

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.3

**ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ
ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
В КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ***И. И. Аббасов, Б. М. Болотовский, В. А. Давыдов***СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	709
1. Излучение электромагнитных волн заряженной частицей, совершающей движение по заданному закону	710
2. Высокочастотная асимптотика амплитуды I	712
2.1. Синхротронное излучение	714
2.2. Излучение заряженной частицы при плавном изменении скорости	716
2.3. Излучение заряженной частицы, равномерно движущейся на заданном ограниченном отрезке, с учетом плавного ускорения в начале пути и плавного замедления в конце	717
2.4. Гармонический осциллятор конечной амплитуды	718
3. Высокочастотная асимптотика спектра излучения равномерно движущихся заряженных частиц в нестационарных и неоднородных средах	719
Заключение	721
Список литературы	722

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, движущаяся заряженная частица является источником электромагнитного излучения. Исключением из этого правила является случай равномерного движения заряженной частицы в пустоте, когда излучение отсутствует. При ускоренном движении заряженной частицы в пустоте излучение всегда имеет место. Если заряд движется равномерно в однородной преломляющей среде, то излучение возникает лишь в том случае, если скорость заряда превышает фазовую скорость электромагнитных волн в этой среде. Это — хорошо известное излучение Вавилова — Черенкова¹. При движении заряженной частицы в неоднородной и (или) нестационарной среде излучение возникает как при ускоренном движении, так и при равномерном движении заряда с любой скоростью. В частном случае, когда равномерно движущийся заряд пересекает плоскую границу раздела двух сред, возникает переходное излучение².

Если говорить об излучении заряженной частицы в пустоте, то оно достаточно подробно изучено для ряда случаев, в которых известен закон движения частицы. Некоторые из этих случаев имеют практический интерес. Так, например, задача об излучении заряженной частицы, движущейся по окружности, имеет прямое отношение к излучению ускоренных частиц на орбите в камере синхротрона. Это излучение получило название синхротронного излучения. Оно широко применяется в физике, биологии и технике³⁻⁵. Учет синхротронного излучения необходим в целом ряде астрофизических явлений⁶. В последние годы вырос интерес к ондуляторному излучению. Это излучение возникает для особого класса траекторий заряженной ча-

стицы, а именно, для таких законов движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, которые удовлетворяют соотношению: $\mathbf{r}(t + T) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{L}$, где \mathbf{L} — расстояние, на которое перемещается заряженная частица за время T . Ондуляторное излучение релятивистских частиц обладает рядом уникальных особенностей, оно все шире используется для исследования и обработки различных материалов, биологических объектов и для других целей^{9, 10}.

Здесь мы ограничимся приведенным перечислением тех законов движения, для которых излучение заряженной частицы изучено достаточно подробно. К настоящему времени исследовано излучение для ряда других законов движения, но мы пока не будем говорить о соответствующих работах, отсылая желающих к литературе^{2-4, 6, 7}.

Излучение, возникающее при движении заряженной частицы, имеет различные характеристики — спектр, угловое распределение, интенсивность, поляризацию — при различных законах движения частицы. Однако для достаточно широкого класса траекторий можно вывести некоторые общие утверждения о поведении интенсивности и спектра излучения на больших частотах. Эти утверждения, высказанные в работах^{8, 14, 17}, сводятся к тому, что при гладких траекториях интенсивность излучения на достаточно высоких частотах спадает с ростом частоты ω быстрее любой конечной степени ω . Такое заключение следует из свойств преобразования Фурье. Действительно, пусть задан закон движения заряженной частицы в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор, определяющий положение частицы в момент времени t . Ток, связанный с движением заряженной частицы, пропорционален ее скорости $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$. Пусть $\mathbf{r}(t)$ есть гладкая функция, т. е. она непрерывна вместе со всеми своими производными. Нетрудно показать (см. ниже), что амплитуда волны, излучаемой движущимся зарядом, пропорциональна фурье-компоненте тока, связанного с движением частицы, т. е. для случая гладкой траектории выражается через фурье-компоненту гладкой функции (под гладкой функцией мы в дальнейшем будем понимать функцию, непрерывную вместе со всеми своими производными). Для этого случая справедлива теорема, по которой фурье-компонента гладкой функции при достаточно больших значениях частоты ω спадает с ростом частоты быстрее любой целой степени ω ¹⁸. Это означает, что интенсивность излучения с ростом частоты быстро падает, начиная с некоторого значения частоты.

Для указанных выше видов излучения (т. е. для синхротронного, магнитотормозного и ондуляторного), действительно, имеет место быстрое (экспоненциальное) спадание интенсивности излучения на высоких частотах, и, таким образом, эти результаты находятся в согласии с упомянутой выше теоремой об асимптотических свойствах преобразования Фурье. Однако возникает вопрос, при всех ли гладких законах движения интенсивность излучения спадает по показательному закону. В настоящей заметке мы покажем, что для гладких траекторий почти во всех случаях (исключения будут оговорены) интенсивность излучения на высоких частотах спадает по экспоненте.

Будет также показано, что если заряженная частица движется в однородной и нестационарной среде с плавно меняющимися параметрами, то спектр излучения, возникающего при таком движении, также спадает на высоких частотах по показательному закону.

1. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ПО ЗАДАННОМУ ЗАКОНУ

Рассмотрим случай, когда источником поля является точечная заряженная частица, совершающая движение по заданному закону. Заряд частицы обозначим через q .

Пусть в момент времени t частица находится в точке

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}(t)$ — заданная функция времени.

Закон движения (1) определяет не только положение, но и скорость $\mathbf{v}(t)$ заряженной частицы в любой момент времени t

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (2)$$

Движению заряженной частицы по закону (1), (2) соответствует плотность заряда

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad (3)$$

и плотность тока

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (4)$$

где $\delta(\alpha)$ — дельта-функция.

Определение электромагнитного поля, возникающего при движении точечного заряда по закону (1), (2), сводится к решению системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля, причем плотность заряда и плотность тока имеют вид (3), (4).

Поскольку нас интересует спектральное разложение поля, мы будем описывать поле излучения фурье-компонентой вектор-потенциала $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{i\omega t} dt. \quad (5)$$

В книге Л. Д. Ландау Е. М. Лифшица³ приводится выражение для вектор-потенциала $\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r})$ в случае, когда движение заряда определяется формулами (1), (2):

$$\mathbf{A}_{\omega\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \frac{qe^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{cr} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t))] dt. \quad (6)$$

Это выражение справедливо на больших расстояниях \mathbf{r} от области, в которой происходит движение заряда.

Рассмотрим структуру выражения (6) для вектор-потенциала. Множитель

$$\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$$

описывает сферическую волну, расходящуюся от области, в которой происходит движение заряда. Входящая в показатель экспоненты величина k есть волновой вектор, соответствующий этой сферической волне:

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (7)$$

Амплитуда сферической волны (6) пропорциональна величине

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} v_i^2(t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)) dt. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ — положение и скорость заряда в момент времени t , вектор \mathbf{k} по абсолютной величине равен ω/c и направлен от области, где движется заряд, в точку наблюдения;

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (9)$$

Амплитуда I , определяемая формулой (8), с точностью до постоянного множителя равна фурье-компоненте плотности тока, вызванного движением заряда по закону (1), (2). Действительно, разложим плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, определяемую формулой (4), в интеграл Фурье по всем переменным:

$$j_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) dt d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Если в эту формулу подставить выражение (4) для $j(r, t)$ и провести интегрирование по всему пространству, мы получим

$$j_{k, \omega} = \frac{1}{(2\pi)^4} I, \quad (11)$$

где I — амплитуда (8) излучаемой сферической волны (6).

Зная величину I , можно определить интенсивность излучения на частоте ω в элемент телесного угла $d\Omega$ ¹²

$$d\varepsilon_{n, \omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} ||\mathbf{k}||^2 d\omega d\Omega, \quad (12)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении излучения.

Из формулы (12) видно, что интенсивность излучения определяется величиной I (8). Поэтому асимптотика спектральной интенсивности $d\varepsilon_{n, \omega}$ определяется поведением амплитуды I на высоких частотах.

2. ВЫСОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ I

Мы рассмотрим асимптотическое поведение амплитуды I на высоких частотах в предположении, что закон движения заряда (1) определяется гладкой функцией, т. е. что функция $r(t)$ непрерывна вместе со всеми своими производными.

Выражение (8) для I можно рассматривать как частотную фурье-компоненту функции $v(t) \exp(-ikr(t))$. Если $r(t)$ есть гладкая функция, то $v(t) \exp(-ikr(t))$ также есть гладкая функция. Поэтому, исходя из общих свойств преобразования Фурье, можно утверждать, что с ростом частоты ω величина I стремится к нулю быстрее любой целой степени ω . Исследование выражения (8) для I позволяет получить более определенные заключения относительно вида зависимости I от частоты ω при высоких частотах.

Оценим амплитуду I при больших значениях частоты ($\omega \rightarrow \infty$). В дальнейшем мы уточним критерии, при которых можно считать частоту достаточно большой.

Амплитуда I , как видно из формулы (8), определяется интегралом, причем в подынтегральное выражение входит функция

$$\exp(i\omega t - ikr(t)). \quad (13)$$

При больших значениях частоты эта функция быстро осциллирует в той области изменения переменной t , где фаза $\Phi(t)$ выражения (13)

$$\Phi(t) = \omega t - kr(t) \quad (14)$$

меняется со временем. Поэтому интеграл по соответствующей области имеет малое значение. Если на пути интегрирования имеется точка, в которой фаза (14) не меняется, то интеграл по области, прилегающей к этой точке, отличен от нуля и определяет величину I (8). Точка t_0 , вблизи от которой фаза (14) не меняется, может быть найдена из уравнения

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega - kv(t_0) = 0. \quad (15)$$

Это уравнение не имеет действительных корней. В самом деле, поскольку величина волнового вектора \mathbf{k} определяется соотношением (7), мы можем переписать уравнение (15) в виде

$$\omega \left(1 - \frac{v(t_0)}{c} \cos \theta \right) = 0, \quad (16)$$

где θ — угол между волновым вектором и скоростью заряда \mathbf{v} . Поскольку скорость заряда \mathbf{v} не может превышать скорость света в пустоте c , а $\cos \theta$

по величине не превышает единицу, второе слагаемое в (16) всегда меньше первого, и поэтому уравнение (16) не имеет действительных корней t_0 . Однако, если $\mathbf{v}(t)$ есть гладкая функция, то уравнение (16) может иметь комплексный корень. Запишем этот комплексный корень следующим образом:

$$t_0 = t_1 + it_2, \tag{17}$$

где t_1 — действительная часть корня, а t_2 — мнимая.

Отметим здесь, что в случае равномерного движения заряда в пустоте уравнение (16) вообще не имеет корня. Если частица равномерно движется в однородной преломляющей среде, то уравнение (16) совпадает с условием излучения Вавилова — Черенкова.

Разложим фазу (14) в выражении (8) для I по степеням в окрестности точки t_0 , ограничившись тремя первыми членами:

$$\Phi(t) = \omega t - \mathbf{kr}(t) = \Phi(t_0) + \frac{\partial \Phi(t_0)}{\partial t} (t - t_0) + \frac{\partial^2 \Phi(t_0)}{2 \partial t^2} (t - t_0)^2 + \dots \tag{18}$$

Поскольку в точке t_0 удовлетворяется уравнение (15), второй член разложения (18) обращается в нуль. Далее, подставим разложение (18) в (8) и вынесем из-под интеграла значение $\mathbf{v}(t)$ в точке t_0 . Мы получим

$$I = \mathbf{v}(t_0) \exp [i(\omega t_0 - \mathbf{kr}(t_0))] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{i}{2} \mathbf{a}(t_0) \mathbf{k} (t - t_0)^2 \right] dt, \tag{19}$$

где $\mathbf{a}(t_0)$ — ускорение частицы при $t = t_0$. Интеграл в (19) вычисляется без труда, и мы получаем

$$I = \left(\frac{2\pi}{|\mathbf{a}(t_0) \mathbf{k}|} \right)^{1/2} \mathbf{v}(t_0) \exp (i\omega t_0 - i\mathbf{kr}(t_0)) \exp (i\beta_m), \tag{20}$$

где β_m — угол, определяющий направление пути интегрирования в методе перевала¹⁵. Мы не приводим значения β_m , так как фазовый множитель $\exp (i\beta_m)$, входящий в (20), равен по абсолютной величине единице, а в дальнейшем нас будет интересовать спектр излучения, определенный выражением (12). В это выражение входит абсолютное значение I .

Описанная процедура совпадает с вычислением величины I при больших значениях ω методом перевала¹⁵.

Формула (20) определяет значение амплитуды I излучаемой волны (6) при больших значениях частоты.

Поскольку в формуле (20) величина t_0 является комплексной, $t_0 = t_1 + it_2$ (см. формулу (17)), то и $\mathbf{r}(t_0)$ также есть комплексная функция. Положим

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_1 + i\mathbf{r}_2, \tag{21}$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — действительные векторы. С учетом (17) и (21) получим, что величина I , описываемая формулой (20), затухает с ростом частоты по экспоненциальному закону, причем затухающий множитель имеет вид:

$$\exp [-(\omega t_2 - \mathbf{kr}_2)]. \tag{22}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что t_2 , мнимая часть величины t_0 в обозначении (17), мала. Тогда мы можем считать, что

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_1) + it_2 \frac{\partial \mathbf{r}(t_1)}{\partial t_1} = \mathbf{r}(t_1) + it_2 \mathbf{v}(t_1). \tag{23}$$

Отсюда получаем, что мнимая часть вектора $\mathbf{r}(t_0)$ равна

$$\mathbf{r}_2 = t_2 \mathbf{v}(t_1). \tag{24}$$

Тогда затухающий множитель (22) принимает вид

$$\exp [-t_2 (\omega - \mathbf{kv}(t_1))]. \tag{25}$$

Этот множитель можно представить в виде

$$e^{-t_2/T_\Phi}, \quad (26)$$

где

$$T_\Phi = (\omega - kv(t_1))^{-1} \quad (27)$$

— величина, определяющая по порядку величины промежуток времени, в течение которого заряд, движущийся со скоростью $v(t_1)$, излучает волны, мало отличающиеся по фазе. Величину T_Φ называют временем формирования излучения.

Выясним теперь физический смысл величины t_2 в показателе экспоненты (26).

По определению (17) величина t_2 есть мнимая часть величины t_0 , где t_0 — точка стационарной фазы, удовлетворяющая уравнению (16). Напомним, что мы здесь считаем величину t_2 малой. В этом случае, как видно из (19), величина t_2 равна по порядку величины тому промежутку времени, в течение которого заряженная частица излучает волны, приходящие в точку наблюдения. Величина t_1 , действительная часть t_0 , определяет по порядку величины момент времени, вблизи от которого происходит излучение.

Поясним сказанное на нескольких примерах.

2 1 Синхротронное излучение

Пусть заряженная частица движется по окружности радиуса R с угловой скоростью ω_0 . Выберем оси координат, как показано на рис. 1. Положение частицы на окружности определяется значением угла $\varphi = \omega_0 t$. Считаем, что частица движется по окружности против часовой стрелки. Положение частицы в момент времени t определяется формулами

$$\begin{aligned} x &= R \sin \omega_0 t, \\ y &= R \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда легко определить компоненты скорости частицы

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \omega_0 t, \\ v_y &= -v_0 \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$v_0 = R\omega_0. \quad (30)$$

Излучение частицы определяется интегралом (8), куда для нашего случая следует подставить значения координат $r(t)$ и скорости $v(t)$ из (28) и (29).

Рассмотрим амплитуду (8) для случая больших частот. Пусть волновой вектор направлен параллельно оси x . В этом случае уравнение (16) для точки перевала имеет вид

$$1 - \frac{v_x(t_0)}{c} = 0, \quad (31)$$

или

$$1 - \frac{v_0 \cos \omega_0 t_0}{c} = 0. \quad (32)$$

Разложим $\cos \omega_0 t_0$ по степеням t , ограничившись второй степенью аргумента:

$$\cos \omega_0 t_0 = 1 - \frac{1}{2} (\omega_0 t_0)^2 + \dots$$

Подставляя это разложение в (32), получим

$$2 \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) = (\omega_0 t_0)^2. \quad (33)$$

Будем считать, что скорость заряженной частицы близка к скорости света. Тогда

$$2 \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) = \frac{1}{\gamma^2}, \quad (34)$$

где

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{1/2} \quad (35)$$

есть так называемый лоренц-фактор. В дальнейшем мы будем предполагать, что лоренц-фактор велик по сравнению с единицей ($\gamma \gg 1$).

С учетом (34) получаем из (35)

$$t_0 = \frac{i}{\omega_0 \gamma}. \quad (36)$$

Таким образом, величина t_0 точки перевала в нашем примере получилась чисто мнимой. Если принять, как мы это делали выше, $t_0 = t_1 + it_2$, то получим $t_1 = 0$, $t_2 = 1/\omega_0 \gamma$.

Этот результат допускает простую физическую интерпретацию. Как известно, заряд, движущийся с релятивистской скоростью, излучает вперед в узком интервале углов $\Delta\theta \sim 1/\gamma$. Если мы рассматриваем излучение, волновой вектор которого направлен в положительном направлении оси x , то такое излучение собирается с участка окружности, имеющего угловую протяженность $1/\gamma$ и расположенного вблизи от точки $\varphi = 0$. Время движения заряда на этом участке по порядку величины как раз и равно $1/\omega_0 \gamma$, т. е. мнимой части выражения (36) для t_0 . Действительная часть t_0 , равная в данном случае нулю, дает положение участка траектории, с которого собирается излучение ($t = 0$, $\varphi = \omega t = 0$).

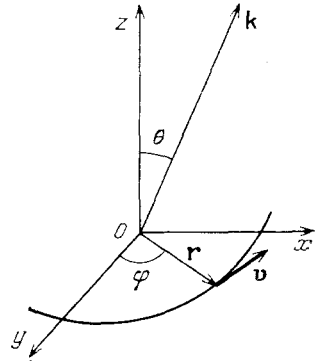


Рис. 2

Оценим теперь поведение амплитуды излучаемой волны на больших частотах. Для этого воспользуемся формулой (22). Подставляя значения t_1 и t_2 из (36), получим зависимость

$$e^{-\omega/3\omega_0 \gamma^3}, \quad (37)$$

причем считаем, что $\omega \gg \omega_0 \gamma^3$. Таким образом, амплитуда излучаемой волны с частотой ω затухает с ростом частоты по закону (37). Формула (37) также показывает, для каких частот справедливо асимптотическое поведение (37). Частота ω должна быть настолько велика, чтобы показатель экспоненты был велик по сравнению с единицей.

Поскольку излучаемое поле затухает с частотой по закону (37), энергия излучения также падает с ростом частоты пропорционально квадрату множителя (37), т. е. по закону

$$e^{-2\omega/3\omega_0 \gamma^3}. \quad (38)$$

Точная теория ³ дает в случае высоких частот такую же экспоненциально спадающую зависимость от частоты.

До сих пор мы предполагали, что волновой вектор излучаемой волны лежит в плоскости круговой орбиты электрона. Пусть теперь волновой вектор \mathbf{k} образует угол θ с плоскостью орбиты. Пусть орбита лежит в плоскости x, y , а волновой вектор \mathbf{k} параллелен плоскости x, z (рис. 2). Закон движения заряженной частицы по-прежнему определяется формулой (28). Угол между волновым вектором \mathbf{k} и плоскостью орбиты (или, что то же самое, угол между \mathbf{k} и осью x) обозначим через θ . В этом случае уравнение (16), определяющее

точку стационарной фазы, имеет вид:

$$1 - \frac{v_0}{c} \cos \omega_0 t_0 \cdot \cos \theta = 0. \quad (39)$$

Значение $t = t_0$, при котором удовлетворяется уравнение (39), является, как и в предыдущем случае ($k_z = 0$), чисто мнимым:

$$t_0 = \frac{i}{\omega_0} \left[\frac{2(1 - \beta \cos \theta)}{\beta \cos \theta} \right]^{1/2}. \quad (40)$$

При $\theta = 0$ это значение переходит в выражение (36) с учетом того, что мы считаем скорость заряда, близкой к скорости света, $\beta \approx 1$. Если теперь определить положение заряда $r(t_0)$ в момент времени t_0 , определяемый соотношением (40), и подставить значение t_0 и $r(t_0)$ в (20), мы получим, что в этом случае зависимость амплитуды излучаемой волны от частоты при больших значениях частоты имеет вид

$$\exp \left\{ -\frac{\omega}{3\omega_0} \left[\frac{8(1 - \beta \cos \theta)^3}{(\beta \cos \theta)^3} \right]^{1/2} \right\}. \quad (40')$$

Интенсивность излучения пропорциональна квадрату этой величины.

2.2. Излучение заряженной частицы при плавном изменении скорости

Пусть точечная заряженная частица движется вдоль оси, причем скорость движения меняется по следующему закону:

$$v(t) = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_2 - v_1}{2} \operatorname{th} \frac{t}{T}. \quad (41)$$

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях времени закон движения (41) дает

$$v(t) |_{t \rightarrow -\infty} = v_1.$$

При больших положительных значениях времени имеем из (41)

$$v(t) |_{t \rightarrow \infty} = v_2.$$

Таким образом, формула (41) описывает движение, в котором начальная скорость равна v_1 , конечная скорость равна v_2 . Переход от v_1 к v_2 происходит плавно на отрезке времени, равном по порядку величины T . Зная скорость заряда (41), легко найти его положение в зависимости от времени:

$$L(t) = \frac{v_1 + v_2}{2} t + \frac{v_2 - v_1}{2} T \ln \operatorname{ch} \frac{t}{T}. \quad (42)$$

Движение заряда по закону (41), (42) сопровождается излучением. Оценим поведение излучаемого поля на больших частотах. Уравнение (16) для точки перевала имеет вид

$$\frac{c}{\cos \theta} = \left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_2 - v_1}{2} \operatorname{th} \frac{t_0}{T} \right). \quad (43)$$

Решая это уравнение, получим для t_0 значение

$$t_0 = t_1 + it_2 = \frac{T}{2} \ln \frac{1 - (v_1/c) \cos \theta}{1 - (v_2/c) \cos \theta} + i\pi \frac{T}{2}. \quad (44)$$

Таким образом,

$$t_1 = \frac{T}{2} \ln \frac{1 - (v_1/c) \cos \theta}{1 - (v_2/c) \cos \theta}, \quad t_2 = \frac{\pi T}{2}. \quad (45)$$

Мнимая часть точки перевала t_0 по порядку величины равна времени T , в течение которого происходит ускорение заряда. Поскольку изменение скорости сопровождается излучением, то величина t_2 дает эффективное время, в течение которого происходит излучение.

Используя асимптотическую формулу (20) для амплитуды излученных волн при больших частотах, а также соотношения (41), (42), (44) и (45), получим, что зависимость от частоты определяется соотношением

$$l \approx \begin{cases} \exp \left[-\pi\omega T \left(1 - \frac{v_2}{c} \cos \theta \right) \right] & \text{при } v_2 > v_1, \\ \exp \left[-\pi\omega T \left(1 - \frac{v_1}{c} \cos \theta \right) \right] & \text{при } v_2 < v_1. \end{cases} \quad (46)$$

Если речь идет об интенсивности излучения, показатели в экспонентах (46) удваиваются. Очевидно, что закон спада (46) справедлив при выполнении неравенств

$$\omega \gg \begin{cases} \left(\pi T \right)^{-1} \left(1 - \frac{v_2}{c} \cos \theta \right)^{-1} & \text{при } v_2 > v_1, \\ \left(\pi T \right)^{-1} \left(1 - \frac{v_1}{c} \cos \theta \right)^{-1} & \text{при } v_1 > v_2. \end{cases} \quad (47)$$

Эти асимптотические свойства излучения могут быть получены также из точной теории ¹².

2.3. Излучение заряженной частицы, равномерно движущейся на заданном ограниченном отрезке, с учетом плавного ускорения в начале пути и плавного замедления в конце

Рассмотрим теперь случай, когда заряженная частица первоначально находится в покое, затем плавно ускоряется и за время порядка T получает скорость v . В течение времени $2T_0$ заряд движется с постоянной скоростью v , а затем происходит замедление, и за промежуток времени T скорость заряда снова падает до нуля. Мы будем рассматривать следующий закон изменения скорости:

$$v(t) = \frac{v}{2} \left(\text{th} \frac{t+T_0}{T} - \text{th} \frac{t-T_0}{T} \right). \quad (48)$$

Здесь T — время ускорения и время последующего замедления, а $2T_0$ — время, в течение которого заряд движется с постоянной скоростью v . Предполагается, что $T_0 \gg T$.

Если время T ускорения или замедления стремится к нулю, то закон движения заряда меняется, и в пределе при $T = 0$ скорость заряда меняется скачком. В начале движения $t = -T_0$ скорость заряда скачком меняется от 0 до v , а в конце движения ($t = T_0$) столь же резко, скачком меняется от v до нуля, после того, как заряд прошел с постоянной скоростью v расстояние $2vT_0$. Излучение заряда при резком изменении скорости было впервые рассмотрено И. Е. Таммом ¹¹. В этом случае, как было показано, спектр излучения на больших частотах осциллирует в зависимости от частоты, но не стремится к нулю. Очевидно, если изменение скорости происходит плавно, спектр излучения на больших частотах, как уже было показано, должен затухать по показательному закону.

Определим высокочастотную асимптотику спектра, возникающего при движении по закону (48). Точка перевала t_0 определяется из уравнения (16), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{c}{\cos \theta} = \frac{v}{2} \left(\text{th} \frac{t_0+T_0}{T} - \text{th} \frac{t_0-T_0}{T} \right). \quad (49)$$

Решая это уравнение, получаем

$$t_0 = t_1 + it_2 = \frac{T}{2} \{ i\pi + \ln [b \mp (b^2 - 1)^{1/2}] \}_s \quad (50)$$

где

$$b = \text{ch} \frac{2T_0}{T} - \frac{v}{c} \cos \theta \text{sh} \frac{2T_0}{T} \quad (51)$$

и считается, что $T_0 \gg T$.

Если скорость частицы меняется по закону (48), то зависимость положения от времени определяется формулой

$$L(t) = \frac{vT}{2} \ln \frac{\text{ch}[(t+T_0)/T]}{\text{ch}[(t-T_0)/T]}. \quad (52)$$

С учетом формул (20), (48), (50) и (51) получаем асимптотическую зависимость амплитуды излучения l от частоты ω

$$l \sim \exp \left[-\pi\omega T \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^{-1} \right] = \exp \left(-\frac{\pi T}{T_\Phi} \right), \quad (53)$$

где T — время, в течение которого меняется скорость частицы (время ускорения на старте или время замедления на финише), а T_Φ — время формирования излучения на частоте ω (см. формулу (27)).

Если время ускорения (или замедления) $T = 0$, экспоненциальное спадание (53) не имеет места. Таким образом, предположение о мгновенном ускорении или замедлении приводит к потере коротковолновой асимптотики.

Формула (53) справедлива, если

$$\omega \gg \frac{1}{\pi T [1 - (v/c) \cos \theta]}, \quad (54)$$

или

$$T \gg T_\Phi$$

Излучение, возникающее при движении заряженной частицы по закону (48), может быть вычислено в замкнутом виде. Подставляя закон движения в выражение (8) для амплитуды поля излучения и учитывая, что положение заряженной частицы зависит от времени по закону (52), получим выражение для амплитуды поля излучения²⁴:

$$l = \frac{vT}{4} \left(1 - e^{-4T_0/T} \right) \frac{\pi\omega T}{\text{sh}(\pi\omega T/2)} F \left(1 - \frac{i\omega T}{2} \frac{v}{c} \cos \theta, 1 + i\omega \frac{T}{2}, 2; 1 - e^{-4T_0/T} \right). \quad (55)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ — гиперметрическая функция²⁵. Можно было бы попытаться определить асимптотику спектра излучения непосредственно с помощью точной формулы (55), но для нас оказалось проще сразу воспользоваться методом перевала.

2.4. Гармонический осциллятор конечной амплитуды

Пусть точечная заряженная частица колеблется вдоль оси z по закону

$$z = A \sin \omega_0 t. \quad (56)$$

Очевидно, скорость движения зависит от времени следующим образом:

$$v = \frac{dz}{dt} = A\omega_0 \cos \omega_0 t. \quad (57)$$

Определим асимптотику спектра излучения при движении по закону (56), (57). Уравнение (16) для точки перевала в данном случае имеет вид

$$A\omega_0 \cos \omega_0 t_0 = \frac{c}{\cos \theta}. \quad (58)$$

Это уравнение по существу совпадает с уже рассмотренным уравнением (32), определяющим точку стационарной фазы для синхротронного излучения.

Проводя аналогичные вычисления, получим асимптотику амплитуды излучения для гармонического осциллятора в виде

$$I \sim e^{-\omega/3\omega_0\gamma^2}; \quad (59)$$

эта формула также следует из точной теории ⁴.

3 ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Исследуем теперь высокочастотную асимптотику спектра излучения равномерно движущегося заряда в среде с плавно меняющейся во времени или в пространстве диэлектрической проницаемостью ϵ . Рассмотрим вначале случай нестационарной среды, показатель преломления которой $n = \epsilon^{1/2}$ является плавной функцией времени. Мы будем считать, что изменение диэлектрической проницаемости среды происходит достаточно медленно, так что характерное время изменения n много больше периода излученной волны и времени релаксации среды. Это позволит нам пользоваться приближением геометрической оптики, а также квазистационарным значением диэлектрической проницаемости.

Итак, пусть заряд q движется с постоянной скоростью v вдоль оси z в среде, показатель преломления которой зависит от времени по закону $n = n(t)$. Используя уравнения Максвелла, нетрудно получить уравнение для электрической индукции \mathbf{D} :

$$\Delta \mathbf{D} - \frac{n^2(t)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 4\pi \left(\text{grad } \rho + \frac{n^2(t)}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right), \quad (60)$$

где плотность заряда ρ и плотность тока \mathbf{j} описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \rho &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \\ \mathbf{j} &= q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \end{aligned} \quad (61)$$

Разложим электрическую индукцию \mathbf{D} в пространственный интеграл Фурье вида

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{k} \mathbf{D}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}; \quad (62)$$

аналогичное разложение используем и для правой части уравнения (59). Тогда с учетом (61) для пространственной фурье-компоненты индукции $\mathbf{D}_{\mathbf{k}}$ получим следующее уравнение:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}}'' + \tilde{n}^2(t) \omega_0^2 \mathbf{D}_{\mathbf{k}} = i \frac{q}{2\pi^2} (\mathbf{v}(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \tilde{n}^2(t) c^2 \mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t}, \quad (63)$$

где $\omega = \mathbf{k}c$, $\tilde{n} = 1/n$, а штрих означает дифференцирование по времени. Как показано в ¹⁶, излучение в нестационарной среде определяется только поперечной составляющей индукции

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\text{tr}} = \mathbf{D}_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{D}_{\mathbf{k}})k^{-2} \quad (64)$$

Поэтому найдем и будем решать уравнение для $\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\text{tr}}$. Оно имеет вид

$$(\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\text{tr}})'' + \tilde{n}^2(t) \omega_0^2 \mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\text{tr}} = B e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t}, \quad (65)$$

где

$$B = i \frac{q}{2\pi^2} (\mathbf{k}\mathbf{v}) \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2} \right).$$

Введя новую функцию $y(t)$, такую, что $\mathbf{D}_{\mathbf{k}}^{\text{tr}} = \mathbf{B}y$, получим для y следующее уравнение:

$$y'' + \tilde{n}^2(t) \omega_0^2 y = e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t}. \quad (66)$$

Поскольку нас интересует высокочастотная асимптотика спектра излучения, то для дальнейшего исследования воспользуемся методом геометрической оптики. Геометрооптические решения уравнения (66) без правой части имеют вид ¹⁷

$$y_{1,2}(t) = [n(t)]^{1/4} \exp\left(\pm i\omega_0 \int^t \tilde{n}(t') dt'\right). \quad (67)$$

Решения (67) представляют собой две волны, распространяющиеся навстречу друг другу (по и против вектора \mathbf{k}). Далее, используя (67), а также тот факт, что при $t \rightarrow -\infty$ излучение отсутствует, получим решение неоднородного уравнения (66):

$$y(t) = \frac{1}{2i\omega} \left[-y_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} y_2(\tau) e^{-i(kv)\tau} d\tau + y_2(t) \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) e^{-i(kv)\tau} d\tau + \int_t^{\infty} (y_2(\tau) y_1(t) - y_2(t) y_1(\tau)) e^{-i(kv)\tau} d\tau \right]. \quad (68)$$

Последнее слагаемое в (68) пропорционально фурье-компоненте поля равномерно движущегося заряда; это слагаемое не связано с излучением. Волны, излученные равномерно движущимся зарядом в нестационарной среде, определяются двумя первыми слагаемыми в (68). Обозначим эти слагаемые соответственно через $Y_1(\mathbf{k})$ и $Y_2(\mathbf{k})$. Для определения углового и спектрального распределений энергии излучения необходимо учесть, что в направлении \mathbf{k} (под углом θ к оси z) излучается не только волна $Y_2(\mathbf{k})$, но и волна $Y_2(-\mathbf{k})$. Поэтому из (67) и (68) следует, что высокочастотная асимптотика спектра излучения определяется квадратом модуля асимптотики (при $\mathbf{k} \rightarrow \infty$) следующего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [n(\tau)]^{1/2} \exp\left[i\left(kc \int^{\tau} \tilde{n}(t') dt' - kv \cos \theta \tau\right)\right] d\tau. \quad (69)$$

Сравнение формул (69) и (8) показывает, что подынтегральные выражения в них по сути дела аналогичны. Поэтому общие выводы, сделанные нами относительно асимптотического поведения интеграла (8), остаются в силе и для интеграла (69). А именно, точка τ_0 , в которой фаза экспоненты в (69) не меняется, определяется уравнением

$$kc\tilde{n}(\tau_0) - kv \cos \theta = 0, \quad (70)$$

или

$$1 - \frac{v}{c} n(\tau_0) \cos \theta = 0. \quad (70')$$

Если не выполняется условие излучения Вавилова — Черенкова (а для достаточно высоких частот оно не выполняется, поскольку в этом случае $n < 1$), то решение уравнения (70) обязательно имеет отличную от нуля мнимую часть:

$$\tau_0 = \tau_1 + i\tau_2, \quad (71)$$

что в конечном итоге определяет экспоненциальное затухание энергии излучения при больших значениях k , причем аналогично (22) затухающий множитель представляется в виде

$$\exp\left(-kc \left[F_2(\tau_0) - \frac{v}{c} \cos \theta \cdot \tau_2\right]\right), \quad (72)$$

где $F_2(\tau_0)$ — мнимая часть функции

$$F = \int^{\tau_0} \tilde{n}_i^2(t')_i dt.$$

Используя (72), нетрудно получить асимптотики спектров излучения для ряда конкретных моделей, описывающих изменение во времени показателя преломления нестационарной среды (например, для случая плавного перехода показателя преломления от постоянного начального до постоянного конечного значения либо для случая его периодического изменения). Однако, как видно из (69), (72), подобные расчеты аналогичны проведенным выше, и мы их здесь не приводим. Отметим только, что точное решение задачи об излучении равномерно движущегося заряда при плавном изменении диэлектрической проницаемости среды от одного постоянного значения до другого получено в ¹⁸.

Рассмотрим теперь асимптотику спектра переходного излучения равномерно движущегося заряда в неоднородной среде. Для простоты исследуем случай, когда диэлектрическая проницаемость среды зависит только от одной координаты z , а заряд движется также вдоль оси z со скоростью v . Поскольку нас интересует излучение высоких частот, воспользуемся опять приближением геометрической оптики. Квазиклассическое решение сформулированной задачи приведено в ¹⁹. Так, спектральная интенсивность рентгеновского излучения вперед пропорциональна квадрату модуля следующего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{\omega}{v} u - \int^u \lambda(z') dz' \right) \right] du, \quad (73)$$

где ω — частота излученной волны, $\lambda(z) = [(\omega^2/c^2) \epsilon(z) - \kappa^2]^{1/2}$, κ — поперечная (по отношению к оси z) составляющая волнового вектора. Очевидно, выражение (73) аналогично выражениям (8) и (69). Поэтому и в случае переходного излучения (если λ является гладкой функцией z) мы можем утверждать, что высокочастотная асимптотика спектра будет экспоненциальной.

В заключение отметим, что в решенных к настоящему времени задачах переходного излучения в средах с плавно меняющейся в пространстве диэлектрической проницаемостью (например, излучение на размытой границе ²⁰, в пластинке с размытыми границами ²¹, резонансное излучение ²²) получена именно экспоненциальная асимптотика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей заметке мы рассмотрели общее свойство спектров излучения, возникающего при движении заряженной частицы. Сформулируем это свойство так: если закон движения частицы определяется гладкой функцией, то спектр излучения спадает на высоких частотах по показательному закону. Был приведен вывод асимптотической формулы для указанного случая (т. е. в предположении о том, что закон движения заряженной частицы задается аналитической функцией) и разобраны в качестве примеров конкретные законы движения, представляющие физический интерес. Некоторые из рассмотренных законов движения, возможно, являются лишь моделями, помогающими уяснить существенные особенности спектра излучения. Это, например, можно сказать в отношении законов движения (41) и (48). Однако разобранное асимптотическое поведение спектра излучения является общим и не зависит от конкретной модели. Спектральные измерения в случае синхротронного и ондуляторного излучений находятся в согласии с этим выводом ^{25, 26}.

В нашей работе мы ограничились рассмотрением излучения одной частицы, движущейся по заданной траектории. Если источником излучения является система движущихся частиц, то интенсивность излучения имеет более сложный вид (некоторые из таких примеров рассмотрены в статье Н. П. Клепикова ²⁷). Однако в том случае, когда законы движения всех частиц выражаются гладкими функциями, спектр излучения системы будет

спадать по экспоненциальному закону, начиная с некоторой частоты, характерной для данной системы.

Аналогичное асимптотическое поведение имеет и спектр излучения равномерно движущегося заряда в неоднородной нестационарной среде, если закон движения свойств среды как во времени, так и в пространстве описывается гладкой функцией.

Таким образом, экспоненциальное спадание спектра излучения на высоких частотах является общим свойством излучения для достаточно широкого класса процессов, для которых характерно плавное изменение параметров либо среды, либо движущегося источника.

В заключение отметим, что квантовая и классическая теории приводят, вообще говоря, к различным предсказаниям о высокочастотном поведении спектра излучения. По классической теории спектральная интенсивность излучения отлична от нуля (хотя и мала) для сколь угодно высоких частот. По квантовой же теории спектр излучения обрывается на частоте $\omega_{\text{кр}} = E/\hbar$, где E — энергия излучающей частицы, \hbar — постоянная Планка. С учетом этого обстоятельства наши результаты применимы в следующем случае. Пусть спектральная интенсивность излучения, вычисляемая в классической теории, падает по экспоненциальному закону, начиная с частоты, которую мы обозначим Ω . Тогда, если $\Omega \ll E/\hbar$, то классическая теория дает экспоненциальное затухание спектральной интенсивности в области частот от Ω до порядка E/\hbar , и этот результат не противоречит квантовой теории.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамм И. Е., Франк И. М. // ДАН СССР. 1977. Т. 14. С. 107.
2. Гинзбург В. Л., Франк И. М. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 15.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
4. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. — М.: Наука, 1983.
5. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
6. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1981.
7. Рязанов М. И. Электродинамика конденсированного вещества. — М.: Наука, 1984.
8. Болотовский Б. М., Давыдов В. А. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1981. Т. 24. С. 23.
9. Гинзбург В. Л. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. С. 165.
10. Алферов О. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов В. Г. // Тр. ФИАН СССР. 1975. Т. 80. С. 100.
11. Тамм И. Е. Собрание научных трудов. — М.: Наука, 1975.
12. Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. В. // УФН. 1982. Т. 136. С. 501.
13. Титчмарш Р. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: Гостехиздат, 1948. С. 229.
14. Аббасов И. И. // Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР). 1982. № 1. С. 31.
15. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1970.
16. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 132.
17. Столяров С. Н. // Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР). 1974. № 3. С. 25.
18. Давыдов В. А. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1979. Т. 22. С. 95.
19. Гарибьян Г. Н., Ян Ши. Рентгеновское переходное излучение. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1983. Гл. II. № 5.
20. Амагуни А. Ц., Корхмазян Н. А. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1630.
21. Авакян А. Л., Амбарцумян А. С., Ян Ши. // Изв. АН АрмССР. Сер. «Физика». 1980. Т. 15. С. 9.
22. Тер-Микаэлян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969. — Гл. V. § 28.
23. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
24. Аббасов И. И. // Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР). 1985. № 8. С. 33.
25. Вайтнов Г., Егеуцат Е., Наенсел Р. // J. Appl. Phys. 1966. V. 37. P. 3449.
26. Тернов И. М., Халилов В. Р., Багров В. Г., Никитин М. М. // Изв. вузов. Сер. «Физика». 1980. № 2. С. 21.
27. Клепиков Н. П. // УФН. 1985. Т. 146. С. 317.