

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.8

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ  
МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ*И. Я. Брусин*

## СОДЕРЖАНИЕ

1. О векторах <b>E</b> и <b>D</b> . . . . .	143
2. О векторах <b>B</b> и <b>H</b> . . . . .	145
3. Выводы . . . . .	147
Список литературы . . . . .	148

1. О ВЕКТОРАХ **E** И **D**

1.1. Установилась традиция, идущая от Г. А. Лоренца: выводить уравнения Максвелла для молекулярной среды в макроскопическом приближении усреднением соответствующих дифференциальных уравнений для микровеличин интегрированием по объему<sup>1-5</sup>.

Однако для этой цели можно использовать уравнения для микровеличин в интегральной форме; такой способ обладает важными методическими достоинствами.

К макроскопическим векторам **E** и **D** приводит уравнение Максвелла

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E}_m d\Sigma = 4\pi \int_V \rho_{св} dv + 4\pi \int_V \rho_{пол} dv. \quad (1)$$

Здесь и ниже используется система единиц Гаусса. Индекс *m* указывает на микроскопическое значение вектора,  $\rho_{пол}$  — плотность поляризационных зарядов молекул,  $\rho_{св}$  — плотность свободных или, лучше, неполяризованных зарядов.

Суммарный поляризационный заряд по объему любой молекулы равен 0. Поэтому в последний интеграл в (1) дают вклад только те молекулы, которые пересекаются поверхностью  $\Sigma$ , ограничивающей объем *v*, что сводит этот интеграл к интегралу по поверхности  $\Sigma$ . Смещением участков  $\Sigma$  на микроскопические расстояния, порядка расстояния между соседними молекулами, можно включить в получающийся объем значительный избыток положительных или отрицательных зарядов; поэтому интегралы от  $\rho_{пол}$  по множеству микроскопически отличающихся объемов образуют множество случайных величин с относительно большим разбросом значений.

Однако среди указанного множества объемов имеется два подмножества, для которых рассматриваемые интегралы принимают детерминированные значения.

Во-первых, это объемы, ограничивающие поверхности которых достаточно гладкие и случайным образом расположены среди молекул. Такие поверхности ниже обозначаются буквой *S*. В общем случае участки  $\Delta S$  пере-

секают объемы самих молекул. Число таких пересечений для малого участка  $\Delta S$  является случайной величиной, однако суммарное число пересечений для многих участков теряет случайный характер. Это следствие статистических свойств молекулярной среды и закона больших чисел.

Во-вторых, детерминированные значения принимают интегралы по тем объемам, ограничивающие поверхности которых нигде не пересекают самих молекул. Такие поверхности ниже обозначаются буквой  $\sigma$  (на рис. 1 —  $C$ ). Для объемов, ограниченных поверхностями типа  $\sigma$ , интегралы от  $\rho_{\text{пол}}$  всегда точно равны нулю.

В (1) чувствителен к микроскопическим изменениям поверхности еще только интеграл от  $E_m$ : в поток вектора  $E_m$  из замкнутой поверхности типа  $S$  вносят вклад поляризационные заряды, в поток из замкнутой поверхности типа  $\sigma$  поляризационные заряды вклада не дают.

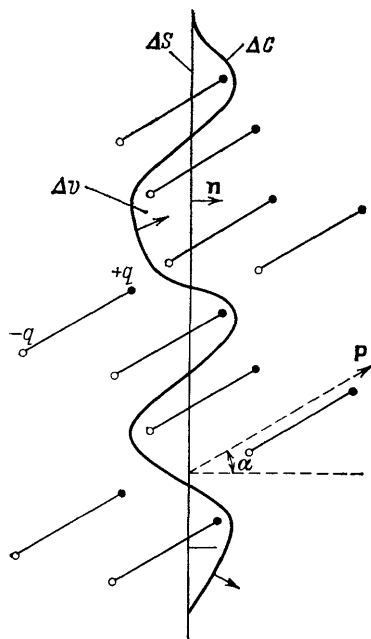


Рис. 1. К определению векторов  $E$  и  $D$

1.2. Как известно, взаимные отношения двух поверхностей остаются топологически эквивалентными, если при изменении их формы и расположения поверхности не пересекаются или, наоборот, их пересечения сохраняются<sup>6</sup>. Поэтому можно сказать, что поверхности  $S$  и  $\sigma$  различаются типом топологических отношений с объемами молекул. Эти отношения существенны для интегралов от  $\rho_{\text{пол}}$  и  $E_m$  и порождают два способа усреднения вектора  $E_m$  при переходе к макроскопическому.

Потоки вектора  $E_m$  через поверхности типа  $S$  приводят к вектору  $E(x, y, z, t)$ .

Этот вектор, проекции которого на нормали  $n$  к произвольно ориентированным плоским площадкам  $\Delta S$  (рис. 1) с центрами в точке  $(x, y, z)$  удовлетворяют уравнению

$$E_n \Delta S = \int_{\Delta S} E_m dS \quad (2)$$

для момента времени  $t$ .

По установившейся терминологии  $\Delta S$  — это физически бесконечно малая площадка.

Потоки вектора  $E_m$  через поверхности типа  $\sigma$  приводят к вектору  $D$ . Однако поверхности  $\sigma$  явно не рассматриваются при макроскопическом. Поэтому при определении  $D$  потоки вектора  $E_m$  через поверхности типа  $\sigma$  отображаются на поверхности  $S$ . Это достигается следующим определением.

Вектор  $D(x, y, z, t)$  — это вектор, проекции которого на нормали  $n$  к указанным выше площадкам  $\Delta S$  удовлетворяют уравнению

$$D_n \Delta S = \int_{\Delta \sigma} E_m d\sigma, \quad (3)$$

где  $\Delta \sigma$  — поверхность, не пересекающая молекул и опирающаяся на контур площадки  $\Delta S$ . В общем случае считается, что поверхность  $\Delta \sigma$  микроскопически отличается от  $\Delta S$  и проходит по обе стороны от последней с равной вероятностью (см. рис. 1).

1.3. Выведем из (1) зависимость между макроскопическими величинами. Предположим, что поверхность  $\Sigma$  совпадает с поверхностью типа  $\sigma$ . Тогда последний член в (1) обращается в нуль.

Используя еще определение (3), получим

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = 4\pi \int_{\nu} \rho \, dv,$$

где  $\rho$  — усредненная по объему плотность свободных зарядов.

1.4. Найдем зависимость между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Из (2) и (3) получаем

$$(\mathbf{D}_n - \mathbf{E}_n) \Delta S = \int_{\Delta\sigma} \mathbf{E}_m \, d\sigma - \int_{\Delta S} \mathbf{E}_m \, d\mathbf{S}. \quad (4)$$

Обозначим объем, заключенный между  $\Delta\sigma$  и  $\Delta S$ , через  $\Delta v$ . Спомощью (1) правая часть в (4) сводится к интегралам по объему  $\Delta v$ :

$$(\mathbf{D}_n - \mathbf{E}_n) \Delta S = 4\pi \int_{\Delta v} \rho_{св} \, dv + 4\pi \int_{\Delta v} \rho_{пол} \, dv. \quad (5)$$

Очевидно, что частям объема  $\Delta v$ , расположенным по разным сторонам площадки  $\Delta S$  (см. рис. 1), нужно приписывать разные знаки. Поэтому интеграл от  $\rho_{св}$  обращается в 0, а в интеграл от  $\rho_{пол}$  дают положительный вклад нескомпенсированные поляризационные заряды обоих знаков, получающихся от молекул, которые пересекаются площадкой  $\Delta S$  (см. рис. 1).

Можно показать, что последний интеграл в (5) остается неизменным при любых изменениях  $\rho_{пол}$ , но сохраняющих величину электрического момента молекул первого порядка. Это утверждение эквивалентно пренебрежению электрическими моментами молекул высших порядков при традиционном изложении<sup>2,4</sup>. Поэтому, ничего не теряя в общности окончательного результата, принимаем, что поляризационные заряды — это точечные заряды  $\pm q$ , расположенные на расстояниях  $a$  друг от друга и образующие одинаково ориентированные диполи (рис. 1). Число диполей, пересеченных площадкой  $\Delta S$ , равно  $\nu a \Delta S \cos \alpha$ , где  $\nu$  — число молекул на единицу объема,  $\alpha$  — угол между направлением диполей и нормалью  $\mathbf{n}$  к площадке  $\Delta S$ . Следовательно, заряд, попавший в объем  $\Delta v$ , равен  $\nu q a \Delta S \cos \alpha$ . Замечаем, что  $\nu q a \cos \alpha = P_n$  — проекция вектора поляризации  $\mathbf{P}$  на направление нормали. Из этих зависимостей получаем соотношение, имеющее характер теоремы,

$$\mathbf{D} - \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{P}. \quad (6)$$

1.5. Очевидно, что усреднение (2) совпадает с усреднением по объему. Действительно, усреднение (2) по достаточно близким и параллельным площадкам  $\Delta S$  приводит к достаточно близким значениям  $E_n$ , поэтому усреднения по одной площадке с центром в точке  $(x, y, z)$  будет совпадать с усреднением по семейству параллельных площадок, расположенных на равных и произвольно близких расстояниях в малом объеме  $\Delta v$  с центром в точке  $(x, y, z)$ , а это сводится к традиционному усреднению по объему.

Усреднение (3) таким свойством не обладает.

## 2. О ВЕКТОРАХ $\mathbf{V}$ И $\mathbf{H}$

2.1. К векторам  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$  для макроскопического описания магнитного поля приводит уравнение Максвелла:

$$\oint_{\Lambda} \mathbf{V}_m \, d\Lambda = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \mathbf{E}_m \, d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma} \mathbf{j}_{пр} \, d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma} \mathbf{j}_{пол} \, d\Sigma; \quad (7)$$

здесь  $\mathbf{j}_{\text{могл}}$  — плотность молекулярных токов, замкнутых в пределах каждой молекулы,  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$  — плотность токов проводимости.

В (7) топологические эффекты задаются последним интегралом. Вклад в него дают только те молекулярные токи, линии тока которых находятся в зацеплении с контуром  $\Lambda$  (на рис. 2—1), что сводит этот интеграл к интегралу по контуру, и на величине его могут существенно отражаться микроскопические деформации этого контура. Интегралы от  $\mathbf{j}_{\text{могл}}$  принимают детерминированные значения только на контурах, топологические отношения которых с объемами молекул такие же, как у поверхностей типов  $S$  и  $\sigma$ .

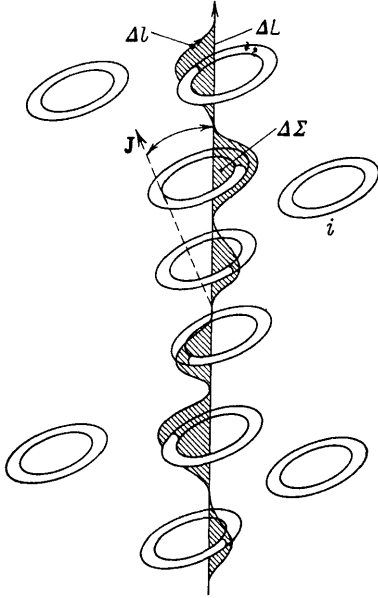


Рис. 2. К определению векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$

Во-первых, это контуры, образованные достаточно гладкими кривыми, случайным образом расположенные среди молекул. Такие кривые ниже обозначаются буквой  $L$ . В общем случае отрезки  $\Delta L$  пересекают объемы молекул. Суммарное число таких пересечений для ряда отрезков теряет случайный характер. Это и приводит к детерминированному значению интеграла.

Во-вторых, это контуры, образованные кривыми, обходящими объемы молекул. Такие кривые ниже обозначаются буквой  $\lambda$ . При таких контурах рассматриваемые интегралы всегда равны 0.

Как следствие, от топологических отношений зависит и интеграл от вектора  $\mathbf{B}_m$ , что порождает два способа усреднения последнего.

Циркуляция по кривым типа  $L$  приводит к вектору  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ . Это вектор, проекции которого на произвольно ориентированные отрезки  $\Delta L$  (рис. 2) с центром в точке  $(x, y, z)$  удовлетворяют уравнению

$$B_n \Delta L = \int \mathbf{B}_m dL, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор, показывающий направление отрезка  $\Delta L$ . Циркуляция вектора  $\mathbf{B}_m$  по кривым типа  $\lambda$  приводит к вектору  $\mathbf{H}$ . Определение его несколько усложняется, так как кривые типа  $\lambda$ , как и поверхности типа  $\sigma$ , явно не рассматриваются при макроописании. Вектор  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$  — это вектор, проекции которого на упомянутые отрезки удовлетворяют уравнению

$$H_n \Delta L = \int_{\Delta \lambda} \mathbf{B}_m d\lambda, \quad (9)$$

где  $\Delta \lambda$  — отрезок кривой, обходящей объемы молекул и проведенный от начала к концу отрезка  $\Delta L$  в минимальном удалении от последнего (рис. 2).

Усреднение (8) совпадает с традиционным усреднением по объему, усреднение (9) таким свойством не обладает.

2.2. Выведем из (7) уравнение для макроскопических величин. Пусть контур  $\Lambda$  образован кривой типа  $\lambda$ , а поверхность  $\Sigma$  совпадает с поверхностью типа  $\sigma$ . В таком случае последний интеграл в (7) обращается в 0. Используя еще определения (9) и (3), получим

$$\oint_L \mathbf{H} dL = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} dS + \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} dS, \quad (10)$$

где  $\mathbf{j}$  — средняя плотность токов проводимости.

2.3. Найдем зависимость между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Из определений (8) и (9) следует, что

$$(\mathbf{B}_n - \mathbf{H}_n) \Delta L = \int_{\Delta L} \mathbf{B}_m dL - \int_{\Delta \lambda} \mathbf{B}_m d\lambda. \quad (11)$$

Отрезки прямой  $\Delta L$  и кривой  $\Delta \lambda$  образуют замкнутый контур, ограничивающий некоторую поверхность  $\Delta \Sigma$ . Поэтому правую часть в (11) можно с помощью (7) представить интегралами по поверхности  $\Delta \Sigma$ :

$$(\mathbf{B}_n - \mathbf{H}_n) \Delta L = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta \Sigma} \mathbf{E}_m d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \int_{\Delta \Sigma} \mathbf{j}_{np} d\Sigma + \frac{4\pi}{c} \int_{\Delta \Sigma} \mathbf{j}_{mol} d\Sigma. \quad (12)$$

Поверхность  $\Delta \Sigma$  состоит из элементарных участков, связанных с молекулами, которые пронизываются отрезком  $\Delta L$ . Каждый из таких участков представляет собой поверхность, натянутую на часть отрезка  $\Delta L$ , расположенную внутри некоторой молекулы, и часть кривой  $\Delta \lambda$ , которая обходит молекулу снаружи (см. рис. 2). Благодаря хаотической ориентации элементарных участков потоки векторов  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{j}_{np}$  через всю поверхность  $\Delta \Sigma$  будут равны 0.

В последний интеграл в (12) дают вклад только те молекулы, которые пронизываются контуром. Это имеет место только на участке  $\Delta L$ . Не теряя общности в окончательном результате, считаем, что все молекулы однотипны, одинаково ориентированы и молекулярные токи линейны. Последнее эквивалентно обычному пренебрежению магнитными моментами молекул высших порядков. В этом случае для среднего числа молекул, пронизанных отрезком  $\Delta L$ , можно написать  $\nu b \Delta L \cos \beta$ , где  $b$  — площадь, охваченная контуром молекулярного тока  $i$ ,  $\beta$  — угол между направлением отрезка  $\Delta L$  и нормалью к площадке  $b$  (рис. 2). Умножив это число на  $4\pi i/c$ , найдем последний член в (12):  $4\pi i \nu b \cos \beta / c$ . Замечаем, что  $i \nu b \cos \beta / c = \mathbf{J}_n$  — проекция вектора намагничивания  $\mathbf{J}$  на направление отрезка  $\Delta L$ . Окончательно получаем теорему

$$\mathbf{B} - \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J}. \quad (13)$$

Два последних уравнения Максвелла для микровеличин не зависят от топологических особенностей. В этом случае любое усреднение эквивалентно усреднению по участкам плоскостей  $\Delta S$  и отрезкам прямых  $\Delta L$ , что приводит только к макроскопическим векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

### 3. ВЫВОДЫ

3.1. Традиционный подход — это формальный математический подход, кратчайшим путем ведущий к макроскопическим зависимостям. Такой подход оправдан и необходим при углубленном изучении предмета.

Однако при начальном знакомстве с законами электромагнетизма такой подход не эффективен, так как не выясняет наглядную качественную сторону важных понятий и зависимостей. Этот недостаток традиционного метода отмечали Я. И. Френкель<sup>(2)</sup>, с. 6) и И. Е. Тамм<sup>(3)</sup>, с. 109).

Недостатком изложенного способа является повышенная пространственность, так как приходится рассматривать разные способы усреднения, соответствующие разным интегралам и разным топологическим условиям. Однако эта пространственность окупается более глубоким пониманием. Для иллюстрации подчеркнем некоторые факты.

3.2. Переход к макроописанию вызывается не трудностью микроописания больших тел, на что обычно ссылаются при традиционном изложении<sup>2,5</sup>, а статистическими закономерностями, которым подчиняются интегралы

от микровеличин в уравнениях Максвелла при достаточных размерах областей интегрирования.

3.3. Макроскопические векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  появляются как одинаково необходимые статистические характеристики поля в молекулярной среде, теряя при этом простой силовой смысл векторов  $\mathbf{E}_m$  и  $\mathbf{B}_m$ .

При обычном изложении не раскрывается статистическая природа векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  и они вводятся как вспомогательные величины, не имеющие наглядного смысла.

3.4. При традиционном изложении векторам  $\mathbf{D}$  обозначается сумма

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (14)$$

чтобы затем кратко написать:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (15)$$

При этом оказываются вне поля зрения поучительные черты сходства и отличия уравнений (14) и (15) или лучше (6) и (15).

Сходство состоит в том, что на (6) и (15) можно смотреть как на частные случаи (1). Отличие же вызвано разной формой и топологическим характером объемов  $v$ . В (15) это, грубо говоря, единичный объем, ограниченный поверхностью типа  $\sigma$ . Он охватывает заряд, равный  $\rho$ . В (6) это объем, ограниченный единичной площадкой  $\Delta S$  и примыкающей к ней поверхностью  $\Delta\sigma$ . Охваченный ими суммарный заряд сводится к поляризации зарядов, отсекаемый площадкой  $\Delta S$  (рис. 2). Он численно равен проекции вектора  $\mathbf{P}$  на нормаль  $\mathbf{k}$   $\Delta S$ . Зависимость этого заряда от ориентации площадки и приводит к векторному характеру уравнения (6).

3.5. Аналогичные черты сходства и отличия имеются и у уравнений

$$\mathbf{B} - \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J}, \quad (13')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (16)$$

Чтобы показать это, умножим скалярно (13) и (16) на единичный вектор  $\mathbf{n}$ , но будем считать, что для (13)  $\mathbf{n}$  представляет направленный единичный отрезок  $\Delta\mathbf{L}$ , а для (16)  $\mathbf{n}$  выражает ориентированную единичную площадку  $\Delta\mathbf{S}$ . На полученные равенства можно смотреть как на уравнение (11) при разной форме областей интегрирования  $\Sigma$  и  $\Lambda$ .

Для (13) кривая  $\Lambda$  образована единичным отрезком  $\Delta\mathbf{L}$  и примыкающим к нему отрезком  $\Delta\lambda$ , они ограничивают поверхность  $\Delta\Sigma$  (рис. 2). Для (16) поверхность  $\Sigma$  — это поверхность  $\Delta\sigma$ , примыкающая к единичной площадке  $\Delta\mathbf{S}$  и ограниченная кривой типа  $\lambda$ , примыкающей к краю  $\Delta\mathbf{S}$ .

В проведенных рассуждениях неявно учтены токи, вызванные движением поляризованных зарядов, так как эти токи сводятся к 0 через поверхность  $\sigma$ . Но если бы для вывода (10) и (16) использовать в (7) в качестве  $\Sigma$  поверхность типа  $S$ , то эти токи нужно было бы учесть явно.

Благодарю за интерес к работе и советы А. Г. Любину и за полезные замечания Н. Д. Миловского и Г. С. Егорова.

Горьковский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лоренц Г. А. Теория электронов. — М.: Наука, 1965.
2. Френкель Я. И. Электродинамика. Т. II. — М.: ОНТИ, 1934.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Гостехиздат, 1946.
4. Парсел Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1975. — (Берклевский курс физики. Т. II.)
5. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. III: Электричество. — М.: Наука, 1977.
6. Ефремович В. А. Основные топологические понятия // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 5. — М.: Наука, 1966.