равенства нулю коэффициента при линейном члене в гамильтониане (3.4) (определенный так угол обозначается θ_0).

Таким образом, в главном порядке по анизотропии формулы для магнитных характеристик при $T = 0$ отличаются от классических только перенормировкой константы анизотропии $\alpha \rightarrow \alpha [1 - (2S)^{-1}]$. Эти формулы собраны в табл. IV. В таблицу включены и результаты для антиферромагнетика вблизи спин-флип-перехода^{13,14,59}. Малость плотности частиц обеспечивается здесь условием $\theta \ll 1$. Напомним, что для антиферромагнетика θ — угол между осью квантования одной из подрешеток и направлением внешнего поля.

Отметим, что в ЛО ферромагнетике параметром порядка служит z -я компонента намагниченности. В силу однокомпонентности параметра порядка, т. е. отсутствия осевой симметрии, спектр всюду за исключением точки перехода имеет конечную щель. Напротив, в ЛП ферромагнетике и антиферромагнетике вблизи спин-флипа параметр порядка — поперечная намагниченность, т. е. двухкомпонентный вектор. В этих случаях система инвариантна относительно вращений вокруг выделенной оси, и, как следствие этого, спектр спиновых волн линеен при $k \rightarrow 0$, т. е. имеет голдстоуновский характер.

Прежде чем переходить к обсуждению ангармонических эффектов, остановимся еще раз на формальной аналогии гамильтонианов магнетиков и бозе-газов частиц и обсудим, насколько далеко распространяется эта аналогия.

Как известно, в бозе-газе частиц с конденсатом длинноволновые возбуждения суть звуковые волны^{52,53}. В магнонах, как мы только что сказали, это так только при векторном параметре порядка (ЛП ферро- и антиферромагнетики, изотропные антиферромагнетики) и только для этих случаев имеет смысл подчеркивать аналогию с бозе-газом частиц.

В строгом смысле слова магноны — это квазичастицы, определяющие элементарные возбуждения в магнетике. Их число не сохраняется, и потому в равновесном состоянии конденсата магнонов нет. С другой стороны, низкотемпературные свойства магнетиков можно и часто бывает удобно описывать на языке бозе-операторов a^+ и a , непосредственно связанных с операторами проекций спина (см. формулу (3.2) раздела 3). Собственно, так мы и поступаем. Эти операторы также принято называть операторами рождения и уничтожения магнонов, и для описания в их терминах понятие конденсата имеет вполне определенный смысл. Действительно: в бозе-газе частиц конденсат (т. е. скопление n_0 частиц в единице объема в состоянии с $\mathbf{p} = 0$) отражает возникновение дальнего порядка в системе: на больших расстояниях коррелятор плотность — плотность стремится к n_0 ¹¹. Аналогично в магнетиках возникновение дальнего порядка характеризуется появлением ненулевого значения $\langle \mathbf{S}^\perp \rangle$, к квадрату которого стремится на больших масштабах коррелятор спин-спин ($\mathbf{S}^\perp = (S^x, S^y)$ — проекция спина на легкую плоскость; для определенности речь идет о ЛП ферромагнетике).

Поскольку, согласно (3.2),

$$\langle \mathbf{S}^\perp \rangle = \left(S - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \rangle \right) \sin \theta,$$

Таблица IV
Магнитные характеристики при $T=0$ для ряда систем, содержащих нулевые колебания. Формулы выписаны в главном порядке по малой плотности частиц; малый параметр α/J для ЛО и ЛП ферромагнетиков и $\sin^2 \theta_0$ для антиферромагнетика (v_0 — объем элементарной ячейки)

Модель	Угол θ_0	Критическое поле $H_{z,c}^{(0)}$	Энергия магнтона ε_k	Продольная намагниченность	Поперечная намагниченность
1. ЛП ферромагнетик в продольном поле	$\cos \theta_0 = \frac{H_z}{H_{z,c}^{(0)}},$ $H_z < H_{z,c}^{(0)};$ $\theta_0 = 0, H_z > H_{z,c}^{(0)}$	$\mu H_{z,c}^{(0)} = \tilde{\alpha} S$	$\{J(0) S (1 - v_k) \times [2\tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0 + J(0) S (1 - v_k)]\}^{1/2}$	$2\mu S v_0^{-1} \cos \theta_0$	$2\mu S v_0^{-1} \sin \theta_0$
2. ЛО ферромагнетик в поперечном поле	$\sin \theta_0 = \frac{H_x}{H_{x,c}^{(0)}},$ $H_x < H_{x,c}^{(0)};$ $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, H_x > H_{x,c}^{(0)}$	$\mu H_{x,c}^{(0)} = \tilde{\alpha} S$	$[J(0) S (1 - v_k) + 2(\mu H_x \sin \theta_0 + \tilde{\alpha} S \cos 2\theta_0)]^{1/2} [J(0) S (1 - v_k) + 2(\mu H_x \sin \theta_0 + \tilde{\alpha} S \cos^2 \theta_0)]^{1/2}$	$2\mu S v_0^{-1} \sin \theta_0$	$-2\mu S v_0^{-1} \cos \theta_0$
3. Изотропный антиферромагнетик вблизи спин-флип-перехода	$\cos \theta_0 = \frac{H_z}{H_{z,c}^{(0)}},$ $H_z < H_{z,c}^{(0)};$ $\theta_0 = 0, H_z > H_{z,c}^{(0)}$	$\mu H_{z,c}^{(0)} = J(0) S$	$J(0) S [(1 - v_k) (2 \sin^2 \theta_0 + 1 - v_k)]^{1/2}$	$2\mu S v_0^{-1} \cos \theta_0$	$2\mu S v_0^{-1} \sin \theta_0$

или

$$\frac{N}{V} \frac{\langle S^\perp \rangle^2}{S^2} + \frac{N \sin^2 \theta}{V} \frac{2}{NS} \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle \approx \frac{N}{V} \sin^2 \theta, \quad (5.7)$$

то по аналогии с известной формулой для бозе-газа частиц¹¹

$$n_0 + \frac{N}{V} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{N}{V} \quad (5.8)$$

 $(b_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $b_{\mathbf{k}}^-$ — бозе-операторы частиц) величины

$$\frac{N \sin^2 \theta}{V}, \quad \frac{N}{V} \frac{\langle S^\perp \rangle^2}{S^2} \text{ и } \frac{2}{NS} \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle$$

можно отождествить соответственно с полной плотностью частиц, плотностью частиц в конденсате и «узельной» плотностью надконденсатных частиц. Первые два соответствия в достаточной степени формальные, хотя они и позволяют рассматривать фазовые переходы в ЛП ферромагнетике и антиферромагнетике как исчезновение бозе-конденсата^{*)}. Последнее соответствие более естественно, поскольку функция распределения надконденсатных магнонов имеет такой же вид, как и в бозе-газе (см. (5.3) и (5.4)). Оно делает наглядным структуру основного состояния: при $T = 0$ в магнетике есть надконденсатные (квази)частицы, равновесное число которых задается первым слагаемым в формуле (5.4) и мало ($\sim (\alpha/J)^{3/2}$) в меру малости отношения анизотропии к обмену; отклонение функции распределения надконденсатных магнонов от $\kappa_{\mathbf{k}}|_{T=0}$ вызывает релаксацию спиновой системы, что в определенных условиях приводит к конечности времени жизни магнона при $T = 0$. Наглядность приобретает и стандартное *uv*-преобразование в магнетиках: его можно рассматривать как переход от частиц к квазичастицам. Обратим в этой связи внимание на то, что нулевые колебания существенны не только при $T = 0$, но и при конечных температурах: температурная часть функции распределения частиц $\kappa_{\mathbf{k}}$ не есть функция Бозе, в отличие от функции распределения квазичастиц, которая равна $n_{\mathbf{k}}$ ^{**)} .

Существует, однако, ряд эффектов (например, сдвиг точки ориентационного перехода в ЛО ферромагнетике), для расчета которых нужны более точные формулы, чем в табл. IV, учитывающие следующие члены по α/J . Вычисления производятся следующим образом^{14,35}: значение угла θ определяется из условия обращения в нуль суммы диаграмм с одним внешним концом

$$\text{шарик} \rightarrow = 0, \quad (5.9)$$

*) Уточним: в чистом виде «исчезновение бозе-конденсата» происходит при фазовом переходе порядок — беспорядок по константе анизотропии (см. ниже). При ориентационных переходах наряду с исчезновением конденсата обращается в нуль также и полная плотность «частиц».

**) Это особенно ярко проявляется в 2D-пространстве — полное число надконденсатных частиц $\sum_{\mathbf{k}} \kappa_{\mathbf{k}}$ расходится в отличие от полного числа квазичастиц $\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$.

Таблица V
Квантовые перенормировки ($T=0$) магнитных характеристик ряда систем, содержащих нулевые колебания,
 $\lambda = W + \{2S[1 - (2S)^{-1}]\}^{-1}$

Модель	Угол θ	Критическое поле H_c	Энергия магнона ε_k , $k a \ll 1$	Продольная намагниченность	Поперечная намагниченность
1. ЛП ферромагнетик в продольном поле	$\cos \theta = \cos \theta_0 \times$ $\times \left[1 - \frac{\alpha \lambda}{2J^{(0)} S} \sin^2 \theta_0 \right],$ $H_z < H_{z, c};$ $\theta \equiv 0, H_z > H_{z, c}$	$H_{z, c} \equiv H_{z, c}^{(0)}$	$\varepsilon_k = C k,$ $C^2 = 2 \alpha J S^2 \sin^2 \theta_0 \times$ $\times \left[1 + \frac{\alpha}{J^{(0)} S} \left\{ \lambda - \frac{1}{2[1 - (2S)^{-1}]} \right\} \sin^2 \theta_0 \right],$ $H_z < H_{z, c}$ $\varepsilon_k = \{e_0^2 + U^2 k^2\}^{1/2}$	$\frac{2\mu S}{v_0} \cos \theta$	$\frac{2\mu S}{v_0} \sin \theta$
2. ЛО ферромагнетик в поперечном поле	$\sin \theta = \sin \theta_0 \times$ $\times \left[1 + \frac{\alpha \lambda}{2J^{(0)} S} \sin^2 \theta_0 \right],$ $H_x < H_{x, c};$ $\theta \equiv \frac{\pi}{2}, H_x > H_{x, c}$	$H_{x, c} \equiv H_{x, c}^{(0)} \times$ $\times \left(1 - \frac{\alpha \lambda}{2J^{(0)} S} \right)$	$\varepsilon_0 = 2 \alpha S \times$ $\times \left\{ \left(1 - \frac{\lambda \alpha \sin^2 \theta_0}{J^{(0)} S} \right) \cos \theta_0, H_x < H_{x, c}, \right.$ $\left. \frac{\mu H_x}{\alpha S} \left[\frac{\mu (H_x - H_{x, c})}{\alpha S} \right]^{1/2}, H_x > H_{x, c}, \right.$ $U^2 = 2 \alpha J S^2 \times$ $\times \left\{ 2 - \sin^2 \theta - \frac{2 \alpha \sin^2 \theta}{J^{(0)} S} \left(\lambda \cos^2 \theta + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{\sin^2 \theta}{4[1 - (1/2S)]} \right), H_x < H_{x, c}, \right.$ $\left. 2 \mu (H_x - H_{x, c}) (\alpha S)^{-1} + 1 - \tilde{\alpha} (2J^{(0)} S)^{-1}, \right.$ $\left. H_x > H_{x, c} \right.$ $\varepsilon_k = C k,$ $C^2 = 2 J J^{(0)} S^2 \sin^2 \theta_0 \left(1 + \frac{\lambda}{S} \sin^2 \theta_0 \right),$ $H_z < H_{z, c}$	$\frac{2\mu S}{v_0} \times$ $\times \begin{cases} \sin \theta, H_x < H_{x, c} \\ 1 - O\left(\frac{\alpha}{J}\right)^{3/2}, \\ H_x > H_{x, c} \end{cases}$	$\frac{2\mu S}{v_0} \cos \theta$
3. Изотропный антиферромагнетик вблизи спин-флип-перехода	$\cos \theta = \cos \theta_0 \times$ $\times \left[1 - \frac{\lambda}{2S} \sin^2 \theta_0 \right],$ $H_z < H_{z, c};$ $\theta \equiv 0, H_z > H_{z, c}$	$H_{z, c} \equiv H_{z, c}^{(0)}$		$\frac{2\mu S}{v_0} \cos \theta$	$\frac{2\mu S}{v_0} \sin \theta$

Конечная температура $T \neq 0$ приводит к перенормировке магнитных характеристик вне зависимости от того, как устроено основное состояние. Графические уравнения для температурных перенормировок те же, что и для квантовых (см. формулы (5.9)–(5.11)), но теперь надо учесть дискретность мацубаровских частот $2\pi nT$ (n — целые числа), что после суммирования по частоте приводит к появлению дополнительных слагаемых, содержащих бозевскую функцию n_k . Результаты расчетов^{22,35,61,62} собраны в табл. VI. Обратим внимание на существование вдали от температуры Кюри ($T \ll JS$) двух температурных интервалов: $T \ll \tilde{\alpha}S \sin^2 \theta$ и $T \gg \tilde{\alpha}S \sin^2 \theta$. При сравнительно высоких температурах главный вклад в перенормировку вносят магны с достаточно большими характерными волновыми векторами, для

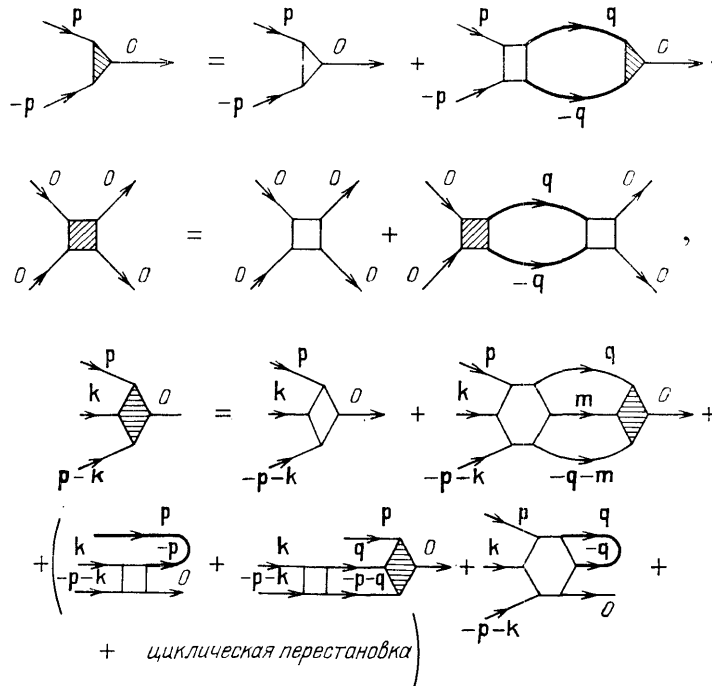


Рис. 5. Графические уравнения для полных вершин, фигурирующих в диаграммах (5.10) и (5.11)

которых спектр уже практически «не чувствует» анизотропии ($\epsilon_k \approx JS(\mathbf{k}a)^2$). В этом случае температурные перенормировки всех величин определяются числом тепловых магнонов и пропорциональны $T^{3/2}$. При самых низких температурах основную роль играют предельно длинноволновые магноны, энергии которых существенно зависят от анизотропии (например, в ЛП ферромагнетике это магноны с $\epsilon_k \propto k$). Здесь ситуация сложнее, так как, во-первых, проявляется отличие ϵ_k от A_k , а, во-вторых, существенный вклад в перенормировку вносят кубические анггармонизмы*). В этом интервале температурные законы зависят как от модели, так и от выбранной характеристики. Например, в ЛО ферромагнетике все температурные перенормировки (кроме перенормировки точки ориентационного перехода) содержат экспоненциальный множитель $\exp(-\epsilon_0/T)$ (в силу малости этих перенормировок точные формулы в табл. VI не приведены). Напротив, в системах с голдстоуновским спектром (в ЛП ферромагнетике и антиферромагнетике) температурные пере-

*) Мы, не оговаривая, считаем магнитное поле не равным нулю.

нормировки всегда степенные. Кроме того, в этом случае по-разному перенормируются скорость спиновых волн ($\Delta C(T) \propto T^4 \ln T$), продольная ($\Delta M_z(T) \propto T^4$) и поперечная ($\Delta M_\perp(T) \propto T^2$) намагниченности. Полезно и здесь отметить аналогию со сверхтекучей бозе-жидкостью, в которой наблюдаются аналогичные зависимости соответственно для скорости звука, плотности нормальной компоненты и плотности частиц в конденсате⁸. Правда, поскольку в сверхтекучей бозе-жидкости всегда есть тройные ангармонизмы (за счет которых появляется логарифмический множитель в $\Delta C(T)$), то отмеченная аналогия, строго говоря, имеет место только при $H \neq 0$. В нулевом поле перенормировка скорости спиновых волн $\Delta C(T) \sim T^4$.

Различие в температурных зависимостях продольной и поперечной намагниченностей отражает тот факт, что температурные поправки к M_z конечны в любой размерности пространства, так как при $T \neq 0$ M_z — это, по существу, парамагнитная характеристика, и ее значение определяется внешним полем, а температурные поправки к M_\perp , т. е. к параметру порядка, расходятся в пространстве размерности $D \leq 2$ в соответствии с теоремой Мермина — Вагнера (см. раздел 6). Соответственно поправка к M_\perp определяется числом надконденсатных частиц ($\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{-1} n_{\mathbf{k}}$), а поправка к M_z (равно как и к скорости спиновых волн, которая также остается конечной вне зависимости от размерности) определяется энергией квазичастиц ($\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$).

Как видно из табл. VI, значение угла θ также зависит от температуры, т. е. ось квантования смещается с изменением T . Такая ситуация характерна для любого осциллятора с ангармонизмами нечетных степеней. По существу, сдвиг оси квантования был и при $T = 0$ за счет нулевых колебаний. Природа обоих эффектов тождественна, только амплитуда квантовых флуктуаций растет с ростом обратного спина $1/S$, а классических — с ростом T .

В таблице, которую мы обсуждаем, не приведены формулы для затухания спиновых волн. Это связано с тем, что большинство формул очень громоздки и существует множество различных предельных случаев. Отсылая читателя к оригинальным работам^{61,63–65}, сделаем несколько общих утверждений.

Во-первых, при $H \neq 0$ за счет квантовых эффектов затухание отлично от нуля и при $T = 0$.

Во-вторых, затухание всегда (при $\alpha/J \ll 1$ и $T/JS \ll 1$) меньше, чем поправки к энергии.

В-третьих, при $H \neq 0$ главный вклад в затухание вносят трехчастичные ангармонизмы. При $H = 0$ таких ангармонизмов нет (соответствующие слабые в бозе-гамильтониане содержат множитель $\sin 2\theta$), и затухание определяется четырехчастичными ангармонизмами.

Эта картина верна в пренебрежении дипольными взаимодействиями. Их учет изменяет ситуацию для $H = 0$: появляется затухание при $T = 0$, а при конечной температуре главным, как правило, становится затухание, обязанное трехчастичным ангармонизмам дипольного происхождения.

Время жизни магнона (и метод его определения) зависят от соотношения между энергией магнона $\epsilon_{\mathbf{k}}$ и характерным временем жизни $\tau_{\text{хар}}$ тепловых квазичастиц, с которыми он взаимодействует. При $\epsilon_{\mathbf{k}} \tau_{\text{хар}} \gg 1$ (баллистический режим) затухание целиком определяется первым исчезающим порядком теории возмущений (обычно — вторым), а при $\epsilon_{\mathbf{k}} \tau_{\text{хар}} \ll 1$ (гидродинамика) существенным в ряде случаев становится учет более высоких порядков теории возмущений*). В частности, весьма существенно изменение выра-

*) В этом интервале проще и привычнее исходить непосредственно из макроскопических уравнений гидродинамики⁶⁶.

Температурные перенормировки магнитных характеристик
Асимптотики функций $\tilde{\varphi}_\theta$, ε , m отличаются от приведенных в таблице

Модель	$H_c(T)/H_c(0)$	$\cos \theta(T)/\cos \theta(0)$
1. ЛП ферромагнетик в продольном поле	$1 - \frac{2}{S} \tau^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right)$	$1 + \frac{2}{S} \varphi_\theta(T),$ $\varphi_\theta(T) =$ $= \begin{cases} \tau^2 \left(\frac{2J}{\tilde{\alpha} \sin^2 \theta_0} \right)^{1/2} \zeta(2), & T \ll \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0, \\ \tau^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right), & T \gg \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0 \end{cases}$
2. ЛО ферромагнетик в поперечном поле	$1 - \begin{cases} \frac{\pi^{3/2} \sqrt{2}}{S} \tau^{3/2} \left(\frac{T}{\tilde{\alpha} S} \right)^{1/2}, & T \ll \tilde{\alpha} S, \\ \frac{2}{S} \tau^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right), & T \gg \tilde{\alpha} S \end{cases}$	
3. Изотропный анти- ферромагнетик вблизи спин-флип- перехода	$1 - \frac{2}{S} \left(1 + \frac{W-1}{S} \right)^{-1} \times$ $\times \tau^{3/2} \zeta \left(\frac{3}{2} \right)$	$1 + \frac{2}{S} \tilde{\varphi}_\theta(T)$

жения для затухания при переходе в гидродинамическую область *) для ЛП ферромагнетика при $H = 0$ ⁶⁴:

$$\gamma(\mathbf{k}) \propto \varepsilon_{\mathbf{k}} T^4 \text{ при } \varepsilon_{\mathbf{k}} \tau_{\text{хар}} \gg 1, \quad (5.13)$$

$$\gamma(\mathbf{k}) \propto \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 T^{-1} \text{ при } \varepsilon_{\mathbf{k}} \tau_{\text{хар}} \ll 1, \quad (5.14)$$

причем $\tau_{\text{хар}} \propto T^{-5}$.

Завершая этот раздел, приведем ряд результатов, относящихся к системам, для которых отсутствует параметрическая малость нулевых колебаний. Начнем с изотропного антиферромагнетика. Его классический спектр

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = J(0) S (1 - \nu_{\mathbf{k}}^2)^{1/2} \quad (5.15)$$

содержит две голдстоуновские моды ($\mathbf{k} = 0$ и $\mathbf{k} = (\pm\pi/a, \pm\pi/a, \pm\pi/a)$), отражающие инвариантность гамильтониана относительно вращений спинов и перестановки подрешеток ^{37,38,67}. Симметрия спектра относительно замены $k_i \rightarrow (\pi/a_i) - k_i$ позволяет уменьшить ячейку в \mathbf{k} -пространстве антиферромагнетика и считать спектр состоящим из двух совпадающих ветвей (так более принято). Включая магнитное поле, мы нарушаем инвариантность подрешеток: замена одной подрешетки на другую требует одновременной замены направления спинов, что приводит к изменению зеемановской энергии. Из-за

*) Изменение затухания при переходе к гидродинамике есть и в изотропном ферромагнетике. Мы, однако, не останавливались в разделе 4 на этом вопросе, поскольку в изотропном ферромагнетике переход проявляется только в изменении степени логарифмических множителей ⁶⁴.

Т а б л и ц а VI

ряда систем, содержащих нулевые колебания,
асимптотик функций Φ_θ , ε , M только заменой $\tilde{\alpha} \rightarrow J^{(0)}$

$\varepsilon_k(T)/\varepsilon_k(0)$	$M_{\parallel}(T)/M_{\parallel}(0)$	$M_{\perp}(T)/M_{\perp}(0)$
$\frac{C(T)}{C(0)} = \left(1 - \frac{2}{S} \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \Phi_\varepsilon(T)\right)^{1/2} =$ $\Phi_\varepsilon(T) =$ $= \begin{cases} 24\pi^2 \tau^4 \left(\frac{2J}{\tilde{\alpha} \sin^2 \theta_0}\right)^{5/2} \zeta(4) \times \\ \times \left(1 - \frac{18 \cos^2 \theta_0}{1 + \cos^2 \theta_0} \ln \frac{\tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0}{T}\right), \\ \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0 \gg T; \\ \tau^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0 \ll T \end{cases}$ $1 - O(e^{-\varepsilon_0/T})$	$1 + \frac{1}{S} \Phi_M(T),$ $\Phi_M(T) =$ $\begin{cases} 24\pi^2 \tau^4 \times \\ \times \left(\frac{2J}{\tilde{\alpha} \sin^2 \theta_0}\right)^{5/2} \zeta(4), \\ \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0 \gg T, \\ \tau^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \\ \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0 \ll T \end{cases}$	$1 - \frac{1}{S} \times$ $\times (2\Phi_\theta(T) - \Phi_M(T))$
$\frac{C(T)}{C(0)} = \left(1 - \frac{2}{S} \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \tilde{\Phi}_\varepsilon(T)\right)^{1/2}$	$1 + \frac{1}{S} \tilde{\Phi}_M(T)$	$1 - \frac{1}{S} \times$ $\times (2\tilde{\Phi}_\theta(T) - \tilde{\Phi}_M(T))$

этого нарушается симметрия спектра относительно точки $k_i = \pi/2a_i$ ($i = x, y, z$). Если перейти к уменьшенной ячейке \mathbf{k} -пространства, то в одной из ветвей появится щель.

Как мы уже отмечали, в антиферромагнетике вклад нулевых колебаний численно мал. Так, первая (по $1/S$) поправка к скорости спиновой волны равна⁶⁸

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{2NS} \sum_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{J^{(0)} S}\right) \quad (5.16)$$

и для простой кубической решетки составляет $0,097/2S$.

Температурная поправка к скорости в главном порядке по $1/S$ определяется энергией квазичастиц ($\sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$) и, так же как и в ЛП ферромагнетике, пропорциональна T^4 ^{69,70}. Специфика антиферромагнетика, состоящая в наличии у него двух голдстоуновских мод в спектре, проявляется при расчетах в следующем порядке по $1/S$: учет взаимодействия между низкоэнергетическими модами с $\mathbf{k} \approx 0$ и $k_i \approx \pi/a$ приводит к появлению логарифмического по температуре множителя⁷¹

$$\frac{\Delta C}{C} = -\frac{\pi^2}{2160 \sqrt{3} S} \left(\frac{T}{JS}\right)^4 \left(1 + \frac{10 \sqrt{3}}{3\pi^2 S} \left|\ln \frac{T}{JS}\right|\right). \quad (5.17)$$

Напомним, что в ферромагнетике соответствующая перенормировка приводила к появлению постоянного множителя $Q(S)$ (см. табл. III).

Затухание антиферромагнитных магнонов неоднократно вычислялось главным образом в изотропных⁶³ и легкоплоскостных⁷² антиферромагнетиках. Из принципиальных моментов отметим только, что здесь расчет во втором порядке теории возмущений приводит к правильному результату для затухания магнона на малых волновых векторах $ka \ll (T/J(0)S)^3 \ll 1$:

$$\gamma(\mathbf{k}) \propto \epsilon_k^2 T^3 |\ln T \cdot (J(0)S)^{-1}|, \quad (5.18)$$

и потому переход к гидродинамике не требует учета конечности времени жизни виртуальных магнонов (подробнее см. в⁶³). Еще раз обратим внимание на существенное различие в поведении изотропного антиферромагнетика и ЛП ферромагнетика. Хотя у обоих спектр линейный при $k \rightarrow 0$, у антиферромагнетика есть две голдстоуновские моды и, благодаря этому антиферромагнетик по своим свойствам близок к изотропному ферромагнетiku.

Завершая обсуждение антиферромагнетика, рассмотрим, как проявляется в нем принцип Адлера^{*)}. Перейдем к бозонам и диагонализуем квадратичную форму с помощью uv -преобразования, чтобы иметь затравочный голдстоуновский спектр. Тогда любая из четверных амплитуд будет содержать наряду с квадратичным по энергиям членом в числителе еще и корень из произведения энергий в знаменателе, так что при стремлении определенных волновых векторов к нулю амплитуды расходятся, и можно подумать, что нарушается принцип Адлера. Однако этого, конечно, не происходит. Дело в том, что принцип Адлера формулируется для фононоподобных голдстоуновских бозонов, у которых затравочная функция Грина пропорциональна $(\omega^2 + k^2)^{-1}$. Напротив, функция Грина магнонов содержит первую степень частоты: $G_{\alpha}(k, \omega) \propto (|k| - i\omega)^{-1}$, что физически связано с однонаправленностью вращения спинов в спиновой волне. Соответственно при расчетах по теории возмущений с магнонной функцией Грина в знаменателях «недостает» энергий виртуальных квазичастиц по сравнению с тем, что получалось бы при расчетах с фононоподобной функцией Грина. Эта недостача в точности компенсируется энергиями, стоящими в знаменателях амплитуд антиферромагнетиков. Поэтому о принципе Адлера следует говорить только в применении к числителям соответствующих амплитуд, и в полном соответствии с его требованиями разложение любого из числителей по импульсам (энергиям) начинается с квадратичных членов.

Рассмотрим теперь ЛП ферромагнетик с большой константой анизотропии ($\alpha \gg J$). При большом α нулевые колебания могут полностью перестроить классическое основное состояние. Чтобы убедиться в этом, проанализируем случай $\alpha \gg J$ и $H = 0$. Тогда в нулевом приближении по обменному взаимодействию задача становится одночастичной. Пусть атомный спин целый. Тогда основное состояние есть синглет ($S_i^z \equiv 0$), отделенный от первого $2N$ -кратно вырожденного возбужденного состояния (у одного из атомов $S_{i_0}^z = +1$ или -1) энергетической щелью $\sim \alpha$. Включение слабого обменного взаимодействия, разумеется, не может ликвидировать эту щель. Существование щели однозначно свидетельствует о полном размытии дальнего порядка в основном состоянии, поскольку в упорядоченной фазе спектр заведомо голдстоуновский (см. начало этого раздела). Ясно, что при $\alpha \sim J$ должен произойти фазовый переход «порядок-беспорядок»^{56,73}.

Иная ситуация в системах с полуцелыми спинами. Для них в одночастичном приближении основное состояние 2^N -кратно вырождено ($S_i^z = +1/2$ или $-1/2$). Включение даже слабого обменного взаимодействия приводит к упорядочению в плоскости x, y . Следовательно, в этом случае никакого фазового перехода с изменением константы анизотропии не происходит — система все время находится в упорядоченной фазе.

*) Нижеследующее обсуждение относится в равной степени ко всем магнетикам с голдстоуновским спектром, в которых есть нулевые колебания.

Включение продольного поля $H_z = H$ делает фазовую диаграмму ЛП ферромагнетика даже при $T = 0$ весьма своеобразной^{22,35,74}. Двигаясь в сторону больших полей, мы не приближаемся монотонно к точке плавления бозе-конденсата, как на рис. 1, а проходим S областей с упорядоченными в плоскости x, y спинами; они разделены областями, в которых дальний порядок отсутствует (рис. 6).

Чередование упорядоченных и неупорядоченных областей связано с тем, что в одночастичной задаче включение магнитного поля вызывает расщепление всех уровней (кроме уровня $S_z^z = 0$) на величину, пропорциональную полю и z -проекции спина. Поэтому с ростом поля наименьшими по энергии последовательно оказываются уровни с различными значениями S_z^z . В окрестности каждой из точек пересечения уровней $S_z^z = m$ и $S_z^z = m + 1$ (таких точек всего $[S]$) основное состояние точно или приближенно (в зависимости от того, рассматриваем ли мы строго точку пересечения или ее малую окрестность) $2N$ -кратно вырождено, и пока расстояние между двумя наименьшими уровнями меньше обменного интеграла, размывающего верхний уровень в зону, в системе будет дальний магнитный порядок. При малом обмене все остальные уровни кроме двух нижних не важны, и потому система в упорядоченной фазе практически эквивалентна XY -магнетику с $S = 1/2$ в продольном поле; дальний порядок в плоскости x, y существует, пока поле меньше критического.

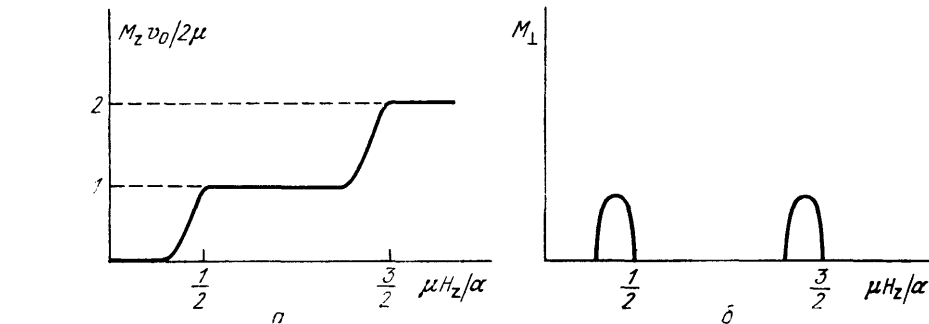


Рис. 7. Полевые зависимости продольной M_z (а) и поперечной M_\perp (б) намагниченностей ЛП ферромагнетика с большой константой одноионной анизотропии. Плато на зависимости $M_z(H)$ (и одновременное обращение в нуль $M_\perp(H)$) появляются из-за конечности корреляционного радиуса в парамагнитной («локализованной») фазе

доченной фазе практически эквивалентна XY -магнетику с $S = 1/2$ в продольном поле; дальний порядок в плоскости x, y существует, пока поле меньше критического.

Интересно отметить, что полевые зависимости $M_z(H)$ и $M_\perp(H)$ при $\alpha \gg J$ напоминают зависимости от H холловской и диссипативной проводимостей в условиях квантового эффекта Холла⁷⁴ (рис. 7). Такое совпадение не случайно, ибо причина появления строгого плато на зависимости $M_z(H)$ (и одновременного обращения в нуль $M_\perp(H)$) та же, что и в эффекте Холла: при конечном радиусе корреляции спинов в плоскости x, y (т. е. в условиях «локализации», когда $M_\perp = 0$) взаимодействие между одночастичными уровнями, осуществляемое поперечными компонентами обменного взаимодей-

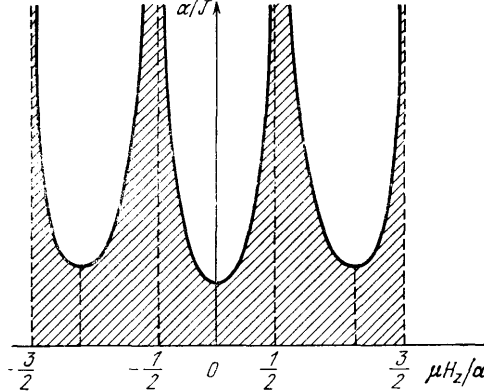


Рис. 6. Фазовая диаграмма ЛП ферромагнетика с одноионной анизотропией и $S = 2$ на плоскости переменных α/J и $\mu H_z/\alpha$.

Заштрихованы области существования дальнего порядка в плоскости x, y

вия, не создает макроскопического эффекта, т. е. не вызывает полевой зависимости M_z . При отличной от нуля температуре вся картина, конечно же, будет несколько сглажена.

Экспериментально переход синглетное состояние — магнитный порядок в магнитном поле наблюдался в ряде магнетиков с $S = 1$ ⁷⁵. Кроме того, полевая зависимость M_z , по виду близко напоминающая теоретическую, была экспериментально получена для $\text{FeSiF}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ($S = 2$) в работе⁷⁶.

6. ОСОБЕННОСТИ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ СИСТЕМ

В предыдущих параграфах мы рассматривали системы с анизотропией в спиновом пространстве, но изотропные в координатном. Реально во многих случаях ситуация иная: значения обменных интегралов по разным направлениям существенно отличаются. Часто иерархия обменных взаимодействий столь ярко выражена, что одним или двумя обменными интегралами можно попросту пренебречь. Тогда, как нулевое приближение, возникает модель низкоразмерного (двумерного или одномерного) магнетика.

Конечно, в строгом смысле слова низкоразмерных объектов не существует. Например, какими бы аномально малыми не были некоторые компоненты обменного взаимодействия, всегда есть диполь-дипольное взаимодействие между магнитными моментами, медленно спадающее с расстоянием *). Тем не менее практически всегда существуют условия, когда низкоразмерные свойства магнетиков проявляются в полной мере. Например, так заведомо обстоит дело, если температура велика по сравнению с энергией взаимодействия, нарушающего низкоразмерность, но мала по сравнению с большим обменным интегралом. Есть и другие примеры, когда специфическое низкоразмерное поведение не вуалируется трехмерностью образца. Ряд магнетиков, которые можно отнести к низкоразмерным, перечислен в табл. VII.

Главное, что нас привлекает в низкоразмерных системах, это значительное усиление роли флуктуационных эффектов, как температурных, так и квантовых. Рассмотрим их по отдельности, причем начнем со случая $T \neq 0$, когда определяющую роль играют классические флуктуации. Для 2D-систем их проявлением служит хорошо известная теорема Мермина и Вагнера⁷⁷ об отсутствии при $T \neq 0$ дальнего порядка в легкоплоскостных и изотропных двумерных гейзенберговских ферромагнетиках. Эта теорема показывает, что в отличие от трехмерных магнетиков характер низкотемпературного поведения 2D-систем существенно зависит от размерности параметра порядка n . Утверждение об отсутствии упорядочения не относится к ЛО ферромагнетикам с однокомпонентным параметром порядка **) ($n = 1$), а справедливо только для систем, в которых параметр порядка-вектор, не имеющий выделенного направления в плоскости ($n = 2$) или в пространстве ($n = 3$). Интересной особенностью 2D-магнетиков служит то, что отсутствие дальнего порядка не означает схождения их магнитных свойств при низких температурах. В ЛП магнетиках ($n = 2$) есть фиксированная температура T_B , в которой радиус корреляции обращается в бесконечность, если двигаться со стороны более высоких температур. Хотя в согласии с теоремой Мермина — Вагнера упорядочение при всех температурах отсутствует, при $T < T_B$ мы имеем дело с новой фазой: система как бы застывает в точке фазового перехода, где все готово к упорядочению — радиус корреляции и восприимчивость равны бесконечности, а корреляционная функция спинов спадает по степенному закону^{79–81}. Эти свойства сохраняются при всех температурах ниже T_B , лишь

*) Исключение составляют лишь специфические одно- и двумерные образования — такие как длинные органические молекулы, изолированные дислокационные линии или одноатомные пленки на немагнитной подложке.

**) Упорядочение в 2D-ЛО ферромагнетике наступает при $T = T_c \neq 0$. Индексы перехода были рассчитаны Онзагером (см. ⁷⁸).

Таблица VII

Примеры веществ, которые относятся к 3D-, 2D- и 1D-магнетикам, изучаемым в настоящем обзоре. Данные о принадлежности конкретного вещества к определенному классу взяты из материалов недавних Международных конференций по магнетизму и из обзоров ^{118,119}

Тип вещества	Размерность	Вещества
Ферромагнетики: обменные	3	EuO, EuS, Cu(NH ₄) ₂ Br ₄ ·2H ₂ O
	2	K ₂ CuF ₄ , Cu(CH ₃ NH ₃) ₂ Cl ₄
	1	(C ₆ H ₁₁ NH ₃)CuCl ₃ , (C ₆ H ₁₁ NH ₃)CuBr ₃
ЛП с одноионной анизотропией	3	Dy(Ni) ₅ , FeSiF ₆ ·6H ₂ O
	2	Rb ₂ CuCl ₂
	1	CsNiF ₃ , RbFeCl ₃
ЛП с разноионной анизотропией (типа XY-модели)	3	Fe[Se ₂ CN(C ₂ H ₅) ₂] ₂ Cl
	2	CoCl ₂
	1	(CH ₃) ₄ NNiBr ₃
ЛО с одноионной анизотропией	3	NiZnF ₆ ·6H ₂ O, FeP
	2	AgCrSe ₂ , NaCrSe ₂
ЛО с разноионной анизотропией (типа модели Изинга)	3	Tb(OH) ₃ , Fe[S ₂ CH(C ₂ H ₅) ₂] ₂ Cl
	2	FeCl ₂
	1	CoCl ₂ ·2NC ₅ H ₅ , CoCl ₂ ·2H ₂ O
Антиферромагнетики: обменные	3	RbMnF ₃ , KMnF ₃
	2	BaMnF ₄ , K ₂ NiF ₄
	1	CsMnCl ₃ ·2H ₂ O, RbNiCl ₃ , CsNiCl ₃
ЛП с одноионной анизотропией	3	CsMnF ₃ , MnCO ₃ , FeBO ₃
	2	Ba(Ni) ₂ (PO ₄) ₂
	1	(CH ₃) ₂ NH ₂ MnCl ₃ , (CH ₃) ₄ NMnCl ₃
ЛП с разноионной анизотропией (типа XY-модели)	3	Co(C ₅ H ₅ NO) ₆ (ClO ₄) ₂ , Co(C ₅ H ₅ NO) ₆ (BF ₄) ₂
	2	CoBr ₂ ·6H ₂ O, CoCl ₂ ·6H ₂ O
	1	Cs ₂ CoCl ₄ , PrCl ₃
ЛО с одноионной анизотропией	3	MnF ₂
	2	Rb ₂ NiF ₄ , Tl ₂ NiF ₄
	1	CsMnCl ₃ ·2H ₂ O
ЛО с разноионной анизотропией (типа модели Изинга)	3	DyPO ₄ , FeF ₂
	2	CoCs ₃ Br ₅ , Rb ₂ CoF ₄
	1	CsCoCl ₃ , RbFeCl ₅ ·2H ₂ O
Сложные структуры: метамгнетики гелимагнетики	3	[(CH ₃) ₃ NH]CoCl ₃ ·2H ₂ O, FeCl ₂ , FeBr ₂
	3	MnO ₂ , MnAu ₂ , FeCl ₃

показатель степени убывания коррелятора монотонно уменьшается с понижением температуры ⁸². Напротив, при $n > 2$ фазового перехода вплоть до $T = 0$ не существует, т. е. при всех конечных температурах магнетик находится в парамагнитной фазе с конечным радиусом корреляции спинов ^{83,84}. Причина усиления флуктуационных эффектов в изотропном магнетике ($n = 3$) по сравнению с легкоплоскостным ($n = 2$) — в большем числе степеней свободы параметра порядка и, как следствие, в существовании дополнительных низкоэнергетических возбуждений. Проще всего это увидеть, сравнив ЛП магнетик и антиферромагнетик. В обеих системах есть низкоэнергетические возбуждения с $ka \ll 0$, но в антиферромагнетике дополнительно есть низко-

лежащие возбуждения с волновыми векторами, близкими к π/a , и вся специфика флуктуационных эффектов в антиферромагнетике обусловлена взаимодействием низкоэнергетических магнонов с $\mathbf{k} \approx 0$ и $k_i \approx \pi/a$.

Различие в поведении ЛП и изотропных магнетиков при низких температурах проявляется в различии структуры длинноволновой части спектра. Когда радиус корреляции равен бесконечности (ЛП магнетики), спиновые волны существуют при всех k . Если же радиус корреляции ζ конечен (изотропные магнетики), то при $k\zeta < 1$ (на масштабах, больших радиуса корреляции) спиновых волн, как слабо затухающих коллективных возбуждений, нет, и в этой области \mathbf{k} -пространства спектр имеет, как и в парамагнетике, диффузионный вид. Характер длинноволновых возбуждений обуславливает вид главных температурных поправок к затравочным ($T = 0$) спектрам спиновых волн. Формулы для поправок к спектрам различных 2D-магнетиков^{33,71,85,86} сведены в табл. VIII. Для ЛП ферромагнетиков поправки конечны и малы при низких температурах, что есть естественное отражение бесконечности радиуса корреляции. Фактически конечная скорость спиновых волн служит «параметром порядка» в фазе со степенным законом спада корреляций спинов.

Таблица VIII

Температурные перенормировки энергии спиновой волны для 2D-магнетиков с разным числом компонент параметра порядка (θ_0 см. в табл. IV)

Модель	Температурная перенормировка энергии магнона $\varepsilon_{\mathbf{k}}(T)/\varepsilon_{\mathbf{k}}(0)$
1. 2D-ЛО ферромагнетик	$\varepsilon_{\mathbf{k}} = (\varepsilon_0^2 + U^2 k^2)^{1/2}$
2. 2D-ЛП ферромагнетик	$\frac{U(T)}{U(0)}, \frac{\varepsilon_0(T)}{\varepsilon_0(0)} \propto 1 - O(e^{-\varepsilon_0/T})$ $\varepsilon_{\mathbf{k}} = Ck, \quad \frac{C(T)}{C(0)} = \left(1 - \frac{2}{S} (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0) \varphi_{\varepsilon}^{(2)}(T)\right)^{1/2}$ $\varphi_{\varepsilon}^{(2)}(T) =$ $= \begin{cases} \tau \left(\frac{T}{\tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0} \right)^2 \frac{1 + 18 \operatorname{ctg}^2 \theta_0}{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0} \zeta(3), & T \ll \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0, \\ \tau \ln \frac{T}{\tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0}, & T \gg \tilde{\alpha} S \sin^2 \theta_0 \end{cases}$
3. 2D-изотропный ферромагнетик	$\varepsilon_{\mathbf{k}} = Jk^2,$ $\frac{J(T)}{J(0)} = 1 - \frac{(2T/\pi J(0) S^2)^2 \ln ka }{1 - (2T/\pi J(0) S^2) \ln ka }$
4. 2-Дизотропный антиферромагнетик	$\varepsilon_{\mathbf{k}} = Ck;$ $\frac{C(T)}{C(0)} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2T}{\pi J(0) S^2} \right)^2 \ln ka \times$ $\times \left(1 + O \left(\frac{2T}{\pi J(0) S^2} \right) \ln ka \right)$

Напротив, в изотропных магнетиках поправки к спектру логарифмически растут при уменьшении волнового вектора k и сравниваются с затравочными значениями энергии при

$$k \sim \zeta^{-1} = a^{-1} \exp(-2\pi J S^2 T^{-1}), \quad (6.1)$$

a — межатомное расстояние. Величину ζ естественно считать радиусом корреляции системы. Хотя при $k\zeta < 1$ теория возмущений несправедлива, это

утверждение обосновывается тем, что согласно точному решению *) флуктуации растут и вне области применения теории возмущений.

Согласно расчетам^{85,86}, затухание спиновых волн мало всегда, когда применима теория возмущений. В изотропных магнетиках на границе применимости теории возмущений (при $k\xi \sim 1$) затухание сравнивается с действительной частью энергии.

Вернемся к ЛП ферромагнетикам. Уменьшение скорости спиновых волн (жесткости) с повышением температуры (см. табл. VIII) наводит на мысль, что переход в парамагнитную фазу происходит обычным путем — как фазовый переход II рода, когда жесткость обращается в нуль. Однако это не так! Переход от степенного к экспоненциальному спада корреляторов осуществляется как фазовый переход бесконечного рода (переход Березинского — Костерлица — Таулесса). Разрушение жесткости, т. е. формирование конечной корреляционной длины, происходит благодаря рождению своеобразных элементарных возбуждений — вихрей. При низких температурах вихри соединены в пары (вихрь + антивихрь). С ростом температуры среднее расстояние между центрами вихрей в паре растет, и температура перехода с хорошей точностью определяется из условия термодинамической выгодности существования одиночного вихря. Проигрыш в энергии $\Delta E = \pi J \ln(L/a)$, обязаный образованию одного вихря (L — размер образца), в точности компенсируется в точке перехода энтропийным слагаемым $-2T_B \ln(L/a)$ (центр вихря можно поместить в любую точку образца площади L^2). Отсюда

$$T_B = \frac{\pi}{2} J. \quad (6.2)$$

Более точные расчеты показывают, что оценочное значение T_B (6.2) мало отличается от истинного^{81,82}.

Завершая обсуждение роли классических флуктуаций в 2D-системах, отметим, что включение слабого обменного взаимодействия вдоль третьей оси немедленно приводит к возникновению дальнего порядка в ЛП ферромагнетиках при всех температурах ниже T_B , а в изотропных магнетиках — к возникновению фазового перехода при $T_c \propto J/\ln J/j$ (j — обменный интеграл между слоями) (рис. 8).

В 1D-системах классические флуктуации полностью ликвидируют возможность фазового перехода при $T \neq 0$ вне зависимости от числа компонент параметра порядка. Это следствие того, что в достаточно длинной цепочке всегда термодинамически выгодно разбиение на домены: энергетический проигрыш от образования одной доменной границы $\Delta \varepsilon \sim 2J$ компенсируется возрастанием энтропии ($TS \sim T \ln N$). При низких температурах, однако, размеры доменов велики и растут с понижением температуры экспоненциально в изинговских магнетиках и степенным образом в изотропных и планарных магнетиках, так что при не слишком малых волновых векторах можно определить спиновые волны как элементарные возбуждения над упорядоченным (внутри домена) состоянием. В ЛП и ЛО магнетиках температурные поправки к скорости таких магнонов конечны ($\Delta C/C \propto T^2$ в ЛП магнетике), а в изотропном магнетике поправка к спектру $\Delta \varepsilon_k/\varepsilon_k \propto (T/J)^2/ka$, и тем самым

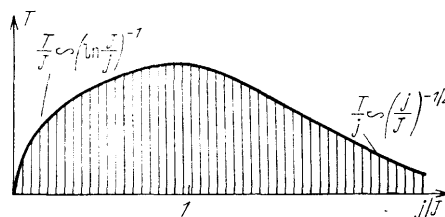


Рис. 8. Фазовая диаграмма 2D-изотропного ферромагнетика в переменных T и j/J .

j — обменный интеграл между слоями. Область существования упорядоченной фазы заштрихована

*) Точное решение получено⁸⁴ для нелинейной $O(3)$ - σ -модели теории поля в $(1+1)$ -пространстве (одна временная, одна пространственная координаты). Евклидов вариант этой модели эквивалентен 2D-изотропным магнетикам.

область применимости спин-волнового описания сужается (ka должно быть больше, чем $(T/J)^2$).

В реальных системах слабое взаимодействие между цепочками, естественно, приводит к фазовому переходу. Он происходит при $T_c^{(1)} \propto (Jj)^{1/2}$. Здесь j — обменный интеграл между цепочками.

Рассмотрим теперь роль квантовых флуктуации в низкоразмерных системах. В 2D-системах эти флуктуации не играют критической роли: квантовые эффекты проявляются сильнее, чем в 3D-системах, но их «не хватает» для того, чтобы полностью размыть порядок в основном состоянии. Конечно, речь идет об аналогах тех 3D-систем, где квантовые флуктуации слабы. В 1D-системах квантовые флуктуации более существенны. Их проявление при $T = 0$ напоминает проявление классических флуктуации в 2D-системах при $T \neq 0$: дальний порядок в основном состоянии существует для систем с $n = 1$ и отсутствует в случаях $n > 1$ ^{33,37,87,88}. При $n = 2$ радиус корреляции в основном состоянии равен бесконечности, а корреляционные функции спинов спадают с увеличением расстояния по степенному закону с показателем степени, зависящим от величины обратного спина $1/S$, которая играет для квантовых флуктуации такую же роль, как температура для классических. В изотропных магнетиках ($n = 3$) ситуация сложнее, чем в аналогичных 2D-системах. В ферромагнетиках квантовые флуктуации отсутствуют вовсе, а в антиферромагнетиках структура основного состояния при произвольном спине еще до конца не известна. Согласно теории возмущений по $1/S$ ⁷¹ квантовые поправки к функции Грина имеют логарифмическую зависимость от волнового вектора такую же, как и температурные поправки к спектру 2D-ферромагнетика (см. табл. VIII),

$$G(k, \omega) \propto \frac{1}{\omega^2 + c_k^2} \left[1 + \frac{(\pi^2 S^2)^{-1} |\ln ka|}{1 - (\pi S)^{-1} |\ln ka|} \right]. \quad (6.3)$$

Если предположить, что флуктуационные поправки продолжают расти и вне области применимости теории возмущений, то можно сделать вывод, что в основном состоянии 1D-антиферромагнетиков корреляционные функции спинов спадают экспоненциально, т. е. основное состояние одномерного антиферромагнетика парамагнитно. Это — спиновая жидкость. В то же время точно известно, что для всех антиферромагнетиков с полуцелыми значениями узельных спинов радиус корреляции в основном состоянии равен бесконечности^{87,89,90}. Предполагается^{91,92}, что аналогия с 2D-магнетиками вне рамок применимости теории возмущений (на основе которой был сделан вывод о формировании за счет флуктуации конечного корреляционного радиуса) справедлива только для целых значений спина S (впервые такое предположение высказал Холдейн⁹¹). Численные эксперименты^{89,93–95} подтверждают эту точку зрения *).

Включение малого обменного взаимодействия между спиновыми цепочками для ЛП магнетиков и для изотропных антиферромагнетиков с полуцелыми спинами приводит к немедленному появлению дальнего порядка в основном состоянии (для магнетиков с $n = 2$ в этом опять же проявляется аналогия с классическими 2D-системами). В изотропном антиферромагнетике с целыми значениями спинов парамагнитное основное состояние устойчиво по отношению к включению достаточно слабого обменного взаимодействия между цепочками. Необходимо конечное значение мецепочечного обменного интеграла j , чтобы радиус корреляции «дорос» до бесконечности:

$$\frac{j_{\text{кр}}}{J} \propto e^{-\pi S}. \quad (6.4)$$

*) В пользу предположения о различии в структуре основного состояния антиферромагнетиков с целыми и полуцелыми значениями спина (даже при $S \gg 1$) свидетельствует анализ в терминах σ -модели с дополнительным членом, являющимся топологическим инвариантом⁹².

Правда, нельзя исключить и такую возможность, что при включении межцепочечного обмена дальний порядок возникнет сразу (при сколь угодно малом j), но не в результате фазового перехода. Нам это кажется маловероятным. Предполагаемая фазовая диаграмма анизотропного гейзенберговского антиферромагнетика приведена на рис. 9.

В конце этого раздела отметим, что при достаточно низких температурах, несмотря на отсутствие в ряде случаев дальнего порядка, спектр спиновых волн с энергиями $\varepsilon \sim T$ всегда слабо перенормирован *). Поэтому собранные в табл. VII формулы вполне пригодны для расчета с их помощью макроскопических характеристик низкоразмерных магнетиков. Существование области очень малых волновых векторов, в которой нет слабозатухающих коллективных возбуждений, проявляется в малых поправках к формулам, полученным в спин-волновом приближении.

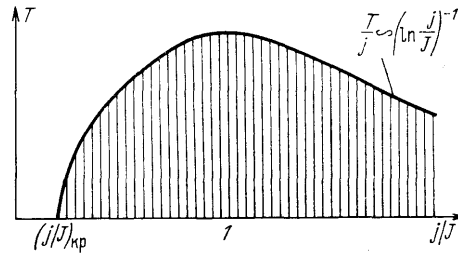


Рис. 9. Фазовая диаграмма антиферромагнетика с целым узельным спином в переменных T и j/J .

j — обменный интеграл между цепочками. Область существования упорядоченной фазы заштрихована. Уменьшение температуры перехода при $j \gg J$ — следствие квазидвумерности антиферромагнетика в этом пределе, $(j/J)_{кр} \propto e^{-\pi s}$

7. КВАНТОВЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Как было сказано во введении, существование фазовых переходов на HT -плоскости (рис. 1) показывает, что переход из парамагнитной фазы в ферромагнитную может происходить не только по температуре, но и по магнитному полю. Когда такой переход происходит при низкой температуре (а переход может происходить и при $T = 0$), то его называют *ориентационным*. Надо помнить, что при любой конечной температуре ориентационный переход не специфичен — в том смысле, что он принципиально не отличается от перехода в точке Кюри. Действительно, из теории фазовых переходов известно, что критическое поведение при $T \sim T_c(H)$, где $T_c(H)$ — температура перехода при $H \neq 0$, определяют флуктуационные моды с малыми волновыми векторами $ak \sim |(T_c(H) - T)/JS|^{1/2}$ **). В непосредственной окрестности точки перехода функция распределения этих мод всегда классична,

$$n_k \approx \frac{T}{\varepsilon_k} \text{ при } \left| \frac{T_c(H) - T}{T_c(H)} \right| \ll 1, \quad (7.1)$$

и именно поэтому характер критического поведения по всей линии перехода одинаков. Критические индексы такие же, как при $H=0$. Они зависят от размерности пространства D и числа компонент параметра порядка n . Значения индексов приведены в любой достаточно подробной монографии, посвященной критическим явлениям (см., например, ^{96,97}). Напомним только, что критическая размерность D_c , ниже которой теория Ландау не справедлива, равна 4.

При низкой температуре классические флуктуации существенны только в очень узкой (стремящейся к нулю вместе с температурой) области вблизи критической точки. Однако, как нетрудно убедиться и как показывают примеры, по крайней мере с одной стороны от точки ориентационного перехода в спиновой системе всегда существуют нулевые колебания, создающие свою

*) Мы отвлекаемся от только что рассмотренной возможности парамагнитного основного состояния.

**) Возможны переходы, в которых мягкая мода соответствует конечному волновому вектору k_0 . Для них приведенная в тексте оценка относится к отклонению от k_0 .

флуктуационную область. Вдали от точки перехода слабой неидеальности бозе-газа магновов достаточно для того, чтобы перенормировки, обязанные нулевым колебаниям, были малы. При приближении к точке перехода величины, к которым вычисляются перенормировки (например, энергия спиновой волны и величина угла между направлениями магнитного момента и внешнего поля), уменьшаются, потому вблизи критической точки квантовые перенормировки существенны, и требуется выход за пределы теории возмущений.

При достаточно низких температурах флуктуационная область, обязанная нулевым колебаниям, шире, чем классическая флуктуационная область. Так, например, в 2D-ЛО-ферромагнетике в поперечном магнитном поле классической флуктуационной области соответствует $|\Delta H_x/H_x| < T/J(0)S$, а квантовой $|\Delta H_x/H_x| < (\tilde{\alpha}/J(0)S)^3$. Они сравниваются при $T \sim T_{\text{кв}} = \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}/J(0)S)^2$. Когда $T \ll T_{\text{кв}}$, то практически всюду внутри флуктуационной области магнетик ведет себя так же, как при нуле температуры, т. е. критическое поведение полностью формируется квантовыми флуктуациями.

Для квантовых флуктуации также существует понятие критической размерности $D_c^{\text{кв}}$. Величина $D_c^{\text{кв}}$ всегда меньше $D_c^{\text{кл}}$, поскольку рост взаимодействия между квантовыми флуктуационными модами ослаблен. Происходит это из-за того, что вблизи критической точки играют роль крупномасштабные флуктуации, а потому в качестве «элементарных» выступают спины блоков, составленных из большого числа ячеек⁹⁸. Спин каждого такого блока очень велик, и именно поэтому квантовые эффекты ослабляются⁹⁸). Однако рост взаимодействия между квантовыми флуктуациями при достаточно малой размерности пространства не ликвидируется полностью.

Квантовые ориентационные переходы гораздо чувствительнее к числу компонент параметра порядка n , чем классические⁹⁹. В частности, в зависимости от n меняется величина критической размерности^{100,101}:

$$D_c^{\text{кв}} = 3 \quad \text{при } n=1, \quad D_c^{\text{кв}} = 2 \quad \text{при } n=2. \quad (7.2)$$

Дополнительное ослабление взаимодействия между флуктуациями в моделях с двухкомпонентным параметром порядка связано с тем, что для этих систем приближение к точке перехода есть одновременно и приближение к состоянию без нулевых колебаний, которое осуществляется выше точки перехода. В системах с однокомпонентным параметром порядка квантовые флуктуации существуют по обе стороны от критической точки.

Различие в структуре «парамагнитной» фазы (есть в ней нулевые колебания или нет) обуславливает не только различие в критических размерностях, но и в значениях критических индексов. Для $n=1$ существует простое правило: индексы перехода при $T=0$ такие же, как и индексы перехода в той же системе при $T \neq 0$, но в пространстве на единицу большей размерности^{99, 100, 102}. Для $n=2$ аналогичного правила нет — критическое поведение не имеет классического эквивалента. В данном случае единственное пространство с размерностью, меньшей критической, — это одномерное пространство. Индексы для него можно определить точно¹⁰³:

$$\gamma=1, \quad \nu=\frac{1}{2}, \quad \eta=0, \quad \beta=\frac{1}{4}, \quad \delta=5, \quad \alpha=\frac{1}{2}. \quad (7.3)$$

Более того, для ЛП магнетиков специфика фазового перехода, состоящая в приближении к полному ферромагнитному упорядочению, позволяет точно определить значения индексов как функций произвольной размерности D ¹⁰⁴⁻¹⁰⁷.

Как известно, нетривиальное критическое поведение обнаруживают и системы с размерностью, равной критической. Для ориентационных пере-

*) Напомним тривиальную истину: при $S = \infty$ квантовых эффектов нет вовсе.

ходов это проявляется, например, в логарифмической расходимости продольной восприимчивости (аналогичной теплоемкости при переходе по температуре). Степень логарифма такова ^{108–110}:

$$\begin{aligned} n=1, \quad D=3: \quad \chi_{\parallel} &\propto \ln^{1/5} \frac{H_c}{\Delta H}, \\ n=2, \quad D=2: \quad \chi_{\parallel} &\propto \ln \frac{H_c}{\Delta H}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Заканчивая этот раздел, отметим, что эквивалентность D -мерных квантовых и $D+1$ -мерных классических критических индексов существует и для ЛП ферромагнетиков, но не при ориентационных переходах, а при переходах по константе анизотропии ³⁶ (см. раздел 5 и рис. 6), правда, только при определенных дискретных значениях магнитного поля H_z ³⁵:

$$\mu H_z^m = \frac{\alpha}{2m} \{3m^2 - S^2 - S + [S(S+1) - m(m+1)]^{1/2} [S(S+1) - m(m-1)]^{1/2}\}, \quad (7.5)$$

$m = -S + 1, \dots, S - 1$ (для целых S в эту последовательность входит и $H = 0$). Увидеть эквивалентность квантовых и классических индексов можно, записав функционал Гинзбурга — Ландау для квантовых фазовых переходов (это можно сделать, например, с помощью техники когерентных состояний). Отражением квантовости будет появление в этом функционале наряду с волновым вектором дополнительной нерменной — мацубаровской частоты. Если поле H_z удовлетворяет условию (7.5), то частота ω входит в квадратичную часть функционала как ω^2 , т. е. волновой вектор \mathbf{k} как бы приобретает одну дополнительную компоненту, что и приводит к эквивалентности D -мерного квантового и $(D+1)$ -мерного классического критических поведений. Если же поле H_z отлично от задаваемого формулой (7.4), то наряду с ω^2 в квадратичную часть функционала входит линейное по ω слагаемое, которое в области малых частот оказывается определяющим и формирует специфическое квантовое критическое поведение — такое же, как и вблизи ориентационных переходов в ЛП-магнетиках.

8. ДИПОЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ — ИСТОЧНИК НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ

До сих пор, говоря о релятивистских взаимодействиях, мы ограничивались короткодействующими силами взаимодействия между атомами, т. е. учитывали одноионную и межионную анизотропию. Как известно, между магнитными моментами всегда есть диполь-дипольное взаимодействие, медленно ($\propto r^{-3}$) убывающее с расстоянием. Строго говоря, опускать дипольное взаимодействие нельзя никогда. Однако, если безразмерная константа анизотропии велика по сравнению с 4π (что молчаливо предполагалось выше), то во многих случаях роль дипольного взаимодействия несущественна. С другой стороны, учет дипольного взаимодействия приводит к ряду *качественных* изменений. Остановимся на них подробнее.

Прежде всего подчеркнем, что при учете дипольного взаимодействия в любой спиновой структуре есть нулевые колебания. Это означает, что реально всегда есть сложность с определением основного и слабовозбужденных состояний и их энергий ²⁵. В изучаемых нами ферромагнетиках с большим обменным взаимодействием амплитуда нулевых колебаний, обусловленных дипольным взаимодействием, мала, и можно пользоваться приближением малой плотности частиц, продемонстрированным в предыдущих разделах. Корректный расчет, естественно, требует аккуратного включения сильных обменных перенормировок. Это, однако, не изменяет результатов в главном по μ^2/Ja^3 порядке по сравнению с квазиклассическими формулами ⁶⁰.

Для того чтобы показать, к каким качественным изменениям приводит учет дальнего действия, выпишем известные формулы для энергии спиновой волны в одноосном ферромагнетике при $H = 0$ ²⁵

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 = [2\tilde{\alpha}S + J(0)S(1 - v_{\mathbf{k}})] [2\tilde{\alpha}S + J(0)S(1 - v_{\mathbf{k}}) + 16\pi\mu^2Sa^{-3}\sin^2\theta_{\mathbf{k}}]. \quad (8.1)$$

Аналогично, в одноосном антиферромагнетике¹¹¹

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)} &= 4\tilde{\alpha}S(\tilde{\alpha}S + J(0)S) + (J(0)S)^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2) + \\ &\quad + 16\pi\mu^2S(3a^3)^{-1}[2\tilde{\alpha}S + J(0)S(1 - v_{\mathbf{k}})], \\ \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(2)} &= 4\tilde{\alpha}S(\tilde{\alpha}S + J(0)S) + (J(0)S)^2(1 - v_{\mathbf{k}}^2) + \\ &\quad + 16\pi\mu^2S(3a^3)^{-1}(1 - 3\sin^2\theta_{\mathbf{k}})[2\tilde{\alpha}S + J(0)S(1 - v_{\mathbf{k}})]; \end{aligned} \quad (8.2)$$

здесь $\theta_{\mathbf{k}}$ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и осью квантования Z .

Видно, что дальнее действие приводит к неаналитической зависимости от компонент волнового вектора: $\sin^2\theta_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_{\perp}^2/\mathbf{k}^2$. Из-за этого даже при $\mathbf{k} = 0$ существует зона разрешенных значений энергии *). Отметим, что, как видно из сравнения формул (8.1) и (8.2), роль дипольного взаимодействия в антиферромагнетиках менее важна, чем в ферромагнетиках. Это связано с тем, что в антиферромагнетиках щель существенно больше, чем в ферромагнетиках, за счет обменного усиления, а дипольная энергия этому усилению не подвергается. Нулевые колебания, вызванные дипольным взаимодействием, приводят к тому, что даже в случае изотропного ферромагнетика намагниченность при $T = 0$ не достигает насыщения ни при каком конечном поле²⁵:

$$M_H = 2\mu Sa^{-3}[1 - (2S)^{-1}Q(H)], \quad (8.3)$$

где в предельных случаях

$$\begin{aligned} Q(H) &= \sqrt{\pi} \left(\frac{\mu^2}{Ja^3} \right)^{3/2}, \quad H \ll \frac{2\mu S}{a^3}, \\ &= \frac{32\pi}{15\sqrt{2}} \left(\frac{\mu^2}{Ja^3} \right)^2 \left(\frac{JS}{\mu H} \right)^{1/2}, \quad H \gg \frac{2\mu S}{a^3}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

В некоторых из рассмотренных выше анизотропных магнетиков в больших полях нулевые колебания отсутствовали. Учет дипольного взаимодействия их, конечно, вызывает. Это, в частности, приводит к понижению величины критического поля при $T = 0$ и к отклонению намагниченности в основном состоянии от номинальной.

Зависимость щели в спектре спиновых волн от направления вектора \mathbf{k} приводит к изменению температурных свойств магнетиков при крайне низких температурах $T \ll 4\pi\mu^2S/a^3$ ¹¹². Например, в изотропном ферромагнетике при $H = 0$ с понижением температуры должен нарушаться закон Блока $\Delta M \propto T^{3/2}$:

$$\Delta M(T) = -\frac{\pi}{96} \frac{2\mu S}{a^3} \left(\frac{Ta^3}{4\pi\mu^2S} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{JS} \right)^{3/2}, \quad T \ll \frac{4\pi\mu^2S}{a^3}. \quad (8.5)$$

Еще более существенно влияние диполь-дипольного взаимодействия на кинетические свойства магнетиков.

Во-первых, в изотропном ферромагнетике за счет дипольного взаимодействия время жизни магнона даже при $T = 0$ оказывается конечным^{113, 114}.

*) При фиксированном $\mathbf{k} \neq 0$ в некубических магнетиках зона разрешенных значений энергии есть всегда, но в отсутствие дипольного взаимодействия при $\mathbf{k} \rightarrow 0$ ее ширина стремится к нулю.

Во-вторых, это взаимодействие всегда — при любой спиновой структуре — порождает трехмагнонные ангармонизмы, что в ряде случаев (когда ангармонизмы, обусловленные энергией анизотропии, начинаются с четырехмагнонных) существенно уменьшает время жизни спиновой волны^{41, 44, 113–115}.

В-третьих, существование зоны разрешенных энергий при $\mathbf{k} \rightarrow 0$ обеспечивает возможность упругого рассеяния магнона с $\mathbf{k} = 0$ и превращения его в магнон с $\mathbf{k} \neq 0$. Этот эффект приводит к уширению линии ферромагнитного резонанса^{*) 2}.

Диполь-дипольное взаимодействие влияет и на поведение магнетиков вблизи точек фазовых переходов. Это влияние не ограничивается перенормировкой точки перехода, но и изменяет значения критических индексов: индексы D -мерного магнетика с учетом диполь-дипольного взаимодействия такие же, как индексы $(D + 1)$ -мерного магнетика в пренебрежении дальнего взаимодействия¹¹⁷. Причина такого соответствия в том, что существенные при фазовом переходе II рода низкоэнергетические флуктуации характеризуются законом дисперсии с

$$\epsilon_{\mathbf{k}} \propto [(\mathbf{ak})^2 + \theta_{\mathbf{k}}^2 + \left| \frac{H - H_c}{H_c} \right|], \quad (8.6)$$

из которого видно, что $\theta_{\mathbf{k}}$ играет роль $(D + 1)$ -компоненты вектора \mathbf{k} .

Диполь-дипольное взаимодействие, как ясно из предыдущего, особенно существенно для состояний с крайне малыми волновыми векторами. Неаналитическая зависимость энергии спиновой волны от компонент волнового вектора при $\mathbf{k} \rightarrow 0$ заостряет, с одной стороны, вопрос о роли конечности образца, а с другой — о пределах применимости магнитостатического приближения.

Эти вопросы выходят за рамки темы настоящего обзора.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре исследована структура основного и низко лежащих возбужденных состояний системы спинов, закрепленных в узлах кристаллической решетки. Главное взаимодействие между спинами — обменное, а кроме него имеются релятивистские взаимодействия (спин-спиновое и спин-орбитальное), нарушающие изотропию в спиновом пространстве. Конкретно были исследованы свойства систем, описываемых различными версиями гамильтониана (2.3). Фактически основное, что мы хотели сказать в этом обзоре, сводится к двум утверждениям.

а) В большинстве случаев классическое основное состояние (полное упорядочение при $T = 0$) частично (или даже полностью — в низких размерностях) разрушается квантовыми флуктуациями — нулевыми колебаниями спинов. Амплитуда нулевых колебаний (даже в $3D$ -системах), строго говоря, мала, если только есть параметр, по которому основное состояние близко к ферромагнитному.

б) Поскольку обменное взаимодействие между магнонами не мало, при его учете нельзя ограничиться низшими порядками теории возмущений (если речь идет о произвольных значениях спина S).

Способ точного учета обменных перенормировок (суммирование лестничных последовательностей диаграмм) продемонстрирован в приложении на примере изотропного ферромагнетика. Результаты аналогичных расчетов для ЛО и ЛП ферромагнетиков приведены в соответствующих таблицах. Подчеркнем, что утверждение о необходимости полного учета обменных перенормировок относится ко всем ситуациям, когда в результате какого-

*) Для магнонов с $\theta_{\mathbf{k}} = 0$ подобный процесс невозможен. Время жизни этих квази-частиц определяется только собственными механизмами диссипации, и потому оно гораздо больше, чем при $\theta_{\mathbf{k}} \neq 0$ ¹¹⁸.

либо процесса (например, при распаде фонона на два магнона) рождаются два или более магнонов (рис. 10). Результат перенормировки не универсален: каждая вершина перенормируется по-своему.

Заканчивая настоящий обзор о роли взаимодействия между магнонами в магнитных диэлектриках, мы хотим отметить, что хотя избранный объект — частный случай системы многих тел, на его примере демонстрируются многие общие закономерности, которые изучают как квантовая

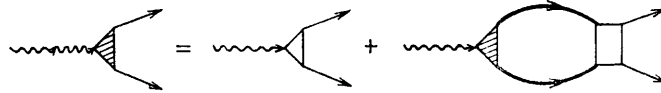


Рис. 10. Один из процессов взаимодействия магнонов с фононами, для которых важна обменная перенормировка вершины.

Векторы, графически обозначающие функции Грина магнонов, направлены в одну сторону. Волнистая линия — функция Грина фонона

статистическая физика, так и теория поля. В частности, на простой модели гейзенберговского гамильтониана можно проверять предсказания современной теории критических явлений. С другой стороны, разнообразие способов работы со спиновыми операторами и наглядность получаемых результатов позволяют, во-первых, строить приближенные решения в виде разложений по реально существующим малым параметрам, а во-вторых, — получать в ряде случаев точные аналитические решения^{87, 88, 103}, которые служат «реперными точками» для общих теорий. Магнитные системы, кроме того, — удобные объекты для численного счета^{89, 92–95}. И, наконец, как мы уже отмечали, почти каждый из разнообразных в обзоре частных случаев находит своего представителя в огромном наборе имеющихся магнитных кристаллов.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПОЛНАЯ АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ В ИЗОТРОПНОМ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Ограничимся случаем *) $T = 0$ и выпишем в явном виде интегральные уравнения для полной амплитуды, графически представленные в (4.3), выделив предварительно в их ядрах и свободных членах слагаемые, не зависящие от спинового множителя $q = 4S \{1 - [1 - (1/2S)^{-1}]\}$ (см. табл. I), и переобозначив для удобства ($r_{\mathbf{p}\mathbf{k}}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}$ — полная вершина):

$$\tilde{r}_{\mathbf{p}\mathbf{k}}^{\mathbf{p}\mathbf{k}} = -\frac{J(0)}{4} r_{\mathbf{p}\mathbf{k}}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}, \quad \tilde{r}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{\mathbf{m},\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{m}} \equiv \tilde{r}_{\mathbf{p},\mathbf{k}}^{\mathbf{m}} \equiv \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p},\mathbf{k}}. \quad (\text{II.1})$$

Последнее равенство — следствие эрмитовости бозе-гамильтониана. Явный вид уравнений следующий:

$$\tilde{r}_{\mathbf{p}\mathbf{k}}^{\mathbf{p}\mathbf{k}} = v_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + 1 - v_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2NS} \sum_{\mathbf{m}} (v_{\mathbf{m}-\mathbf{p}} + v_{\mathbf{m}-\mathbf{k}} - v_{\mathbf{m}} - v_{\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}}) I_{\mathbf{m}}^{-1} \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p},\mathbf{k}} - \\ - \frac{2-q}{4NS} \sum_{\mathbf{m}} \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p},\mathbf{k}} + (1-q)(v_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{k}}) \left(1 + \frac{1}{2NS} \sum_{\mathbf{m}} \frac{\tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{I_{\mathbf{m}}}\right), \quad (\text{II.2})$$

$$\tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p},\mathbf{k}} = v_{\mathbf{m}-\mathbf{p}} + v_{\mathbf{m}-\mathbf{k}} - v_{\mathbf{m}} - v_{\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \\ + \frac{7}{2NS} \sum_{\mathbf{s}} (v_{\mathbf{s}-\mathbf{m}} + v_{\mathbf{s}+\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}} - v_{\mathbf{s}} - v_{\mathbf{s}-\mathbf{p}-\mathbf{k}}) I_{\mathbf{s}}^{-1} \tilde{r}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{p},\mathbf{k}} - \\ - I_{\mathbf{m}} \left(\frac{2-q}{2} - \frac{q}{4NS} \sum_{\mathbf{s}} \frac{\tilde{r}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{p},\mathbf{k}}}{I_{\mathbf{s}}} \right), \quad (\text{II.3})$$

*) Знание амплитуды рассеяния при $T = 0$ позволяет рассчитать перенормировки тензора обратных эффективных масс и свободной энергии (см. текст).

где

$$I_{\mathbf{q}} = \nu_{\mathbf{p}} + \nu_{\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{q}} - \nu_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{m}, \mathbf{s}. \quad (\text{П.4})$$

Покажем, что сумма двух последних слагаемых в (П.2) равна нулю. Действительно, просуммировав обе части уравнения (П.3) по волновому вектору \mathbf{m} и воспользовавшись очевидным условием $\sum_{\mathbf{q}} \nu_{\mathbf{q}} = 0$, получим

$$\left(1 - \frac{q}{4S}\right) \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{m}} \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}} = -\frac{q}{2} (\nu_{\mathbf{p}} + \nu_{\mathbf{k}}) \left(1 + \frac{1}{2NS} \sum_{\mathbf{m}} \frac{\tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}}}{I_{\mathbf{m}}}\right). \quad (\text{П.5})$$

Взаимное сокращение двух последних слагаемых в (П.2) следует теперь из очевидного соотношения (см. определение q):

$$2 - q = q \left(1 - \frac{q}{4S}\right).$$

В результате уравнение (П.2) значительно упрощается:

$$\tilde{r}_{\mathbf{p}\mathbf{k}}^{\mathbf{p}\mathbf{k}} = \nu_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + 1 - \nu_{\mathbf{p}} - \nu_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2NS} \sum_{\mathbf{m}} (\nu_{\mathbf{m}-\mathbf{p}} + \nu_{\mathbf{m}-\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{m}} - \nu_{\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}}) I_{\mathbf{m}}^{-1} \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}}. \quad (\text{П.6})$$

Из последней формулы видно, что полная амплитуда $\tilde{r}_{\mathbf{p}\mathbf{k}}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}$ в действительности удовлетворяет принципу Адлера, т. е. обращается в нуль, если хотя бы один из волновых векторов \mathbf{p} или \mathbf{k} равен нулю.

Заметим далее, что уравнение (П.6) инвариантно относительно замены

$$\tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \rightarrow \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}} = \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}} + \lambda I_{\mathbf{m}}, \quad (\text{П.7})$$

где λ — произвольный множитель.

Естественно выбрать значение λ так, чтобы интегральное уравнение для величины $\tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}$ было бы максимально простым. Из формулы (П.4) видно, что удобно взять

$$\lambda = \frac{2-q}{2} - \frac{q}{4NS} \sum_{\mathbf{s}} \frac{\tilde{r}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}}}{I_{\mathbf{s}}}. \quad (\text{П.8})$$

При таком выборе λ с учетом условия $\sum_{\mathbf{s}} \nu_{\mathbf{s}+\mathbf{q}} = 0$ вместо (П.3) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}} &= \nu_{\mathbf{m}-\mathbf{p}} + \nu_{\mathbf{m}-\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{m}} - \nu_{\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \\ &+ \frac{1}{2NS} \sum_{\mathbf{s}} \tilde{r}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}} (\nu_{\mathbf{s}-\mathbf{m}} + \nu_{\mathbf{s}+\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{s}} - \nu_{\mathbf{s}-\mathbf{p}-\mathbf{k}}) I_{\mathbf{s}}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Нас интересует величина полной амплитуды двухчастичного рассеяния при малых импульсах взаимодействующих магнонов. Поэтому во втором (интегральном) члене в (П.6) достаточно ограничиться слагаемыми $\propto p^2 k^2$. Поскольку

$$\nu_{\mathbf{m}-\mathbf{p}} + \nu_{\mathbf{m}-\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \nu_{\mathbf{m}} \propto \mathbf{p}\mathbf{k}, \quad (\text{П.10})$$

то с принятой точностью в формулах (П.6) и (П.9) можно положить

$$I_{\mathbf{m}, \mathbf{s}} \approx 2 (1 - \nu_{\mathbf{m}, \mathbf{s}}), \quad \nu_{\mathbf{s}-\mathbf{p}-\mathbf{k}} \approx \nu_{\mathbf{s}}, \quad \nu_{\mathbf{s}+\mathbf{m}-\mathbf{p}-\mathbf{k}} \approx \nu_{\mathbf{s}+\mathbf{m}}. \quad (\text{П.11})$$

Решение интегрального уравнения (П.9) будем искать в виде

$$\tilde{r}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{p}, \mathbf{k}} = \sum_{i=1}^3 p_i k_i C_{\mathbf{m}}^i. \quad (\text{П.12})$$

Его подстановка в формуле (П.6) приводит к следующему результату:

$$\tilde{r}_{\mathbf{pk}}^{\mathbf{pk}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left[p_i k_i + \frac{1}{4} p_i^2 k_i^2 \left[1 + \frac{1}{NS} \sum_{\mathbf{m}} C_{\mathbf{m}}^x \cos m_x (1 - v_{\mathbf{m}})^{-1} \right] \right]. \quad (\text{П.13})$$

Слагаемое в квадратных скобках и есть дайсоновский множитель $Q(S)$. Для определения $C_{\mathbf{m}}^x$ вернемся к уравнению (П.9). С учетом (П.12) оно принимает вид

$$C_{\mathbf{m}}^x = \frac{1}{3} \cos m_x + \frac{1}{4NS} \sum_s C_s^x (v_{s-\mathbf{m}} + v_{s+\mathbf{m}} - 2v_s) (1 - v_s)^{-1} \quad (\text{П.14})$$

Ядро интегрального уравнения (П.14) факторизуется, т. е. подстановка

$$C_{\mathbf{m}}^x = \lambda_1 + \lambda_2 \cos m_x + \lambda_3 (\cos m_y + \cos m_z) \quad (\text{П.15})$$

сводит интегральное уравнение (П.14) к системе трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Подставляя решение этой системы в (П.13), получим известное выражение для полной амплитуды двухчастичного рассеяния:

$$\tilde{r}_{\mathbf{pk}}^{\mathbf{pk}} = \frac{1}{3} \sum_i \left(p_i k_i + \frac{1}{4} p_i^2 k_i^2 Q(s) \right), \quad (\text{П.16})$$

где значения $Q(S)$ приведено в тексте (см. формулы (4.5) — (4.7)).

Институт физических проблем
им. С. И. Вавилова АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А х и з е р А. И., Б а р ь я х т а р В. Г., П е л е т м и н с к и й С. В. Спин-
вые волны.— М.: Наука, 1967.
2. Г у р е в и ч А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках.— М.:
Наука, 1973.
3. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Нау-
ка, 1982.
4. А г р а н о в и ч В. М.//УФН. 1975. Т. 115. С. 199.
5. М и к а э л я н Л. А. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах.—
М.: Госэнергоиздат, 1963.
6. Б а р ь я х т а р В. Г., К а г а н о в М. И. Ферромагнитный резонанс.— М.: Физ-
матгиз, 1961.
7. Н e g r i n g C.//Magnetism/Eds G. T. Rado, H. Suhl.— New York: Academic Press,
1966.
8. Л и ф ш и ц Е. М., П и т а е в с к и й Л. П. Статистическая физика. Ч. II.— М.:
Наука, 1978.
9. А н д р е е в А. Ф., М а р ч е н к о В. И.//УФН. 1980. Т. 130. С. 39.
10. G r o s s M. C., F i s h e r D. S.//Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 881.
11. N a g a m i y a T.//Sol. State Phys. 1967. V. 20. P. 305.
12. П о к р о в с к и й В. Л., У й м и н Г. В.//ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 1640.
Н а г а е в Э. Л.//УФН. 1982. Т. 136. С. 61.
Х е р д К. М.//УФН. 1984. Т. 142. С. 331.
Р а р а н и с о л а о u N.//Phys. Lett. 1986. V. 116. P. 89.
13. Р у д о й Ю. Г., Ц е р к о в н и к о в Ю. А.//ТМФ. 1974. Т. 19. С. 252.
14. К а г а н о в М. И., Ч у б у к о в А. В.//ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 724.
15. Б о р о в и к - Р о м а н о в А. С. Лекции по низкотемпературному магнетизму.—
Новосибирск: НГУ, 1976.
16. У а й т Р. М. Квантовая теория магнетизма.— М.: Мир, 1985.
17. Ч е п у р н ы х Г. К.//ФТТ. 1968. Т. 10. С. 1917.
К а г а н о в М. И., Ч е п у р н ы х Г. К.//ФТТ. 1969. Т. 11. С. 911.
18. Д з я л о ш и н с к и й И. Е.//ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1547.
19. В а к с В. Г., Л а р к и н А. И., П и к и н С. А.//ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 281, 1089.
20. Т я б л и к о в С. В. Методы квантовой теории магнетизма.— 2-е изд.— М.: Наука,
1975.
21. И з ю м о в Ю. А., К а с с а н - О г л ы Ф. А., С к р я б и н Ю. Н. Полевые методы
в теории ферромагнетизма.— М.: Наука, 1974.

22. Онуфрнева Ф. П.//ФТТ. 1981. Т. 23. С. 2664; ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 1691; 1985. Т. 89. С. 2270.
23. Зайцев Р. О.//ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 207.
24. Вальков В. В., Овчинников С. Г.//ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 1666.
25. Holstein T., Primakoff H.//Phys. Rev. 1940. V. 56. P. 1098.
26. Shvinger J. On Angular Momentum.— US Atomic Energy Commission. NYO-3071, 1952.
27. Dyson F.//Phys. Rev. 1956. V. 102. P. 1217, 1231.
28. Малеев С. В.//ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 1010.
29. Lindgaard P.-A., Danielson O.//J. Phys. Ser. C. 1974. V. 7. P. 1523.
30. Агранович В. М., Тошич Б. С.//ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 149.
31. Goldhirsch I., Levich E., Yachot V.//Phys. Rev. Ser. B. 1979. V. 19. P. 4780.
32. Goldhirsch I.//J. Phys. Ser. A. 1980. V. 13. P. 453.
33. Villain J.//J. de Phys. 1974. Т. 35. P. 27.
34. Барьяхтар В. Г., Криворучко В. Н., Яблонский Д. А. Функции Грина в теории магнетизма.— Киев: Наукова думка, 1984.
35. Чубуков А. В.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 1316.
36. Kagano M. I., Chubukov A. V.//Magnetic Excitations/Eds A. A. Maradudin, V. M. Agranovich.— Amsterdam: North-Holland, 1988.
37. Anderson P. W.//Phys. Rev. 1952. V. 86. P. 694.
38. Kubo R.//Ibidem. V. 87. P. 568.
39. Филатова Л. Д., Цукерник В. М.//ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2203.
40. Adler J.//Phys. Rev. 1965. V. 137. P. 1022.
41. Кашеев В. Н., Кривоглаз В. Н.//ФТТ. 1961. Т. 3. С. 1541.
42. Rastelli E., Tassi A.//J. Phys. Ser. C. 1980. V. 13. P. 4377; 1982. V. 15. p. 509.
43. Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.//ФТТ. 1964. Т. 6. С. 219.
44. Ахизер И. А., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.//ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 365.
45. Маттис Д. Теория магнетизма.— М.: Наука, 1967.
46. Silberglitt R., Harris A. B.//Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 30.
47. Silberglitt R., Torrance J. B.//Phys. Rev. Ser. B. 1970. V. 2. p. 772.
48. Bethe H.//Zs. Phys. 1931. Bd 71. S. 205.
49. Wortis M.//Phys. Rev. 1963. V. 132. P. 85.
50. Hanus J.//Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 336.
51. Boyd R. J., Callaway J.//Phys. Rev. Ser. A. 1965. V. 138. P. 1621.
52. Bogoliubov N. N.//J. Phys. (USSR) 1947. V. 11. P. 23.
53. Беляев С. Т.//ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 417.
54. Lindgaard P.-A., Kovalska A.//J. Phys. Ser. C. 1976. V. 9. P. 2081.
55. Rastelli E., Lindgaard P.-A.//Ibidem. 1979. V. 12. P. 1899.
56. Обухов С. П.//ФТТ. 1976. Т. 23. С. 2664.
57. Rastelli E., Tassi A.//J. Phys. Ser. C. 1984. V. 17. P. 723.
58. Balucani U., Pini M. G., Rettori A., Tognetti V.//Ibidem. 1980. V. 13. P. 3895.
59. Батыев Э. Г., Брагинский Л. С.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1361.
Батыев Э. Г.//ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 308.
60. Чубуков А. В.//ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 1319.
61. Барьяхтар В. Г., Жуков П. И., Яблонский Д. А.//ФТТ. 1979. Т. 21. С. 776.
62. Вальков В. В., Валькова Т. А.//ФНТ. 1985. Т. 11. С. 951.
63. Harris R. B., Kumar D., Halperin B. I., Hohenberg P. C.//Phys. Rev. Ser. B. 1971. V. 3. P. 961.
64. Halperin B. I., Hohenberg P. C.//Phys. Rev. 1969. V. 188. P. 898.
65. Барьяхтар В. Г., Краснов В. П., Соболев В. Л.//ФТТ. 1973. Т. 15. С. 3039.
66. Халатников И. М. Теория сверхтекучести.— М.: Наука. 1971.
67. Yang C. N., Yang C. P.//Phys. Rev. 1966. V. 151. P. 258.
68. Oguchi T.//Ibidem. 1960. V. 117. P. 117.
69. Harris A. B.//Phys. Rev. Lett. 1968. V. 21. P. 602.
70. Пикалев Э. М., Савченко М. А., Шойом И.//ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 1404.
71. Косевич Ю. А., Чубуков А. В.//ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1105.
72. Барьяхтар В. С., Лутовиков В. С., Ольхов О. Л., Соболев В. Л.//ФНТ. 1976. Т. 2. С. 1466.
73. Moriga T.//Phys. Rev. 1960. V. 117. P. 635.
Розенфельд Е. В.//Письма ЖЭТФ. 1976. Т. 24. С. 60.
Борисенко В. Г., Переверзев Ю. В.//ФТТ. 1984. Т. 26. С. 1249.
74. Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M.//Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 494.
75. Myers B. E., Polgar L. G., Friedberg S. A.//Phys. Rev. Ser. B. 1972. V. 6. P. 3488.

- Bos W. G. et al//J. Magn. and Magn. Mater. 1980, V. 15—18. P. 464.
 Дьяконов В. П. и др. //Тезисы докладов 17-й Всесоюзной конференции по физике магнитных явлений. — Донецк, 1985 г. — С. 87.
76. Асадов С. К., Заворотнев Ю. Д., Тодриц Б. М.//Ibidem. С. 111.
 77. Mermin N. D., Wagner T.//Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 1133.
 78. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика. Ч. I. — М.: Наука, 1976.
 79. Березинский В. Л.//ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 907.
 80. Kosterlitz J. M., Thouless D. J.//J. Phys. Ser. C. 1973. V. 6. P. 1181.
 81. Kosterlitz J. M.//Ibidem. 1974. V. 7. P. 1046.
 82. Pokrovsky V. L.//Adv. Phys. 1979. V. 28. P. 595.
 83. Поляков А. М.//Phys. Lett. Ser. B. 1975. V. 59. P. 79.
 84. Вигман П. Б.//Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 79.
 85. Покровский В. Л., Фейгельман М. В.//ФТТ. 1977. Т. 19. С. 2469.
 Лебедев В. В.//ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1481.
 86. Хвещенко Д.//ТМФ.
 87. Lieb E., Shultz T., Mattis D.//Ann. of Phys. 1961. V. 16. P. 407.
 88. Luther A., Peschel I.//Phys. Rev. Ser. B. 1975. V. 12. P. 3908.
 89. Glauss U., Schneider T.//Ibidem. 1984. V. 30. P. 217.
 90. Affleck I., Lieb E. H.//Lett. Math. Phys. 1986. V. 12. P. 57.
 91. Haldane F.D.M.//Phys. Lett. Ser. A. 1983. V. 93. P. 464; Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1153; J. Appl. Phys. 1985. V. 57. P. 3359.
 92. Affleck I.//Nucl. Phys. Ser. B. 1985. V. 257. P. 397; 1986. V. 265, P. 409.
 93. Botet R., Jullien R.//Phys. Rev. Ser. B. 1983. V. 27. P. 613.
 Botet R., Jullien R., Kolb M.//Ibidem. V. 28. P. 3914.
 94. Parkinson J. B. et al.//J. Appl. Phys. 1985. V. 57. P. 3319.
 95. Parkinson J. B., Sonner J. C.//Phys. Rev. Ser. B. 1985. V. 32. P. 4703.
 96. Ма Ш. К. Современная теория критических явлений. — М.: Мир, 1980.
 97. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука. 1982.
 98. Kadanov L. P.//Physica, New York. 1966. V. 2. P. 263.
 99. Hertz J. A.//Phys. Rev. Ser. B. 1976. V. 14. P. 1166.
 100. Young A. P.//J. Phys. Ser. C. 1975. V. 8. P. L309.
 101. Gerber P. R., Beck H.//Ibidem. 1977. V. 10. P. 4013.
 102. Suzuki M.//Prog. Theor. Phys. 1976. V. 56. P. 1454.
 103. Пикин С. А., Цукерник В. М.//ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1377.
 104. Busiello J., De Ceasare L.//Phys. Lett. Ser. A. 1980. V. 77. P. 177.
 105. Usunov D. J.//Ibidem. 1981. V. 87. P. 11.
 106. Корес Т. К., Kozlowsky G.//Ibidem. 1983. V. 95. P. 104.
 107. Чубуков А. В.//ТМФ. 1984. Т. 60. С. 145.
 108. Речестер А. Б.//ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 782.
 109. Shender E. F.//Phys. Lett. Ser. A. 1974. V. 49. P. 367.
 110. Чубуков А. В.//ФНТ. 1984. Т. 10. С. 381.
 111. White R. M.//J. Appl. Phys. 1965. V. 36. P. 3653.
 112. Каганов М. И., Цукерник В. М.//ФММ. 1957. Т. 5. С. 561.
 113. Akhiezer A. I.//J. Phys. USSR. 1946. V. 10. P. 217.
 114. Shlöman E.//Phys. Rev. 1961. V. 121. P. 1312.
 115. Каганов М. И., Цукерник В. М.//ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 1610; 1959. Т. 36. С. 224.
 116. Гинзбург В. Л., Каганов М. И.//ФТТ. 1968. Т. 10. С. 3293.
 117. Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.//ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 2087.
 118. De Jong L. J., Miedema A. R.//Adv. Phys. 1974. V. 23. P. 1.
 119. Steiner H., Villain J., Windsor C. G.//Ibidem. 1976. V. 25. P. 87.