

532.5.1.013.4

**ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ****А. С. Монин****СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	62
1. Неустойчивость течений идеальной жидкости	63
1.1. Статическая (тэйлоровская) неустойчивость	63
1.2. Уравнение Рэлея	64
1.3. Устойчивость по Ляпунову	65
1.4. Теоремы Рэлея и Фьортфта	66
1.5. Вариационный метод Арнольда	67
1.6. Число Ричардсона	68
1.7. Осесимметричные течения	68
2. Бароклинная неустойчивость	69
2.1. Уравнение для потенциального вихря	69
2.2. Баротропная устойчивость	70
2.3. Бароклинная устойчивость	71
2.4. Линейная бароклинная неустойчивость	72
3. Бифуркации	73
3.1. Топологические особенности	73
3.2. Смена устойчивости	74
3.3. Нормальная бифуркация Андронова — Хопфа	75
3.4. Уравнение Ландау	75
3.5. Бифуркации периодических течений	76
3.6. Обратная бифуркация Андронова — Хопфа	77
4. Неустойчивость течений вязкой жидкости	77
4.1. Уравнение Орра — Зоммерфельда	77
4.2. Принцип исчезающей вязкости	78
4.3. Плоские течения Куэтта и Пуазейля	79
4.4. Неустойчивость пограничного слоя	80
4.5. Течения в безграничном пространстве	82
4.6. Течение Пуазейля в трубе	83
4.7. Следы за телами	83
5. Стохастичность	83
5.1. Конечномерность	84
5.2. Диссипативность	84
5.3. Определение стохастичности	84
5.4. Гиперболичность	85
5.5. Структурная устойчивость	87
5.6. Канторовы множества	87
5.7. Фрактальность	88
5.8. Показатели Ляпунова	89
6. Сценарии стохастизации	89
6.1. Сценарий Ландау — Хопфа	90
6.2. Сценарий Рюэлла — Тэкенса	90
6.3. Сценарий Фейгенбаума	91
6.4. Сценарий Помо — Манневилля	95
6.5. Круговое течение Куэтта	96
6.6. Термическая конвекция	98
Заключение	102
Список литературы	103

## ВВЕДЕНИЕ

За семь лет после опубликования в УФН нашего обзора<sup>1</sup> о возникновении турбулентности по этой проблеме получен ряд теоретических и экспериментальных результатов, заслуживающих внимания физиков.

Основой теоретического изучения стохастизации движения стала теория бифуркаций. В этой области наибольшее впечатление производит открытие М. Фейгенбаумом<sup>2</sup> универсальности последовательности бифуркаций удвоения периода; для одномерных квадратичных отображений удалось довольно полно разобраться и в их закрытом стохастическом поведении с лакунами периодических режимов. Стала очевидной многообразность возможных сценариев стохастизации движения. Приятно отметить «реабилитацию» сценария Л. Д. Ландау<sup>3</sup> — Э. Хопфа<sup>4</sup>: если рассматривать бифуркации не квазипериодических траекторий, а содержащих их торов, то «упрек» в отсутствии их структурной устойчивости отпадает.

Однако ощущается преимущественно общематематический характер теоретических работ, нехватка в них гидродинамической конкретности. Поэтому представилось целесообразным соединить их изложение с обзором современного состояния классической теории гидродинамической неустойчивости, восходящей к Рэлею, О. Рейнольдсу, В. Гейзенбергу и Дж. Тэйлору и содержащей наряду с теорией встречающихся в гидродинамике линейных операторов (еще не вполне завершенной) также такие мощные нелинейные методы, как уравнения для амплитуд Л. Д. Ландау<sup>3</sup> и вариационный метод В. И. Арнольда<sup>5</sup>.

Представилось полезным также привлечь внимание широкого круга физиков к специфике гидродинамической неустойчивости геофизических течений, для которых существенны стратификация плотности в поле тяжести и вращение планеты — тэйлоровская неустойчивость, число Ричардсона и так называемая бароклиная неустойчивость, т. е. рост возмущений за счет доступной потенциальной энергии основного течения, причем специфично, что достаточное условие устойчивости зонального течения (устанавливаемое нелинейным методом В. И. Арнольда) обеспечивается переходом к вращающейся системе отсчета, обгоняющей течение.

В то же время мы не будем рассматривать здесь хорошо известные процессы нелинейной неустойчивости — автомодуляции, самофокусировки, распадной и взрывной неустойчивости и т. п. (см., например, книгу<sup>6</sup>), так как, в отличие от теории бифуркаций, это пока что мало помогает расшифровке механизмов стохастизации движения, да и эти явления отнюдь не специально гидродинамические.

Не будут рассматриваться и так называемые «когерентные структуры», давно известные в механике турбулентности под наименованием «макροструктурных элементов». В последние годы они подвергаются активному экспериментальному изучению (см., например, обзор Б. Кантуэлла<sup>93</sup> и книги<sup>94, 95</sup>), но их теории пока нет, кроме общих соображений о самоорганизации (в противоположность стохастизации) (см., например, гл. 24 книги<sup>8</sup>) и методов численного расчета, развитых О. М. Белоцерковским<sup>96</sup>.

Экспериментальные возможности исследования процессов стохастизации течений жидкостей обогатились новыми методами визуализации течений, применением лазерных доплеровских анемометров в соединении с ЭВМ, использованием экзотических жидкостей (классический жидкий гелий и др.). Однако представляется, что результатов здесь пока что меньше, чем в теории; хочется упомянуть, прежде всего, подтверждения теории бифуркаций удвоения периода и обнаружение (в круговом течении Куэтта) более сложного поведения, чем по имеющимся теоретическим сценариям.

Ряд материалов разделов 1—2, 4, 6 изложен в монографии<sup>6</sup> и в небольшой книжке Л. А. Дикого<sup>7</sup>, разделов 3,5—6 — в недавних книгах М. И. Ра-

биновича и Д. И. Трубецкова<sup>8</sup> (посвященной нелинейным колебаниям) и А. Лихтенберга и М. Либермана<sup>9</sup> (посвященной преимущественно гамильтоновым системам).

## 1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Для адиабатических малых колебаний жидкости относительно состояния покоя (или стационарного движения, описываемого одним из решений линеаризованных уравнений гидродинамики) из неизменности во времени их полной энергии вытекает вещественность их частот  $\sigma$ , так что малые начальные возмущения не разрастаются и не затухают со временем. Это справедливо при условии, что стратификация плотности устойчива, т. е.

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g\rho}{c_0^2} \right) > 0, \quad (1.1)$$

где  $z$  — вертикальная координата, растущая вверх;  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $c_0$  — скорость звука;  $N$  — так называемая частота Вайсяля — Брента.

### 1.1. Статическая (тэйлоровская) неустойчивость

Рассмотрим противоположный случай неустойчивой стратификации плотности, т. е.  $N^2 = -M^2 < 0$ . Ограничимся при этом приближением Буссинеска, заменяя уравнение неразрывности отфильтровывающим акустические волны условием соленоидальности поля скорости  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , так что линеаризованные уравнения гидродинамики примут вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla p''}{\rho_*} + g\eta' \nabla r, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial t} = \frac{M^2}{g} u_r, \quad (1.2)$$

где  $\rho_*$  — так называемая потенциальная плотность, определяемая соотношением  $\partial \ln \rho_*/\partial z = M^2/g$ ;  $p'' = (\rho_*/\rho_0) p'$  — нормированное отклонение  $p'$  давления от гидростатического распределения  $p_0(z)$ ;  $\eta' = (p' - c_0^2 \rho')/\rho_0 c_0^2$  — безразмерное возмущение энтропии;  $\rho' = \rho - \rho_0$  — возмущение плотности. Локальное уравнение энергии имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_* u^2 - \rho_* \frac{g^2 \eta'^2}{M^2} \right) + \operatorname{div} p'' \mathbf{u} = 0, \quad (1.3)$$

и, например, для слоя  $0 \leq z \leq h$  между горизонтальными твердыми стенками находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \frac{u^2}{2} \rho_* dV - \int \frac{g^2 \eta'^2}{2M^2} \rho_* dV \right) = 0, \quad (1.4)$$

т. е. разность полных кинетической и термобарической энергий возмущений не меняется со временем, а о поведении каждого по отдельности из этих двух видов энергии из (1.4) нельзя извлечь никаких выводов (оба они экспоненциально возрастают со временем). Рассмотрим только двумерные возмущения движения в плоскости  $(x, z)$  и введем в ней, пользуясь бездивергентностью скорости, функции тока  $\psi$ , полагая  $u = -\partial \psi / \partial z$ ,  $w = \partial \psi / \partial x$ . Вычислив вихрь ускорения (в предположении квазипостоянства потенциальной плотности  $\rho_*$ ) и исключив  $\eta'$  с помощью третьего уравнения (1.2), получим для  $\psi$  уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} - M^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

с краевыми условиями  $w = 0$ , т. е.  $\psi = 0$  при  $z = 0, h$ . Поскольку  $M^2$  не зависит от  $x$  и  $t$ , элементарные решения этого уравнения можно искать в виде  $\psi = \psi(z) \exp[i(kx - \sigma t)]$ . Для комплексной амплитуды  $\psi(z)$  из (1.5)

получается уравнение

$$\sigma^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - k^2 \psi \right) - k^2 M^2 \psi = 0. \quad (1.5')$$

При квазипостоянном  $M$  решение, обращающееся в нуль при  $z = 0$ , имеет вид  $\psi \sim \sin mz$ , где  $m = -ik [1 + (M^2/\sigma^2)]^{1/2}$ . Для обращения  $\psi$  в нуль также при  $z = h$  следует положить  $mh = \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , откуда

$$\sigma = \pm iM \left( 1 + \frac{\pi^2 n^2}{k^2 h^2} \right)^{-1/2}, \quad (1.6)$$

так что при каждом фиксированном  $k$  имеется счетное множество элементарных решений, и у всех них значения  $\sigma$  оказываются чисто мнимыми. Таким образом, здесь всегда существуют элементарные решения, нарастающие со временем. Это явление называют статической (тэйлоровской) неустойчивостью. Ее механизм заключается в ускоряющем действии архимедовых сил на смещающиеся по вертикали из положения равновесия жидкие частицы. При этом, согласно третьему уравнению (1.2), взаимодействие вертикальной скорости  $u_z$  с неустойчивым градиентом потенциальной плотности  $M^2/g$  приводит к росту возмущений энтропии  $\eta'$ , а согласно второму уравнению 1.2) их вклад  $g\eta'$  в архимедово ускорение приводит к росту  $u_z$ .

## 1.2. У р а в н е н и е Р э л е я

Разрастание малых возмущений может создаваться не только неустойчивым распределением плотности в равновесном состоянии, но и некоторыми формами распределения скорости в нем. Рассмотрим, например, вопрос об устойчивости плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой идеальной жидкости, направленного вдоль оси  $x$  и имеющего скорость  $\mathbf{u}_0 = \{U(z), 0, 0\}$ . Линеаризованные уравнения гидродинамики будут иметь вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial z} = - \frac{\nabla p'}{\rho_0}. \quad (1.7)$$

Локальное уравнение энергии теперь имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \rho_0 |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \rho_0 U |\mathbf{u}|^2 + \rho_0 u w \frac{\partial U}{\partial z} + \operatorname{div} p' \mathbf{u} = 0, \quad (1.8)$$

откуда, например, для слоя  $0 \leq z \leq h$  между горизонтальными твердыми стенками получается

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \rho_0 dV = - \int \rho_0 u w \frac{\partial U}{\partial z} dV, \quad (1.9)$$

так что кинетическая энергия возмущений может меняться со временем вследствие работы напряжений  $-\rho_0 u w$  на градиенте равновесной скорости  $\partial U / \partial z$ . Рассмотрим, как и выше, только двумерные возмущения  $u = -\partial \psi / \partial z$ ,  $w = \partial \psi / \partial x$ . Тогда, вычислив вихрь от уравнения (1.7), получим аналогичное (1.5) уравнение для  $\psi$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

Однако вопрос о поведении решений  $\psi$  этого уравнения оказывается гораздо более сложным, чем в случае (1.5). Будем опять искать элементарные волновые решения в виде  $\psi = \psi(z) \exp[i(kx - \sigma t)]$ . Тогда для комплексной амплитуды  $\psi(z)$  получается так называемое *уравнение Рэлея*

$$(U - c) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - k^2 \psi \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \psi = 0, \quad (1.11)$$

где  $c = \sigma/k$  — фазовая скорость. Это уравнение, во-первых, имеет особую точку  $z_0$ , в которой для нейтральных возмущений (вещественные  $c$ ) коэффи-

циент  $U - c \approx U'(z_0)(z - z_0)$  при старшей производной  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  может обратиться в нуль, так что там производная  $\partial \psi / \partial z \sim (\psi U'' / U')_0 \ln(z - z_0)$  многозначна, и возникает проблема выбора нужной ветви решения. Во-вторых, набор дискретных собственных значений  $c$  оказывается, как правило, лишь конечным, так что далеко не каждое решение уравнения (1.10) для суждения об его устойчивости может быть представлено в виде суперпозиции соответствующих элементарных волновых решений. Правда, здесь существует еще и непрерывный спектр собственных значений  $c$ , в чем легко убедиться, переписав уравнение (1.11) в виде

$$(U - U'' \mathcal{L}^{-1}) \psi_1 = c \psi_1, \quad \mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2, \quad \psi_1 = \mathcal{L} \psi \quad (1.11')$$

(здесь и далее штрих обозначает производную по  $z$ ), откуда видно, что  $c$  есть собственное значение суммы оператора умножения на функцию  $U(z)$  (имеющего вещественный непрерывный спектр, заполняющий отрезок  $U_{\min} \leq c \leq U_{\max}$ ) и вполне непрерывного оператора  $U'' \mathcal{L}^{-1}$  (добавление которого не меняет непрерывного спектра). Однако оператор  $U'' \mathcal{L}^{-1}$  не является самосопряженным, и теоремы о разложении произвольной функции по дискретному и непрерывному спектру здесь не имеются. В-третьих, вследствие несамосопряженности указанного оператора даже вещественные собственные значения  $c$ , скажем, дискретного спектра, если они кратные, могут приводить к неустойчивости в виде наличия «вековых» возмущений, линейно растущих со временем.

### 1.3. Устойчивость по Ляпунову

Пример уравнения Рэлея показывает, что целесообразно исходить из более общего определения гидродинамической неустойчивости, чем из наличия у линеаризованных уравнений собственных значений с отрицательными мнимыми частями. Чтобы дать такое общее определение, введем понятие о *фазовом пространстве* жидкости, «точками»  $M$  которого являются полные наборы независимых (т. е. не связанных синхронными соотношениями) термогидродинамических полей, характеризующих мгновенные состояния движущейся жидкости. В случае несжимаемой жидкости — это поле скорости  $u(x)$  в занятой жидкостью области пространства, удовлетворяющее должным краевым условиям; в общем случае к нему добавляются поля плотности  $\rho(x)$ , энтропии  $\eta(x)$  и концентрации примеси  $s(x)$ . Эволюция течения жидкости во времени изображается в фазовом пространстве некоторой линией  $M = M(t)$  — фазовой траекторией течения; у стационарного течения она состоит из одной точки, у периодического — образует замкнутую линию (цикл). Совокупность  $M(t) = F^t M(0)$  фазовых траекторий, проведенных через все точки фазового пространства  $M = M(0)$  и продолженных на всю ось времени, определяет группу отображений  $F^t$  фазового пространства на себя, называемую *фазовым потоком*. Он описывает эволюцию всех течений жидкости в данной геометрии при всевозможных начальных данных.

Пусть в фазовом пространстве введена норма его элементов  $\|M\|$ . Тогда общее определение устойчивости фазовой траектории  $M = M_0(t)$  по А. М. Ляпунову будет следующим: при каждом сколь угодно малом положительном числе  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , что для любой траектории  $M = M(t)$  с начальным значением  $M(0)$ , удовлетворяющим условию  $\|M(0) - M_0(0)\| < \delta$ , при всех  $t > 0$  выполняется неравенство  $\|M(t) - M_0(t)\| < \varepsilon$ . Нетрудно убедиться, что из наличия хотя бы одного неустойчивого инфинитезимального волнового возмущения  $M'(t) = M(t) - M_0(t)$  (с отрицательной мнимой частью  $\gamma = \text{Im } \sigma < 0$  собственной частоты  $\sigma$ ) вытекает неустойчивость траектории  $M_0(t)$  по Ляпунову. Действительно, пока возмущение  $M'(t)$  мало, оно растет по закону  $e^{|\gamma|t}$  линейной теории; затем, как правило, этот рост замедляется, и достигается

некоторый конечный предел; уменьшение же амплитуды начального возмущения лишь затягивает этот процесс, но не меняет его конечного предела — эта неравномерность по времени сходимости к нулю и означает отсутствие устойчивости по Ляпунову. Поскольку в реальности малые возмущения всегда присутствуют, линейная неустойчивость течения  $M_0(t)$  означает, что оно практически нереализуемо (как, например, состояние покоя при неустойчивой стратификации); в этом, собственно, и заключается основное значение понятия гидродинамической неустойчивости.

В ряде случаев удается доказать и обратное утверждение — что линейная устойчивость гарантирует устойчивость по Ляпунову. Так, для уравнения (1.10) справедлива следующая теорема (Л. А. Диккий <sup>7</sup>): двумерное плоскопараллельное течение с монотонным профилем скорости  $U(z)$ ,  $0 \leq z \leq h$ , в котором  $U(0)$  и  $U(h)$  не являются собственными значениями, может быть неустойчивым лишь при наличии в дискретном спектре невещественных или кратных вещественных собственных значений.

Идея доказательства заключается в решении задачи Коши для уравнения (1.10) (при зависимости  $\psi$  от  $x$  по закону  $e^{ikx}$ ) при произвольном начальном значении  $\psi(z, 0)$  при помощи преобразования Лапласа по времени и использовании функции Грина  $G^*(z, \zeta, s)$  преобразованного уравнения. Чтобы выяснить, ограничена ли функция  $\psi(z, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , нужно исследовать поведение обратного преобразования Лапласа от  $G^*(s)$ . Доказывается, что функция  $G^*(s)$  аналитически продолжается из верхней полуплоскости  $s$  вниз всюду, кроме точек  $s = U(0)$ ,  $U(h)$ ,  $U(z)$  и  $U(\zeta)$ , и имеет полюсы там (и той же кратности), где  $s$  равно собственным значениям однородного уравнения; если  $s = U(0)$  и  $U(h)$  не являются собственными значениями, то в верхней полуплоскости и в некоторой окрестности отрезка  $\{U(0), U(h)\}$  имеется конечное число собственных значений. При вычислении  $G(t)$  по  $G^*(s)$  следует опустить контур интегрирования по  $s$  на фиксированное расстояние под вещественную ось с подъемами оттуда по краям вертикальных разрезов к точкам  $s = U(0)$ ,  $U(z)$ ,  $U(\zeta)$ ,  $U(h)$  и обходом вокруг этих точек по окружностям с радиусами порядка  $c/t$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$  интегралы по горизонтальным частям контура экспоненциально затухают, а по окружностям и вертикальным отрезкам остаются ограниченными, и нужно лишь добавить сумму вычетов в полюсах между старым и новым контурами интегрирования — в тех точках  $s$ , которые являются собственными значениями. В простом полюсе вычет пропорционален  $G^*(s) e^{-ikst}$ , в  $k$ -кратном  $\partial^{k-1} [G^*(z) e^{-ikst}] / \partial s^{k-1}$ . Эти вычеты выделяют волновые решения, которые только и могут создать неограниченный рост  $\psi(z, t)$ , что и доказывает теорему Л. А. Дикого.

#### 1.4. Теоремы Рэлея и Фьортофта

Отметим без доказательств, что для устойчивости течения с профилем скорости «типа А» — монотонным  $U'(z) > 0$  и с одной точкой перегиба  $z = \bar{z}$  (так что  $\bar{U}'' = 0$ ), в которой  $U'(z)$  максимально (так что  $\bar{U}''' < 0$ ), необходимо и достаточно отсутствие невещественных собственных значений с  $\text{Re } k = 0$  или же выполнение условия Н. Розенблюта и А. Симона <sup>10</sup>

$$[U'(U - \bar{U})]^{-1} \Big|_0^h + \int_0^h U''(U')^{-2} (U - \bar{U})^{-1} dz > 0. \quad (1.12)$$

В частности, достаточно существования такой константы  $K_0$ , что  $(U - K_0) U'' \geq 0$  (Р. Фьортофт <sup>11</sup>) или же просто отсутствия точек перегиба (Рэлей, 1880). Наоборот, течение с профилем скорости «типа А» при  $0 \leq z \leq h/2$ , симметричным относительно точки  $z = 1/2$ , всегда неустойчиво (В. Толлмиен <sup>12</sup>). Неустойчив также тангенциальный разрыв скорости  $U(z) = U_0$  при  $z > 0$  и  $(-U_0)$  при  $z < 0$  (так называемая неустойчивость Гельмгольца).

Теоремы Рэлея и Фьортофта можно доказать при произвольных начальных данных, не рассматривая элементарных волновых решений. Так, из уравнения (1.10) для его решения  $\psi$ , зависящего от  $x$  по закону  $e^{ikh}$ , вытекает интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (|\psi'|^2 + k^2 |\psi|^2) dz - 2 \operatorname{Re} ik \int U (\psi'' - k^2 \psi) \psi^* dz = 0. \quad (1.13)$$

Пусть существует такая константа  $K_0$ , что функция  $(U - K_0)(U'')^{-1}$  всюду непрерывна. Умножив (1.10) на  $(\psi^{*''} - k^2 \psi^*)(U - K_0)(U'')^{-1}$ , проинтегрировав по  $z$ , взяв вещественную часть и сложив ее с (1.13), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int [|\psi'|^2 + k^2 |\psi|^2 + (U - K_0) |\psi'' - k^2 \psi|^2 (U'')^{-1}] dz = 0, \quad (1.14)$$

так что при условии Фьортофта из малости этого интеграла следует малость в среднем квадратичном величин  $\psi$ ,  $\psi'$  и  $\psi''$  в любой момент времени, т. е. устойчивость течения.

### 1.5. Вариационный метод Арнольда

Смысл квадратичного интегрального инварианта в (1.14) можно понять, рассмотрев, следуя В. И. Арнольду<sup>5</sup>, устойчивость по Ляпунову нелинейного *двумерного* течения несжимаемой идеальной жидкости, у которого функция тока  $\psi(x, z, t)$  удовлетворяет уравнению для вихря

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial (\psi, \Delta \psi)}{\partial (x, z)} = 0 \quad (1.15)$$

(его линеаризация относительно  $\psi_1 = \psi + \int^z U(z) dz$  возвращает к уравнению (1.10)) с краевыми условиями непротекаемости границы  $\psi(\Gamma) = \text{const}$  и сохранения на ней циркуляции  $\oint \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = \text{const}$ . Здесь не меняется со временем не только кинетическая (энергия на единицу массы)  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int |\nabla \psi|^2 dx dz$ , но и любой функционал от вихря  $\mathcal{F} = \int \Phi(\Delta \psi) dx dz$ . Для исследования устойчивости стационарного течения с функцией тока  $\psi_0$  (которую будем считать монотонной функцией от вихря  $\psi_0 = \Psi(\Delta \psi_0)$ ) подберем сохраняющийся функционал  $F(\psi) = \mathcal{E} + \mathcal{F}$  так, чтобы при  $\psi = \psi_0$  он имел экстремум. Легко убедиться, что для обращения в нуль первой вариации  $\delta F$  следует положить  $\Phi' = \Psi$ . Для плоскопараллельного течения со скоростью  $u_0 = U(z)$  будет  $\Psi'(\Delta \psi_0) = U(z)/U''(z)$ , и в системе отсчета, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью  $K_0$ , получим

$$F(\psi) - F(\psi_0) = \frac{1}{2} \int [(\nabla \delta \psi)^2 + (U - K_0)(U'')^{-1} (\Delta \delta \psi)^2] dx dz \dots \quad (1.16)$$

При условии Фьортофта эта квадратичная форма относительно  $\delta \psi$  положительна и может быть принята за квадрат нормы  $\|\delta \psi\|_{(1)}^2$ . Для линеаризованных уравнений он, согласно (1.14), является точным инвариантом. Для нелинейных же уравнений таковым является квадрат нормы  $\|\delta \psi\|_{(1)}^2$ , задаваемый левой частью (1.16). Но эти нормы эквивалентны в том смысле, что существуют положительные константы  $C_1 \leq C_2$ , обеспечивающие неравенство  $C_1 \|\delta \psi\|_{(1)} \leq \|\delta \psi\|_{(2)} \leq C_2 \|\delta \psi\|_{(1)}$ . Если начальная норма  $\|\delta \psi\|_{(1)}$  мала, то мала и инвариантная норма  $\|\delta \psi\|_{(2)}$ , а тогда все время малой остается и  $\|\delta \psi\|_{(1)}$ , так что здесь из линейной устойчивости вытекает нелинейная устойчивость по Ляпунову.

## 1.6. Число Ричардсона

В природных течениях часто встречаются случаи, в которых стабилизирующее действие устойчивой стратификации  $N_0^2(z) > 0$  конкурирует с дестабилизирующим влиянием неустойчивого профиля скорости  $U(z)$ . В этих случаях вместо уравнений (1.5) или (1.10) получается следующая их комбинация:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta \psi - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + N_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0. \quad (1.17)$$

Для элементарных волновых решений вида  $\psi(z) \exp[ik(x - ct)]$  получаем

$$(U - c)[(U - c)(\psi'' - k^2\psi) - U''\psi] + N_0^2\psi = 0. \quad (1.18)$$

Обозначим  $U - c = W$  и введем новую неизвестную функцию  $\Psi = \psi W^{-1/2}$ . Тогда уравнение (1.18) преобразуется к виду

$$(W\Psi)' - \left[ \frac{1}{2}U'' + k^2W + U'^2W^{-1} \left( \frac{1}{4} - \text{Ri} \right) \right] \Psi = 0, \quad (1.19)$$

где

$$\text{Ri} = N_0^2(U')^{-2} \quad (1.20)$$

— так называемое *число Ричардсона*. Умножим уравнение (1.19) на комплексно-сопряженную величину  $\Psi^*$ , проинтегрируем результат по слою  $0 \leq z \leq h$  при краевых условиях  $\Psi = 0$  (т. е.  $w = 0$ ) на обоих концах этого отрезка и выпишем мнимую часть полученного равенства:

$$(\text{Im } c) \int_0^h \left[ |\Psi'|^2 + k^2 |\Psi|^2 - \left( \frac{1}{4} - \text{Ri} \right) |U'\Psi W^{-1}|^2 \right] dz = 0. \quad (1.21)$$

Если всюду  $\text{Ri}(z) \geq 1/4$ , то это равенство возможно лишь при условии  $\text{Im } c = 0$ , т. е. при отсутствии неустойчивых волновых решений. Таким образом, условие  $\text{Ri} \geq 1/4$  достаточно для устойчивости стратифицированного течения (Дж. Майлс<sup>13</sup>, Л. Ховард<sup>14</sup>).

До сих пор мы рассматривали лишь двумерные волновые возмущения  $u, w(x, z)$  плоскопараллельных течений  $u_0 = \{U(z), 0, 0\}$ , так как их устойчивость достаточна для устойчивости и трехмерных волновых возмущений (на волны  $\exp[i(k_1x + k_2y - \sigma t)]$  влияет лишь проекция  $u_0 k k^{-1}$  основного течения). С помощью инварианта (1.14) это можно доказать и для возмущений, произвольно зависящих от времени: если двумерные возмущения скорости и вихря ограничены, то ограничены также умноженные на  $U''$  трехмерные возмущения скорости и  $z$ -компоненты вихря (а другие его компоненты могут линейно расти со временем).

## 1.7. Осесимметричные течения

Остановимся еще вкратце на устойчивости стационарных осесимметричных течений, направленных вдоль оси  $x$  и имеющих профиль скорости  $U(r)$ ,  $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$ . Используя цилиндрические координаты  $(x, r, \phi)$ , рассмотрим малые волновые возмущения вида  $u(r) \exp[ik(x - ct) + i n \phi]$ . Тогда для комплексной амплитуды  $f = u_r(r)$  из (1.7) получается следующий аналог уравнения Рэлея (1.14):

$$(U - c) \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{n^2 + k^2 r^2} \frac{\partial r f}{\partial r} - f \right) - r \frac{\partial Q}{\partial r} f = 0, \quad Q = \frac{r}{n^2 + k^2 r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (1.22)$$

с краевыми условиями  $f \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  (для осесимметричной струи в неограниченном пространстве) или  $f(R) = 0$  (для круглой трубы радиуса  $R$ ). Умножив (1.22) на  $r f^* (U - c)^{-1}$ , проинтегрировав по  $r$  и взяв мнимую



часть, получим

$$(\operatorname{Im} c) \int r^2 |f|^2 |U - c|^{-2} \frac{\partial Q}{\partial r} dr = 0, \quad (1.23)$$

откуда видно, что для неустойчивости (для выполнения условия  $\operatorname{Im} c \neq 0$ ) необходимо, чтобы производная  $\partial Q / \partial r$  в какой-то точке меняла знак (Рэлей, 1892). Например, в течении Пуазейля в круглой трубе  $U(r) = U_{\max} (1 - r^2/R^2)$ , и разрастающиеся неосесимметричные волновые возмущения ( $n \neq 0$ ) невозможны (при  $n = 0$  здесь  $\partial Q / \partial r \equiv 0$ , и уравнение Рэля вообще не имеет собственных значений). Если  $\partial Q / \partial r$  меняет знак в точке  $r_c$  и  $U(r_c) = U_c$ , то для неустойчивости необходимо, чтобы где-то в течении выполнялось условие типа Фьортофта  $(U - U_c) \partial Q / \partial r < 0$ . Проблема устойчивости здесь, по-видимому, как и выше, полностью сводится к изучению дискретного спектра уравнения Рэля. Отметим, что Дж. Бэтчелор и А. Гилл<sup>15</sup> у осесимметричных струй и Г. Сато и О. Окада<sup>16</sup> у осесимметричных следов обнаружили возможность неустойчивости лишь при  $n = 1$ .

## 2. БАРОКЛИННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В предыдущем разделе мы видели, что в несжимаемой жидкости адиабатические возмущения поля скорости могут расти лишь за счет кинетической энергии основного течения; см. уравнение энергии (1.9). Такая неустойчивость называется *баротропной*, так как она свойственна вообще баротропным жидкостям (у которых  $p$  есть функция только от  $r$ ), поскольку в них баротропная потенциальная энергия, возникающая из-за двумерной сжимаемости, очень мала. В бароклиновых же жидкостях (т. е. таких, у которых  $p$  зависит не только от  $r$ , но и от  $T$  и  $s$ ) становится возможной также так называемая *бароклинная неустойчивость* — рост возмущений за счет доступной потенциальной энергии основного состояния. Эта неустойчивость играет большую роль, в частности, в формировании синоптических процессов в земной атмосфере и Мировом океане.

### 2.1. Уравнение для потенциального вихря

Рассмотрим ее на примере *квазигидростатических* течений в атмосфере, используя для их описания уравнения гидродинамики в изобарических координатах (в которых ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  — на север, а в качестве вертикальной координаты используется давление  $p$ ). При этом будем считать процессы также *квазигеострофическими* в том смысле, что в них перепады давления приблизительно уравновешиваются силой Кориолиса. При этом из уравнений гидродинамики выводится (см., например, книгу<sup>17</sup>) следующее уравнение для так называемого потенциального вихря  $\tilde{\Omega} = \mathcal{L}\psi + f$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}\psi}{\partial t} + \frac{\partial (\psi, \mathcal{L}\psi + f)}{\partial (x, y)} = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}\psi = \Delta\psi + \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad \psi = g f_0^{-1} z,$$

где  $f$  — параметр Кориолиса (удвоенная вертикальная проекция вектора угловой скорости вращения Земли);  $f_0$  — его квазипостоянное локальное значение;  $z$  — высота изобарических поверхностей;  $\alpha^2 = H^2 N^2 c_0^{-2}$  — безразмерная частота Вайсяля — Брента ( $H$  — так называемая толщина однородной атмосферы). Отличия от (1.15) заключаются в замене двумерного оператора Лапласа  $\Delta$  трехмерным (при устойчивой стратификации — эллиптическим) оператором  $\mathcal{L}$  и в добавлении создаваемого вращением и сферичностью Земли слагаемого  $(\partial f / \partial y) \partial \psi / \partial x$ . Краевое условие на поверхности Земли (обращение вертикальной скорости в нуль) приводится к виду<sup>17</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( p \frac{\partial z}{\partial p} + \alpha^2 z \right) = 0 \quad \text{при} \quad p = p_0. \quad (2.2)$$

Докажем, что нелинейные уравнения (2.1)–(2.2) имеют квадратичный интегральный вариант — полную энергию

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \left[ (\nabla_{\mathbf{h}} z)^2 + \frac{f_0^2}{\alpha^2 c_0^2} p^2 \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right)^2 \right] dx dy dp + \frac{1}{2} \int \frac{f_0^2 p_0}{c_0^2} z^2 dx dy. \quad (2.3)$$

Действительно, продифференцировав это выражение по времени, проинтегрировав величины типа  $(\partial z / \partial x) \partial(\partial z / \partial t) / \partial x$  по частям и применив формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = & -\frac{f_0}{g} \int z \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} dx dy dp + \int \mathbf{z} \mathbf{n} \nabla \frac{\partial z}{\partial t} dp d\Sigma + \\ & + \int \frac{f_0^2}{\alpha^2 c_0^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} p \frac{\partial z}{\partial p} + \alpha^2 z \right) p z dS, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\Sigma$  — боковая цилиндрическая поверхность,  $\mathbf{n}$  — орт нормали к ней, а  $S$  — нижняя поверхность  $p = p_0$ . Вследствие (2.1) первое слагаемое здесь пропорционально интегралу от  $\partial(z^2, \tilde{\Omega}) / \partial(x, y)$ , который интегрированием по частям приводится к интегралу от  $(z^2 \tilde{\Omega}_x)_y - (z^2 \tilde{\Omega}_y)_x$ , а затем к интегралу  $\int dp \oint z^2 (\tilde{\Omega}_x dx + \tilde{\Omega}_y dy)$ , или, значит,  $\int dp \oint z^2 d\tilde{\Omega} = 0$ , так как на боковой границе при  $p = \text{const}$  должно быть  $z = \text{const}$  (условие непротекания). Второе слагаемое в (2.4) обращается в нуль вследствие постоянства циркуляции на границе  $\oint \mathbf{n} \nabla z dl = \text{const}$ . Равенство нулю третьего слагаемого доказывается, как и для первого, но с использованием (2.2) вместо (2.1). Таким образом,  $\partial \mathcal{E} / \partial t = 0$ .

Заметим, что  $z = F(p)$  при произвольной функции  $F(p)$  есть вновь решение уравнения (2.1) при краевом условии (2.2). Поэтому в (2.3) из  $\partial z / \partial p$  можно вычесть произвольную функцию от  $p$ , а из  $\hat{z}$  — произвольную постоянную  $c$ . Отсюда следует неизменность во времени среднего по  $x, y$  значения  $\partial \bar{z} / \partial p$  величины  $\partial z / \partial p$  при каждом  $p$ , а также и среднего значения  $\bar{z}$  при  $p = p_0$ . Если положить  $F(p) = \bar{z}(p)$  и  $C = \bar{z}(p_0)$ , то получится минимальное значение энергии (2.3):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \left[ (\nabla_{\mathbf{h}} z)^2 + \frac{f_0^2 p^2}{\alpha^2 c_0^2} \left( \frac{\partial z}{\partial p} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial p} \right)^2 \right] dx dy dp + \frac{1}{2} \int \frac{f_0^2 p_0}{c_0^2} (z - \bar{z})^2 dx dy. \quad (2.3')$$

Первое слагаемое здесь соответствует кинетической, второе — бароклиной и третье баротропной доступной потенциальной энергии. Отношения этих слагаемых равны  $1 : (L/L_R)^2 : (L/L_0)^2$ , где  $L$  — горизонтальный масштаб возмущений,  $L_R = H N_0 f_0^{-1}$  — так называемый радиус деформации Россби, а  $L_0 = c f_0^{-1}$  — масштаб баротропных возмущений, введенный А. М. Обузовым<sup>18</sup>.

## 2.2. Баротропная устойчивость

Рассмотрение вопросов устойчивости квазигеострофических течений начнем с более простого баротропного течения, метод выделения которого был сформулирован в работе<sup>19</sup>: он заключается в предельном переходе  $\alpha \rightarrow 0$ , причем производные  $\partial z / \partial s$  перестают зависеть от  $p$ . В результате уравнение (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_1 \psi}{\partial t} + \frac{\partial (\psi, \mathcal{L}_1 \psi + f)}{\partial (x, y)} &= 0, \\ \mathcal{L}_1 \psi &= \Delta \psi - \frac{f_0^2}{c_0^2} \psi, \quad \psi = g f_0^{-1} z. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Потенциальный вихрь (средний по толще атмосферы) равняется  $\tilde{\Omega} = \mathcal{L}_1 \psi + f$ , а в полной энергии (2.3') выпадает второе слагаемое (бароклиная до-

ступная потенциальная энергия). Проанализируем методом В. И. Арнольда устойчивость стационарного зонального баротропного течения с потенциальным вихрем  $\tilde{\Omega}_0$ , монотонно зависящим от широты, так что функцию тока можно представить в виде  $\psi_0 = \Psi(\tilde{\Omega}_0)$ . Тогда, аналогично (1.14), у функционала  $F(\psi) = \mathcal{E} + \int \Phi(\tilde{\Omega}) dx dy$  первая вариация обратится в нуль при  $\Phi' = \Psi$ , а вторая окажется равной

$$\delta^2 F = \int \left[ (\nabla \delta \psi)^2 + \frac{f_0^2}{c_0^2} (\delta \psi)^2 + \Psi'(\tilde{\Omega}_0) (\delta \tilde{\Omega})^2 \right] dx dy, \quad (2.6)$$

откуда видно, что для устойчивости течения (обращения  $F$  в минимум при  $\psi = \psi_0$ , т. е. выполнения условия  $\delta^2 F > 0$ ) достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $\Psi'(\tilde{\Omega}_0) > 0$ . Обычно в общей циркуляции атмосферы выполняется противоположное условие  $\Psi'(\tilde{\Omega}_0) < 0$ , так как зональное течение направлено с запада на восток, т. е.  $\psi_0$  растет с севера на юг, а поведение  $\tilde{\Omega}_0$  определяется в основном слагаемым  $f$ , растущим с юга на север:  $\psi_0$  оказывается убывающей функцией от  $\tilde{\Omega}_0$ . Но это поведение можно переменить на противоположное, перейдя к системе отсчета, вращающейся относительно исходной с постоянной угловой скоростью и *обгоняющей зональное течение*. Таким образом, справедлив следующий аналог теоремы Рэлея: для устойчивости зонального баротропного течения достаточно, чтобы потенциальный вихрь монотонно зависел от широты (С. Л. Го<sup>20</sup>).

### 2.3. Бароклинная устойчивость

Вполне аналогично выясняются достаточные условия устойчивости зонального бароклинного течения. В этом случае, согласно (2.2), имеется еще краевой инвариант

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \psi \right)_{p=p_0},$$

и устойчивость зонального течения с функцией тока  $\psi_0$  обеспечивает минимум при  $\psi = \psi_0$  функционала

$$F(\psi) = \mathcal{E} + \int \Phi(p, \tilde{\Omega}) dx dy dp + \int_{p=p_0} \Gamma \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \psi \right) dx dy, \quad (2.7)$$

где  $\Phi(p, \tilde{\Omega})$  — произвольная функция двух переменных, а  $\Gamma$  — произвольная функция одной переменной. Для обращения в нуль при  $\psi = \psi_0$  первой вариации  $\delta F$  допустим, что  $\tilde{\Omega}_0$  при каждом  $p$  есть монотонная функция от широты, так что можно положить  $\psi_0 = \Psi(p, \tilde{\Omega}_0)$ , и что

$$\left( \frac{\partial \psi_0}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \psi_0 \right)_{p=p_0}$$

также есть монотонная функция от широты, так что при  $p = p_0$  можно положить

$$\psi_0 = X \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \psi_0 \right).$$

Тогда нетрудно убедиться, что для обеспечения требования  $\delta F = 0$  следует положить  $\partial \Phi / \partial \tilde{\Omega} = \Psi$  и

$$\Gamma' = - \left( \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{p^2}{\alpha^2} \right)_{p=p_0} X$$

и что при этом вторая вариация  $\delta^2 F$  приводится к виду

$$\delta^2 F = \int \left[ (\nabla_h \delta\psi)^2 + \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{p^2}{\alpha^2} \left( \frac{\partial \delta\psi}{\partial p} \right)^2 + \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{\Omega}_0} (\delta \tilde{\Omega})^2 \right] dx dy dp + \\ + \left( \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{p^2}{\alpha^2} \right)_{p=p_0} \int \left[ \frac{\alpha^2}{p} (\delta\psi)^2 - X' \left( \frac{\partial \delta\psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \delta\psi \right)^2 \right] dx dy. \quad (2.8)$$

Для устойчивости зонального течения, т. е.  $\delta^2 F > 0$ , было бы достаточным выполнение обоих условий  $\partial \psi_0 / \partial \tilde{\Omega}_0 > 0$  при каждом  $p$  и  $X' < 0$  при  $p = p_0$ . Как и в (2.6), первое из этих условий можно обеспечить переходом к опережающей зональное течение вращающейся системе отсчета. Но второе условие при этом сведется, грубо говоря, к неестественному требованию роста приземной плотности от полюсов к экватору. Заменим его условием

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \psi \right)_{p=p_0} = \text{const}$$

(грубо говоря, требованием постоянства приземной плотности); тогда вариации этого выражения будут равны нулю, и для устойчивости зонального бароклинного течения будет достаточно, чтобы при каждом  $p$  потенциальный вихрь убывал с севера на юг (Дж. Чарни, М. Стерн<sup>21</sup>).

#### 2.4. Л и н е й н а я      б а р о к л и н н а я      н е у с т о й ч и в о с т ь

Но эти достаточные условия бароклиной устойчивости выполняются в земной атмосфере и Мировом океане, по-видимому, довольно редко. Для изучения неустойчивых возмущений линеаризируем уравнения (2.1), (2.2) относительно стационарного плоскопараллельного течения вдоль оси  $x$  со скоростью  $-\partial \psi_0 / \partial y = U(y, p)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \Delta \psi + \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \left( -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{\partial U}{\partial p} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \psi \right) - \left( \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} U \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{при } p = p_0. \quad (2.9)$$

Уравнение энергии для возмущений, аналогичное (1.9), теперь имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \left[ (\nabla_h \psi)^2 + \frac{f_0^2 p^2}{\alpha^2 c_0^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^2 \right] dy dp + \int_{p=p_0} \frac{f_0^2 p_0}{c_0^2} \bar{z}^2 dy \right\} = \\ = \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{f_0^2 p^2}{\alpha^2 c_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial U}{\partial p} \right) dy dp, \quad (2.10)$$

где чертой сверху обозначается среднее значение по  $x$ . Специфическим для бароклиной неустойчивости здесь является второе слагаемое в правой части, которое пропорционально величине  $-\bar{v}'\rho' \partial \rho_0 / \partial y$  и совпадает с ней по знаку. Таким образом, например, при  $\partial \rho_0 / \partial y > 0$  для неустойчивости нужно, чтобы было  $\bar{v}'\rho' < 0$ , так что при нарастании возмущений более тяжелые частицы ( $\rho' > 0$ ) должны, опускаясь, смещаться к югу ( $v' < 0$ ), а более легкие ( $\rho' < 0$ ), наоборот, поднимаясь, смещаться к северу ( $v' > 0$ ). Сосредоточиваясь далее на этом эффекте, будем считать, что  $U$  зависит лишь от  $p$ , и будем искать волновые решения  $\psi$  уравнений (2.9) в виде  $\psi(p) \exp[ik_1(k-ct) + ik_2 y]$ . Тогда, полагая  $k_1^2 + k_2^2 = k^2$ , для комплексной амплитуды  $\psi(p)$  получим

$$(U - c) \left( \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{\partial \psi}{\partial p} - k^2 \psi \right) + B \psi = 0, \quad (2.11)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{f_0^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{\partial U}{\partial p},$$

при  $p = p_0$

$$(U - c) \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} \psi \right) - F \psi = 0, \quad F = \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{p} U. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.11) отличается от уравнения Рэля (1.11) в основном лишь слагаемым  $\partial f / \partial y$ . Но краевое условие (2.12) теперь более сложное: оно содержит собственное значение  $c$ . Заменяя его условием  $\partial \psi / \partial p + (\alpha^2 \psi / p) = 0$ , можно доказать устойчивость при  $B > 0$  (т. е. теорему Рэля или частный случай теоремы Чарни — Стерна), или если  $B$  один раз меняет знак, то устойчивость при  $(U - K) B < 0$ , где  $K$  — значение  $U$  в точке, в которой  $B$  меняет знак (аналог теоремы Фьортофта). Условие же (2.12) может порождать неустойчивость, но лишь так, что при каждом  $K$  не может быть более одного растущего волнового решения. Это можно доказать для конечно-разностной аппроксимации уравнений (2.11), (2.12), при которой отрезок  $0 \leq p \leq p_0$  разбивается точками  $p_1, \dots, p_{N-1}$  на  $N$  равных частей длины  $\delta = p_0 / N$ , и уравнения записываются в разностном виде

$$(U_n - c) \left( r_{n-1/2}^2 \frac{\psi_{n-1} - \psi_n}{\delta^2} - r_{n+1/2}^2 \frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{\delta^2} - k^2 \psi_n \right) + B_n \psi_n = 0, \quad (2.11')$$

$$(U_0 - c) \left( \frac{\psi_0 - \psi_1}{\delta} + s_0^2 \psi \right) - F_0 \psi_0 = 0, \quad (2.12')$$

где  $r_{n-1/2}^2$  — некоторое среднее значение  $f_0^2 p^2 / \alpha^2 c^2$  между точками  $p_n$  и  $p_{n-1}$ , а  $s_0^2 = (\alpha^2 / p)_{p=p_0}$ . Тогда справедлива следующая теорема (Л. А. Дикий<sup>22</sup>): *если все  $B_n > 0$  или все  $B_n < 0$  (условие Рэля), или же последовательность  $B_n$  один раз меняет знак, и существует такая константа  $K_0$ , что  $(U_n - K_0) B_n < 0$  (условие Фьортофта), то уравнения (2.11') при крайних условиях*

$$\psi_N = \psi_{N-1}, \quad (2.13)$$

$$\psi_1 - \psi_0 = K(c) \psi_0, \quad K(c) = a + \frac{K}{b - c}, \quad a \geq 0, \quad (2.14)$$

имеют не более одной пары не вещественных комплексно-сопряженных собственных значений  $c$ .

Идея доказательства заключается в том, что собственные значения получаются как пересечения графиков функции  $M(c) = (\psi_1 - \psi_0) / \psi_0$  и гиперболы  $K(c)$ , а  $M(c)$  есть рациональная дробь, знаменатель которой — многочлен  $(N - 1)$ -й степени без не вещественных корней.

### 3. БИФУРКАЦИИ

Топологические особенности фазового потока  $M(t) = F^t M(0)$ , описывающего эволюцию всех течений жидкости в данной геометрии при всевозможных начальных данных, обычно зависят от некоторого параметра  $\mu$ , характеризующего степень неравновесности фазового потока, в случае вязкой жидкости — от числа Рейнольдса  $Re = \nu^{-1} L U$  (где  $L$  и  $U$  — типичные масштабы длины и скорости, а  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости), т. е. типичной величины отношения сил инерции к силам вязкости, или от того или иного его аналога.

#### 3.1. Топологические особенности

В число особенностей фазового потока будем включать *неблуждающие* фазовые точки (т. е. такие, что любая их окрестность пересекается с некоторой фазовой траекторией по меньшей мере дважды; к ним относятся, в частности, *неподвижные* точки, соответствующие стационарным решениям уравнений гидродинамики, и *периодические* точки, лежащие на замкнутых траекториях, соответствующих периодическим по времени решениям);

## предельные точки траекторий

$$M_\omega = \lim_{t_k \rightarrow \infty} F^{t_k} M$$

(если такие пределы существуют) и состоящие из них *предельные множества*  $\Omega_M$  (если  $M \in \Omega_M$ , то точка  $M$  называется *устойчивой по Пуассону*); *инвариантные множества* (заполненные целыми траекториями; таковы же и их границы, так что их можно считать замкнутыми; предельные множества являются замкнутыми инвариантными; непустое замкнутое инвариантное множество, не имеющее обладающих такими же свойствами подмножеств, называется *минимальным*); *рекуррентные точки*  $M$ , для которых при любом  $\varepsilon > 0$  существует такое  $T > 0$ , что  $\varepsilon$ -окрестность отрезка траектории  $\{F^t M\}$ ,  $t \in [\tau, \tau + T]$ , при всяком  $\tau$  содержит всю траекторию (по теореме Биркгофа, для рекуррентности  $M$  необходимо и достаточно, чтобы замыкание траектории  $F^t M$  было минимальным множеством); *аттракторы*, т. е.

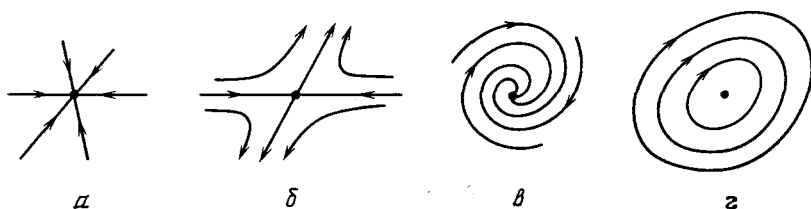


Рис. 1. Неподвижные точки  $u = 0$  двумерного линейного уравнения  $\dot{u} = Au$ .  
а — Узел. б — Седло. в — Фокус. г — Центр

минимальные множества  $\Lambda$  неблуждающих точек, имеющие окрестности, появляющиеся в которых фазовые траектории все асимптотически приближаются к  $\Lambda$  (аттракторы, отличающиеся от конечных сумм гладких многообразий, называются *странными*).

Перечисленные особенности фазовых потоков могут быть весьма разнообразными. Так, например, у простейшей двумерной линейной динамической системы  $\dot{u} = Au$  неподвижная точка  $u = 0$  в зависимости от собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  может быть *узлом* ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и одного знака), *седлом* ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и разных знаков), *фокусом* ( $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексно-сопряженные) или *центром* ( $\lambda_1, \lambda_2$  — мнимые сопряженные) (рис. 1). В частности, в окрестности седла траектории суть гиперболы, обе асимптоты которых проходят через седло, причем одна из них служит осью сжатия (так называемое *неустойчивое многообразие* седла, состоящее из точки  $u = 0$  и двух уходящих полутраекторий — неустойчивых сепаратрис), а другая — осью растяжения (устойчивое многообразие, состоящее из  $u = 0$  и двух входящих траекторий — *устойчивых сепаратрис*).

При изменении определяющего параметра  $\mu$  (например, росте  $Re$ ) фазовый поток деформируется, и при некоторых критических значениях  $\mu_{1cr}, \mu_{2cr}, \dots$  какие-то из его особенностей появляются или исчезают, или претерпевают качественное изменение. Такие изменения топологических особенностей фазового потока называются его *бифуркациями* (или «катастрофами»).

### 3.2. Смена устойчивости

Продemonстрируем простейшие бифуркации, рассмотрев эволюцию малых возмущений  $u(x, t)$  стационарного течения  $u_0(x)$  вязкой жидкости, являющихся решениями линеаризованных уравнений гидродинамики:

$$u(x, t) = A(t) f_0(x), \quad A(t) = e^{-i\sigma t}, \quad \sigma = \pm\omega + i\gamma. \quad (3.1)$$

При малых  $Re$  стационарное течение  $u_0(x)$  обычно представляет собой в фазовом пространстве устойчивый фокус. Это значит, что все собственные значения  $\sigma$  линеаризованных уравнений имеют отрицательные мнимые части  $\gamma < 0$ , так что любые малые возмущения (3.1) затухают со временем. С увеличением  $Re$  мнимые части  $\gamma$  у некоторых собственных значений возрастают, и может найтись такое критическое значение  $Re_{1\text{ cr}}$ , при котором впервые какое-то из собственных значений линеаризованных уравнений  $\sigma(Re)$  пересечет вещественную ось в комплексной плоскости  $\sigma$ , т. е. будет  $\gamma(Re_{1\text{ cr}}) = 0$ . Соответствующее возмущение (3.1) не будет ни затухать, ни разрастаться со временем, т. е. будет *нейтральным*.

Может оказаться, что при этом одновременно будет  $\omega(Re_{1\text{ cr}}) = 0$ , так что и в целом  $\sigma(Re_{1\text{ cr}}) = 0$ ; значит,  $A(t) \equiv 1$  и  $u(x, t) \equiv u_0(x) + f_0(x)$  описывает новое стационарное течение; тогда говорят, что при  $Re = Re_{1\text{ cr}}$  происходит бифуркация — *смена устойчивости*. Такая бифуркация наблюдается, например, при развитии *термической конвекции* в слое жидкости, подогреваемом снизу (где из состояния покоя  $u_0(x) \equiv 0$  сначала образуется *стационарная конвекция* в виде роликов или ячеек Бенара), а также в *течении Тейлора*, т. е. круговом течении Куэтта между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами (где из стационарного ламинарного течения образуются *стационарные тороидальные роликовые вихри Тейлора*). Эти течения мы подробно рассмотрим ниже.

### 3.3. Нормальная бифуркация Андронова — Хопфа

Если же  $\omega(Re_{1\text{ cr}}) = \omega_1 \neq 0$ , то возмущение (3.1) при  $Re = Re_{1\text{ cr}}$  представляет собой нейтральную волну. При  $Re > Re_{1\text{ cr}}$  уже будут существовать собственные значения  $\sigma$  с положительными мнимыми частями

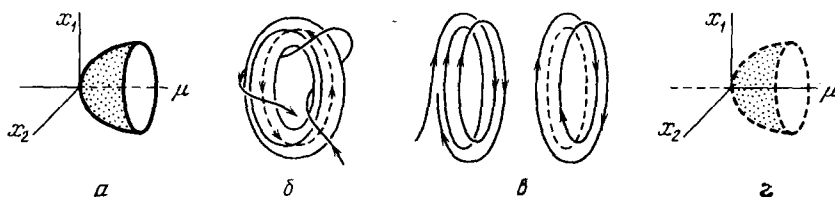


Рис. 2. а — Нормальная бифуркация Андронова — Хопфа. б — Рождение двумерного инвариантного тора. в — Бифуркация удвоения периода. г — Обратная бифуркация Андронова — Хопфа

$\gamma > 0$ , т. е. экспоненциально разрастающиеся со временем возмущения (3.1), так что течение  $u_0(x)$  будет неустойчивым по отношению к малым возмущениям. Э. Хопф<sup>23</sup> доказал, что в фазовых пространствах динамических систем довольно общего вида при значениях  $Re$  в некоторой окрестности  $Re_{1\text{ cr}}$  существует однопараметрическое семейство замкнутых траекторий; применимость этой теоремы к уравнениям гидродинамики доказана Н. Н. Брушлинской<sup>24</sup>. Появление замкнутых траекторий при  $Re > Re_{1\text{ cr}}$  (тогда они суть предельные циклы, которым соответствуют периодические по времени течения), т. е. превращение устойчивого фокуса в предельный цикл (рис. 2, а), называется *нормальной бифуркацией Хопфа* (А. А. Андронов открыл эту бифуркацию на 13 лет раньше).

### 3.4. Уравнение Ландау

Переход неустойчивого малого возмущения (3.1) в периодическое течение описал Л. Д. Ландау<sup>3</sup>. Пока возмущение мало, его амплитуда  $A(t)$  удовлетворяет уравнению  $\partial |A|^2 / \partial t = 2\gamma |A|^2$ , но при конечных  $|A|$

его правую часть следует дополнить следующими членами ее разложения по степеням  $A$  и  $A^*$ . При этом имеющиеся в (3.1) высокочастотные колебания с частотой  $|\omega_1| \gg \gamma$  целесообразно исключить сглаживанием по времени (по периоду  $\tau$  из интервала  $[2\pi |\omega_1|^{-1}, \gamma^{-1}]$ ) — тогда члены третьей степени выпадут, а из членов четвертой степени сохранится лишь слагаемое, пропорциональное  $|A|^4$ , и с этой точностью получаются следующее уравнение Ландау и его решение:

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = 2\gamma |A|^2 - \delta |A|^4, \quad \delta > 0, \quad (3.2)$$

$$|A(t)|^2 = A_0^2 A_\infty^2 [A_0^2 + (A_\infty^2 - A_0^2) e^{-2\gamma t}], \quad A_\infty = \left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, при малом начальном  $A_0$  амплитуда  $|A(t)|$  сначала растет по линейной теории экспоненциально, как  $A_0 e^{\gamma t}$ , а затем этот рост замедляется, и при  $t \rightarrow \infty$  она стремится к не зависящему от  $A_0$  предельному значению  $A_\infty$ , при малых  $\text{Re} - \text{Re}_{1\text{ cr}}$  пропорциональному  $(\text{Re} - \text{Re}_{1\text{ cr}})^{1/2}$  (так как  $\gamma \sim \text{Re} - \text{Re}_{1\text{ cr}}$  и  $\delta \neq 0$ ). Итак, при малом  $\text{Re} - \text{Re}_{1\text{ cr}} > 0$  возмущение (3.1) стремится с ростом  $t$  к периодическому колебанию  $u_1(x, t)$  с конечной амплитудой  $A_\infty$  и произвольной фазой (определяемой случайной начальной фазой возмущения и потому представляющей собой степень свободы предельного течения).

### 3.5. Бифуркации периодических течений

Если записать уравнения гидродинамики, линеаризованные относительно периодического решения  $M(t)$  с периодом  $T_1$ , символически в виде  $\partial M'/\partial t = f' M'$ , где  $f'$  — ограниченный линейный оператор, непрерывно и периодически с периодом  $T_1$  зависящий от  $t$ , то для всякого возмущения  $M'(t)$  периодического решения будет  $M'(t + T_1) = U(T_1) M'(t)$ , где  $U(T_1)$  — линейный и ограниченный так называемый оператор монодромии. Его собственные значения  $\rho_n(\text{Re})$  называются мультипликаторами; один из них, тривиальный, равен единице и дальше учитываться не будет. Если все  $|\rho_n| < 1$ , то все возмущения при каждом обходе замкнутой траектории уменьшаются, так что периодическое движение устойчиво; если же  $|\rho_n| > 1$  хотя бы при одном  $n$ , то оно неустойчиво. Таким образом, с ростом  $\text{Re}$  бифуркации периодических движений происходят при переходе мультипликаторов  $\rho_n(\text{Re})$  в комплексной плоскости  $\rho$  через единичную окружность.

Так, с ростом  $\text{Re}$  может быть достигнуто новое критическое значение  $\text{Re}_{2\text{ cr}}$ , при котором пара мультипликаторов примет значения  $\exp(\pm i\alpha)$  (где  $\alpha \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$ , чтобы исключить резонансы). Тогда произойдет вторая нормальная бифуркация: периодическое течение  $u_0(x) + u_1(x, t)$  станет неустойчивым относительно какого-то из возмущений вида  $e^{-i\sigma t} f_1(x, t)$ , где  $f_1$  — периодическая по времени функция с периодом  $2\pi/\omega_1$ , а собственное значение  $\sigma$  имеет вещественную часть  $\pm\omega_2$ . При небольших  $\text{Re} - \text{Re}_{2\text{ cr}}$  это возмущение будет возрастать со временем до конечного предела — квазипериодического движения с двумя периодами  $2\pi/\omega_1$  и  $2\pi/\omega_2$  и двумя степенями свободы (фазами колебаний). Таким образом, из замкнутой траектории образуется траектория на двумерном торе (рис. 2, б). Если затем произойдет следующая нормальная бифуркация, то образуется траектория на трехмерном торе, и т. д.

Если при  $\text{Re} = \text{Re}_{2\text{ cr}}$  один из мультипликаторов переходит через единичную окружность в точке  $\rho = -1$ , то  $U(T_1) M'(t) = -M'(t)$ , т. е. малое возмущение за один оборот по траектории  $u_0(x) + u_1(x, t)$  просто меняет знак. Тогда через следующий оборот получится  $M'(t + 2T_1) = -U(T_1) M'(t) = M'(t)$ , т. е. возмущенная траектория замкнется. Таким образом, в этом случае при  $\text{Re} = \text{Re}_{2\text{ cr}}$  происходит бифуркация удвоения периода — из периодического движения с периодом  $T_1$  рождается устой-



чивое периодическое движение с удвоенным периодом  $2T_1$ , а исходное движение становится неустойчивым (рис. 2, е). Таким же образом затем может произойти следующая бифуркация удвоения периода и т. д.

### 3.6. Обратная бифуркация Андронова — Хопфа

Если предсказываемое теоремой о бифуркации Андронова — Хопфа однопараметрическое семейство замкнутых траекторий появляется еще при  $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{ cr}}$ , то в разложении Ландау (3.2) коэффициент  $\delta$  должен быть отрицательным, а коэффициент  $\gamma \sim \text{Re} - \text{Re}_{1\text{ cr}}$  будет отрицательным при  $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{ cr}}$  и положительным при  $\text{Re} > \text{Re}_{1\text{ cr}}$ . Значит, при  $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{ cr}}$  уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t} = -2|\gamma| |A|^2 + |\delta| |A|^4, \quad (3.3)$$

откуда видно, что замкнутая траектория неустойчива: траектории, лежащие внутри нее, наматываются на неподвижную точку (иначе говоря, возмущения с малыми амплитудами  $|A| < A_1 = (2|\gamma|/|\delta|)^{1/2}$  затухают со временем), а траектории вне ее сматываются с нее и уходят в другие области фазового пространства (иначе говоря, возмущения с конечными амплитудами  $|A| > A_1$  растут со временем, так что при  $\text{Re}_{1\text{ cr}} > \text{Re} > \text{Re}_{1\text{ cr}} - \alpha^2 |A|^2$  движение оказывается неустойчивым по отношению к таким возмущениям). При возрастании  $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{ cr}}$  замкнутая траектория сжимается, и при переходе  $\text{Re}$  через значение  $\text{Re}_{1\text{ cr}}$  она исчезает — это явление называется *обратной бифуркацией* (рис. 2, з). При  $\text{Re} > \text{Re}_{1\text{ cr}}$  уравнение (3.2) с коэффициентами  $\gamma > 0$  и  $\delta < 0$  имеет решение

$$|A(t)|^2 = A_0^2 A_1^2 [(A_0^2 + A_1^2) e^{-2\gamma t} - A_0^2]^{-1}, \quad A_1 = \left( \frac{2\gamma}{|\delta|} \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

обращающееся в бесконечность за конечное время  $t_1 = (1/2\gamma) \ln [1 + (A_1^2/A_0^2)]$ . Но ясно, что еще раньше уравнение (3.2) перестает быть пригодным и должно быть дополнено следующими членами разложения Ландау. Имеющиеся примеры показывают, что после обратной бифуркации при  $\text{Re} > \text{Re}_{1\text{ cr}}$  движения, по-видимому, быстро приобретают непериодический характер.

## 4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим сначала вопрос об устойчивости стационарных плоскопараллельных течений несжимаемой вязкой жидкости, имеющих скорость  $u_0 = \{U(z), 0, 0\}$ , так что возмущения поля скорости  $u(x, t)$  будут удовлетворять уравнениям (1.7) с добавлением в правую часть уравнений движения слагаемого  $\nu \Delta u$ , описывающего ускорение сил вязкости. Назовем такие уравнения (1.7').

### 4.1. Уравнение Орра — Зоммерфельда

Тогда для двумерных элементарных волновых решений этих уравнений вместо уравнения Рэлея (1.11) получится следующее так называемое *уравнение Орра — Зоммерфельда*:

$$(U - c) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - k^2 \psi \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \psi = -\frac{i\nu}{k} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - 2k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^4 \psi \right), \quad (4.1)$$

причем в безразмерных переменных это уравнение будет иметь такой же вид, и лишь  $\nu$  заменится на  $(\text{Re})^{-1}$ . Заметим, что если из четырех уравнений (1.7'), записанных для *трехмерных* волновых возмущений, которые зависят от  $x, y, t$  по закону  $\exp [ik_1(x - ct) + ik_2y]$ , исключить неизвестные  $u, v$

и  $p'$ , то для  $w$  получится такое же уравнение (4.1), лишь с заменой  $k^2$  на  $k_2^2 + k_1^2$  и  $v$  на  $vk_1k_1^{-1}$  (т. е.  $\text{Re}$  на  $k_1k_1^{-1} \text{Re}$ ). Значит, если при данном значении  $\text{Re}$  числа Рейнольдса имеется неустойчивое трехмерное волновое возмущение с собственным значением  $c$ , то существует двумерное волновое возмущение с таким же  $c$ , неустойчивое при меньшем числе Рейнольдса  $k_1k_1^{-1} \text{Re}$  (Г. Сквайр<sup>25</sup>). Заметим лишь, что при исключении неизвестных было потеряно решение уравнений (1.7'), у которого  $w \equiv 0$ , и, значит,  $k_1u + k_2v \equiv 0$ , причем  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k^2 u - \frac{ik_1}{v} (U - c) u = 0 \quad (4.2)$$

с краевыми условиями  $u = 0$  при  $z = 0, h$ . При  $k_2 \neq 0$  это уравнение имеет дополнительный спектр собственных значений  $c$ , отсутствующий у двумерных возмущений, но он соответствует лишь устойчивым возмущениям, т. е.  $\text{Im } c < 0$  (В. А. Романов<sup>26</sup>). Действительно, умножив (4.2) на  $u^*$ , проинтегрировав по  $z$  и взяв вещественную часть полученного равенства, имеем

$$-\int_0^h \left( \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) dz - (\text{Im } c) \frac{k_1}{v} \int_0^h |u|^2 dz = 0, \quad (4.3)$$

откуда и видно, что  $\text{Im } c < 0$ . Таким образом, с ростом  $\text{Re}$  двумерные волновые возмущения теряют устойчивость раньше трехмерных, и для анализа устойчивости по отношению к малым волновым возмущениям достаточно изучить спектр собственных значений уравнения Орра — Зоммерфельда (4.1) при краевых условиях  $\psi = \partial\psi/\partial z = 0$  при  $z = 0, h$ . Более того, в отличие от уравнения Рэлея (1.11), уравнение (4.1) не имеет сингулярностей, и, по-видимому, любое двумерное решение уравнений (1.7') является суперпозицией элементарных волновых решений (хотя полное доказательство этого утверждения так и не опубликовано).

#### 4.2. Принцип исчезающей вязкости

Оказывается, что справедлив следующий принцип исчезающей вязкости: растущие со временем и нейтральные волновые решения уравнений (1.7) суть пределы соответствующих решений уравнений (1.7') при  $v \rightarrow 0$ , затухающие же решения уравнений (1.7') стремятся при этом к соответствующим решениям уравнений (1.7) лишь вне некоторой области значений  $z$  («внутреннего пограничного слоя»), в которой их поведение определяется вязкостью, какой бы малой она ни была.

Чтобы сформулировать этот принцип в терминах собственных значений  $c$  уравнения Орра — Зоммерфельда, примем, что функция  $U(z)$  определена не только на отрезке  $0 \leq z \leq h$ , но и аналитически продолжается в некоторую окрестность этого отрезка в комплексной плоскости  $z$ . Введем функцию  $r(z) = [i(U - c)]^{1/2}$ . Будем называть дуги в плоскости  $z$ , соединяющие точки  $z = 0$  и  $z = h$ , допустимыми, если вдоль них  $U - c \neq 0$  и  $\text{Re} \int r dz$  изменяется монотонно. Будем говорить, что  $c$  есть собственное значение вдоль дуги, если при этом  $c$  существует аналитическое вдоль этой дуги решение уравнения Рэлея, обращающееся в нуль на концах дуги.

Тогда принцип исчезающей вязкости вытекает из следующей теоремы: если при  $v \rightarrow 0$  собственное значение уравнения Орра — Зоммерфельда стремится к такому пределу  $c$ , при котором в комплексной плоскости  $z$  можно провести допустимую дугу, то  $c$  есть собственное значение уравнения Рэлея вдоль этой дуги; обратно, если  $c$  есть собственное значение уравнения Рэлея вдоль некоторой допустимой дуги, то это  $c$  есть предел при  $v \rightarrow 0$  собственных значений уравнения Орра — Зоммерфельда (Ц. Линь<sup>27</sup>, В. Вазов<sup>28</sup>).

Чтобы выяснить, какие дуги являются допустимыми, рассмотрим сначала вещественное  $c$ , и пусть  $z$  — корень уравнения  $U(z) = c$ . Тогда в окрестности  $z_c$  будет  $U - c \approx U'_c(z - z_c)$ . Пусть  $U(z)$  — монотонно возрастающая функция, так что  $U'_c > 0$ . Положим

$$\eta(z) = \int_{z_c}^z r dz \approx e^{\pi i/4} (U'_c)^{1/2} \cdot \frac{2}{3} |z - z_c|^{3/2} \exp \left[ \frac{3i}{2} \arg(z - z_c) \right]. \quad (4.4)$$

Три кривые  $\operatorname{Re} \eta = 0$  (так называемые *линии Стокса*) расходятся из критической точки  $z = z_c$  под равными углами и делят ее окрестность на секторы I, II, в которых проходит отрезок  $0 \leq z \leq h$ , и III, где он не проходит (рис. 3, а). Любые два сектора отображаются функцией  $\eta(z)$  в плоскость, разрезанную по лучу, «берегами» которого являются образы линий Стокса. На рис. 3, б показан образ секторов I + II на плоскости, разрезанной по положительной части мнимой оси. В этой плоскости точки  $\eta(0)$  и  $\eta(h)$  можно соединить кривой, на которой  $\operatorname{Re} \eta$  меняется монотонно. Ее прообраз в плоскости  $z$  обходит критическую точку снизу — это и есть допустимая дуга.

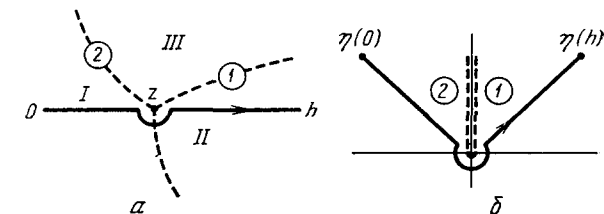


Рис. 3. а — Линии Стокса при вещественном  $c$ . б — Их образ при отображении  $\eta(z)$

При  $U'(z) < 0$ , наоборот, критическую точку нужно обходить сверху.

При профиле  $U(z)$ , симметричном относительно точки  $z = h/2$ , критических точек две, и одну надо обходить снизу (где  $U'_c > 0$ ), а другую — сверху (где  $U'_c < 0$ ). Если  $\operatorname{Im} c > 0$  (неустойчивость), и у критической точки на вещественной оси  $U' > 0$ , то  $z_c$  и весь сектор III лежат выше, а при  $U' < 0$  — ниже вещественной оси, которая при этом и является допустимой дугой. Если же  $\operatorname{Im} c < 0$  (устойчивость), то отрезок  $0 \leq z \leq h$  пересекает все три сектора,  $\operatorname{Re} \eta$  изменяется вдоль него немонотонно, а направление обхода допустимой дугой критической точки (со всем сектором III) определяется знаком  $U'$  вблизи нее так же, как и выше. Собственные функции уравнения Орра — Зоммерфельда в секторах I и II стремятся к собственным функциям уравнения Рэлея, в секторе же III при малых  $\nu$  они, по-видимому, быстро осциллируют; в окрестностях пересечения линий Стокса с вещественной осью образуются внутренние пограничные слои.

### 4.3. Плоские течения Куэтта и Пуазейля

Переходя к рассмотрению конкретных плоскопараллельных течений, начнем с плоскопараллельного течения Куэтта с линейным профилем скорости  $U(z) = Az$ . Согласно всем проводившимся расчетам, это течение линейно устойчиво, т. е. в нем не происходит нормальных бифуркаций, и  $\operatorname{Re}_{\text{кр}} = \infty$  (хотя полное доказательство этого так и не опубликовано). В то же время из экспериментов известно, что оно неустойчиво по отношению к конечным возмущениям, по-видимому, в области внутри некоторой «нейтральной поверхности» в трехмерном пространстве параметров  $(k, \operatorname{Re}, A)$ . Ее приближенно рассчитывали С. Кувабара<sup>29</sup> и Т. Эллингсен, Б. Гьевик и Е. Пальм<sup>30</sup>. По первой из этих работ, неустойчивость возникает лишь при  $\operatorname{Re} = (1/2)\nu^{-1} Ah^2 > \operatorname{Re}_{\text{кр, min}} \approx 45\,000$  в довольно маленьких областях плоскости  $(k, A)$ .

Плоское течение Пуазейля с параболическим профилем скорости  $U(z) = 4U_{\text{max}}(z/h)(1 - z/h)$  в идеальной жидкости линейно устойчиво, и обнаруженная В. Гейзенбергом<sup>31</sup> его линейная неустойчивость в вязкой

жидкости при больших  $Re$  (нормальная бифуркация) сначала показалась парадоксальной (так как казалось, что вязкость может быть только стабилизирующим фактором). Но затем эта неустойчивость была подтверждена Ц. Линем<sup>32</sup> и последующими авторами, рассчитавшими «нейтральную кривую» в плоскости  $(k, Re)$ , внутри которой  $\gamma > 0$  (где  $k$  измеряется в единицах  $(h/2)^{-1}$ ,  $Re = (1/2)\nu^{-1}hU_{\max}$ , и  $\gamma$  определено в (3.1)); см. сплошную кривую на рис. 4. При этом получилось  $Re_{1\text{ cr}} \approx 5800$ ,  $k_{\text{cr}} \approx 1$ , и обе ветви нейтральной кривой при  $Re \rightarrow \infty$  стремятся к оси абсцисс  $k = 0$ , верхняя — как  $Re^{-1/11}$ , а нижняя — как  $Re^{-1/7}$ . Таким образом, с ростом  $Re$  возмущение с фиксированным не слишком большим  $k$  сначала оказывается устойчивым, затем попадает в область неустойчивости, но при очень больших  $Re$  (включая  $Re = \infty$ , т. е. идеальную жидкость) опять становится устойчивым. Упомянем также течение Пуазейля — Куэтта

$$U(z) = U\left(\frac{h}{2}\right) \left[ (4-\alpha) \frac{z}{h} - (4-2\alpha) \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right]. \quad (4.5)$$

При  $\alpha = 0$  получается течение Пуазейля. С ростом  $\alpha$  значение  $Re_{1\text{ cr}}$  здесь быстро возрастает и обращается в бесконечность уже при  $\alpha \approx 0,55$  — задолго до достижения течения Куэтта.

Однако плоское течение Пуазейля все же не является «благополучным» примером нормальной бифуркации: экспериментальные данные не подтвер-

ждают упомянутую выше рассчитанную «нейтральную кривую» и показывают, что потеря устойчивости происходит при значениях  $Re \sim 1000$  — 2500 — значительно ниже  $Re_{1\text{ cr}}$  линейной теории. Это заставляет подозревать наличие обратной бифуркации и неустойчивость по отношению к возмущениям конечной амплитуды. И действительно, В. Рейнольдс и М. Поттер<sup>33</sup>, С. Пекерис и Б. Школлер<sup>34</sup>, рассчитав коэффициент  $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$  разложения Ландау (3.2) ( $\delta_1$  описывает приток энергии от наиболее неустойчивого возмущения, искажающий ламинарное течение,  $\delta_2$  — генерацию этим возмущением старших гармоник,  $\delta_3$  — искажение его формы), установили, что в плоскости  $(k, Re)$  получается  $\delta < 0$  (за счет  $\delta_3$ ) всюду, кроме области, ограниченной на рис. 4 штриховой кривой. При этом кривые  $\gamma(k, Re) = 0$  и  $\delta(k, Re) = 0$  делят плоскость на четыре области с разными комбинациями знаков  $\gamma$  и  $\delta$ . Особенно любопытна область  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ , в которой могут существовать периодические движения конечной амплитуды. Согласно Д. Мексину<sup>35</sup>,  $Re_{\text{cr, min}} \sim 1000$  получается при некоторых трехмерных возмущениях.

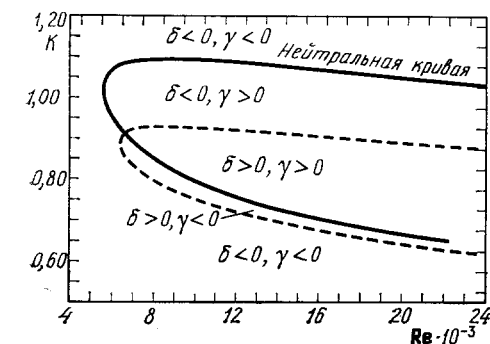


Рис. 4. Области неустойчивости плоского течения Пуазейля по С. Пекерису и Б. Школлеру (1967)

возмущением старших гармоник,  $\delta_3$  — искажение его формы), установили, что в плоскости  $(k, Re)$  получается  $\delta < 0$  (за счет  $\delta_3$ ) всюду, кроме области, ограниченной на рис. 4 штриховой кривой. При этом кривые  $\gamma(k, Re) = 0$  и  $\delta(k, Re) = 0$  делят плоскость на четыре области с разными комбинациями знаков  $\gamma$  и  $\delta$ . Особенно любопытна область  $\gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ , в которой могут существовать периодические движения конечной амплитуды. Согласно Д. Мексину<sup>35</sup>,  $Re_{\text{cr, min}} \sim 1000$  получается при некоторых трехмерных возмущениях.

#### 4.4. Неустойчивость пограничного слоя

Зато нормальная бифуркация вполне надежно обнаружена у течения в пограничном слое около плоской пластинки, трактуемого при расчетах как приблизительно плоскопараллельное. «Нейтральную кривую» для него впервые рассчитал В. Толлмиен<sup>36</sup>, в 1929 г. — для профиля  $U(z)$  из отрезков прямых и парабол, а в 1930 г. — для профиля Блазиуса (с  $Re_{1\text{ cr}} = 420$ , где  $Re = \nu^{-1}\delta^*U$ ,  $\delta^*$  — так называемая толщина вытеснения,  $U$  — скорость набегающего потока). Такой расчет был затем проведен также Г. Шлихтингом и последующими авторами. Он подтвержден экспериментами Дж. Шубауэра

и Г. Скремстейда<sup>37</sup> с порождаемыми вибратором возмущениями  $\psi(z) \exp \times [i(kx - \omega t)]$  с фиксированной (вещественной) частотой  $\omega$ , которые при  $\text{Im } k < 0$  нарастают вниз по течению (но поскольку  $\omega = ck$ , «нейтральные кривые»  $\text{Im } k = 0$  и  $\text{Im } \omega = 0$  совпадают). «Нейтральная кривая» здесь качественно такова же, как на рис. 4, но последующие расчеты показали, что при профиле скорости  $U(z)$  с точкой перегиба течение более неустойчиво: при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  верхняя ветвь «нейтральной кривой» стремится к асимптоте  $k = k_\infty > 0$ , так что возмущения с  $k < k_\infty$ , ставшие при некотором  $\text{Re}_{\text{сг}}$  неустойчивыми, остаются таковыми при всех  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{сг}}$ , вплоть до идеальной жидкости (см. ниже рис. 8, б).

Эксперименты П. Клебанова, К. Тидстрема и Л. Сарджента<sup>38</sup> и других авторов показали, что дальнейшая эволюция неустойчивой волны Толлмиена — Шлихтинга в пограничном слое около плоской пластинки приводит при  $\text{Re}_{\text{сг}}$  ко второй нормальной бифуркации — наложению на первичную двумерную вторичной трехмерной волны, периодической по поперечному направлению  $y$  и имеющей групповую скорость по  $x$ , близкую к фазовой скорости первичной волны. Вторичная волна чрезвычайно быстро нарастает вниз по течению, создает вихри с продольными осями, осуществляющие

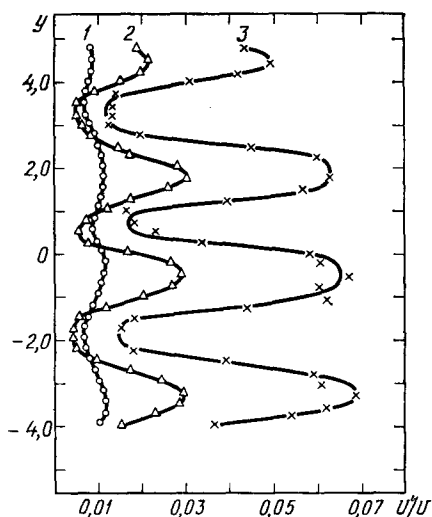


Рис. 5. Нарастание вниз по течению пульсаций продольной скорости во вторичной волне в пограничном слое над плоской пластинкой.

1 — Для  $x = 7,6$  см; 2 — Для  $x = 15,2$  см;  
3 — Для  $x = 19$  см

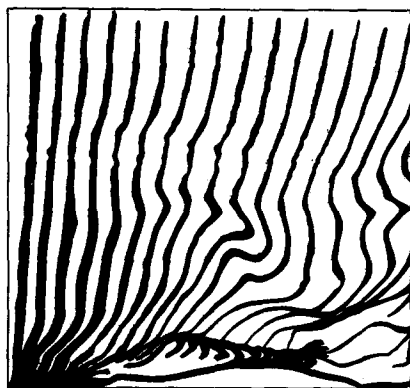


Рис. 6. Пузырьковые изохроны (т. е. линии постоянного времени; вид сбоку) в пограничном слое около плоской пластинки, генерируемые вертикальной нитью (левая кромка фотографии, течение слева направо)

резкое поперечное перераспределение интенсивности пульсаций продольной скорости  $u$  (рис. 5), и становится нелинейной. Последнее приводит к фокусированию вторичного волнового пакета на гребне первичной волны, а также к исчезновению во вторичной волне участков с положительными аномалиями продольной скорости  $U > 0$  и оставлению только участков с отрицательными импульсами  $U < 0$  (этот эффект объяснил М. Ландаль<sup>39</sup>). Сначала образуется один импульс на цикл колебаний вибратора, ниже по течению — два и т. д., и, по-видимому, после режима с четырьмя импульсами на цикл течение становится хаотическим.

Визуализация при помощи цепочек микронных пузырьков, периодически генерируемых электрическим током на платиновой нити, и микроинъекций краски (С. Клайн с соавторами<sup>40-45</sup>), а также при помощи взвешенных

частиц (Э. Корино, Р. Бродки<sup>46</sup>) указала на две взаимодействующие друг с другом мелкомасштабные формы течения в вязком подслое у стенки: вихри с поперечными осями и знаком  $U'$  и ручейки замедленной жидкости в ложбинах вторичных поперечных волн.

Ручейки образуются на высотах  $z^+ = \nu^{-1} u_* z = 2,5 - 10$  ( $u_*$  — «скорость трения» на стенке), имеют ширину  $\delta y^+ = 10 - 30$  и разделены расстояниями  $\Delta y^+ \sim 100$ . Они медленно всплывают под действием продольных вихрей, но из-за отрицательных градиентов давления под проплывающими выше поперечными вихрями отрываются от стенки и проникают вверх в быстрее

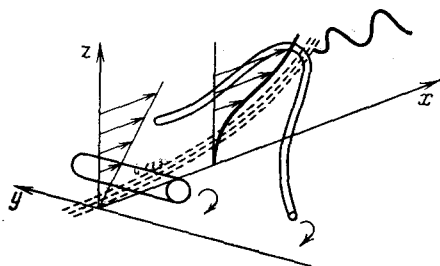


Рис. 7. Образование подковообразного вихря

текущую жидкость, создавая на мгновенном профиле скорости искривления с точками перегиба (рис. 6). После этого на ручейке возникают колебания, и вскоре его конец «взрывается», создавая хаотическое движение (преимущественно на высотах  $z^+ = 10 - 30$  и на расстояниях от точки отрыва  $\delta x^+ \sim 1000 - 1500$ ). Подсчитано, что во «взрывах» осуществляется почти вся продукция турбулентной энергии.

При отрыве ручейка центральная часть связанного с ним поперечного вихря всплывает и уходит вниз по течению, образуя «подкову» (рис. 7; продольное сечение «ноги» такой «подковы» видно на фотографии рис. 6). Верхняя часть «подковы», обгоняя поверхность следующего ниже по течению замедленного ручейка, создает на нем отрицательный градиент давления и приводит к его отрыву и образованию новой «подковы». Наложение двух «подков» приводит к их объединению, но чаще они пересекаются, производя «взрывы» — так, локализованно, происходят здесь и «стохастизация», и перенос энергии по спектру в сторону меньших масштабов.

#### 4.5 Течения в безграничном пространстве

Из плоскопараллельных течений в безграничном пространстве упомянем прежде всего плоскую струю, например, с профилем скорости  $U(z) = U_0 [\text{ch}(z/h)]^{-2}$ , которая всегда неустойчива относительно антисимметричных возмущений, причем  $\text{Re}_{\text{cr, min}} = (\nu^{-1} h U_0)_{\text{cr}} \approx 3,7$  и  $h k_{\text{cr}} \approx 0,25$ ,

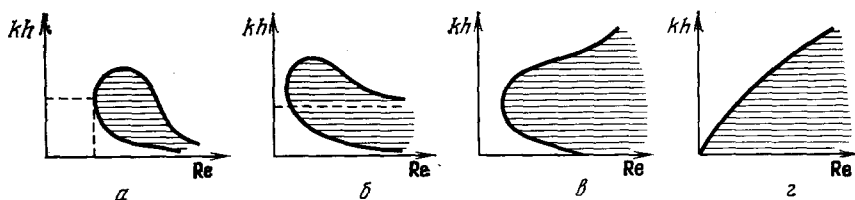


Рис. 8. Области линейной неустойчивости в плоскости  $(kh, \text{Re})$ .

а — У плоского течения Пуазейля. б — У пограничного слоя около плоской пластинки. в — У плоской струи. г — У плоской зоны перемешивания

а с ростом  $\text{Re}$  верхняя ветвь «нейтральной кривой» монотонно поднимается (рис. 8, в). Неустойчивы при любых  $\text{Re}$  сглаживающие тангенциальный разрыв скорости ламинарные «зоны перемешивания»: у них нижняя ветвь «нейтральной кривой» совпадает со всей полуосью  $k = 0$ , а верхняя с ростом  $\text{Re}$  монотонно поднимается (рис. 8, г).

#### 4.6. Течение Пуазейля в трубе

Из осесимметричных течений ограничимся здесь рассмотрением лишь течения Пуазейля в круглой трубе. Для него задача о собственных значениях уравнения типа Орра — Зоммерфельда, обобщающего на случай вязкой жидкости уравнение Рэлея (1.22), оказалась математически очень сложной, и был рассчитан лишь ряд частных случаев (осесимметричные возмущения с  $n = 0$  и некоторые другие).

Неустойчивых возмущений обнаружено не было, так что течение Пуазейля в трубе, как и плоское течение Куэтта, по-видимому, линейно устойчиво, т. е.  $Re_{1\text{ cr}} = \infty$ .

В то же время эксперименты, начиная с самого О. Рейнольдса (1883), с несомненностью показывают, что это течение всегда остается ламинарным, как бы велики ни были начальные возмущения на входе в трубу, лишь при  $Re = 2v^{-1}RU_{\max} < Re_{\text{cr, min}} \sim 2000$ , а выше некоторого  $Re_{\text{cr}}$  оно теряет устойчивость — очевидно, по отношению к конечным возмущениям, так как уменьшением начальных возмущений можно «затянуть» ламинарный режим до очень больших  $Re$  (у В. Пфеннигера <sup>47</sup> — даже до  $Re = 100\,000$ ). Потеря устойчивости происходит в форме появления перемежающихся коротких по  $x$ , но заполняющих все сечение трубы «турбулентных пробок», вниз по течению удлиняющихся и сливающихся друг с другом.

Область неустойчивости в пространстве параметров  $(k, Re, A)$  для этого течения рассчитали А. Дэви и Г. Нгуйен <sup>48</sup>. Отметим, что при наличии на оси трубы стержня, на поверхности которого скорость должна обращаться в нуль, течение ведет себя подобно плоскому течению Пуазейля на рис. 4 — у него появляются и область линейной неустойчивости, и область обратной бифуркации.

#### 4.7. Следы за телами

В заключение раздела 4 в качестве примера поведения следов за обтекаемым вязкой жидкостью телом перечислим бифуркации следа за перпендикулярным набегающему потоку цилиндром кругового сечения. При  $Re \sim 10$  происходит *смена устойчивости*, и вместо монотонного плавного обтекания за цилиндром образуется пара стационарных вихрей. При  $Re > 40$  они начинают поочередно отрываться от цилиндра, замещаясь новыми вихрями, и уплывать вниз по течению, образуя вихревую *дорожку Кармана*. При  $Re > 100$  вихри заменяются быстро турбулизирующимися областями поочередно отрывающихся пограничных слоев. При  $Re > 10^5$  пограничные слои турбулизируются еще до отрыва, точка отрыва продвигается вниз по течению, турбулентный след сужается, и сопротивление уменьшается (*кризис сопротивления*). При  $Re \sim 10^6$  турбулентный след расширяется, и сопротивление растет.

Наконец, при  $Re \sim 10^7$  след начинает колебаться как целое. При наличии у жидкости свободной поверхности все эти явления могут видоизменяться, и на них еще накладываются так называемые корабельные волны. В стратифицированной жидкости все они будут сопровождаться генерацией различных видов внутренних волн.

#### 5. СТОХАСТИЧНОСТЬ

В вязкой жидкости конечное число младших (крупномасштабных) мод движения полностью определяет и все остальные моды, так как из-за вязкости старшие (мелкомасштабные) моды сильно затухают и лишь повторяют с уменьшенной амплитудой колебания основных мод (в частности, имеют тот же тип спектра — дискретный или непрерывный).

### 5.1. Конечность

В связи с этим Э. Хопф<sup>4</sup> высказал гипотезу о том, что все множество фазовых траекторий уравнений Навье — Стокса при  $t \rightarrow \infty$  притягивается к *конечномерному* множеству. Для двумерных течений вязкой жидкости эту гипотезу удалось доказать (С. Фойа и Г. Проди<sup>49</sup>, О. А. Ладыженская<sup>50</sup>). Упомянем естественную оценку числа степеней свободы у развитой (с большим  $Re$ ) локальной трехмерной турбулентности  $N \sim (Re/Re_{cr})^{9/4}$  (Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц<sup>51</sup>). Аналогичная оценка для двумерной турбулентности со спектральным переносом энтропии (т. е. квадрата вихря) в сторону малых масштабов  $N \sim Re/Re_{cr}$  менее аккуратна, так как этот спектральный перенос не вполне локализован. Более общие оценки размерности аттракторов двумерных уравнений Навье — Стокса будут указаны в разделе 5.7 ниже. Таким образом, уравнения гидродинамики вязкой жидкости можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, Re), \quad \mathbf{u} = (u^1(t), \dots, u^N(t)), \quad (5.)$$

где  $u^h(t)$ , например, коэффициенты галеркинских приближений.

### 5.2. Диссипативность

Вязкость создает не только конечномерность фазового пространства, но и *диссипативность* фазового потока, т. е. сжатие в среднем фазового объема «вниз по течению». Пусть  $\delta V(\mathbf{u}_0, 0) = \prod_{h=1}^N \delta u_0^h$  — малый начальный элемент фазового объема около точки  $\mathbf{u}_0$ , а  $\delta V(\mathbf{u}_0, t)$  — его значение после смещения вниз по фазовому потоку через время  $t$ . При малых  $t$  будет  $\delta V(\mathbf{u}_0, t) = \prod_{h=1}^N \delta u^h$ , где  $\delta u^h \approx (\partial u^h / \partial u_0^h) \delta u_0^h$ . Поскольку  $\partial \delta u^h / \partial t \approx (\partial \dot{u}^h / \partial u_0^h) \delta u_0^h$ , относительная скорость изменения  $\delta V$  со временем равна

$$\Lambda(\mathbf{u}_0) \equiv (\delta V)^{-1} \frac{\partial (\delta V)}{\partial t} = \sum_{h=1}^N (\delta u^h)^{-1} \frac{\partial (\delta u^h)}{\partial t} \approx \sum_{h=1}^N \frac{\partial \dot{u}^h}{\partial u_0^h} = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{u}_0). \quad (5.2)$$

В разных фазовых точках  $\mathbf{u}_0$  эта величина может быть как положительной (расширение), так отрицательной (сжатие). Фазовый поток называется диссипативным, если при всех  $\mathbf{u}_0$

$$\Lambda_0(\mathbf{u}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \left| \frac{\delta V(\mathbf{u}_0, t)}{\delta V(\mathbf{u}_0, 0)} \right| < 0 \quad (5.3)$$

(или, при более общем определении, если каждый шар достаточно большого радиуса с центром в начале координат в фазовом пространстве является поглощающей областью). Вследствие диссипативности аттракторы имеют нулевые фазовые объемы (и размерности меньше  $N$ ).

### 5.3. Определение стохастичности

Особый интерес здесь для нас представляют странные аттракторы, на которых фазовые траектории обнаруживают свойства стохастичности:

1) очень чувствительную зависимость от начальных условий, создаваемую экспоненциальной *расходимостью* начально близких траекторий (и приводящую к их непредсказуемости или невоспроизводимости при задании начальных условий со сколь угодно высокой, но конечной точностью);

2) всюду плотность на аттракторе почти всех траекторий, т. е. их сколь угодно близкое прохождение около любой его точки (и, значит, бесконечно-



кратную возвращаемость к ней), причем любое начальное неравновесное распределение вероятностей (мера) в фазовом пространстве (точнее, в области притяжения странного аттрактора) стремится к некоторому предельному равновесному распределению на аттракторе (инвариантной мере);

3) *перемешивание*, означающее, что для любых (измеримых) подмножеств аттрактора  $A$  и  $B$  вероятность после выхода из  $A$  через большое время  $t$  оказаться в  $B$  пропорциональна мере  $B$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \{ (F^t A) \cap B \} = P(A) P(B), \quad (5.4)$$

где символ  $\cap$  означает пересечение множеств. Следствием перемешивания является независимость от начальных условий  $u_0$  (при почти всех  $u_0$ ) среднего значения по времени  $\langle \Phi [u(t)] \rangle$  любой функции  $\Phi(u)$  на странном аттракторе и его совпадение со средним значением по инвариантной мере  $\overline{\Phi(u)}$  (*эргодичность*):

$$\langle \Phi \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \Phi [u(t)] dt = \int \Phi(u) P(du) \equiv \overline{\Phi}. \quad (5.5)$$

Признаком перемешивания является достаточно быстрое затухание при больших временах  $\tau \rightarrow \infty$  корреляционных функций

$$B^{jl}(\tau) = \langle [u^j(t) - \langle u^j \rangle] [u^l(t + \tau) - \langle u^l \rangle] \rangle \quad (5.6)$$

и, значит, непрерывность их преобразований Фурье по  $\tau$  — спектральных функций.

*Турбулентностью* представляется целесообразным называть стохастическую (в смысле (1) — (3)) эволюцию *завихренного* течения (вязкой) жидкости. Стохастические *потенциальные* течения жидкости представляются предпочтительным называть *случайными волновыми полями*, а для негидродинамических систем ограничиваться, когда надо, прилагательным *стохастические*.

#### 5.4. Г и п е р б о л и ч н о с т ь

Сосредоточимся теперь на первом свойстве стохастичности. Экспоненциальная расходимость близких траекторий при сжатии фазового объема возможна, если по одним направлениям  $u^h$  в фазовом пространстве  $\{u\}$  происходит расширение, а по другим — сжатие, т. е. неблуждающие фазовые точки должны быть подобны двумерным седлам. Такие точки называются *гиперболическими*. Неподвижная точка  $u_0$  является гиперболической, если матрица Якоби  $A(u_0) = \{\partial F^h / \partial u^l\}$  в этой точке имеет  $K$  собственных значений с положительной и  $N - K$  с отрицательной действительной частью,  $0 < K < N$ . Множества  $W_{u_0}^s$  и  $W_{u_0}^u$  фазовых точек  $u_0$ , через которые проходят траектории, стремящиеся к  $u_0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ , называются соответственно устойчивым и неустойчивым многообразиями точки  $u_0$ ; в малой окрестности точки  $u_0$  они суть подпространства, натянутые на  $N - K$  и  $K$  собственных векторов матрицы  $A(u_0)$ , соответствующих ее собственным значениям с отрицательными и положительными действительными частями.

Точки пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий  $W_u^s$  и  $W_u^u$ , отличающиеся от самой точки  $u$ , называются *гомоклиническими* (а пересечения устойчивого многообразия  $W_u^s$  одной неподвижной точки  $u$  и неустойчивого многообразия  $W_v^u$  другой неподвижной точки  $v$  — *гетероклиническими точками*). В их окрестности структура фазового потока может быть особенно сложной (см. ниже).

Периодическая траектория является гиперболическим множеством, если некоторые мультипликаторы (см. раздел 3) лежат внутри, а осталь-

ные — вне единичной окружности (тривиальный мультипликатор, равный единице, опять не учитывается). Множества  $W^s$  и  $W^u$  траекторий, притягивающихся к предельному циклу при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ , называются его устойчивым и неустойчивым многообразиями. Если сумма их размерностей равна  $N - 1$ , то их пересечение называется *трансверсальным*.

В качестве иллюстрации гомоклинических структур рассмотрим пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий периодической траектории в трехмерном фазовом пространстве. При этом удобно использовать так называемое *отображение последования Пуанкаре*, которое в общем виде, в  $N$ -мерном фазовом пространстве, заключается в регистрации последовательных точек  $v_0, v_1, v_2, \dots$  пересечения траектории (в одном и том же

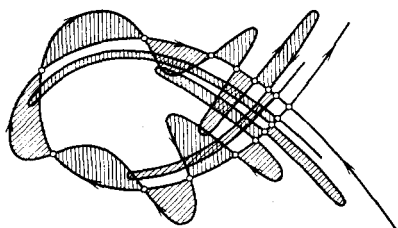


Рис. 9. Гомоклиническая траектория на секущей плоскости.

Заштрихованы участки плоскости, отображающиеся друг в друга

направлении без касания) с некоторой *секущей*  $(N - 1)$ -мерной поверхностью  $\Sigma$  в фазовом пространстве, чем определяется отображение  $v_{n+1} = P(v_n, Re)$  поверхности  $\Sigma$  в себя. Поскольку решение  $u(u_0, t)$  уравнения (5.1) существует при всех  $t$ , это отображение *обратимо*.

В случае  $N = 3$  секущей  $\Sigma$  может служить некоторая плоскость. Периодической траектории на  $\Sigma$  соответствует неподвижная точка отображения  $P$ , а устойчивому и неустойчивому многообразиям — устойчивая и неустойчивая сепаратрисы

(рис. 9, на котором для наглядности последовательные точки пересечения  $\Sigma$  фазовой траекторией соединены плавными линиями). Если у сепаратрис есть общая точка, то и все ее образы при  $n \rightarrow \infty$  и прообразы при  $n \rightarrow -\infty$  также суть точки пересечения сепаратрис, так что их имеется счетное множество. Они принадлежат так называемой *гомоклинической* траектории, двоякоасимптотической в том смысле, что при  $t \rightarrow \pm\infty$  она сжимается с исходной периодической траектории или наматывается на нее. При приближении к неподвижной точке, где движение экспоненциально замедляется, гомоклинические точки сгущаются, а амплитуды осцилляций сепаратрис возрастают. В окрестности гомоклинической траектории любой малый фазовый объем при  $t \rightarrow \pm\infty$  сложно деформируется и расплывается, так что почти все траектории экспоненциально расходятся. Такая локальная неустойчивость траекторий, заключенных в ограниченный фазовый объем, и приводит к особенной сложности фазового потока, который здесь включает счетное множество периодических и несчетное множество двоякоасимптотических к ним траекторий.

Инвариантное множество вообще является гиперболическим, если в каждой его точке  $u$  пространство  $T_u$ , касательное к фазовому пространству (линейное пространство касательных векторов в точке  $u$ ), есть прямая сумма одномерного подпространства  $E_u^1$ , натянутого на вектор фазовой скорости, и устойчивого и неустойчивого подпространств  $E_u^s = \{\xi\}$  и  $E_u^u = \{\eta\}$  таких, что действие на их элементы дифференциала фазового потока  $DF^t$  (линейно отображающего  $T_u$  на  $T_{F^t u}$ ) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \|\xi\|^{-1} \|DF^t \xi\| &\leq a e^{-ct}, \quad \|\eta\|^{-1} \|DF^t \eta\| \geq b e^{ct} \quad \text{при } t \geq 0, \\ \|\xi\|^{-1} \|DF^t \xi\| &\geq b e^{-ct}, \quad \|\eta\|^{-1} \|DF^t \eta\| \leq a e^{ct} \quad \text{при } t \leq 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где  $a, b, c$  — некоторые положительные константы, не зависящие от  $u$ . Фазовые точки  $v$ , для которых  $F^t v$  неограниченно сближается с  $F^t u$  при  $t \rightarrow \infty$  (или при  $t \rightarrow -\infty$ ), образуют устойчивое многообразие  $W_u^s$  (или неустойчивое многообразие  $W_u^u$ ) точки  $u$ ; оно касается в этой точке  $E_u^s$  (или

$E_u^n$ ). Объединение этих многообразий для всех  $u$  на данной траектории дает соответствующие многообразия  $W^s$  и  $W^u$  для траектории. Их пересечения, как и выше, образуют гомоклинические структуры.

### 5.5. Структурная устойчивость

Итак, экспоненциальная расходимость близких траекторий у диссипативных систем связана с наличием в их фазовых пространствах гиперболических множеств. Свойственны ли они многим динамическим системам или являются, наоборот, исключением? В последнем случае малое возмущение такой системы (скажем, всегда присутствующими в природе «шумами») лишило бы ее этого свойства. В связи с этим полезно использовать введенное А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным<sup>52</sup> понятие *структурно устойчивой* (или «грубой») системы, для (5.1) формулируемое следующим образом: при любом  $\varepsilon > 0$  имеется такое  $\delta > 0$ , что для любой возмущенной системы  $\dot{u} = F_1(u)$ , отстоящей от исходной по некоторой метрике  $\|F_1 - F\|$  не более чем на  $\delta$ , существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование фазового пространства на себя, сдвигающее его точки не более чем на  $\varepsilon$  и переводящее траектории невозмущенной системы в траектории возмущенной. Структурно устойчивые системы образуют открытое множество в пространстве всех возможных динамических систем.

В одно- и двумерных фазовых пространствах структурной устойчивостью обладают так называемые *системы М. Морса — С. Смейла*, у которых множества неблуждающих точек состоят лишь из конечного числа неподвижных точек и замкнутых траекторий, причем все они — гиперболические, и отвечающие любым таким точкам устойчивое и неустойчивое многообразия трансверсальны (т. е. либо не пересекаются, либо касательные к ним пространства в каждой точке их пересечения  $u$  в сумме образуют полное касательное пространство  $T_u$ ).

В фазовых пространствах большего числа измерений для структурной устойчивости по гипотезе С. Смейла<sup>53</sup> необходимо и достаточно, чтобы у каждого осуществляемого фазовым потоком преобразования  $F^t$  фазового пространства множество  $\Omega$  неблуждающих точек было гиперболическим, а множество периодических точек — всюду плотным в  $\Omega$  (это — так называемая «аксиома А») и, кроме того, каждое устойчивое и каждое неустойчивое многообразия точек из  $\Omega$  были бы трансверсальными. Достаточность этих условий доказана в довольно общем виде, а необходимость пока что лишь при более ограниченном определении структурной устойчивости.

Таким образом, при  $N \geq 3$  для фазовых потоков в определенном смысле типично наличие бесконечного множества  $\Omega$  гиперболических неблуждающих точек со всюду плотным в нем множеством периодических траекторий (Д. В. Аносовым<sup>54</sup> обнаружены даже потоки, у которых гиперболическим множеством является все фазовое пространство).

### 5.6. Канторовы множества

Множество  $\Omega$  может иметь очень сложную геометрическую структуру. Так, С. Смейл<sup>55</sup> доказал, что в широком классе типичных динамических систем каждая гомоклиническая точка принадлежит некоторому инвариантному подмножеству  $K$  множества  $\Omega$ , являющемуся *канторовым дисконтинуумом*, т. е. нигде не плотным замкнутым множеством без изолированных точек.

Стандартный пример канторова множества строится следующим образом: 1) выкинув из отрезка  $[0, 1]$  его *среднюю треть*, т. е. открытый (без крайних точек) интервал  $(1/3, 2/3)$ , получим множество  $K_1$  из двух отрезков  $[0, 1/3]$  и  $[2/3, 1]$ ; 2) выкинув из каждого из двух отрезков множества  $K_1$

его среднюю треть, получим множество  $K_2$  из четырех отрезков; ...;  $n$ ) выкинув из каждого из  $2^{n-1}$  отрезков множества  $K_{n-1}$  его среднюю треть, получим множество  $K_n$  из  $2^n$  отрезков; и т. д. Пересечение всех  $K_n$  и будет канторовым множеством  $K$ . Если каждое число из отрезка  $[0, 1]$  записать

в троичной системе счисления как  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ , где все  $a_n$  принимают значения 0, 1 и 2, то  $K$  состоит из точек, у которых все  $a_n$  равняются 0 или 2. Значит,  $K$  можно привести во взаимно однозначное соответствие с множеством всех

двоичных последовательностей — всем отрезком  $[0, 1]$ , т. е. множество  $K$  несчетно (имеет мощность континуума).

В качестве примера образования канторова множества в фазовом пространстве рассмотрим динамическую систему, которая создает за фиксированное время  $T$  отображение  $\Pi(u)$  внутренности  $U$  двумерного тора на себя так, что  $\Pi(U)$  есть внутренность вложенного в  $U$  тора с одной петлей, показанного на рис. 10. Круг  $S$ , являющийся сечением тела  $U$ , при этом пре-

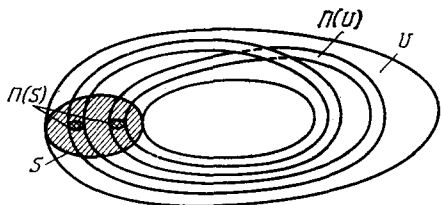


Рис. 10. Отображение  $\Pi(U)$  внутренности  $U$  двумерного тора на себя, порождающее странный аттрактор

образуется в два кружка  $\Pi(S)$  внутри  $S$ . Следующая итерация  $\Pi^2(S)$  даст по два кружочка внутри кружков  $\Pi(S)$  и т. д. Пересечение всех итераций  $\Pi^n(S)$  дает канторово множество точек в  $S$ , так что пересечение всех итераций  $\Pi^n(U)$  есть канторово множество линий — так называемый *одномерный соленоид* Р. Вильямса.

## 5.7. Фрактальность

Канторово множество *фрактально*, т. е. его *хаусдорфова* размерность  $\dim_H K$  превышает обычную *топологическую* размерность (у него равную нулю). При этом  $\dim_H A$  определяется через *хаусдорфову*  $\alpha$ -меру множества  $A$ :

$$\text{mes}_{H,\alpha}(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{U \in \Gamma(A)} [D(U)]^\alpha, \quad (5.8)$$

где нижняя грань берется по конечным или счетным покрытиям  $\Gamma$  множества  $A$  шарами  $U$  с диаметрами  $D(U) \leq \varepsilon$ . Размерность  $\dim_H A$  определяется как такое число  $\alpha_0$ , что мера (5.8) при  $\alpha > \alpha_0$  равна нулю, а при  $\alpha < \alpha_0$  — бесконечности. Если в (5.8) используются только покрытия одинаковыми шарами диаметра  $\varepsilon$  и берется верхний или нижний предел (т. е. наибольший или наименьший предел по подпоследовательностям значений  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), то получается верхняя  $\text{mes}_{c,\alpha}(A)$  или нижняя  $\text{mes}_{c,\alpha}(A)$  *емкостная*  $\alpha$ -мера и  $\overline{\dim}_c A$  или  $\underline{\dim}_c A$  есть нижняя грань значений  $\alpha$ , при которых верхняя или нижняя мера равна нулю (или же верхняя грань значений  $\alpha$ , при которых мера равна бесконечности). При этом  $\dim_H A \leq \underline{\dim}_c A \leq \overline{\dim}_c A$ . Если последние две величины здесь совпадают, то они определяют *емкость* множества  $A$ :

$$\dim_c A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(A)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (5.9)$$

где  $N_\varepsilon(A)$  — минимальное число шаров диаметра  $\varepsilon$ , покрывающих множество  $A$ . Используемые выше при построении  $K$  множества  $K_N$  состоят из  $N_\varepsilon = 2^n$  интервалов длиной  $\varepsilon = 3^{-n}$ , так что  $\dim_c K = \lim (\ln 2^n)/(\ln 3^n) = \ln 2/\ln 3 \approx 0,631$ .

Ю. С. Ильяшенко<sup>97-99</sup>, О. А. Ладыженской<sup>100</sup>, А. В. Бабиным и М. И. Вишиком<sup>101-103</sup> строгими методами получены оценки хаусдорфовой размерности аттракторов двумерных уравнений Навье — Стокса при периодических граничных условиях (в работах<sup>97, 98</sup> — для их галеркинских приближений), имеющие вид  $C_1 \operatorname{Re} \leq \dim \Lambda \leq C(\operatorname{Re})^4$ .

### 5.8. Показатели Ляпунова

Экспоненциальную расходимость близких траекторий в среднем по времени можно количественно охарактеризовать так называемыми *показателями Ляпунова*, для чего в точках  $u(t)$  траектории с начальным условием  $u(0) = u_0$  вводится касательный вектор  $w = w(u_0, t)$  с начальным условием  $w(u_0, 0) = w_0$ , так что  $\|w(u_0, t)\|$  характеризует проекцию на направление  $w$  расстояния в момент  $t$  между траекториями с близкими начальными точками  $u_0$  и  $u_0 + w_0$ . Вектор  $w$  удовлетворяет линеаризованному относительно  $u(t)$  уравнению (5.1), имеющему вид  $w = A[u(t)]w$ , где  $A = \{\partial F^k / \partial u^l\}$  — матрица Якоби в точке  $u(t)$ . Это уравнение имеет полную систему фундаментальных решений  $w_1, \dots, w_N$ , и для каждого из них определяется свой показатель Ляпунова

$$\sigma_i(u_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \frac{\|w_i(u_0, t)\|}{\|w_i(u_0, 0)\|}, \quad (5.10)$$

$$\|w_i(0)\| \rightarrow 0.$$

Их нумеруют в порядке их убывания:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N$ . Для анализа стохастического движения теорию показателей Ляпунова одним из первых использовал В. И. Оселедец<sup>104</sup>. Дивергенция фазового потока (5.3) равна

$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^N \sigma_i$ , так что у диссипативных потоков не только  $\sigma_N < 0$ , но, кроме

того, модуль суммы отрицательных  $\sigma_i$  больше суммы положительных  $\sigma_i$ . Если траектория  $u(t)$  притягивается к неподвижной точке (или к периодической или квазипериодической траектории), то все  $\sigma_i$  (или все, кроме  $\sigma_1 = 0$ , где вектор  $w_1$  направлен вдоль предельной траектории) отрицательны.

Если траектория притягивается к странному аттрактору  $\Lambda$ , то обязательно  $\sigma_1 > 0$ . Если на аттракторе существует инвариантная мера и есть эргодичность, то средние значения по времени в (5.10) не зависят от  $u_0$  и могут быть заменены средними по инвариантной мере. Пусть  $k$  — такой номер, что  $\sum_{i=1}^k \sigma_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i < 0$ . Тогда *ляпуновской размерностью* аттрактора  $\Lambda$  называется величина

$$\dim_L \Lambda = k + \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_i}{|\sigma_{k+1}|}. \quad (5.11)$$

Т. Ли и Дж. Йорк<sup>56</sup> высказали гипотезу, что эта величина совпадает с хаусдорфовой размерностью множества  $\Lambda$  (определенной как нижняя грань хаусдорфовых размерностей множества единичной инвариантной меры, предельной для меры Лебега в фазовом пространстве). Численные расчеты для нескольких двумерных отображений и одного трехмерного потока показали, что величины (5.11) и (5.9) практически совпадают.

### 6. СЦЕНАРИИ СТОХАСТИЗАЦИИ

До сих пор ни для одной геометрии течений вязкой жидкости не установлено с должной строгостью, какая последовательность бифуркаций при возрастании  $\operatorname{Re}$  приводит к превращению стационарного (ламинарного) течения в стохастическое (турбулентное). Сведения раздела 4 показывают, что

при разной геометрии течений такие последовательности бифуркаций, по-видимому, могут быть весьма различными. Наиболее правдоподобные гипотезы о последовательностях бифуркаций, ведущих к стохастичности, будем называть *сценариями* и рассмотрим некоторые из них.

#### 6.1. Сценарий Ландау<sup>3</sup> — Хопфа<sup>4</sup>

Это — последовательность нормальных бифуркаций, порождающая предельное квазипериодическое течение и  $\{x, \varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ , имеющее период  $2\pi$  по каждому из аргументов  $\varphi_k(t) = \omega_k t + \alpha_k$  с, вообще говоря, несоизмеримыми частотами  $\omega_1, \dots, \omega_N$ , занимающее в фазовом пространстве область, соответствующую всевозможным наборам начальных фаз  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , и эргодическое в том смысле, что наматывающаяся на него траектория с течением времени проходит сколь угодно близко от любой точки указанной области (так как в моменты  $t_k = 2\pi k/\omega_1, k = 0, 1, 2, \dots$ , когда  $\varphi_1(t) = \alpha_1$ , фаза любого другого колебания  $\varphi_2(t_k) = 2\pi k\omega_2/\omega_1$  после приведения к интервалу  $[0, 2\pi]$  может иметь значение, сколько угодно близкое к любому наперед заданному).

Временные корреляционные функции скоростей здесь, вообще говоря, не стремятся к нулю на бесконечности, но сначала они быстро спадают (как  $(N^{-1/2})$ , а время  $T$  до следующего максимума (*период возврата Пуанкаре*) очень велико:  $T \sim e^{\alpha N}$ , где  $\alpha \sim 1$  (В. И. Арнольд<sup>57</sup>). Много хуже то, что последовательность нормальных бифуркаций и результирующее квазипериодическое движение не обладают структурной устойчивостью (И. Экманн<sup>58</sup>) и не типичны даже в том смысле, что подчиняющиеся этому сценарию фазовые потоки не образуют в пространстве всех фазовых потоков *бэровского* множества (счетного пересечения открытых всюду плотных множеств). В связи с этим Дж. Селл<sup>59</sup> предлагает уточнить этот сценарий как последовательность бифуркаций  $k$ -мерных торов  $T^k \rightarrow T^{k+1}$ , не требуя, чтобы течения на них были квазипериодическими. Такие бифуркации возможны и при наличии странных аттракторов и в некотором смысле обладают структурной устойчивостью.

#### 6.2. Сценарий Рюэлля — Тэкенса<sup>60</sup>

Это — появление странного аттрактора после трех нормальных бифуркаций. Этот сценарий обладает структурной устойчивостью: в каждой достаточно малой окрестности фазового потока с  $n$ -мерным инвариантным тором при  $n \geq 3$  имеется открытое множество фазовых потоков со странным аттрактором, удовлетворяющим аксиоме А (причем малость окрестности понимается в смысле  $C^{n-1}$ -нормы:

$$\|F\| = \max_{0 \leq k \leq n-1} |D^{(k)}F|,$$

где  $D^{(k)}F(u)$  обозначает любую производную порядка  $k$ , а при  $n \geq 4$  и в смысле нормы  $C^\infty$ ). В 1971 г. эта теорема была доказана при  $n \geq 4$  (и привлекла всеобщее внимание к процессам стохастизации в диссипативных системах), а на случай  $n = 3$  она обобщена в работе этих же авторов совместно с С. Ньюхаузом<sup>61</sup>.

Доказательство теоремы Рюэлля и Тэкенса основано на возможности аппроксимации потока с тором  $T^k$  потоком с обвивающей тор замкнутой траекторией (где все  $\omega_i/\omega_k$  при  $i = 1, \dots, k-1$  — малые рациональные числа), в который можно вложить канторовский аттрактор, например типа соленоида Вильямса. Иначе говоря, в этом механизме трехчастотное движение разрушается путем нелинейной синхронизации (образования резонансов) его высоких гармоник. Такой механизм, по-видимому, слишком мягок (по

Б. В. Чирикову в книге<sup>9</sup> — слишком «нежен») для возникновения турбулентности. В проводившихся экспериментах стохастизация больше похожа на разрушение двухчастотного движения  $T^2$  — биений, вероятно, путем их синхронизации и затем либо бифуркаций удвоения периода образующегося цикла, либо слияния и исчезновения устойчивого и седлового циклов (и образования аттрактора из гомоклинической структуры седлового цикла или из складок исходного негладкого тора).

### 6.3. Сценарий Фейгенбаума

Это — появление странного аттрактора в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода. Рассмотрим такие бифуркации сначала на примере одномерного необратимого (однозначного и непрерывного) отображения  $x_{n+1} = \Pi(x_n, \mu)$  отрезка  $0 \leq x \leq 1$  в себя, причем функция  $\Pi$  имеет на этом отрезке один квадратичный экстремум, скажем, максимум. Итерации такого отображения удобно изображать на так называемой диаграмме Кенигса — Ламерея (рис. 11), на которой по оси абсцисс откладываются значения  $x_n$ , по оси ординат — значения  $x_{n+1}$ , проводятся график  $\Pi(x)$  и биссектриса координатного угла, и между ними строится *лестница Ламерея* так, что образ  $x_{n+1}$  становится прообразом для  $x_{n+2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

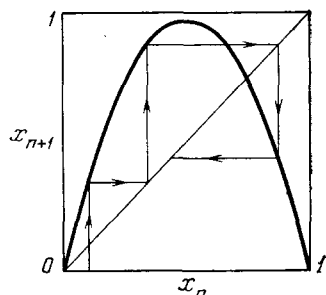


Рис. 11. Диаграмма Кенигса — Ламерея

Точка  $x_* = \Pi(x_*)$  пересечения графика  $\Pi(x)$  с биссектрисой является неподвижной точкой отображения. Она *устойчива*, если у нее имеется сколь угодно малая окрестность, итерации точек которой сходятся к  $x_*$ ; для этого достаточно условия  $|\Pi'(x_*)| < 1$  (при этом график  $\Pi(x)$  пересекает биссектрису под углом к оси абсцисс либо меньше  $45^\circ$  — тогда итерации сходятся к  $x_*$  монотонно, либо больше  $135^\circ$  — тогда итерации сходятся колебательно). Множество точек  $x_{i+1} = \Pi(x_i) \neq x_*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $x_{n+1} = \Pi(x_n) = x_1$  является  $n$ -кратным циклом (его *лестница Ламерея* замкнута). Все его точки суть неподвижные точки  $n$ -кратной итерации  $\Pi_n$ , и он устойчив, если в некоторой из них  $|\Pi'_n(x)| < 1$ . Сохраняя у  $\Pi(x)$  только квадратичную часть, отображение можно, не теряя общности, привести к *логистическому уравнению*

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n). \quad (6.1)$$

Интересен лишь диапазон  $1 < \mu \leq 4$  (так как при  $\mu \leq 1$  все траектории притягиваются к точке  $x = 0$ , а при  $\mu > 4$  появляются значения  $\Pi(x) > 1$ ). В нем отображение имеет две неподвижные точки — неустойчивую  $x = 0$  и точку  $x_0 = 1 - \mu^{-1}$ , устойчивость которой определяется собственным значением  $\lambda$  линеаризованного в ней уравнения (6.1). Нетрудно убедиться, что  $\lambda = 2 - \mu$ , так что область устойчивости  $|\lambda| < 1$  точки  $x_0$  есть  $1 < \mu < 3$ . При  $\mu \geq \mu_1 = 3$  эта точка становится неустойчивой, и, кроме того, появляется двукратный цикл — пара отличающихся от  $x_0$  корней  $x_1^0, x_1^1$  уравнения  $x = \Pi_2(x)$ . График этой функции имеет два максимума, а минимум между ними вполне подобен перевернутому графику  $\Pi(x)$ : при  $\mu_1 < \mu < \mu_2 \approx 3,45$  точки  $x_1^0$  и  $x_1^1$  устойчивы, а при  $\mu \geq \mu_2$  они становятся неустойчивыми, и, кроме того, в их окрестностях появляются двукратные циклы  $(x_2^0, x_2^1)$  и  $(x_2^2, x_2^3)$  отображения  $\Pi_2$ , образующие четырехкратный цикл отображения  $\Pi$ , который при  $\mu_2 < \mu < \mu_3$  устойчив, и т. д.

Таким образом, при значениях  $\mu_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , происходят бифуркации удвоения периода:  $2^{n-1}$ -кратные циклы теряют устойчивость, и появляются устойчивые  $2^n$ -кратные циклы. М. Фейгенбаум обнаружил,

что последовательность  $\mu_n$  сходится (к пределу  $\mu_\infty \approx 3,57$ ) асимптотически, как геометрическая прогрессия с довольно большим знаменателем:

$$(\mu_n - \mu_{n-1})(\mu_{n+1} - \mu_n)^{-1} \sim \delta = 4,6692 \dots \quad (6.2)$$

Более того, при помощи функциональных уравнений он доказал, что этот закон и значение  $\delta$  универсальны: они справедливы не только для отображения (6.1), но и для всякого отображения  $\Pi(x)$  указанного выше общего вида.

Таким образом, зная  $\mu_0$  и  $\mu_1$ , можно предсказать

$$\mu_\infty \approx \mu_0 + \frac{\delta}{\delta - 1} (\mu_1 - \mu_0).$$

М. Фейгенбаум доказал универсальность также для расположения на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  периодических точек последовательных  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$ -кратных циклов  $x_0, (x_1^0, x_1^1), (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3), \dots$ . Эти точки устойчивы на интервалах  $3 \leq \mu < \mu_1, \mu_1 \leq \mu < \mu_2, \mu_2 \leq \mu \leq \mu_3, \dots$  и на графике  $x(\mu)$  изображаются отрезками кривых, кото-

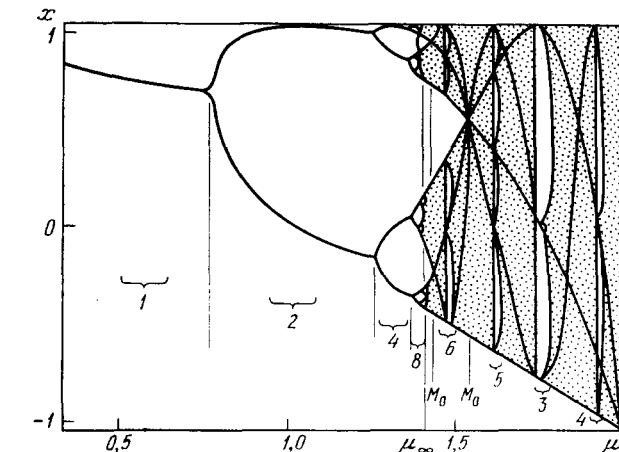


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма отображения  $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$  отрезка  $-1 \leq x \leq 1$  в себя при  $0,35 \leq \mu \leq 2$

рые в точках  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  раздваиваются (несимметрично), в сумме образуя «дерево» (рис. 12, построенный численно для квадратичного отображения, эквивалентного (6.1)). Универсальность этого «дерева» заключается в том, что каждое последующее раздвоение подобно предыдущему с коэффициентами подобия для разных ветвей ( $-\alpha^{-1}$ ) или  $\alpha^{-2}$ , где  $\alpha = 2,5029\dots$  (подобие также асимптотическое, но устанавливается практически уже после первых итераций):

$$\frac{x_n^k - x_n^{k+2^{n-1}}}{x_{n+1}^k - x_{n+1}^{k+2^n}} = \begin{cases} -\alpha, & 0 \leq k < 2^{n-1}, \\ \alpha^2, & 2^{n-1} \leq k < 2^n. \end{cases} \quad (6.3)$$

При больших  $n$ , заменяя (путем интерполяции) последовательность  $x_n^0, x_n^1, \dots$  функцией с непрерывным аргументом  $x_n(t)$  и представляя ее в виде ряда Фурье

$$x_n(t) = \sum_k X_n^k e^{2\pi i k t / 2^n}, \quad (6.4)$$

можно установить универсальный закон подобия для амплитуд  $|X_n^k|$ . Так, получаем

$$\begin{aligned} X_{n+1}^k &= \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^{2^{n+1}} x_{n+1}(t) e^{-2\pi i k t / 2^{n+1}} dt = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2^n} \int_0^{2^n} [x_{n+1}(t) + (-1)^k x_{n+1}(t + 2^n)] e^{-\pi i k t / 2^n} dt. \end{aligned} \quad (6.5)$$

При четных  $k = 2l$  из (6.3) получается  $x_{n+1}(t) \approx x_{n+1}(t + 2^n) \approx x_n(t)$ , и тогда (6.5) принимает вид  $X_{n+1}^{2l} \approx X_n^l$ , т. е. на этой частоте фурье-амплитуда при всех последующих бифуркациях не меняется. При нечетных



$k = 2l + 1$  из (6.3)–(6.5) выводится рекуррентное соотношение

$$X_{n-1}^{2l+1} = -\frac{1}{2\alpha} [1 - (-1)^l i] \left[ 1 + (-1)^l \frac{i}{\alpha} \right] S, \quad (6.6)$$

$$S = \frac{1}{\pi i} \sum_m \left[ (2m+1) - \frac{1}{2} (2l+1) \right]^{-1} X_n^{2m+1}.$$

В предположении плавной зависимости от  $m$  модуля амплитуды  $X_n^{2m+1}$  и случайности ее фазы при замене  $2l + 1$  непрерывным аргументом  $\xi$  из (6.6) получается закон подобия

$$X_{n+1}(\xi) = \frac{1}{\gamma} \left| X_n \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|, \quad (6.7)$$

$$\gamma = 2\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{-1/2} \approx 4,65.$$

При  $\mu > \mu_\infty$  при некоторых  $\mu$  рождаются (парами — устойчивая и неустойчивая) траектории периодического движения (последовательно с периодами 1, 6, 5, 3, . . .; см. рис. 12), каждая из которых затем испытывает последовательность бифуркаций удвоения периода со своей точкой сгущения. Кроме того, здесь на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  существуют полосы стохастического движения, причем при значениях  $\mu_\infty < \dots < \mu_n^* < \mu_{n-1}^* < \dots < \mu_1^*$  они испытывают обратные бифуркации удвоения периода, при которых количество полос уменьшается вдвое, а сами они расширяются (и сливаются), следуя закону подобия с теми же константами  $\delta$  и  $\alpha$ , что и выше. Так, после  $(n+1)$ -й бифуркации средняя квадратичная ширина полосы равна  $W_{n+1} = [(\alpha^{-2}/2) + (\alpha^{-4}/2)]^{1/2} W_n$ , откуда  $W_n = W_0 \beta^{-n}$ , где  $\beta = \gamma / \sqrt{2} \approx 3,29$ . Поэтому дисперсия стохастической части движения пропорциональна  $W^2 \sim \beta^{-2n} \sim (\mu_n^* - \mu_\infty)^m$ , где  $m = 2 \ln \beta / \ln \delta \approx 1,544 \dots$  (здесь мы использовали закон подобия (6.2)). Таким образом, стохастичность возникает не скачком, а нарастает с ростом  $\mu$  постепенно (и не монотонно, а прерываясь областями, в которых самоорганизуются периодические движения).

Одномерное отображение имеет единственный показатель Ляпунова (5.10):

$$\sigma(x_0, \mu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| \frac{\partial \Pi(x_n, \mu)}{\partial x_n} \right|. \quad (6.8)$$

Он почти всюду не зависит от  $x_0$ , при  $\mu < \mu_\infty$  отрицателен (так как существует предельный цикл), а при  $\mu = \mu_\infty > 0$  преимущественно положителен и сначала пропорционален  $(\mu - \mu_\infty)^k$ , где  $k = \ln 2 / \ln \delta \approx 0,4498 \dots$  (Б. Хьюберман, И. Рудник<sup>62</sup>), а затем оказывается сложной функцией от  $\mu$ .

Инвариантная мера (плотность вероятности)  $p(x)$  для отображения  $\Pi(x)$  с одним экстремумом вследствие сохранения «числа траекторий» удовлетворяет соотношению  $p(x) dx = p(x_1) dx_1 + p(x_2) dx_2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — два прообраза точки  $x$ . Отсюда получается функциональное уравнение

$$p(x) = p(x_1) \left| \frac{\partial \Pi(x_1)}{\partial x_1} \right|^{-1} + p(x_2) \left| \frac{\partial \Pi(x_2)}{\partial x_2} \right|^{-1}, \quad (6.9)$$

решать которое можно численно (методом итераций). Для треугольного отображения  $\Pi(x)$  с максимумом  $\Pi(1/2) = 1$  очевидное решение есть  $p(x) = 1$ . Отображение (6.1) при  $\mu = 4$  переходит в треугольное  $\Pi(\bar{x})$  при замене переменной  $\bar{x} = 2\pi^{-1} \arcsin x^{1/2}$ , так что для него

$$p(x) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \pi^{-1} [x(1-x)]^{-1/2} \quad (6.10)$$

(а показатель Ляпунова равен  $\sqrt{2}$ ). Стохастическое движение с такой инвариантной мерой является перемешивающим. При  $\mu_\infty \leq \mu < 4$  распределе-

ния  $p(x)$  оказываются сложными (в частности, имеют разрывы). При  $\mu = \mu_\infty$  аттрактор эргодичен, но не обладает перемешиванием (И. Экманн<sup>68</sup>), что представляется некоторым недостатком рассматриваемого сценария.

Рассмотрим теперь двумерные отображения  $x_{n+1} = \Pi(x_n, \mu)$ , где  $x = (x, y)$  и якобиан  $\partial(x_{n+1}, y_{n+1})/\partial(x_n, y_n)$  отличен от нуля (обратимость отображения) и по модулю меньше единицы (диссипативность). Примером может служить отображение

$$x_{n+1} = \Pi(x_n, \mu) + y_n, \quad y_{n+1} = \beta x_n, \quad |\beta| < 1, \quad (6.11)$$

где  $\Pi(x)$  — необратимое одномерное отображение. Якобиан у (6.11) равен  $(-\beta)$ , и, поскольку для  $k$ -й итерации якобиан  $(-\beta)^k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ), ясно, что предельный аттрактор лежит в окрестности кривой  $x = \Pi(y/\beta)$ . Бифуркации двумерных отображений подчиняются тем же универсальным законам М. Фейгенбаума, так что достаточно ограничиться квадратичными отображениями, которые, как нетрудно показать, при постоянном якобиане всегда могут быть приведены к виду (6.11) с функцией  $\Pi(x)$  вида (6.1).

Такое отображение имеет две неподвижные точки — неустойчивую  $x = y = 0$  и устойчивую  $x = 1 - (1 - \beta)\mu^{-1}$ ,  $y = \beta x$ . При некотором  $\mu = \mu_1(\beta)$  вторая из этих точек теряет устойчивость, и, кроме того, появляется двукратный цикл, т. е. неподвижная точка второй итерации  $x_{n+2} = \Pi_2(x_n)$ . В окрестности своей неподвижной точки эта вторая итерация путем перенормировки значений  $x$ ,  $\mu$  и  $\beta$  приводится к такому же функциональному виду, как исходное отображение (причем перенормировка  $\beta$

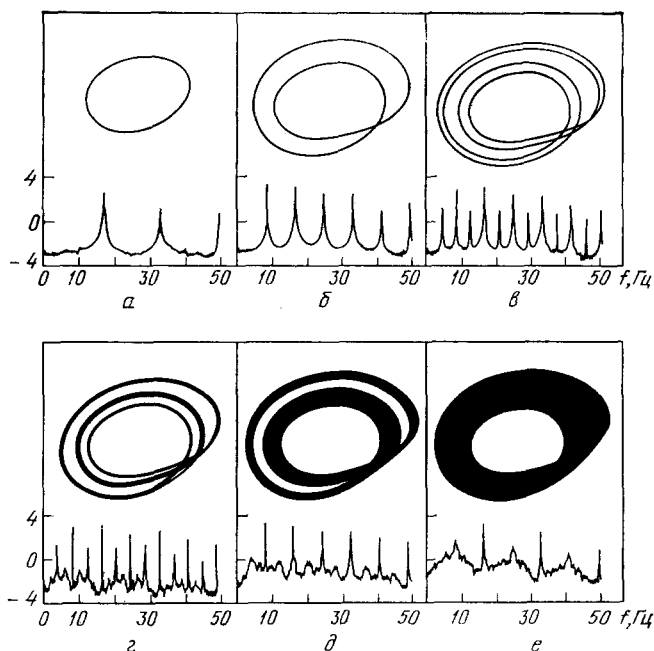


Рис. 13. Фазовый поток О. Рёслера в проекции на плоскости  $(x, y)$  и спектральные плотности для  $z(t)$  при  $\mu = 2,6$  (а),  $3,6$  (б),  $4,1$  (в),  $4,23$  (г),  $4,30$  (д) и  $4,60$  (е)

имеет вид  $\beta_2 = \beta^2$ ). Поэтому далее происходит последовательность бифуркаций удвоения периода с асимптотическими законами подобия Фейгенбаума при тех же параметрах  $\delta$  и  $\alpha$ , с той же точкой накопления  $\mu_\infty$  (при  $\beta_\infty = 0$ ) и с аналогичным вышеизложенному дальнейшим поведением при  $\mu > \mu_\infty$ . Для эквивалентного (6.11), (6.1) отображения

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = \beta x_n \quad (6.12)$$

М. Хенон<sup>63</sup> рассчитал (при  $\mu = 1,4$  и  $\beta = 0,3$ )  $5 \cdot 10^6$  итераций, которые нарисовали в плоскости  $(x, y)$  множество линий, по всей видимости, канто-

ровской структуры, хотя стохастичность этого аттрактора строго еще не доказана (при замене в (6.12)  $x_n^2$  на  $|x_n|$  это сделано М. Мисюревичем<sup>64</sup>). Первый показатель Ляпунова здесь определялся численно, второй равен  $\sigma_2 = \ln \beta - \sigma_1$ , и ляпуновская размерность аттрактора (5.11) получилась равной  $1 + \sigma_1 |\sigma_2|^{-1} \approx 1,26$ .

Функциональные уравнения М. Фейгенбаума обобщаются и на случай  $(N - 1)$ -мерных отображений последования Пуанкаре  $x_{n+1} = \Pi(x_n, \mu)$  для  $N$ -мерных диссипативных фазовых потоков: если при некотором  $\mu_1$  у них происходит бифуркация удвоения периода, то затем с ростом  $\mu_1$  происходит бесконечная последовательность таких бифуркаций, удовлетворяющая законам подобия с универсальными постоянными  $\delta$  и  $\alpha$  и с некоторой точкой сгущения  $\mu_\infty$ , в которой возникает стохастическое движение (вначале — эргодическое, но без перемешивания). Приведем в качестве примера трехмерный фазовый поток О. Рёслера<sup>65</sup>:

$$\dot{x} = -y - z; \quad \dot{y} = x + \frac{y}{5}, \quad \dot{z} = \frac{1}{5} - \mu z + xz. \quad (6.13)$$

Результаты аналогового моделирования этой системы в проекции на плоскость  $(x, y)$  и спектральные плотности для  $z(t)$  при трех докритических и трех

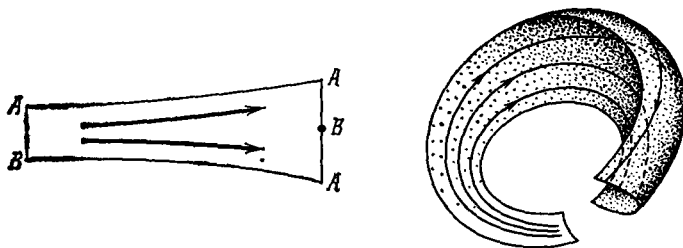


Рис. 14. Топология аттрактора О. Рёслера

закритических значениях  $\mu$  (здесь  $\mu_\infty \approx 4,20$ ) показаны на рис. 13; на спектрах хорошо видны прямые и обратные бифуркации удвоения периода. В сечении этой проекции по линии  $y = 0$  получается почти одномерное приблизительно квадратичное отображение  $x_{n+1} = \Pi(x_n)$ ; на самом деле эта «линия» имеет толщину, так как аттрактор состоит из бесконечного множества листов канторовой структуры: топологически он получается из листа, расширяющегося вдвое поперек траекторий и складывающегося вдвое по продольной оси, после чего его правый край приклеивается к левому (рис. 14).

#### 6.4. Сценарий Помо — Манневилля<sup>68</sup>

Это — возникновение перемежаемости во времени периодического и стохастического движения после обратной тангенциальной бифуркации (слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой неподвижных точек отображения Пуанкаре, т. е. устойчивой и неустойчивой периодических фазовых траекторий), причем промежутки времени со стохастическим движением случайны, а с периодическим — пропорциональны  $|\mu - \mu_{cr}|^{-1/2}$ . Примером может служить бифуркация слияния устойчивой и неустойчивой траекторий с периодом 3 у отображения (6.1) при значении  $\mu_c \approx 3,83$ , служащем точкой накопления для последовательности *обратных* бифуркаций удвоения этого периода.

М. И. Рабинович и Д. И. Трубецков<sup>8</sup> указывают возможность объяснения перемежаемости специальным видом отображения Пуанкаре  $x_{n+1} = \Pi(x_n, \mu)$ . Пусть график  $\Pi(x)$  состоит из трех кривых отрезков: 1 — круто восходящего, 2 — участка с минимумом, 3 — круто падающего. Пусть

при  $\mu < \mu_c$  участок 2 пересекает биссектрису в двух точках; они соответствуют устойчивой и неустойчивой периодическим траекториям отображаемого фазового потока. Пусть с ростом  $\mu$  этот участок поднимается вверх, и при  $\mu = \mu_c$  точки его пересечения с биссектрисой сливаются. При очень небольшом превышении  $\mu > \mu_c$  между участком 2 и биссектрисой образуется столь узкая щель, что вписанная в нее лестница Ламерея имеет много ступенек: в течение многих итераций (большого времени) траектория потока остается близкой к исходной периодической. При выходе из участка 2 у лестницы появляются большие ступени (резкие флуктуации траектории), при возвращении же в участок 2 вновь возникают длительные интервалы близкого к периодическому движения.

### 6.5. Круговое течение Куэтта

Наиболее детальные иллюстрации перечисленных выше сценариев были получены при специальных измерениях потери устойчивости кругового течения Куэтта (в зазоре между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами) и нагреваемого снизу слоя жидкости (развития термической конвекции).

Круговое течение Куэтта в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  с осью  $z$ , направленной по оси цилиндров, имеет компоненты скорости

$$\left. \begin{aligned} u_{0r} = u_{0z} = 0, \quad u_{0\varphi} = U(r) = Ar + Br^{-1}, \\ A = (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) (R_2^2 - R_1^2)^{-1}, \\ B = -R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1) (R_2^2 - R_1^2)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

где  $R_1 < R_2$  — радиусы, а  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — угловые скорости вращения внутреннего и внешнего цилиндров. В идеальной жидкости вследствие закона сохранения момента импульса жидкой частицы  $mrU = \text{const}$  при ее смещении с радиуса  $r_0$  до  $r > r_0$  ее скорость станет равной  $r_0 U(r_0)/r$ , и если задей-

Рис. 15. Область неустойчивости кругового течения Куэтта в плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$  при  $R_2/R_1 = 1,13$

ствующее на нее центробежное ускорение  $r_0^3 U^2(r_0)/r^3$  окажется больше его равновесного значения  $U^2(r)/r$  при условии  $\partial(rU)^2/\partial r < 0$ , течение будет неустойчивым (Рэлей, 1916). Этот критерий приводится к виду  $(\Omega_2^2 R_2^2 - \Omega_1^2 R_1^2) U < 0$ , так что при вращении цилиндров в разные стороны течение всегда неустойчиво (поскольку где-то в зазоре  $U$  меняет знак), а при их вращении в одну сторону критерий неустойчивости принимает вид  $\Omega_2/\Omega_1 < (R_1/R_2)^2$  (рис. 15).

В вязкой жидкости для комплексных амплитуд малых волновых возмущений скорости вида  $u(r) \exp[i(kz + n\varphi - \omega t)]$  с произвольными  $k$  и целыми  $n$  получаются уравнения

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{L} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - k^2 \left( \mathcal{L} - \frac{1}{r^2} \right) \right] u_r &= \left[ \frac{2k^2}{vr} \left( U - \frac{inv}{r} \right) - in \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{L} \frac{1}{r} \right] u_\varphi, \\ \left[ \frac{n^2}{r} \mathcal{L} \frac{1}{r} + k^2 \left( \mathcal{L} - \frac{1}{r^2} \right) \right] u_\varphi &= \\ &= \left\{ \frac{2k^2}{vr} \left[ \frac{r}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) - \frac{inv}{r} \right] + \frac{in}{r} \mathcal{L} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right\} u_r, \\ \mathcal{L} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - k^2 + \frac{i\omega}{v} - \frac{inU}{vr} \end{aligned} \quad (6.15)$$

с краевыми условиями  $u_r = \partial u_r / \partial r = u_\varphi = 0$  при  $r = R_1, R_2$ . Эти уравнения не имеют сингулярностей, так что, очевидно, при фиксированных

параметрах (включая  $k$  и  $n$ ) всегда существует дискретный спектр собственных значений  $\omega_j$ , и соответствующий набор собственных функций обладает полнотой. Долгое время предполагалось, что с ростом  $Re$  терять устойчивость первыми должны осесимметричные возмущения ( $s = n = 0$ ). Для них установлено (хотя достаточно полно пока еще не доказано), что первой бифуркацией является смена устойчивости — переход от течения (6.14) к новому стационарному течению вида  $u(r) \exp(ik_{cr} z)$ , тороидальным роликовым вихрям Тэйлора (впервые рассчитанным Дж. Тэйлором<sup>67</sup> при малом  $d/R_0$ , где  $d = R_2 - R_1$  и  $R_0 = 1/2 (R_1 + R_2)$ ). По ним и строились области неустойчивости типа рис. 15 (показывающие, что здесь вязкость играет стабилизирующую роль, но при  $\Omega_2/\Omega_1 < (R_1/R_2)^2$  и достаточно больших  $Re$  неустойчивость все же развивается). Долгое время считалось, что они отлично согласуются с экспериментальными данными (см. точки на границе заштрихованной области на рис. 15).

Однако позже оказалось, что при не слишком малых отрицательных  $\Omega_2/\Omega_1$  возмущения с  $n \neq 0$  теряют устойчивость немного раньше, чем осесимметричные. Так, по расчетам Е. Крюгера, А. Гросса и Р. Ди-Прима<sup>68</sup> при  $d/R_1 = 1/20$ , на лучах  $\Omega_2/\Omega_1 = -0,7; -0,8; -0,9; -1,0$  и  $1,25$  с ростом  $Re$  первыми теряют устойчивость возмущения с  $n = 0, 1, 3, 4$  и  $5$ . Это подтверждается экспериментальными данными, в частности, Г. Снайдера<sup>69</sup>.

И теоретические расчеты (Дж. Стюарта<sup>70</sup>, А. Дейви<sup>71</sup>, А. Дейви, Р. Ди-Прима и Дж. Стюарта<sup>72</sup>), и экспериментальные данные (Р. Доннелли и К. Шварца<sup>73</sup>, Г. Снайдера и Р. Ламберта<sup>74</sup>) показывают, что при  $Re = v^{-1}\Omega_1 R_1 d > Re_{1cr}$  нарастание интенсивности осесимметричных вихрей Тэйлора отлично описывается уравнением Ландау (3.2).

Специально поставленные для проверки сценариев эксперименты Дж. Голлуба и Г. Суинни<sup>75</sup>, П. Фенстермахера, Г. Суинни и Дж. Голлуба<sup>76</sup>, В. С. Львова и А. А. Предтеченского<sup>77</sup>, А. Брандштетера и др.<sup>105</sup> показали, что при  $Re_{2cr}$  вихри Тэйлора теряют устойчивость и на них появляются азимутальные изгибные волны. С ростом  $Re$  при последующих бифуркациях (по-видимому, нормальных хопфовских) возникают еще одна — три независимые частоты (и, кроме того, на спектре флуктуаций скорости  $u_r(t)$  посередине зазора дискретные пики расширяются, а непрерывный фоновый спектр растет, что сценариями Ландау — Хопфа и Рюэлли — Тэкенса не предусматривается). После следующей бифуркации при  $Re = Re_c$  остается только стохастическое движение с непрерывным спектром.

Количественные характеристики обнаруженных в этих экспериментах бифуркаций меняются, в частности, в зависимости от размеров цилиндров и от начальных данных. Так, в первом из них было  $R_1 = 22,54$  мм,  $R_2 = 25,40$  мм,  $d = R_2 - R_1 = 2,86$  мм,  $d/R_1 = 0,14$ , высота цилиндров  $h = 20d$ ,  $\Omega_2 = 0$ ,  $Re_c = 2501$ . Вихри Тэйлора появились при  $R^* = Re/Re_c = 0,051$  (в количестве  $kh/2\pi = 17$ ); при  $R^* = 0,064$  на них появились изгибные волны (четыре на окружность, с безразмерной частотой  $f_1^* = 2\pi f_1/\Omega_1 = 1,30$ , причем в спектре  $u_r(t)$  были видны шесть ее гармоник); при  $R^* = 0,54$  появилась вторая (малая) частота  $f_2^*$ ; с ростом  $R^*$  она убывала до нуля при  $R^* = 0,78$ , где появилась третья частота  $f_3^* \approx (2/3) f_1^*$ ; при  $R^* \sim 1$  обратно и безгистерезисно происходила стохастизация.

В экспериментах Львова и Предтеченского было  $R_1 = 17,5$  мм,  $R_2 = 27,5$  мм,  $d = 10$  мм,  $d/R_1 = 0,57$ ,  $h = 30d$ ,  $\Omega_2 = 0$ . Вихри Тэйлора появились при  $Re \approx 74$  (в количествах 22—36, при медленном разгоне 28—30). При 30 вихрях изгибные волны появились в интервале  $Re = 995—1015$  (шесть на окружность,  $f_1 = 1,93 \Omega_1$ , две гармоники); затем при  $Re = 1040$  в спектре  $u_\phi(t)$  появилась и альтернировала с первой вторая частота  $f_2 = 0,55 \Omega_1$ , а также комбинационные гармоники; затем появилась третья частота  $f_3 = 0,95 \Omega_1$ ; при  $Re = 1901$  отчетливых максимумов в спектре уже не было (но отдельные острые пики появлялись и исчезали и при дальнейшем росте  $Re$ ). Течение с 28 вихрями вело себя совершенно иначе (в част-

ности, при  $Re = 1100-1200$  оно переходило в состояние с 29 вихрями). В целом эволюция вихрей Тэйлора хотя и походила в общих чертах на сценарий Рюэлли и Тэкенса, но в деталях оказалась заметно более сложной.

### 6.6. Термическая конвекция

Рассмотрим теперь термическую конвекцию в горизонтальном слое  $0 \leq z \leq h$ , описываемую уравнениями Буссинеска

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - g\alpha T' + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \frac{dT'}{dt} = \chi \Delta T' \quad (6.16)$$

(где  $\alpha$  — коэффициент термического расширения) с фиксированными крайними значениями температуры  $T'_{z=0} = T_0$  и  $T'_{z=h} = T_1$ . Стационарное решение этих уравнений имеет вид  $\mathbf{u} = 0$ ,  $T' \equiv T'_s = T_0 - (T_0 - T_1)z/h$ . Введя числа Рэлея  $Ra = g\alpha(T_0 - T_1)h^3/\nu\chi$  и Прандтля  $\sigma = \nu/\chi$ , измеряя длины масштабом  $h$ , времена — масштабом  $h^2/\chi$  и полагая  $T' - T'_s = (T_0 - T_1)\vartheta/Ra$ , приведем (6.16) к безразмерному виду

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \Pi + \sigma \vartheta \nabla r + \sigma \Delta \mathbf{u}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = w Ra + \Delta \vartheta, \quad (6.17)$$

где  $\Pi$  — безразмерное отклонение давления от его стационарного гидростатического распределения. Линеаризуя эти уравнения (что сводится к замене  $d/dt$  на  $\partial/\partial t$ ) и отыскивая неизвестные функции в виде  $f(z) \times \times \varphi(x, y) \exp(-i\sigma\omega t)$ , где  $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$ , для комплексной амплитуды  $\vartheta(z)$  получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 + i\omega\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 + i\sigma\omega\right) \vartheta + k^2 Ra \vartheta = 0 \quad (6.18)$$

с краевыми условиями  $\vartheta = \vartheta'' = \vartheta''' - (k^2 - i\sigma\omega)\vartheta' = 0$  на одной и  $\vartheta = \vartheta'' = \vartheta^{IV} = 0$  на другой стенке. Первой бифуркацией здесь оказывается смена устойчивости (А. Пеллю, Р. Саусвелл<sup>78</sup>). Рэлей установил это для слоя с двумя свободными поверхностями, где получилось  $Ra_{1\text{ cr}} = 27\pi^4/4 \approx 657,5$  и  $k_{\text{cr}} = \pi/\sqrt{2} \approx 2,2$ ; позже для слоя с жесткими поверхностями получены значения  $Ra_{1\text{ cr}} \approx 1708$  и  $k_{\text{cr}} \approx 3,12$ , а при жесткой нижней и свободной верхней поверхностях  $Ra_{1\text{ cr}} \approx 1100$  — возникновение периодического по  $x, y$  стационарного движения. Его форма  $\varphi(x, y)$  (конвективные ролики, квадратные или шестиугольные ячейки и т. п.) из линейной теории не определяется.

А. Шлютер, Д. Лорц и Ф. Буссе<sup>79</sup> установили, что при очень небольших  $Ra - Ra_{1\text{ cr}} > 0$  из стационарных конвективных движений линейно устойчивы (в узкой полосе плоскости  $k, Ra$ ) только ролики. Е. Пальм<sup>80</sup> и последующие авторы получили более общие результаты, установив, что формирование шестиугольных конвективных ячеек А. Бенара (1900) определяется температурной зависимостью материальных свойств жидкости, прежде всего, вязкости:  $\nu' = |\partial\nu/\partial T|$ . Для возмущения вида

$$w = \left[ A_1(t) \cos ky + A_2(t) \cos \frac{kx\sqrt{3}}{2} \cos \frac{ky}{2} \right] \sin lz \quad (6.19)$$

Пальм вывел систему уравнений типа Ландау

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \gamma A_1 - \frac{\nu'}{4} A_2^2 - \delta_1 A_1^3 - \left( 2\delta_2 - \frac{\delta_1}{2} \right) A_1 A_2^2, \\ \dot{A}_2 &= \gamma A_2 - \nu' A_1 A_2 - \delta_2 A_2^3 - (4\delta_2 - \delta_1) A_1^2 A_2, \end{aligned} \quad (6.20)$$

имеющую стационарные решения  $A_2 = \pm 2A_1$ , соответствующие шестиугольным ячейкам. Установлено, что при  $Ra_{1\text{ cr}} < Ra_1 < Ra < Ra_2$  устойчивы только шестиугольники, при  $Ra_2 < Ra < Ra_3$  — и шестиугольники, и ро-

лики, а при  $ka > ka_3$  — только ролики. При  $v' \rightarrow 0$  и  $Ra_1$ , и  $Ra_2$ , и  $Ra_3$  стремятся к  $Ra_{1\text{ cr}}$ , так что восстанавливается результат Шлютера, Лорца и Буссе.

Рассмотрим конвективные ролики, вытянутые вдоль оси  $y$ , так что для них уравнения (6.17) оказываются двумерными и после введения в плоскости  $(x, z)$  функции тока  $\psi$  приводятся к виду

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial (\psi, \Delta \psi)}{\partial (x, z)} = \sigma \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sigma \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial (\psi, \theta)}{\partial (x, z)} = Ra \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta. \quad (6.21)$$

С ростом  $Ra > Ra_{1\text{ cr}}$  движение в роликах перестает быть стационарным и нарастает со временем. Вначале его можно описать следующими тремя модами:

$$\psi = \pi^{-1} \left( \frac{R_0}{k} \right)^{1/3} X \cdot \sqrt{2} \sin kx \cdot \sin \pi z, \quad (6.22)$$

$$\theta = R_0 (Y \cdot \sqrt{2} \cos kx \cdot \sin \pi z - Z \sin 2\pi z),$$

где  $R_0 = k^{-2} (\pi^2 + k^2)^3$ . Ф. Буссе<sup>81</sup> доказал, что у инфинитезимальных возмущений амплитуды других мод суть малые более высокого порядка. Учтывая это, подставляя (6.22) в (6.21) и пренебрегая взаимодействиями со всеми другими модами, получаем для  $X, Y, Z$  систему уравнений

$$\dot{X} = -\sigma X - \sigma Y, \quad \dot{Y} = -Y + rX - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY, \quad (6.23)$$

где точка обозначает производную по  $(k^2 R_0)^{1/3} t$ ;  $b = 4\pi^2 (k^2 R_0)^{-1/3}$  — геометрический фактор (при рэлеевском  $k = \pi/\sqrt{2}$  равный  $8/3$ );  $r = R_0^{-1} ka$  — относительное число Рэлея. Эта система, впервые полученная Э. Лоренцем<sup>82</sup>, прославилась как первый пример системы со странным аттрактором (бесконечнолистный аттрактор канторовской структуры был заподозрен еще самим Лоренцем, но строгого математического доказательства этому еще не получено).

Подчеркнем, что уравнения Лоренца (к которым мы еще вернемся) описывают реальную конвекцию лишь при небольших  $r$ . В экспериментах Дж. Уиллиса и Дж. Дирдорфа<sup>83</sup> было установлено, что при  $Ra_{2\text{ cr}} \approx \approx 3Ra_{1\text{ cr}}$  на конвективных роликах, как и выше на тороидальных роликах Тэйлора, возникают поперечные волны. Их расчет в рамках линейной теории выполнил Ф. Буссе<sup>81</sup>, а по нелинейной теории — Дж. Мак-Лафлин и П. Мартин<sup>84</sup>, рассчитавшие, во-первых, восьмимодовое движение с роликами (6.22) и одной гармоникой вдоль оси  $y$  и построившие для него разложение Ландау (3.2) (для которого получилось  $\delta > 0$ , что соответствует нормальной бифуркации). Во-вторых, они численно рассчитали 39-модовое движение с роликами (6.22) и четырьмя гармониками вдоль оси  $y$  и при  $k_1/\pi = 0,072$ ,  $k_2/\pi = 0,1$ ,  $\sigma = 1$  получили  $r_{2\text{ cr}} \approx 1,25$ , при  $r = 1,4$  периодический, при  $r = 1,45$  слегка непериодический, при  $r = 1,5$  и  $1,55$  опять периодический, при  $r = 1,6$  резко непериодический режим (а при исключении четвертой гармоники — при  $r = 1,6$ ; 2 и даже 20 — периодические режимы).

Рассмотрим теперь уравнения Лоренца (6.23). Дивергенция фазового потока (5.2) у них отрицательна:  $\Lambda = -(\sigma + b + 1)$ , так что все траектории стремятся в некоторое множество нулевого объема. Величина  $W = [X^2 + Y^2 + (Z - r - \sigma)^2]^{1/2}$  удовлетворяет условию  $\dot{W} \leq -C_1 W + C_2$  с положительными  $C_1$  и  $C_2$ , так что все траектории входят в шар  $W \leq 2C_2/C_1$ . Система не меняется при замене  $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, -Z)$ . При  $r < 1$  единственной неподвижной точкой является устойчивый узел 0 в начале координат. При  $r \geq 1$  (начало конвекции) он теряет устойчивость (становится седлом с двумерным устойчивым многообразием и двумя неустойчивыми одномерными — сепаратрисами  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ ), и появляются еще две неподвижные точки  $C^+$ ,  $C^- = (\pm [b(r-1)]^{1/2}, \pm [b(r-1)]^{1/2}, r-1)$ , к ко-

торым стремятся сепаратрисы. При  $\sigma < b + 1$  они устойчивы, при  $\sigma > b + 1$  (далее, следуя Лоренцу, будем рассматривать случай  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ) устойчивы при  $1 < r < r_3 = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1} \approx 24,74$ , а при  $r > r_3$  теряют устойчивость. По линейной теории, при  $r = r_3$  здесь возможны нейтральные возмущения с частотой  $\omega = [2b\sigma(\sigma + 1)(\sigma - b -$

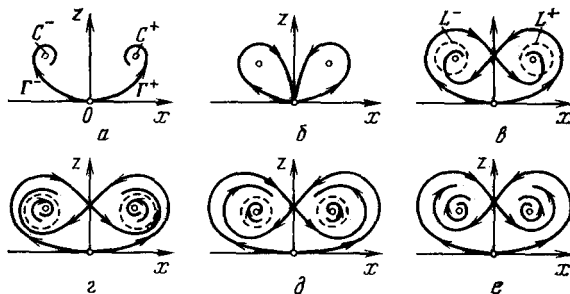


Рис. 16. Бифуркации в системе Лоренца

а — Для  $1 < r < r_1$ . б — Для  $r = r_1$ .  
в — Для  $r_1 < r < r_2$ . г — Для  $r = r_2$ .  
д — Для  $r_2 < r < r_3$ . е — Для  $r = r_3$

$-1)^{-1/2}$ , скажем,  $\delta X = A \cos \omega t$ . При  $r$  немного меньше  $r_3$  к  $\delta X$  прибавляется малая нелинейная поправка порядка  $|A|^2$ , для которой Дж. Мак-Лафлин и П. Мартин<sup>84</sup> построили с точностью порядка  $\sigma^{-1}$  уравнение Ландау (3.2) и получили  $\gamma = (b/2\sigma^{1/2})[(r - 1)^{1/2} - (r_3 - 1)^{1/2}]$  и  $\delta = -37/72 \sigma$ , так что бифуркация при  $r = r_3$  оказалась обратной.

Далее изложим результаты В. С. Афраймовича, В. В. Быкова и Л. П. Шильникова<sup>85</sup> (рис. 16). При  $r = r_1 \approx 13,92$  они обнаружили бифуркацию, при которой сепаратрисы возвращаются в седло. При  $r > r_1$  из петель сепаратрис рождаются седловые периодические движения  $L^+$ ,  $L^-$  вокруг

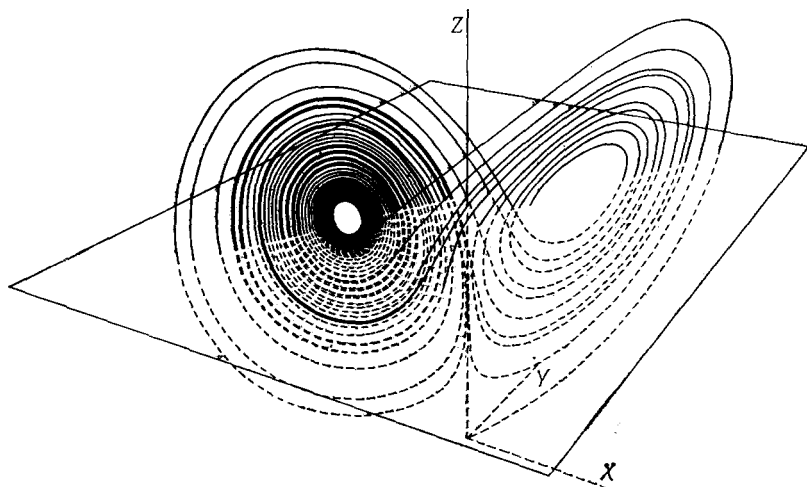


Рис. 17. Пример траектории на аттракторе Лоренца при  $r = 28$ .  
Плоскость  $X, Y$  соответствует  $Z = 27$

фокусом  $C^+$ ,  $C^-$  (и одновременно появляется не являющееся аттрактором инвариантное множество линий  $\Omega_1$  канторовой структуры, включающее счетное множество седловых периодических движений); сепаратрисы  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  пересекаются и стремятся к фокусам  $C^-$ ,  $C^+$ . При  $r = r_2 \approx 24,06$  сепаратрисы  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  вместо фокусов наматываются на циклы  $L^-$ ,  $L^+$ , а вместо  $\Omega_1$  появляется бесконечнолистный аттрактор Лоренца  $\Omega_2$ , область притяжения которого ограничивают устойчивые многообразия циклов  $L^-$ ,  $L^+$  (так что возбуждение стохастичности является жестким). При  $r > r_2$  он устойчив,



включает  $O$ ,  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  и потому не является структурно устойчивым, и на нем всюду плотны периодические движения (способные испытывать последовательности бифуркаций удвоения периода и могущие исчезать с ростом  $r$  лишь путем влипания в петли сепаратрис). При  $r = r_3$  циклы  $L^+$ ,  $L^-$  стягиваются в точки  $C^+$ ,  $C^-$ , и последние теряют устойчивость. При  $r_3 < r < r_4 \approx 220$  единственным устойчивым предельным множеством является

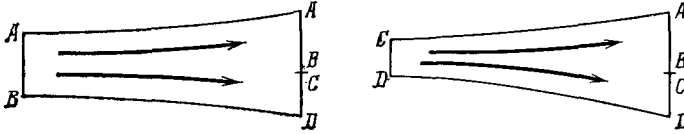


Рис. 18. Топология аттрактора Лоренца

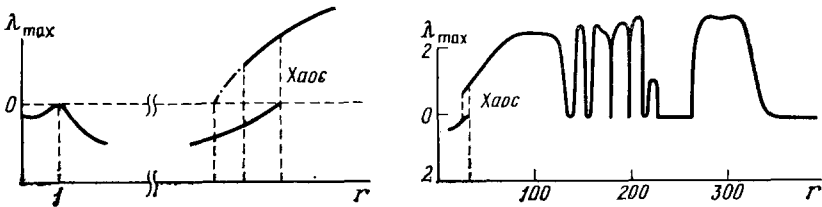
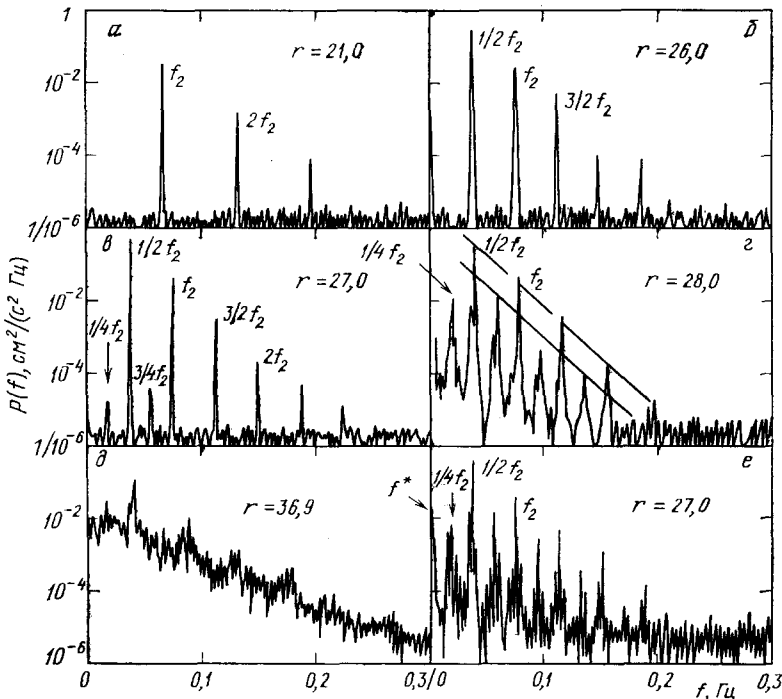

 Рис. 19. График показателя Ляпунова  $\sigma_1(r)$  при  $b = 4$ ,  $\sigma = 16$ 


Рис. 20. Бифуркации удвоения периода в конвективных роликах

аттрактор Лоренца (отметим, что при уменьшении  $r$  от  $r_4$  до  $r_2$  фазовая точка  $M(t)$  остается в аттракторе, а при  $r < r_2$  он теряет устойчивость, и  $M(t)$  стремится к  $C^+$  или  $C^-$ ).

Пример траектории на аттракторе (при  $r = 28$  пересекающей плоскость  $Z = 27$ ) см. на рис. 17; она выходит из начала координат, обходит  $C^+$ , затем

раскручивается и притягивается к  $C^-$ , уходит от  $C^-$  по спирали к  $C^+$  и т. д., причем период обращения вокруг  $C^+$  или  $C^-$  равен 0,62, а радиусы спиралей меняются за оборот на 6%. Указанное еще самим Лоренцем для этого примера отображение Пуанкаре  $Z_{n+1} = \Pi(Z_n)$  последовательных максимумов  $Z$  имеет треугольную форму, причем всюду  $|\Pi'(Z)| > 1$ ; оно эргодическое и перемешивающее (Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай<sup>86</sup>). Топологически аттрактор Лоренца получается из двух листов, расширяющихся поперек траекторий, причем правый край каждого из них приклеивается к левым краям обоих листов (рис. 18). Х. Мори и Х. Фуджисака<sup>87</sup> рассчитали для аттрактора Лоренца, как функции от  $r$ , показатель Ляпунова  $\sigma_1$  (второй  $\sigma_2$  равен нулю, третий  $\sigma_3 = \Lambda - \sigma_1$  отрицателен, а ляпуновская размерность аттрактора равна  $2 + \sigma_1 / |\sigma_3|^{-1}$ ). При  $r < 1$  он отрицателен, при  $r = 1$  (появление конвективных роликов) обращается в нуль, при  $1 < r < r_3$  опять отрицателен и при  $r = r_3$  достигает нуля, но при  $r = r_2$  выше нуля возникает и при  $r > r_2$  возрастает новая ветвь  $\sigma_1$ , при очень больших  $r$  многократно прерываемая «лакунами» нулевых значений, соответствующих периодическим движениям (см. на рис. 19 пример при  $b = 4$ ,  $\sigma = 16$ ; здесь при  $r = 40$  получается ляпуновская размерность 2,06).

В последние годы экспериментальные условия изучения конвекции резко улучшились вследствие использования классического жидкого гелия с малой теплоемкостью стенок по сравнению с жидкостью и с температурной чувствительностью  $10^{-7}$  (группы Дж. Алерса<sup>88</sup> и А. Либчабера<sup>89</sup>), лазерного доплеровского анемометра с точностью  $10^{-4}$  см/с (группы Дж. Голлуба<sup>90</sup> и П. Берже<sup>91, 106</sup>) и ЭВМ. Это дало возможность наблюдать (по спектрам) квазипериодические движения с 2—3 несоизмеримыми частотами, последовательно бифуркаций удвоения периода с законом подобия (6.7) для амплитуд (на рис. 20 пример из работы Дж. Голлуба, С. Бенсона и Дж. Штейнмана<sup>90</sup>), перемежаемость, абсолютную неустойчивость тонких слоев, краевые эффекты (ролики, перпендикулярные стенкам) и т. п.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нам очень хотелось вставить в определение турбулентности в разделе 5.3 требование ее *многомодовости*, т. е. хаотичности ее пространственной структуры в любой фиксированный момент времени, так как, например, описываемое уравнениями Э. Лоренца стохастическое движение в геометрически регулярных структурах конвективных роликов уж слишком не похоже на наши интуитивные представления о турбулентных течениях жидкостей и газов, одной из важнейших особенностей которых представляется возможность каскадных процессов передачи по спектру масштабов сохраняющихся свойств — энергии, энтропии, потенциальной энтропии, консервативных примесей, волнового действия и т. п. Этим представлениям лучше всего соответствуют модели цепочек из зацепляющихся триплетов А. М. Обухова<sup>92</sup> (с возможностью стохастического поведения в смысле раздела 5.3 каждого из триплетов). Мы, однако, удержались от такого дополнительного требования, предпочтя сохранить его для определения *развитой* турбулентности и соглашаясь относить теорию странных аттракторов к процессам *возникновения* турбулентности.

Чего хотелось бы ожидать в ближайшем будущем? Во-первых, доделки незавершенных задач линейной теории неустойчивости (некоторые из них указаны в разделе 4); так, например, желательно дать качественное объяснение коренным различиям в поведении течений Пуазейля в каналах и трубах. Во-вторых, математической разработки новых сценариев стохастизации (которые, несомненно, многообразны), в том числе расшифровки механизмов стохастизации после обратной бифуркации Хопфа, а также математического описания процессов взрывной стохастизации мелкомасштабных форм течения в вязком подслое у твердых стенок. Впрочем, есть ощущение,

что математическая часть теории уже попала на надежные рельсы. В-третьих, и этого, пожалуй, не хватает больше всего, лабораторных исследований возникновения турбулентности с использованием новой экспериментальной техники (например, лазер-доплеровских измерений течений в стеклянных трубах).

Автор благодарен Г. И. Баренблатту за ценные советы и обсуждения, Е. Г. Агафоновой, Н. И. Солнцевой и Г. Ю. Александровой за труд по оформлению рукописи.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова  
АН СССР

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монин А. С. // УФН. 1978. Т. 125. С. 97.
2. Feigenbaum M. J. // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. P. 25; 1979. V. 21. P. 669.
3. Ландау Л. Д. // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339.
4. Норф Е. // Comm. Pure and Appl. Math. 1948. V. 1. P. 303.
5. Арнольд В. И. // ДАН СССР. 1965. Т. 162. С. 975.
6. Monin A. S., Yaglom A. M. Statistical Fluid Mechanics. V. 1 — Cambridge, Mass.; London: The MIT Press, 1971.
7. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. — Л.: Гидрометеиздат, 1976.
8. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
9. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
10. Rogenbluth N. M., Simon A. // Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 537.
11. Fjortoft R. // Geophys. Publ. 1950. V. 17. No. 6. P. 1.
12. Tollmien W. // Nachr. Ges. Wiss., Math. und Phys. Kl. 1935. Bd 50. S. 79.
13. Miles J. W. // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 496.
14. Howard L. H. // Ibidem. P. 509.
15. Batchelor G. K., Gill A. E. // Ibidem. 1962. V. 14. P. 529.
16. Sato H., Okada O. // Ibidem. 1966. V. 26. P. 237.
17. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики. — М.: Наука, 1970.
18. Обухов А. М. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13. С. 281.
19. Монин А. С. // Ibidem. Сер. геофиз. 1958. № 4. С. 97.
20. Куо Н. Л. // J. Meteor. 1949. V. 6. P. 105.
21. Charney J. M., Stern M. E. // J. Atm. Sci. 1962. V. 19. P. 159.
22. Дикий Л. А. // Изв. АН СССР. Сер. «Физика атмосферы и океана». 1973. Т. 9. С. 1312.
23. Норф Е. // Ber. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. und Phys. Kl. 1942. Bd 94. S. 1.
24. Брушлинская Н. Н. // ДАН СССР. 1965. Т. 162. С. 731.
25. Squire H. B. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1933. V. 142. P. 621.
26. Романов В. А. // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7. С. 62.
27. Lin C. C. // Quart. Appl. Math. 1945—1946. V. 3. P. 117, 218, 277.
28. Wasow W. // Ann. of Math. 1953. V. 58. P. 222.
29. Kuwabara S. // Phys. Fluids 1967. V. 10. P. 115.
30. Ellingsen T., Gjevik B., Palm E. // J. Fluid. Mech. 1970. V. 40. P. 97.
31. Heisenberg W. // Ann. d. Phys. (4). 1924. Bd 74. S. 577.
32. Lin C. C. // Quart. Appl. Math. 1945. V. 3. P. 117, 218, 277.
33. Reynolds W. C., Porter M. C. // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. P. 465.
34. Pekeris C. L., Shkoller B. // Ibidem. 1967. V. 29. P. 31.
35. Meksyn D. // Zs. Phys. 1964. Bd 178. S. 159.
36. Tollmien W. // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen., Math. und Phys. 1929. S. 21; Proc. of 3rd Intern. Congres of Applied. Mechanics. — Stockholm, 1930. — V. 1. P. 105.
37. Schubauer G. D., Skramstad H. K. // J. Aeronaut. Sci. 1947. V. 14. P. 69.
38. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. // J. Fluid Mach. 1962. V. 12. P. 1.
39. Landahl M. T. // Ibidem. 1972. V. 56. P. 775.
40. Runstadler R. W., Kline S. J., Reynolds W. C. Stanford Univ. Rept. — 1963.
41. Schraub F. A., Kline S. J. Stanford Univ. Rept. — 1965.
42. Schraub F. A., Kline S. J., Henry J., Runstadler R. W., Little A. // Trans. ASME. Ser. D. 1969. V. 87. P. 429.
43. Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler R. W. // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 741.
44. Kim H. T., Kline S. J., Reynolds W. C. Stanford Univ. Rept. — 1968; // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. P. 133.

45. Offen G. R., Kline S. J. Stanford Univ. Rept.— 1973; //J. Fluid Mech. 1974. V. 62. P. 223; 1975. V. 70. P. 209.
46. Corino E. R., Brodkey R. S. //Ibidem. 1969. V. 37. P. 1.
47. Pfenniger W. //Boundary Layer and Flow Control.— London: Pergamon Press, 1961.— V. 2. P. 970.
48. Davey A., Nguyen H. //J. Fluid Mech. 1971. V. 45. P. 701.
49. Foias C., Prodi G. //Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1967. V. 39. P. 1.
50. Ладыженская О. А. //ДАН СССР. 1972. Т. 205. С. 318.
51. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
52. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. //ДАН СССР. 1937. Т. 14. С. 247.
53. Smale S. //Differential and Combinatorial Topology.— Princeton: Princeton Univ. Press., 1965.
54. Аносов Д. В. //Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3.
55. Smale S. //Bull. Am. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 747.
56. Li T. Y., Yorke J. A. //Am. Math. Month. 1975. V. 82. P. 985.
57. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
58. Eckmann J. P. //Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P. 643.
59. Sell G. R. //Nonlinear Dynamics and Turbulence — London: Pitman Books, 1983.— P. 305.
60. Ruelle D., Takens F. //Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167.
61. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. //Ibidem. 1978. V. 64. P. 35.
62. Huberman B. A., Rudnick J. //Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 154.
63. Henon M. //Comm. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69.
64. Vissière M. //Nonlinear Dynamics. New York. Academy Sci. 1980. V. 357. P. 348.
65. Rössler O. E. //Phys. Lett. Ser. A. 1976. V. 57. P. 397.
66. Manneville P., Pomeau Y. //Physica. Ser. D. 1980. V. 1. P. 219.
67. Taylor G. J. //Phil. Trans. Ser. A. 1923. V. 223. P. 284.
68. Krueger E. R., Gross A., Di Prima R. C. //J. Fluid Mech. 1966. V. 24. P. 521.
69. Snyder H. A. //Phys. Flows. 1968. V. 11. P. 728, 1599.
70. Stuart J. T. //J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 1.
71. Davey A. //Ibidem. 1962. V. 14. P. 336.
72. Davey A., Di Prima R. C., Stuart J. T. //Ibidem. 1968. V. 31. P. 17.
73. Donnelly R. J., Schwarz K. W. //Phys. Lett. 1963. V. 5. P. 322; Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1965. V. 283. P. 531.
74. Snyder H. A., Lambert R. B. //J. Fluid. Mech. 1966. V. 26. P. 545.
75. Gollub J. P., Swinney H. L. //Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 927.
76. Fenstermacher R., Swinney H. L., Gollub J. P. //J. Fluid. Mech. 1978. V. 94. P. 103.
77. Lvov V. S., Predtechensky A. A., Chernykh A. I. //Nonlinear Dynamics and Turbulence/Eds G. I. Barenblatt et al.— Boston; London; Melbourne: 1983.— P. 238.
78. Pellew A., Southwell R. V. //Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1940. V. 175. P. 312.
79. Schlüter A., Lorz D., Busse F. H. //J. Fluid Mech. 1965. V. 23. P. 129.
80. Palm E. //Ibidem. 1960. V. 8. P. 183.
81. Busse F. H. //Ibidem. 1972. V. 52. P. 97.
82. Lorenz E. N. //J. Atm. Sci., 1963. V. 20. P. 130.
83. Willis G. E., Deardorff J. W. //J. Fluid. Mech. 1970. V. 44. P. 661.
84. McLaughlin J. B., Martin P. C. //Phys. Rev. Ser. A. 1975. V. 12. P. 186.
85. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. //ДАН СССР. 1977. Т. 234. С. 336.
86. Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. //Comm. Math. Phys. 1980. V. 78. P. 247.
87. Mori H., Fujisaka H. //Lect. Not. Phys. 1980. V. 132. P. 181.
88. Ahlers G., Behringer R. P. //Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. P. 712.
89. Libchaber A., Maurer J. //J. de Phys. 1980. T. 41. Col. C3. P. 51.
90. Gollub J., Benson S. V., Steinman //Ann. N.Y. Acad. Sci. 1981. V. 357. P. 22.
91. Berge P., Doboïs M., Manneville P., Pomeau Y. //J. de Phys. Lett. 1980. T. 41. P. L341.
92. Обухов А. М. //Gerl. Beitr. Geophys. Leipzig. 1973. Bd 82. S. 282.
93. Кантуэлл Б. Дж. //Механика. Вып. 33. Вихри и волны.— М.: Мир, 1984.— С. 9.
94. Drazin P. D., Reid W. H. Hydrodynamic Stability.— Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981.
95. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.— М.: Мир, 1984.
96. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред.— М.: Наука, 1984.
97. Ильяшенко Ю. С. //УМН 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 243.

98. Ильяшенко Ю. С.//Усп. мех. 1982. Т. 5. Вып. 112. С. 31.
99. Ильяшенко Ю. С.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Математика, механика». 1983. № 3. С. 52.
100. Ладыженская О. А.//Зап. научн. сем. ЛОМИ. АН СССР. 1982. Т. 115.
101. Бабин А. В., Вишик М. И.//Ibidem. 1982. С. 3.
102. Бабин А. В., Вишик М. И.//УМН. 1982. Т. 37. Вып. 3. С. 173.
103. Бабин А. В., Вишик М. И.//УМН. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 133.
104. Оселедец В. И.//Тр. Мос. мат. об-ва. 1968. Т. 19. С. 179.
105. Brandstater A., Swift J., Swinney H. L., Wolf A., Farmer J. D., Jen E., Crutchfield J. P.//Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1442.
106. Malraison B., Atten P., Berge P., Dubois M.//J. de Phys. Lett. 1983. T. 44. P. L897.