

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

[534.2+535.1]:530.182

МЕТОД ХОХЛОВА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

С. А. Ахманов

СОДЕРЖАНИЕ

1. Нелинейные волны и нелинейные колебания	361
2. Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений — метод Хохлова . . .	364
3. Приближенные уравнения нелинейной оптики	367
3.1. Плоские волны: пространственно-временные аналогии	368
3.2. Дифракция света в нелинейной среде	371
4. Метод медленно меняющегося профиля — метод Хохлова в нелинейной акустике	374
5. Случайные нелинейные волны	378
6. Теория гамма-лазера, когерентная рентгеновская оптика	382
7. Автоволны. Сильные нелинейности	383
8. Заключение	385
Список литературы	386

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Нелинейная волна — пожалуй, один из наиболее популярных объектов современной физики.

С двумя яркими образами нелинейных волн — римановой ударной волной и солитоном Скотта Рассела — физика столкнулась еще в прошлом веке.

Однако в долгой истории изучения нелинейных волновых процессов особенно плодотворным оказался сравнительно короткий период, охвативший конец 50-х и начало 70-х годов. Не будет преувеличением сказать, что именно в это время полностью сформировались основные физические представления, был разработан адекватный математический аппарат теории нелинейных волн.

Несомненно, главная причина этого всплеска — прогресс эксперимента, создание мощных источников излучения, разработка эффективных нелинейных материалов. Именно так обстояло дело в радиофизике, оптике и акустике.

В середине 50-х годов радиофизики получили возможность наблюдать нелинейные электромагнитные волны в лабораторных условиях. Были получены ударные электромагнитные волны в искусственных линиях, нагруженных нелинейными ферритовыми сердечниками. На основе линий с полупроводниковыми диодами, микроволновых систем с длинными электронными потоками были созданы параметрические усилители и преобразователи бегущей волны.

В 1961 г. впервые наблюдалось удвоение частоты света в кристаллах — эксперимент, положивший начало лазерной нелинейной оптике. Успехи в разработке мощных лазеров, создании нелинейных оптических материалов привели к тому, что спустя всего три года нелинейные оптические явления приобрели и большое прикладное значение. Были запущены перестраиваемые

по частоте параметрические генераторы света, созданы оптические умножители частоты с КПД, достигающим и десятков процентов.

В начале 50-х годов были сконструированы мощные генераторы ультразвука, существенно расширившие возможности нелинейной акустики, — источники, позволившие начать систематическое исследование нелинейных акустических явлений в жидкостях и твердых телах.

К тому же периоду относится и подъем интереса к нелинейным волнам в плазме. «Вызов» эксперимента поставил серьезные вопросы перед теорией.

Вот как описывал сложившуюся ситуацию Р. В. Хохлов в статье ¹, опубликованной в 1965 г. в номере «Успехов», посвященном памяти Л. И. Мандельштама: «... Освоение миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов электромагнитных волн и успехи последних лет в создании лазеров привели к тому, что нелинейные волновые процессы стали играть уже определяющую роль ... Возникла необходимость создания нелинейной теории волн, которая по образцу нелинейной теории колебаний обобщала бы многочисленные отдельные явления в поведении различных устройств...».

В этих словах суть оказавшегося весьма плодотворным и эвристичным радиофизического, «колебательного» подхода к теории нелинейных волновых процессов.

При ее разработке, в особенности на первом этапе, когда формировались основные физические понятия, теоретические подходы — принципы «нелинейного мышления», выработанные нелинейной теорией колебаний (о них ярко сказано в статье А. А. Андропова, посвященной памяти Л. И. Мандельштама ²), сыграли решающую роль. В упоминавшейся статье ¹, отмечая вклад в исследование нелинейных волновых процессов коллектива ФИАН, руководимого Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым, горьковских радиофизиков, возглавляемых А. В. Гапоновым, радиофизиков Московского университета, Р. В. Хохлов писал: «В настоящее время можно считать, что такая задача (создания теории нелинейных волн. — С. А.) в значительной степени выполнена. Выявлены наглядные качественные понятия и представления, выработаны руководящие «волновые» концепции и проведено систематическое изучение [широкого] круга нелинейных волновых явлений...».

Общепризнан огромный вклад в эту область, внесенный самим Р. В. Хохловым. Теоретические методы, развитые Хохловым, выдвинутые им физические идеи и конкретные результаты, полученные вместе с сотрудниками и учениками в нелинейной оптике, нелинейной акустике, рентгеновской и гамма-оптике, положили начало научным направлениям, интенсивно разрабатываемым и по сей день, оказали сильное влияние на характер и стиль физических и прикладных исследований в этих областях. Рем Викторович рано ушел из жизни, и автору этой статьи никогда не приходилось услышать от него самого какую-то оценку его собственных работ, тем более какие-либо слова об их классификации и иерархии.

Время расставило все на свои места, пришла пора подробного анализа научного творчества Р. В. Хохлова. Предлагаемая статья, публикуемая в год 60-летия со дня рождения Р. В. Хохлова, преследует, однако, более узкую цель. В ней сделана попытка проследить за судьбой идей, высказанных им в начале 60-х годов в его первых работах по теории нелинейных волн.

В 1986 г. исполняется 25 лет с момента публикации двух фундаментальных работ Р. В. Хохлова «К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях»³ и «О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях»⁴. Несмотря на «узко» радиофизическое название (и в этом проявление научного стиля Хохлова — у него почти нет чисто методических работ, разрабатываемые методы в его статьях сразу используются для решения конкретных задач), первую из этих статей справедливо причисляют к основополагающим работам в области нелинейной акустики. Оценивая же работу ⁴ с точки зрения сегодняшнего дня, следует особо подчеркнуть два момента. В ней дана формулировка метода медленно меняющихся амплитуд применительно к анализу

взаимодействия плоских волн в сильно диспергирующих средах. Вместе с тем в ней детально проанализированы условия почти 100%-ной перекачки энергии основной волны во вторую гармонику — предсказание, полностью подтвержденное в самое последнее время в экспериментах на мощных лазерных системах, предназначенных для управляемого термоядерного синтеза.

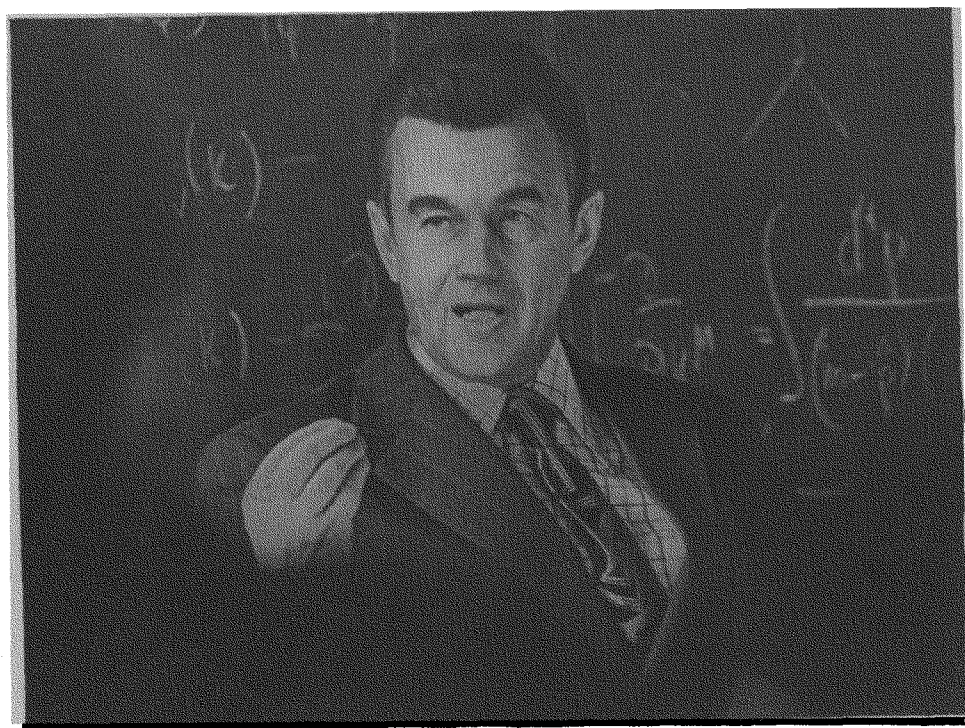


Рис. 1. Р. В. Хохлов на семинаре кафедры волновых процессов МГУ (1976 г.)

Несомненно, в ^{3, 4} дано наиболее последовательное и ясное распространение подходов, выработанных нелинейной теорией колебаний, на волновые задачи. Однако методическая их ценность этим отнюдь не исчерпывается. Р. В. Хохлов принес в нелинейную теорию волн не только блестящее владение аппаратом теории нелинейных колебаний, но и разработанный им оригинальный метод анализа и радикального упрощения так называемых укороченных уравнений, описывающих поведение нелинейных систем. Этот метод, который теперь принято называть методом Хохлова, оказался особенно эффективным при анализе переходных процессов и устойчивости сложных нелинейных систем.

В теории нелинейных волн задачи подобного рода представляют первоочередной интерес; в подавляющем большинстве случаев нас интересует динамика нелинейных взаимодействий или самовоздействий, развивающаяся по мере распространения волн, — «переходный процесс» в пространстве, являющийся аналогом «временного» переходного процесса в колебательной системе *). Поэтому метод Хохлова нашел разнообразные применения в теории

*) Следует подчеркнуть, что речь идет об аналогии в самом полном смысле; установление наглядных и эвристических пространственно-временных аналогий в теории нелинейных систем также результат адекватного применения асимптотических методов теории колебаний к волновым системам.

нелинейных волн. Его возможности были особенно ярко продемонстрированы прежде всего самим Ремом Викторовичем, получившим физически прозрачные результаты в ряде трудных задач теории нелинейных систем.

2. МЕТОД ПОЭТАПНОГО УПРОЩЕНИЯ УКРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ — МЕТОД ХОХЛОВА

К этим результатам Р. В. Хохлов шел, пожалуй, еще с 1951—1953 гг. Рем Викторович начинал как «чистый» теоретик; большое место, особенно в его ранних работах занимала и математическая сторона дела *). Однако главные интересы его в ту пору были связаны с задачами нелинейной теории колебаний.

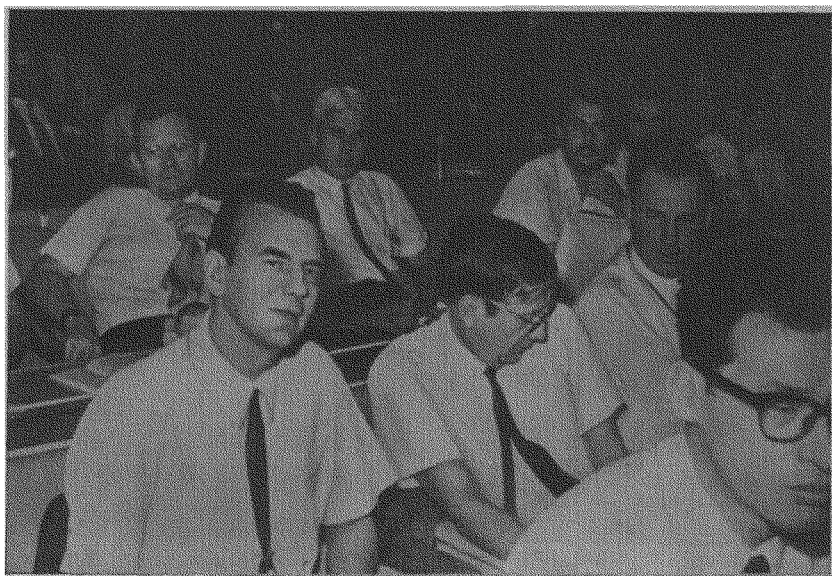


Рис. 2. Международная конференция по квантовой электронике (1968 г.); на переднем плане Р. В. Хохлов, справа Н. Бломберген (Гарвардский университет, США)

Несомненно, в начале 50-х годов состояние дел в нелинейной теории колебаний представлялось вполне благополучным. Были разработаны приближенные методы анализа нелинейных явлений, дано их обоснование. Итоги этой работы были подведены в классических монографиях ^{7,8}. Однако полная ясность в общем подходе к нелинейным задачам еще далеко не всегда гарантировала и эффективное получение конкретных результатов. Сказанное в особенности относилось к неавтономным режимам нелинейных колебательных систем, к исследованию протекания переходных процессов в существенно нелинейных условиях.

Этим кругом проблем и начал заниматься Р. В. Хохлов. Первой в их ряду стала классическая задача о синхронизации автогенератора внешней силой. Речь идет о системе, описываемой уравнением нелинейного осциллятора с правой частью — внешней, вообще говоря, модулированной, силой:

$$\ddot{x} - 2\delta(x) \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E \cos \omega t. \quad (1)$$

*) Его первые работы посвящены теории нестационарных явлений в акустических волноводах ⁵ (статья представлена в ДАН Л. Д. Ландау), вычислению асимптотических выражений для присоединенных функций Лагерра ⁶ (статья представлена в ДАН В. А. Фоком).

С помощью традиционного метода усреднения, вводя медленно меняющиеся амплитуду и фазу $A(t)$, $\varphi(t)$ («переменные Ван-дер-Поля»):

$$x(t) = A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)],$$

от динамического уравнения (1) приходим к укороченным уравнениям для медленных амплитуды и фазы

$$\dot{A} = \delta(A) A + \frac{E\omega_0}{2} \cos \varphi, \quad (2a)$$

$$\dot{\varphi} = \omega - \omega_0 - \frac{E\omega_0}{2A} \sin \varphi. \quad (2б)$$

Уравнения (2), аппроксимирующие (1) с точностью до членов $(\delta/\omega_0)^2$, проще, чем (1), однако и они даже для $E = \text{const}$ в квадратурах не решаются; особенно трудным оказывается случай малой амплитуды внешней силы. Поэтому в начале 50-х годов исследование (2), по существу, ограничивалось качественным анализом на фазовой плоскости — эта работа была сделана Андроновым и Виттом (см. 7). Естественно, что такое положение никак не удовлетворяло потребности эксперимента. В 50-х годах стали широко обсуждаться возможности использования синхронизированных генераторов в качестве активных фильтров, так что потребовались конкретные данные, относящиеся и к синхронизации генератора модулированными сигналами, например с $E = E(t)$.

Наиболее очевидным выходом представляется численное интегрирование. Однако в опубликованной в 1954 в ДАН статье⁹ Р. В. Хохлов показал, что в практически интересных случаях в этом нет нужды; уравнения (2) допускают еще одно, «вторичное», упрощение, а затем и решение в квадратурах. Идея упрощений — в оценке сравнительного порядка малости членов в правых частях (2a), (2б). В режиме синхронизации слабым сигналом $E/A_0 < \delta/\omega_0$ (A_0 — амплитуда стационарных автоколебаний) в области расстройек, не слишком превышающих область захватывания, $|\omega - \omega_0| \sim E\omega_0/2A_0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае правые части в (2a), (2б) имеют разный порядок малости. Правая часть в (2б) гораздо меньше, чем в (2a), и, следовательно, фаза меняется медленнее амплитуды. Амплитуда за время порядка $\tau \approx (|d\delta/dA| A_0)^{-1}$ принимает значение, близкое к стационарной, A_0 , а уравнение для медленной координаты — фазы приобретает вид

$$\dot{\varphi} = \omega - \omega_0 - \frac{E\omega_0}{2A_0} \sin \varphi; \quad (3)$$

теория синхронизации слабым сигналом сводится, таким образом, к анализу одного, «фазового», уравнения первого порядка.

Уравнение (3) легко интегрируется, затем находятся и поправки к «быстрой» амплитуде.

Вторичное упрощение укороченных уравнений, основанное на выделении «медленных» и «быстрых» переменных в пространстве Ван-дер-Поля, оказалось очень плодотворным приемом. Р. В. Хохлов решил с его помощью ряд трудных задач о взаимной синхронизации генераторов *), дробной синхронизации генераторов, затягивании автоколебаний, устойчивости автоколебаний, в том числе устойчивости автоколебаний в молекулярном генераторе. Несомненно, очень привлекательной стороной вторичного упрощения является «физичность», наглядность самой вычислительной процедуры. Легко обозримы и результаты. Так, прозрачную трактовку механизма захватывания лампового генератора внешней силой удалось дать только с помощью фазового уравнения (3). Надо сказать, что Р. В. Хохлов придавал большое значение этим моментам.

*) Заметим, что в их числе была и практически важная в то время задача о синхронизации отражательных клистронов. Р. В. Хохлов показал, как взаимная синхронизация позволяет расширить диапазон электронной перестройки частоты.

С полным основанием можно сказать, что в цикле работ по нелинейным колебаниям Р. В. Хохлов продемонстрировал высший, мандельштамовский, уровень «нелинейного физического мышления».

Вместе с тем в обсуждаемых работах ясно прослеживается нацеленность прежде всего на физический результат, анализ конкретного явления.

Рем Викторович почти не публиковал методических работ, практически не занимался формальными обобщениями предложенных им методов. Общий взгляд на вторичное упрощение, его возможности содержится, пожалуй, только в докторской диссертации¹⁰, защищенной им в 1962 г. К тому времени были уже опубликованы цитировавшиеся работы^{3,4} и стали ясны перспективы метода в теории нелинейных волн.

В целом ситуацию, следуя¹⁰, можно охарактеризовать так.

Достаточно общим свойством системы укороченных уравнений первого порядка, описывающих движение нелинейной системы в пространстве переменных Ван-дер-Поля (x_i, y_i) ,

$$x_i = F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \mu t), \quad (4a)$$

$$y_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \mu t) \quad (4б)$$

(частным случаем (4) служит рассмотренная выше система (2)) оказывается то обстоятельство, что для некоторых из них правые части укороченных уравнений малы, например $F_i \sim \mu$, где $\mu \ll 1$ — характерный малый параметр. Последнее позволяет в сложном движении нелинейной системы выделять быстрые изменения одних переменных и медленные — других. Таким образом, удастся понизить порядок системы (сошлемся опять на рассмотренный выше пример задачи о синхронизации).

Общее рассмотрение (4), обоснование выделения быстрых и медленных переменных, способы вычисления поправок к быстрым движениям даны в диссертации¹⁰. Там же была прослежена и связь развитого метода с ранними работами, в особенности — с работами по теории релаксационных колебаний *).

Принципы разбиения движений, поэтапного упрощения укороченных уравнений проще всего проиллюстрировать на примере, когда правые части (4) не зависят от t и есть только две переменные (x, y) .

Тогда из (4) имеем уравнение траекторий на фазовой плоскости

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{\Phi(x, y)}{F(x, y)}. \quad (5)$$

Согласно (5) за исключением небольшой окрестности $\Phi(x, y) = 0$ на плоскости x, y интегральные кривые почти вертикальны ($\mu \ll 1$). Таким образом, на одних этапах движение происходит так, что координата y быстро принимает значения, соответствующие практически постоянной переменной x , а на других координата x медленно изменяется, а y квазистатически приспосабливается к этому изменению. Естественно, на каждом из этапов работают вторично упрощенные уравнения, позволяющие детально рассчитать характеристики движения.

Подчеркнем еще раз, что поэтапное упрощение укороченных уравнений более радикально, чем переход от исходных динамических уравнений к укороченным: при поэтапном упрощении порядок системы дифференциальных уравнений понижается.

Техника поэтапного анализа укороченных уравнений была очень эффективно применена Р. В. Хохловым, а затем и многими его последователями к широкому кругу нелинейных волновых задач: как уже говорилось, в большинстве из них на первый план выдвигается именно исследование нелинейного переходного процесса.

* В диссертации¹⁰ Р. В. Хохлов подробно обсуждает в связи с этим работы Н. А. Железцова и др. по релаксационным генераторам.

Несомненно, в обширном научном наследии Р. В. Хохлова работы по теории нелинейных волн, разнообразные исследования нелинейных волновых явлений в радиодиапазоне, оптике и акустике занимают главное место.

Характерная черта этих работ, в особенности работ по нелинейной оптике, — очень тесная связь с экспериментом. Речь идет при этом в первую очередь об экспериментах, ставившихся в Университете при самом деятельном участии самого Рема Викторовича. Это обстоятельство оказало очень сильное влияние на выбор и оценку значимости задач и методов их решения.

В короткой статье, посвященной прежде всего научной судьбе теоретических работ, мы ограничимся нелинейной оптикой и нелинейной акустикой.

Вместе с тем автору хотелось сохранить и историческую перспективу, напомнить, быть может, и о не очень далеких, но уже становящихся историей событиях одного из наиболее плодотворных периодов развития физики нелинейных волн.

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

Начало современного этапа в развитии нелинейной оптики связано с созданием лазеров. Отмечавшийся в 1985 г. двадцатипятилетний юбилей лазера — это одновременно и юбилей нелинейной оптики. Оптическая нелинейность активной среды решающим образом определяет многие уникальные свойства лазерного излучения. Уже через год после запуска первого лазера был зарегистрирован и нелинейный оптический отклик невозбужденной, пассивной среды — открылись широчайшие возможности изучения и использования нелинейных явлений фактически во всех разделах оптики. Последующие годы в огромной мере расширили сферу нелинейной оптики, спектр изучаемых ею проблем. Многие из них (в частности, такие как физика нелинейного воздействия на вещество, лазерно-индуцируемые фазовые переходы) далеко вышли за рамки физической и прикладной оптики в их традиционном понимании. Одной из важнейших тенденций стало тесное взаимодействие, взаимопроникновение методов квантовой электроники и нелинейной оптики.

25-летию юбилею лазера был посвящен специальный номер «Успехов». Очерки истории развития основных идей квантовой электроники физики лазеров даны в статьях Н. Г. Басова и А. М. Прохорова ^{11,12}.

На физическом факультете Московского университета работы по лазерной нелинейной оптике *) были начаты в 1962 г. с исследования параметрических взаимодействий световых волн ¹³. Хотя на первых порах главным стимулом было создание плавно перестраиваемого по частоте оптического генератора (такие генераторы, перекрывающие ближний ИК диапазон, были запущены в МГУ в 1965 г.), параллельно разрабатывался и теоретический аппарат волновой нелинейной оптики. По существу, основы его закладывались Р. В. Хохловым в уже цитированной работе ⁴, посвященной генерации второй гармоники в длинной нелинейной линии, работе, выполненной за год до эксперимента П. Франкена и соавторов по удвоению частоты излучения рубинового лазера в кристалле кварца ¹⁶.

Однако теперь потребовался конкретный учет факторов, представляющих первоочередный интерес для оптики, — анизотропии (как было впервые показано в работах Джордмейна ¹⁷ и Терхьюна и др. (см. ¹⁸), именно анизотропия позволяет синхронизовать фазы волн с сильно различающимися

*) Говоря здесь об истории работ по лазерной нелинейной оптике в МГУ, нельзя не упомянуть о том, что в стенах университета еще в 20—30-х годах были задуманы и выполнены прямые эксперименты по поиску вклада *нелинейного отклика* в поглощение и преломление света. На рубеже 20—30-х годов С. И. Вавиловым, его сотрудниками и учениками были сделаны четкие, целеустремленные эксперименты, направленные на регистрацию нелинейностей в поглощении и преломлении света в флуоресцирующих кристаллах и стеклах. Итоги этих работ С. В. Вавилов подвел в ¹⁵. Более подробно об этом см. также в ⁵⁶.

частотами в кристаллах) и нелокальности отклика (временной и пространственной), пространственной ограниченности пучков и т.п. Другими словами, необходимо было разработать регулярные методы исследования нелинейных волновых процессов, описываемых уравнениями для поля

$$[\nabla[\nabla E]] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P^{(л)}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P^{(нл)}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

и системой материальных уравнений, описывающих линейный,

$$P^{(л)}(r, t) = \int_0^\infty \hat{\chi}^{(1)}(t') E(r, t-t') dt', \quad (7)$$

и нелинейный, $P^{(нл)} = P^{(нл)}(r, t)$, отклики вещества. В нелинейной оптике в подавляющем большинстве случаев и по сей день нелинейный отклик (первые его анализ был выполнен уже в 1962 г. в фундаментальных работах Бломбергена и сотрудников¹⁹; см. также²⁰) можно представлять в виде разложения по малому параметру *) $\mu = E/E_a \ll 1$ (E_a — характерное, «атомное» поле):

$$\begin{aligned} P^{(нл)}(r, t) = & \int_0^\infty dt' \int_0^\infty \hat{\chi}^{(2)}(t', t'') E(r, t-t') E(r, t-t'-t'') dt'' + \\ & + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \int_0^\infty \hat{\chi}^{(3)}(t', t'', t''') \times \\ & \times E(r, t-t') E(r, t-t'-t'') E(r, t-t'-t''-t''') dt''' + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

и, следовательно, $P^{(нл)} \ll P^{(л)}$.

В (7), (8) эффекты пространственной дисперсии не учитываются; об эффектах нелокальности нелинейного отклика, пространственной дисперсии см. 50, 57, 58.

Нелинейность отклика приводит к энергообмену между волнами с различными частотами и волновыми векторами (волновым взаимодействиям), нелинейным изменениям частотного и углового спектров квазимонохроматических почти плоских волн (самовоздействиям). В процессе взаимодействий и самовоздействий нелинейным образом изменяется, вообще говоря, поляризация волн — возникают поляризационные нелинейные эффекты.

Естественный путь упрощения системы (6) + (8) лежит через использование метода медленно меняющихся амплитуд. Поскольку $P^{(нл)} \ll P^{(л)}$, изменения комплексных амплитуд, обусловленные нелинейностью, можно считать медленными как в пространстве (в масштабе длины волны), так и во времени (в масштабе периода колебаний).

Анализ методических проблем, возникших на первом этапе (корректный учет дисперсии среды, векторного характера полей, анизотропии среды и т.п.), был дан в книге¹⁴, сданной в печать в конце 1963 г., где и были сформулированы приближенные уравнения нелинейной оптики.

3.1. Плоские волны:

пространственно-временные аналогии

Для плоских волн, распространяющихся в анизотропной слабо нелинейной среде,

$$E(r, t) = \sum_n E_n = \sum_n e_n A_n(\mu t, \mu r) \exp[i(\omega_n t - k_n r)] + \text{к. с.} \quad (9)$$

*) О возможностях проявления сильного локального нелинейного отклика в оптике см. ниже, раздел 7 статьи.

в первом приближении теории дисперсии система интегро-дифференциальных уравнений (6) — (8) сводится к системе укороченных уравнений в частных производных (см. ¹⁴)

$$s_n [e_n [k_n e_n]] \frac{\partial A_n}{\partial t} + [e_n [k_n e]] \nabla A_n + (e_n \hat{\alpha} e_n) A_n + \mathcal{P}^{(нл)}(\omega_n) e^{i\Delta_n r} = 0 \quad (10)$$

(здесь $\mathcal{P}^{(нл)}$ — спектральная компонента нелинейной поляризации на частоте ω_n , α_n — тензор, описывающий потери в среде, s_n — лучевой вектор, Δ_n — расстройка волновых векторов, k_n — волновой вектор).

Уравнения (10) записаны для случая, когда нелинейность практически не влияет на состояние поляризации волн; возможны, разумеется, и обратные ситуации *).

Применение к (10) качественных методов теории нелинейных колебаний, метода вторичного упрощения позволило дать достаточно ясную картину

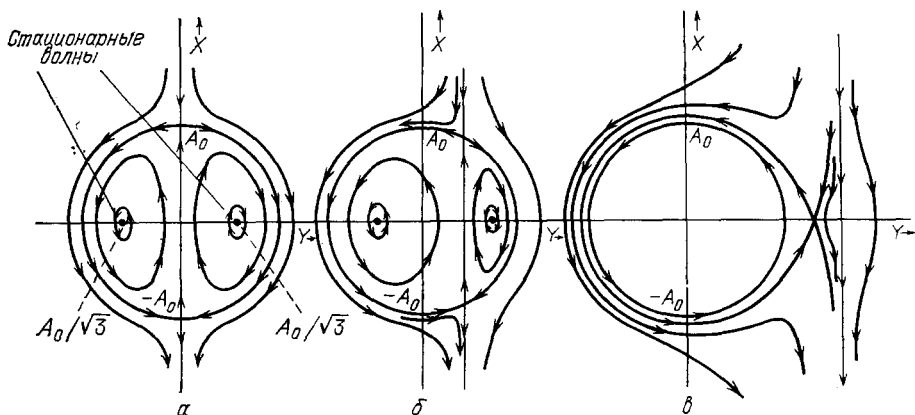


Рис. 3. Интегральные кривые укороченных уравнений, описывающих генерацию второй гармоники плоской гармонической волной в среде с квадратичной нелинейностью, построенные в координатах $X = A_2 \sin \Phi$, $Y = A_2 \cos \Phi$ ^{4,14}.

а: для $\Delta = 0$. б: для $\Delta/\sigma < 1$. в: для $\Delta/\sigma > 1$. Движение из начала координат описывает процесс удвоения частоты; стрелками отмечены устойчивые точки типа стационарных волн

процессов генерации оптических гармоник, модуляции света бегущими волнами, параметрического усиления и генерации света. Цикл таких исследований был выполнен в лаборатории нелинейной оптики МГУ в 1961 — 1963 гг. и подытожен в ¹⁴.

В качестве примера приведем результаты анализа эталонной задачи о генерации второй гармоники плоской гармонической волны ^{4,14}.

Речь идет о взаимодействии в среде с квадратичной нелинейностью двух волн с частотами, отличающимися вдвое, так что полное поле

$$E = e_1 A_1 \exp [i (\omega t - k_1 z)] + e_2 A_2 \exp [i (2\omega t - k_2 z)].$$

Укороченные уравнения для действительных амплитуд A_1 , A_2 и фазы $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 - \Delta z$ (здесь φ_1 , φ_2 — фазы взаимодействующих волн, а $\Delta = 2k_1 - k_2$ — фазовая расстройка) в общем виде аналитически решить не удается.

На рис. 3, на плоскости $X = A_2 \sin \Phi$, $Y = A_2 \cos \Phi$ приведены интегральные кривые задачи для случая $\Delta = 0$ (точный фазовый синхронизм)

*) Один из ярких примеров — нелинейная оптическая активность, наведенная сильным световым полем гиротропия ⁵⁷. В этом случае укороченные уравнения записываются для векторных амплитуд (см. ^{14,57}) — в слабо нелинейной среде состояние поляризации изменяется медленно. Заметим, что сейчас поляризационные нелинейные эффекты привлекают все большее внимание; нелинейная оптическая активность, в частности, стала эффективным методом нелинейной спектроскопии полупроводников ⁵⁸.

и различных отношений фазовой расстройки Δ к параметру нелинейности

$$\sigma = k_1 \chi^{(2)} [A_1^2(0) + A_2^2(0)]^{1/2} = k_1 \chi^{(2)} A_0.$$

Анализ на фазовой плоскости рис. 3 вместе со вторичным упрощением укороченных уравнений на отдельных этапах *) позволил рассчитать пространственные масштабы, дать оценку КПД оптического удвоителя частоты (и вырожденного параметрического усилителя, если $A_2(0) \gg A_1(0)$) в различных условиях ¹⁴.

Два результата представляются весьма актуальными и сегодня. Из рис. 3 следует, что при $\Delta = 0$ возможна полная перекачка энергии основной волны во вторую гармонику (фазовая траектория, выходящая из начала координат на рис. 3, а).

Экспериментальная реализация этого режима — дело недавнего времени. Потребовалось выяснение ряда тонких вопросов, связанных с устройчивостью фазовых соотношений в процессе сильного энергообмена ^{59, 60}.

Заметим вместе с тем, что помимо выявления условий сильного энергообмена между волнами с частотами ω , 2ω (в зависимости от краевых условий им соответствует удвоение частоты с высоким КПД или сильное параметрическое усиление) анализ фазовой плоскости рис. 3 предсказывает и существование стационарных нелинейных волн. Этим волнам соответствуют отмеченные стрелкой устойчивые точки типа центр.

Физически это означает, что при определенных условиях волны второй гармоники и основной частоты распространяются с постоянными амплитудами: внешне положение вещей выглядит так, как если бы среда была линейной. Фактически, речь идет о нелинейном интерференционном эффекте.

Надо сказать, что эксперименты, выполненные в последние годы (даже для более сложных ситуаций), дают все больше примеров, когда удается наблюдать стационарные волны, являющиеся результатом интерференции различных нелинейных эффектов ^{61, 62}.

С укороченными уравнениями (10) связаны и весьма наглядные физические образы, особенно близкие радиофизикам. Действительно, для немодулированных плоских волн система (10) оказывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений — точно так же описываются нелинейные колебания в системе со многими степенями свободы. Таким образом возникают нелинейные колебательные и волновые задачи — аналоги. При этом пространственной координате в волновой задаче соответствует время — в колебательной, волновому числу k — частота ω , краевым условиям — начальные условия и т. п.

Отмеченная пространственно-временная аналогия, особенно на первом этапе, имела и несомненное эвристическое значение (см., ^{14, 23} **).

Вообще колебательный подход, идеи физики нелинейных колебаний на первых порах оказали заметное влияние на направление работ, привели к отчетливой дифференциации исследований по нелинейной оптике, сделанных радиофизиками и оптиками.

Радиофизики делали главный акцент на изучение и практическое использование нелинейных взаимодействий световых волн. Оптике же пона-

*) Весьма эффективно идеи вторичного укорочения были использованы в развитии А. С. Чиркиным методе решения укороченных уравнений нелинейной оптики, основанном на так называемом приближении «заданной интенсивности» (см. ⁷⁹).

**) Так, в работе «О триггерных свойствах нелинейных волноводных систем» ²², опубликованной в 1962 г., была отмечена возможность создания нелинейных волновых систем, амплитуда или фаза распространяющейся волны в которых принимает два или несколько устойчивых состояний — волновых аналогов триггерных систем. В ²² обращалось внимание на возможности очень быстрого переключения «волновых триггеров». Говоря современным языком, речь шла о безрезонаторной амплитудной или фазовой оптической бистабильности, или мультистабильности. К сожалению, в 60-х годах экспериментальная реализация таких устройств была весьма затруднительной. В самое последнее время ситуация здесь в корне изменилась: созданы оптические триггеры с быстрым переключением $\sim 10^{-12}$ с, с энергиями переключения $\sim 10^{-12}$ Дж ^{78, 113}.

чаду больше интересовались самовоздействиями, нелинейными поправками к поглощению и преломлению. Конечно, сейчас научное прошлое людей, работающих в нелинейной оптике, таким простым способом определить уже не удастся.

3.2. Дифракция света в нелинейной среде

Уравнения типа (10) позволяют построить геометрическую теорию нелинейных оптических явлений, однако принципиальный вопрос о дифракции в нелинейной среде остается за ее рамками.

Проблема корректного учета дифракции в уравнениях нелинейной оптики остро встала уже в 1963 г. Речь шла об описании нелинейных взаимодействий в сильно сфокусированных лазерных пучках. Фокусировка, приводящая к увеличению напряженности светового поля, естественно, увеличивает локальный нелинейный эффект. С другой стороны, уменьшается область, занимаемая сильным полем, сокращается длина нелинейного взаимодействия. Где лежит оптимум? Так выглядела формулировка дифракционной задачи об «оптимальной фокусировке» в генераторах оптических гармоник и комбинационных частот в параметрических генераторах света.

В 1964 г. возникли и дифракционные нелинейные задачи более принципиального порядка — началось интенсивное изучение самофокусировки света.

Р. В. Хохлов одним из первых обратил внимание на то, что «локальная», юнговская трактовка дифракции наиболее адекватна нелинейным задачам, поскольку ее математическая формулировка никак не апеллирует к принципу суперпозиции, а метод параболического уравнения М. А. Леонтовича²⁴ самым тесным образом связан с методом медленно меняющихся амплитуд.

В конце 1963 г. Рем Викторович предложил А. П. Сухорукову рассмотреть методом параболического уравнения дифракцию света в линейной анизотропной среде²⁵; в²⁶ было выведено нелинейное параболическое уравнение, описывающее распространение волнового пучка в нелинейной среде.

Речь шла о распространении метода медленно меняющихся амплитуд на задачи, связанные с нелинейным распространением волновых пучков. В слабо нелинейной среде изменения комплексной амплитуды вдоль луча (лучевой вектор \mathbf{s}) в световом пучке конечного сечения можно считать более медленными, нежели поперек луча, где происходит переход в область тени.

Поэтому для ограниченных пучков вместо (9) следует писать^{25,26}

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{e}_n A_n (\mu \mathbf{r}_n, \mu^{1/2} [\mathbf{r}_n]) \exp [i (\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})] + \text{к. с.} \quad (11)$$

(для простоты рассматриваем гармонические волны).

Подставляя (11) в (6), в первом приближении по μ вместо (10) получаем систему укороченных уравнений *второго порядка*

$$[\mathbf{e}_n | \mathbf{k}_n \mathbf{e}_n] \nabla A_n + \frac{i}{2} \Delta_{\perp} A_n + (\mathbf{e}_n \hat{\alpha} \mathbf{e}_n) A_n + \mathcal{P}^{(nl)}(\omega) e^{i \Delta_n \mathbf{r}} = 0, \quad (12)$$

где Δ_{\perp} — лапласиан, соответствующий дифференцированию по направлениям, перпендикулярным лучу *).

Эффективность основывающегося на (12) подхода была продемонстрирована группой МГУ на примере задачи о генерации оптических гармоник в остро сфокусированных лазерных пучках^{26,27}. В 1964—1965 гг. А. И. Ковригиным и соавторами (см.²¹) были созданы генераторы оптических гармоник

*) Аналогичная процедура широко используется и для вывода приближенных уравнений, описывающих нелинейное распространение коротких волновых пакетов с учетом их дисперсионного расплывания (временной аналог дифракции). Здесь, однако, появляются укороченные уравнения не только второго, но и высших порядков. Нелинейной оптике коротких лазерных импульсов, пространственно-временным аналогиям в нелинейной теории модулированных волн посвящен обзор, публикуемый в этом же номере «Успехов»²⁸.

с рекордными по тому времени выходными мощностями. Теория, развитая в ^{26,27}, позволила дать полную картину нелинейного взаимодействия, прекрасно согласующуюся с экспериментом.

Совершенно новый для оптики (да и для физики волновых процессов в целом) класс дифракционных задач возник после предсказания эффекта самофокусировки света ^{29,30,31}.

На протяжении более пяти лет, начиная с 1964 г., самофокусировка оставалась, пожалуй, наиболее интригующим нелинейным эффектом. Сложная, нестационарная, картина конкуренции нелинейной рефракции и дифракции, наблюдавшаяся на опыте, делала затруднительной даже качественную интерпретацию экспериментальных данных.

В эти годы исследования самофокусировки занимали заметное место в работах лаборатории нелинейной оптики МГУ. В университете был сделан один из первых экспериментов по прямому наблюдению самофокусировки ³², выполнены теоретические работы, в которых развивалась стационарная и нестационарная картины явления ^{33, 34}. В 1967 г. эти работы были подытожены в обзоре ³⁵. Естественно, математический аппарат, использованный в ^{33,34}, базировался на нелинейном параболическом уравнении.

Метод поэтапного упрощения, выбор адекватных моделей (весьма плодотворной оказалась модель гауссовского пучка с медленно меняющимися амплитудой и шириной) позволили дать последовательную картину стационарной безабберационной самофокусировки, учесть нелинейные абберации и оценить роль высших нелинейностей в формировании фокальной области.

В 1966 г. Р. В. Хохлов высказал важную идею о неустойчивости светового пучка, самофокусирующегося в среде с малоинерционной нелинейностью. Эта идея во многом определила дальнейшее развитие теории.

Разумеется, сухое, «протокольное», изложение последовательности публикаций работ ни в коей мере не отражает живую, а зачастую и весьма эмоциональную атмосферу тех дней.

Поэтому мы заключим этот раздел напоминанием об одном из эпизодов разработки теории самофокусировки, относящемся к 1965—1966 гг.

В опубликованных в 1965 г. экспериментах Пилипецкого и Рустамова ³², Таунса и сотр. ³⁶, Бломбергера и Лаллеманда ³⁷ было обращено внимание на ряд неожиданных на первый взгляд явлений. К ним относился низкий «КПД самофокусировки»: незначительная часть пучка «захватывалась» в самофокусирующиеся «нити» — узкие каналы с высокой интенсивностью света. Много неясного было и в происхождении и поведении самих «нитей», которые поначалу казалось естественным рассматривать как своеобразные нелинейные волноводы.

Я. Б. Зельдович и Ю. П. Райзер ³⁸ высказали предположение, что аномалии могут быть обусловлены конечным временем релаксации нелинейного отклика: естественно, что она должна приводить к конечной скорости «прорастания» нелинейного волновода, неполному захвату лазерного пучка.

Авторы ³⁸ ознакомили нашу группу со своей работой еще до публикации. Расчет самофокусировки короткого лазерного импульса в релаксирующей среде был сделан в начале 1966 г. ³⁴. Надо сказать, что речь шла о достаточно трудной задаче.

Для пучка вида

$$E = eA(t, z, r) \exp \{ i [\omega t - kz - ks(t, r, z)] \}$$

параболическое уравнение эквивалентно двум уравнениям — уравнениям для действительной амплитуды A и поправки к эйконалу s :

$$\frac{2}{u} \frac{\partial s}{\partial t} + 2 \frac{\partial s}{\partial z} + \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right)^2 = \frac{n_2}{n_0} p + \frac{1}{k^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right), \quad (13)$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{2} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \right) = 0; \quad (14)$$

здесь $u = \omega/k$ — групповая скорость в линейной среде, $n_2 p = n - n_0$ — нелинейная добавка к показателю преломления.

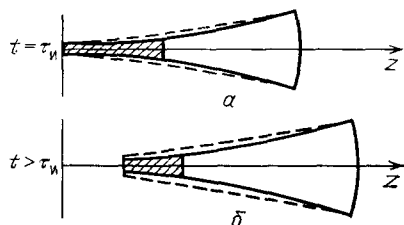
В релаксирующей среде поведение величины p описывается уравнением

$$\tau \frac{\partial p}{\partial t} + p = A^2. \quad (15)$$

В ³⁴ для автомодельной задачи (здесь был полностью использован арсенал поэтапного анализа) было найдено решение уравнений (13)—(15), позволившее дать картину самофокусировки короткого лазерного импульса (см. рис. 4, взятый из ³⁴) в релаксирующей среде. На нем изображена пространственная структура поля короткого лазерного импульса в нелинейной среде.

Срабатывающая за время τ нелинейная рефракция сжимает хвост импульса; на переднем фронте сохраняется дифракционная расходимость.

Рис. 4. Динамика развития самофокусировки короткого лазерного импульса длительностью τ_i в среде с инерционным нелинейным откликом. Показаны две фазы эволюции поля светового импульса, входящего при $t=0$ в нелинейную среду. ³⁴ а: для $t = \tau_i$. б: для $t > \tau_i$. Заштрихована часть пучка, сжатая за счет эффекта самофокусировки. Незаштрихован нелинейный предвестник. Штрихами показана форма пучка в линейной среде



Фронт импульса движется, как в линейной среде — возникает своеобразный нелинейный предвестник, во многом аналогичный по сути зоммерфельдовскому предвестнику в линейной оптике.

Надо сказать, что картина, изображенная на рис. 4, не противоречила эксперименту. Тем не менее к изучавшейся в те годы самофокусировке наносекундных лазерных импульсов, как было установлено в дальнейшем, она прямого отношения не имела. Как показали Луговой и Прохоров ³⁹, обсуждавшиеся аномалии да и сами «нити» самофокусировки объяснялись гораздо проще — квазистатическим движением фокальных точек. Контраверсия «волноводные нити» — «движущиеся фокусы» была решена для наносекундных импульсов в пользу движущихся фокусов.

К картине, обсуждавшейся в ^{34,38} и изображенной на рис. 4, вернулись позже, в начале 70-х годов. Было установлено (см. обзоры ^{40,41}), что она адекватно описывает самофокусировку пикосекундных лазерных импульсов.

Здесь эта теория нашла полное количественное подтверждение. Развившие в ³⁴ представления о самовоздействии света в среде с медленно релаксирующим нелинейным откликом были использованы в конце 60-х годов при разработке теории тепловой самофокусировки и самодефокусировки света в поглощающих средах ⁴²⁻⁴⁴. В последующие годы работы по тепловой дефокусировке в университете быстро развивались; стало ясно ⁴³⁻⁴⁵, что речь идет, по существу, об основных эффектах нелинейной оптики атмосферы.

Со своеобразными инерционными самовоздействиями волновых пакетов приходится сталкиваться в лазерных усилителях. Р. В. Хохлов одним из первых обратил внимание на возможности их использования для формирования мощных коротких световых импульсов. В работе ¹¹⁹, выполненной совместно с Т. М. Ильиной, был проанализирован режим нелинейного формирования стационарных импульсов в усиливающей среде.

Разработанный в 1961—1966 гг. усилиями многих групп в нашей стране и за рубежом аппарат волновой нелинейной оптики не только позволил дать адекватное описание широкого круга новых физических явлений, но и был положен в основу эффективных методов расчета нелинейно-оптических

устройств (см. например, ⁴⁶⁻⁴⁹), систем адаптивной нелинейной оптики ⁵², анализа схем статической и динамической голографии ⁵³. Широкий круг волновых взаимодействий и самовоздействий световых волн лежит в основе нелинейной лазерной спектроскопии (см., например, ^{54,55,122}).

4. МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕГОСЯ ПРОФИЛЯ — МЕТОД ХОХЛОВА В НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКЕ

Старт современного этапа работ по нелинейной акустике относится к середине 50-х годов. К этому времени в нескольких лабораториях в СССР и США были созданы мощные генераторы ультразвука, позволившие наблюдать сильные нелинейные эффекты в жидкостях и твердых телах.

В нашей стране первые эксперименты подобного рода были выполнены в лаборатории А. К. Букова, разработавшего уникальный широкоапертурный ультразвуковой излучатель с интенсивностью в импульсе $\sim 6 \cdot 10^2$ Вт/см² ⁶³.

В ^{63,64} было зарегистрировано сильное нелинейное поглощение такого излучения в вязких жидкостях, обусловленное генерацией высших гармоник.

В последующие годы, В. А. Красильниковым, Л. К. Зарембо и сотр. были выполнены и прямые наблюдения искажения формы волны, выполнены эксперименты по генерации слабых ударных волн в жидкостях и твердых телах. Итоги первого этапа этих исследований подведены в ⁶⁵.

Однако при теоретической интерпретации нелинейно-акустических опытов в то время чаще всего апеллировали к римановскому решению для плоской волны в недиссипативной среде, его разложениям, простым спектральным представлениям ⁶⁵. Естественно, что такое положение вещей не отвечало потребностям эксперимента.

Как и в нелинейной оптике, в нелинейной акустике возникла настоятельная необходимость в разработке теоретических методов, позволяющих в полной мере учесть диссипацию (вязкость и теплопроводность), конечное время релаксации отклика, дифракционные явления, временную немонахроматичность, неполную временную и пространственную когерентность мощного излучения.

Перечисленные проблемы нашли решение в рамках разработанного Р. В. Хохловым в 1960—1961 гг. метода медленно меняющегося профиля. Фактически речь шла об эффективном универсальном подходе в теории нелинейных волн, распространяющихся в средах со слабой дисперсией. Общие принципы его были сформулированы Ремом Викторовичем в цитированной уже работе ³.

Надо сказать, что в ³ метод был изложен на примере задачи о генерации ударных радиоволн в нелинейных линиях; работа была стимулирована исследованиями горьковских радиофизиков, впервые наблюдавших ударные радиоволны в лабораторных условиях и развивших теорию ударных электромагнитных волн ^{66, 67}. Однако уже в 1961 г. Ремом Викторовичем в работе ⁶⁸, выполненной совместно с С. И. Солуяном, метод медленно меняющегося профиля был использован для исследования формирования акустических ударных волн в диссипативной среде.

Идея метода (мы поясним ее в акустических терминах) наглядна и очень физична.

Рассмотрим волну, бегущую в направлении $x > 0$ в нелинейной слабо диспергирующей среде. Здесь, в отличие от нелинейной оптики, из-за малости дисперсии возникает широкий спектр гармоник. Поэтому представление решения в виде суммы ограниченного числа квазимонохроматических волн (ср. (9)), метод медленно меняющихся амплитуд в традиционной форме не эффективны.

Р. В. Хохлов предложил иной подход к конструированию решения — представление его в виде волны с медленно изменяющимся с пройденным расстоянием профилем (вообще говоря — произвольным). В слабо нелиней-

ной среде волне нужно пробежать расстояние, существенно превышающее длину волны, чтобы за счет нелинейности и диссипации ее профиль заметно искажился.

При учете нелинейности и затухания «медленность» эквивалентна малости двух величин: числа Маха $Ma = u_0/c_0$ (u_0 — амплитуда колебательной скорости) и диссипативного параметра $d = \alpha\lambda$ (α — коэффициент затухания).

Плоская волна с медленно изменяющимся (эволюционирующим) профилем записывается так:

$$u = u \left(t - \frac{x}{c_0}, \mu x \right); \quad (16)$$

здесь $\mu \sim Ma \ll 1$, $\mu \sim d \ll 1$ — малый параметр, с помощью которого учтена «медленность» в зависимости формы волны от координаты x . Если искать

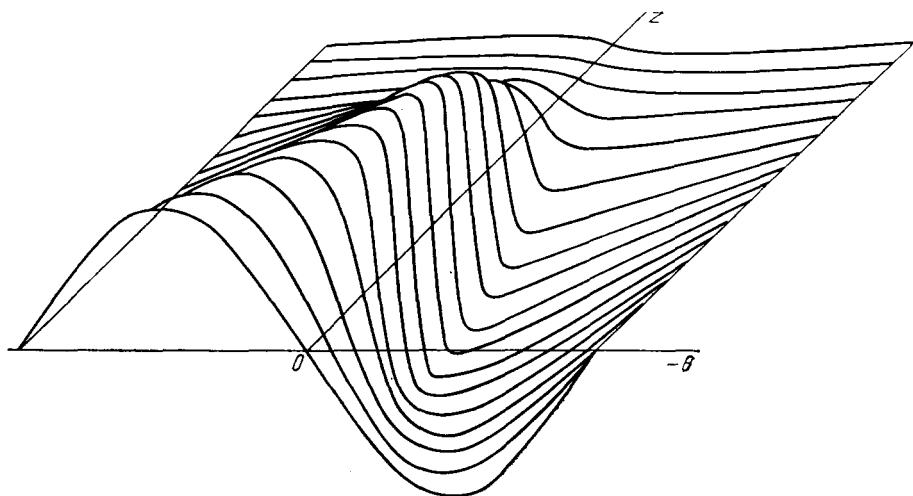


Рис. 5. Эволюция профиля первоначально гармонической волны в слабо нелинейной диссипативной среде^{68, 71}.

Видно, как нелинейность приводит сначала к формированию почти разрывной волны; по мере дальнейшего распространения ударный фронт «размывается»; наконец, на достаточно больших расстояниях форма волны вновь становится практически синусоидальной.

решение системы уравнений гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости в виде (16) и сохранять члены $\sim \mu$, получаем приближенное уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \bar{V} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}; \quad (17)$$

здесь $z = x/x_p$ — расстояние в единицах длин образования разрыва, $V = u/u_0$, $\theta = \omega t$, $\tau = t - (x/c_0)$, $\Gamma = \alpha x_p$ — обратное акустическое число Рейнольдса.

В⁶⁸ с помощью уравнения (17) впервые была детально прослежена эволюция первоначально гармонической волны в слабо нелинейной диссипативной среде (анализ аналогичной задачи в³ был проведен для среды с «низкочастотным поглощением»). Основные ее фазы в зависимости от расстояния пройденного волной иллюстрируются на рис. 5: в начале нелинейность приводит к укрупнению фронта, формированию почти разрывной волны; затем начинает доминировать диссипация, фронты размываются и волна опять становится практически синусоидальной.

Применение метода поэтапного анализа позволило^{3,68} рассчитать пространственные масштабы каждого из этапов, оценить ширины ударных фронтов, дать и полную количественную картину явления.

В последующих работах Рема Викторовича, выполненных совместно с его аспирантами, коллегами из Акустического института, метод медленно меняющегося профиля был успешно использован для решения широкого круга задач нелинейной акустики.

Уравнение (17) было обобщено на случай цилиндрической и сферической волн:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{V}{nz} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} + \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \quad (18)$$

(здесь $n = 1$ соответствует сферической, а $n = 2$ — цилиндрической сходящимся волнам). С помощью (18) были проанализированы особенности нелинейного искажения сходящихся и расходящихся волн. Было сформулировано и уравнение, описывающее нелинейные волны в релаксирующей среде,

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = D \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{\theta - \theta'}{T}\right) \frac{\partial V}{\partial \theta'} d\theta'; \quad (19)$$

здесь $T = \omega \tau_{\text{рел}}$ — безразмерное время релаксации, $D = x_p/x_r$ — отношение длины нелинейности и характерной дисперсионной длины.

Важным шагом стало обобщение перечисленных результатов на ограниченные волновые пучки.

Р. В. Хохловым было впервые сформулировано нелинейное уравнение, описывающее и дифракцию в слабо-диспергирующей среде.

В предположении медленности изменения профиля вдоль и поперек оси пучка (ср. с (11); напомним, что там речь шла об изменениях амплитуды!):

$$u = u\left(t - \frac{x}{c_0}, \mu x; \mu^{1/2} \tau\right) \quad (20)$$

(как и при выводе (12), поле поперек пучка изменяется быстрее, чем вдоль), из уравнений механики идеальных сплошных сред получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} V; \quad (21)$$

здесь $N = x_p/x_d$ — отношение нелинейной и дифракционной длин. При $N > 1$ дифракция сильно влияет на картину формирования ударной волны. Теперь, в отличие от плоской волны, области сжатия и разрежения искажаются не симметрично, амплитуда фазы сжатия больше, чем фазы разрежения, а длительность последней — меньше (рис. 6). Причина этого — обусловленные дифракцией фазовые сдвиги между гармониками, различие пространственных масштабов дифракционной расходимости для различных гармоник.

На уравнениях (17)–(21) и строится современная теоретическая нелинейная акустика. Эволюционный характер этих уравнений позволяет конструировать и их комбинации, учитывающие различные сочетания дифракционных, диссипативных, релаксационных процессов, наличие внешних источников («вынужденные волны») и т.п. Многочисленные приложения (17)–(21) были продемонстрированы Р. В. Хохловым и сотрудниками на примере широкого круга задач. Итоги этой работы вместе с классификацией иерархии уравнений нелинейной акустики подведены в обзоре⁶⁹ и монографии О. И. Руденко и С. И. Солуяна⁷⁰.

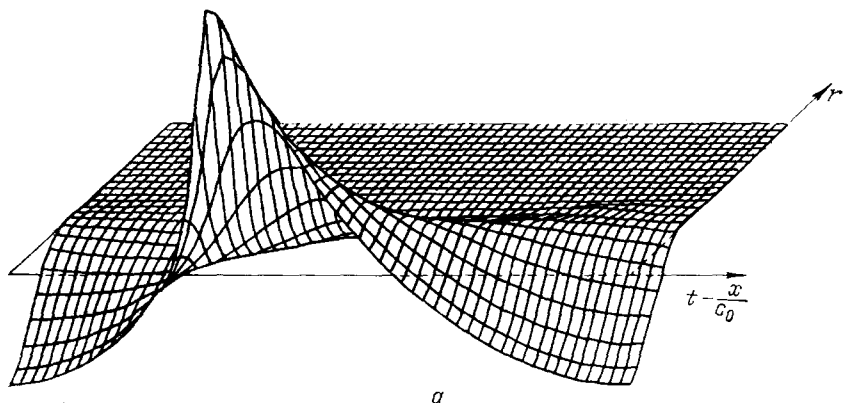
Результаты численного анализа приближенных уравнений нелинейной акустики, выполненного группой МГУ, суммированы в монографиях^{71,72}. Завершая этот раздел, подчеркнем два обстоятельства.

В отличие от нелинейной оптики, нелинейная акустика имеет долгую историю. В механике сплошной среды, в гидродинамике распространение возмущений конечной амплитуды неоднократно обсуждалось задолго до начатых в 50-х годах экспериментов по нелинейному распространению ультразвука в конденсированных средах. Общие представления о нелинейном искажении волны конечной амплитуды сформулированы еще Риманом. Ряд широ-

ко используемых в современной нелинейной акустике, да и в физике нелинейных волн в целом, эволюционных уравнений был выведен в связи с исследованием гидродинамических задач, волн на воде и т.п. Существенный прогресс в теории нелинейных волн был достигнут в связи с исследованием волновых процессов в плазме ^{73,74}.

Уравнение (17) было впервые выведено Бюргерсом в 1940 г., и в начале 60-х годов — для волн в плазме ⁷³; уравнение (19) для $T \ll 1$ сводится к уравнению Кортевега — де-Вриза.

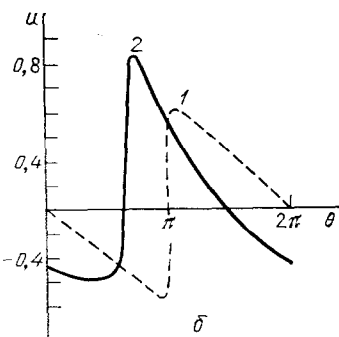
Идеи применения этих уравнений для анализа поведения акустических волн конечной амплитуды можно встретить в работах середины 50-х годов.



а

Рис. 6. Генерация ударных волн в ограниченном звуковом пучке ⁷².

а — Форма возмущения как функция двух переменных x и t (осесимметричный звуковой пучок). б — Профили нелинейной волны (один период); 1 — плоская волна, 2 — ограниченный пучок



б

Однако последовательный их вывод для акустических волн из системы гидродинамических уравнений, учитывающих вязкость и теплопроводность среды, подробные решения, детальный анализ применительно к задачам нелинейной акустики были сделаны Р. В. Хохловым впервые.

Нелинейное уравнение, учитывающее дифракцию (21), принято называть уравнением Хохлова — Заболотской; впервые оно вместе с решениями было приведено в работе, опубликованной в 1969 г. Фактически нет предшественников и у уравнения (19).

Обзор ⁶⁹ авторы заключают так: «... Приближение медленно меняющегося профиля — мощный инструмент анализа различных проблем, возникающих в нелинейной акустике. Многие задачи уже решены, но многие еще стоят на очереди». Слова, сказанные в 1974 г., с полным основанием можно повторить и сейчас, десять лет спустя.

Нелинейную оптику и нелинейную акустику принято рассматривать в качестве двух «полюсов» физики нелинейных волн. В первом случае картина нелинейного взаимодействия формируется дисперсионными свойствами среды; эффективно взаимодействует лишь небольшое число волн на сильно

различающихся частотах. Во втором — нелинейным взаимодействием охвачено много октав акустического спектра.

В последние годы имеется все больше указаний на сближение «полюсов». Переход к сверхмощным фемтосекундным импульсам, создание новых нелинейных материалов позволяет думать о возможности генерации световых ударных волн ^{26,77}. Однако особенно сильные тенденции «сближения» с нелинейной оптикой проявляются в акустике. Среда с искусственной дисперсией, специальные конфигурации взаимодействующих пучков в твердых телах и т. п. могут быть использованы для создания параметрических усилителей и генераторов звука, генераторов акустических гармоник и других аналогов нелинейно-оптических устройств. Надо сказать, что Р. В. Хохлов проявлял большой интерес к работам этого направления ⁷⁵.

В последние годы важные результаты были получены здесь Ф. В. Бункиным и сотрудниками; обзор новых результатов публикуется в этом номере «Успехов» ⁷⁶.

5. СЛУЧАЙНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Нелинейные взаимодействия случайных волн играют фундаментальную роль в физике твердого тела и гидродинамике. На представлениях о взаимодействиях фононов строится теория теплопроводности кристаллов, взаимодействия с тепловыми фононами приводят к затуханию звука в твердых телах. Исследования этих процессов восходят еще к классическим работам Пайерлса и Ландау (современную сводку см., например, ⁸⁰). На волновом языке речь идет, очевидно, об обусловленных ангармоничностью кристаллической решетки нелинейных взаимодействиях различных спектральных компонент акустического шума, шума и регулярной волны.

С каскадом трехчастотных взаимодействий случайно модулированных волн связана характерная для возникновения турбулентности передача энергии по спектру ^{73,74,81,82}.

В перечисленных случаях речь, естественно, идет о некогерентных (фазы практически некоррелированы) взаимодействиях случайных волн. Для их описания используются укороченные уравнения для средних интенсивностей (кинетические уравнения), получаемые из приведенных в предыдущих разделах уравнений для амплитуд путем усреднения по фазам (см., например, ^{73,85}). Напротив, в радиофизических, оптических и акустических исследованиях нелинейных волновых процессов, начатых в середине 50-х годов, акцент делался поначалу на взаимодействия и самовоздействия регулярных волн, на когерентные нелинейные эффекты.

Однако, как и в физике линейных волн, статистические явления в источниках мощного излучения («статистика поля»), флуктуации параметров среды, неизбежное присутствие собственных флуктуационных полей (для краткости объединим их условным термином «статистика среды») диктовали необходимость стохастических обобщений.

Надо сказать, что статистические задачи с самого начала заняли видное место в научной программе лаборатории нелинейной оптики Московского университета.

В такой ориентации работ, помимо перечисленных выше объективных причин *), сказались и традиции отечественной школы теории нелинейных колебаний, высокий уровень работ по статистической радиофизике в нашей стране ⁸³.

На Р. В. Хохлова и автора этих строк сильное влияние оказало многолетнее участие в семинаре по статистической радиофизике, руководимом С. М. Рытовым.

*) В нелинейной оптике с их проявлениями пришлось столкнуться неожиданно быстро: уже при интерпретации первых экспериментов по генерации оптических гармоник выяснилось, что в некоторых отношениях многомодовый лазер следует рассматривать как генератор мощного оптического шума ⁸⁴.

Доложенная на рытовском семинаре и опубликованная в 1961 г. первая работа «статистического цикла»⁸⁵ возникла на стыке радиофизики и оптики. В те годы значительное внимание радиофизиков привлекали задачи, связанные с прохождением шумов через системы с переменными параметрами.

В⁸⁶ было предложено использовать радиочастотный параметрический генератор для так называемого «квантования фазы», обусловленного фазовой селективностью параметрической системы, сильного подавления флуктуаций фазы усиливаемого сигнала. Было показано также, что нелинейность позволяет одновременно существенно снизить и уровень амплитудных флуктуаций; поэтому сформированные параметрическим генератором новые состояния поля оказались весьма перспективными в технике фазовых измерений, системах обнаружения слабых сигналов в присутствии шума⁸⁶.

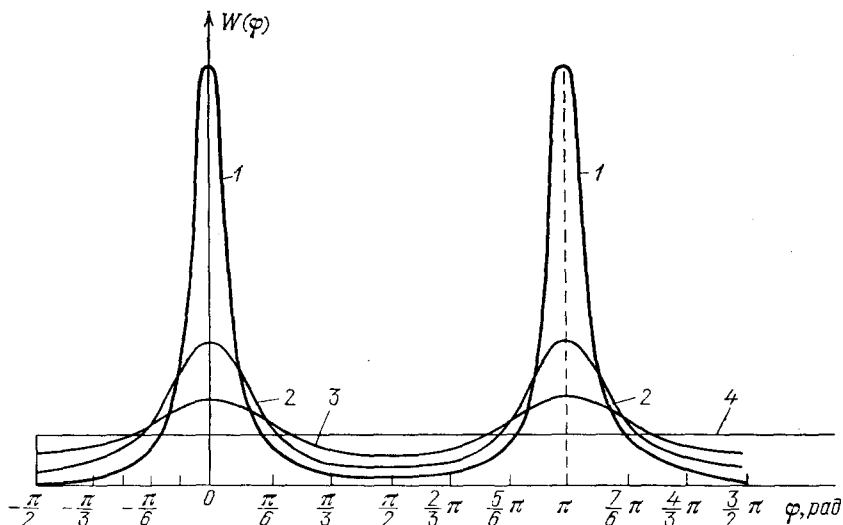


Рис. 7. Одномерный закон распределения фазы $W(\varphi)$ в оптическом параметрическом усилителе бегущей волны при различных параметрах усиления.

Закон распределения фазы на входе — равномерный (4), от 1 к 3 усиление уменьшается

В⁸⁵ был, по существу, проанализирован волновой аналог (см. раздел 3 и²³) параметрически возбуждаемого резонатора — вырожденный параметрический усилитель бегущей волны с гармонической накачкой. Было естественно ожидать, что такая система будет обладать существенными преимуществами в отношении скорости «квантования фазы». Суть дела достаточно проста: фактически речь идет о задаче, интегральные кривые для которой построены на рис. 3. Если при $z = 0$ $A_2(0) \gg A_1(0)$ (волну частоты 2ω будем называть теперь накачкой, а волну частоты ω — сигналом) и выбрана подходящая разность фаз, сигнал будет усиливаться. Такой усилитель, как и параметрический генератор, обладает резко выраженной фазовой селективностью. Ее результатом оказывается сильная модификация статистических характеристик фазы сигнала; равномерный на входе одномерный закон распределения фазы сигнала превращается в двугорбый (рис. 7). При большом усилении возникает два устойчивых состояния фазы, или, говоря современным языком, реализуется безрезонаторная фазовая бистабильность.

В⁸⁵ значительное внимание было уделено методике решения статистических нелинейных волновых задач *), анализу роли флуктуаций краевых условий и распределенной случайной силы, флуктуационным переходам из

*) Интерес к этим проблемам сохранился у Р. В. Хохлова и в последующие годы; в 1977 г. им были опубликованы работы, посвященные использованию функционала вероятности для описания случайных волн⁸⁷.

одного устойчивого состояния в другое; здесь был широко использован метод вторичного укорочения.

Интерес к необычным состояниям поля на выходе вырожденного параметрического усилителя (см. рис. 7), их использованию в интерферометрии и информационных системах возродился в последние годы, теперь уже применительно к квантовой оптике.

На языке стандартного описания шума в виде случайно модулированного колебания (см. например, ^{83,95})

$$x(t) = a(t) \cos \omega t - b(t) \sin \omega t \quad (22)$$

возникновение распределения фазы, изображенного на рис. 7, означает, что

$$\langle a^2 \rangle \neq \langle b^2 \rangle \quad (23)$$

— флуктуации квадратурных компонент не одинаковы. Нетрудно убедиться, что при больших усилениях (см. рис. 7) одна из компонент поддается практически полностью. Именно такими свойствами обладают интенсивно исследуемые сейчас в квантовой оптике ⁸⁸⁻⁹¹ так называемые сжатые состояния (squeezed states) — состояния, для которых флуктуации одной из квадратурных компонент оказываются меньшими, нежели квантовые флуктуации в когерентном состоянии. Подчеркнем, что здесь речь идет о квантованных полях, так что найденные в ⁸⁵ состояния следует рассматривать как их классический образ*).

Вместе с тем следует иметь в виду, что практически во всех современных экспериментах, направленных на поиск сжатых состояний, в оптике используются трех- и четырехфотонные параметрические взаимодействия; поставленные около 25 лет назад задачи о преобразовании случайных световых полей параметрическими системами с регулярной накачкой стали предметом детального теоретического и экспериментального исследований.

Для самой же физики нелинейных волн особый интерес представляет нелинейное распространение случайных волн, «шумовая накачка». Как называется случайная модуляция волны (в пространстве и времени) на развитии нелинейного процесса? В чем отличие взаимодействий и самовоздействий случайных волн от взаимодействий и самовоздействий регулярных волн? Ответы на эти вопросы дали статистическая нелинейная оптика и статистическая нелинейная акустика.

В нелинейной оптике принципиальным эффектом «статистики поля» оказывается обусловленный дисперсией групповой скорости распад фазовых корреляций взаимодействующих волн в процессе распространения.

В ⁹² процесс декорреляции был детально прослежен на примере генерации второй гармоники немонохроматическим излучением. Когерентный вблизи источника процесс сменяется некогерентным взаимодействием практически некоррелированных волн при $z \gg L_{\text{ког}} = \tau_k/\nu$; здесь $\tau_k \approx 1/\Delta\omega$ — время корреляции основной волны, $\nu = \nu_1^2 - \nu_2^2$ — расстройка групповых скоростей. Сказанное иллюстрируется рис. 8а, на котором построены зависимости средней интенсивности второй гармоники $\langle I_2 \rangle$ от расстояния, пройденного в

* Работы по поиску сжатых состояний световых полей (на этом пути уже есть и первые экспериментальные успехи ⁹¹) представляют практический интерес; появляются надежды снизить обусловленный квантовым шумом уровень минимального обнаружимого оптического сигнала в измерительных и информационных системах. Вместе с тем новый стимул получили и физические исследования новых квантовых состояний поля и их классических аналогов. Хотя в принципиальном плане вопрос о том, всегда ли существуют классические аналоги квантовых состояний поля, остается открытым (более того, часто говорят о квантовых полях, не имеющих классических аналогов), в тех случаях, когда аналогию можно усмотреть, она оказывается весьма плодотворной. В частности, статистические свойства классических полей, для которых справедливо (23), исследованы очень подробно (см. ⁹⁵), гораздо подробнее, нежели для квантовых полей. Заметим, в частности, что в классике соотношение (23) означает нестационарность процесса.

нелинейной среде, для регулярной и шумовой основной волны. Графики построены для случая большой фазовой расстройки $\Delta = 2k_1 - k_2$ (см. раздел 3 и рис. 3). Здесь когерентный процесс малоэффективен, происходят быстрые пространственные биения основной волны и гармоники; в некогерентном же процессе идет монотонное нарастание гармоники. При $\Delta = 0$ ситуация обратная; в когерентном процессе $\langle I_2 \rangle \sim z^2$, в некогерентном $\langle I_2 \rangle \sim z$.

Качественно новые эффекты возникают при вынужденном рассеянии в поле шумовой накачки; значительный практический интерес они приобрели

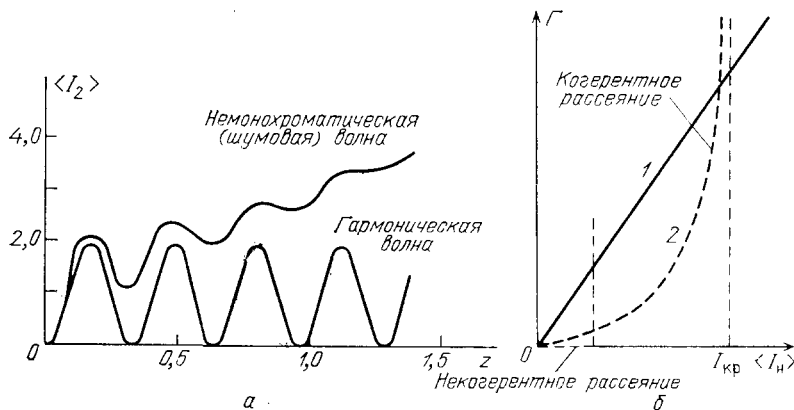


Рис. 8. Нелинейные процессы в поле шумовой накачки.

а — Средняя интенсивность 2-й гармоники, возбуждаемой шумовой волной (I_2) в функции расстояния z , пройденного в нелинейной диспергирующей среде, для случая сильной фазовой расстройки; $\Delta/\sigma > 1$ (ср. рис. 3); здесь приведен и график для гармонической волны (из ⁹²; см. также ⁹³). б — Зависимость инкремента вынужденного комбинационного рассеяния от интенсивности накачки в диспергирующей среде. 1 — монохроматическая накачка, 2 — широкополосная шумовая накачка (из ⁹⁴; см. также ⁹⁵)

для вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР). Последовательная динамическая теория ВКР была развита Р. В. Хохловым и В. Т. Платоненко еще в начале 60-х годов ⁹³. Мощная световая волна (накачка), распространяясь в комбинационно-активной среде (ею может быть газ, конденсированная среда, плазма), вызывает индуцированную комбинационным резонансом неустойчивость, экспоненциальный рост поля на стоксовой частоте.

Для гармонической накачки (интенсивность I_H) интенсивность стоксовой волны

$$I_C = I_0 e^{\Gamma z}; \quad (24)$$

в этом случае инкремент $\Gamma \sim I_H$.

Теория ВКР в поле шумовой накачки была развита в ⁹⁴. Надо сказать, что речь идет, пожалуй, об одной из наиболее трудных задач статистической нелинейной оптики (обзор можно найти в ⁹⁵). На рис. 8б приведен один из главных результатов теории — графики зависимости инкремента от средней интенсивности шумовой накачки (для сравнения показана и зависимость для монохроматической накачки). Видно, что можно выделить две характерные области. При $\langle I_H \rangle \ll I_{кр}$ шумовая накачка гораздо менее эффективна, нежели гармоническая той же интенсивности, — доминирует декорреляция, реализуется некогерентный режим, в котором неустойчивость, обусловленная ВКР, в значительной мере подавлена. Сказанное можно рассматривать как прямую рекомендацию метода подавления вынужденного рассеяния. Заметим, что именно на таких представлениях основаны проекты лазерного УТС, в которых для нагрева мишени используются широкополосные лазерные системы ¹⁰².

При $\langle I_H \rangle \sim I_{кр}$, напротив, нелинейность подавляет эффекты некогерентности (это особенность параметрических процессов, при генерации гармоник такого подавления нет) — достаточно мощная шумовая накачка работает

как монохроматическая. Последнее обстоятельство оказывается весьма важным для нелинейной оптики УФ диапазона. Излучение мощных УФ лазеров (в особенности эксимерных) обладает низкой временной и пространственной когерентностью; соответствующим образом сконструированный ВКР-преобразователь позволяет существенно повысить яркость излучения.

Широкий круг статистических задач связан с самовоздействиями шумовых волн. Одной из первых в этом ряду была поставленная еще Р. В. Хохловым задача о неустойчивости плоской волны в среде с кубической нелинейностью (см. ¹⁰³); теория была развита Беспаловым и Талановым ¹⁰⁴. Интерес к самофокусировке и самодефокусировке случайных волн (здесь дело сводится к подчеркиванию или сглаживанию выбросов шума) сильно возрос в последние годы в связи с разработкой мощных лазерных систем для УТС, технологии, с задачами нелинейной оптики атмосферы. Значительный прогресс был достигнут здесь после создания методов численного решения задач статистической нелинейной оптики; в лаборатории нелинейной оптики МГУ цикл таких работ был выполнен Кандидовым и сотрудниками (см. ⁹⁶).

Говоря о самовоздействиях случайно модулированных волновых пакетов следует специально выделить работы, в которых прослеживается формирование оптических («шрёдингеровских») солитонов из шума; эти вопросы обсуждаются в публикуемом в этом номере УФН обзоре ²⁸.

Работы по статистической нелинейной акустике были начаты в середине 70-х годов ⁹⁷; Возникающие здесь задачи существенно отличаются от задач статистической нелинейной оптики как по постановке, так и по методам решения.

Практическое отсутствие дисперсии выдвигает на первый план задачи о нелинейной эволюции широких сплошных спектров, близкие по постановке к задачам теории слабой турбулентности; см. ^{70,97,98}. Другой интересный круг вопросов связан с взаимодействием регулярного сигнала и шума в слабо диспергирующей среде ⁹⁹. Такое взаимодействие можно использовать для подавления низкочастотных акустических шумов — осуществляется нелинейный «переброс спектра» вверх («up-conversion» в терминах нелинейной оптики) по оси частот. Вместе с тем модель взаимодействия сигнала и шума позволяет проанализировать волновые аспекты (трехмерный характер полей, роль фазовых соотношений, дифракцию и т.п.) затухания звука в твердых телах ⁹⁹, рассмотренные с помощью кинетических уравнений еще в работах Ландау и Румера (см. ¹⁰⁰).

Надо сказать, что в самое последнее время исследования, направленные на выяснение волновой картины пространственно-временной эволюции неравновесных фоновых полей, получили новый импульс. Мощные короткие вспышки лазеров возбуждают в поглощающих кристаллах сильно неравновесные фононы (неравновесный акустический шум) и когерентные волны деформации. Взаимодействие регулярного и случайного акустических полей представляет значительный интерес в связи с проблемой генерации предельно коротких гиперзвуковых импульсов, акустических солитонов, для спектроскопии твердого тела и т.п. ¹⁰¹. Круг задач статистической нелинейной акустики стремительно расширяется; см. также обзоры Руденко ⁹⁸ и Бункина и др. ⁷⁶, публикуемые в этом номере УФН.

6. ТЕОРИЯ ГАММА-ЛАЗЕРА, КОГЕРЕНТНАЯ РЕНТГЕНОВСКАЯ ОПТИКА

Этими проблемами Р. В. Хохлов интенсивно занимался с начала 70-х годов.

В работах МГУ главный акцент был сделан на поисках методов получения инверсии ядерных уровней; оценку возможностей реализации лазерного действия Рем Викторович давал ¹⁰⁵.

Надо сказать, что задача оказалась исключительно трудной; не решена она и до сих пор.

Вместе с тем были начаты и работы по резонаторам, по разработке схем обратной связи для γ -лазеров. Несомненно, эти исследования оказали заметное влияние на рентгеновскую и гамма-оптику, принесли в эти области новые идеи и теоретические подходы.

Одним из возможных вариантов лазера, привлекавших внимание Р. В. Хохлова, было использование долгоживущих ядерных изомеров ¹⁰⁵. Для получения необходимого усиления возбужденные ядра должны быть помещены в решетку совершенного кристалла.

Волновая задача о лазерном генераторе сводится таким образом к анализу когерентного рассеяния, или на языке рентгеновской оптики — динамической дифракции в усиливающей среде.

Естественно, что при этом потребовался учет конечного сечения волнового пучка, импульсного характера излучения, конечных масштабов временной и пространственной когерентности — факторов, не учитывавшихся в базирующейся на приближении плоских волн традиционной теории динамической дифракции.

Группа МГУ эффективно применила для исследования динамической дифракции подходы и методы, разработанные в нелинейной оптике; заметим, что уравнения связанных волн, описывающие двух и многоволновую рентгеновскую дифракцию, имеют много общего с уравнениями нелинейной оптики.

В ¹⁰⁶ использование параболического уравнения позволило построить теорию динамической дифракции ограниченного пучка и дать оценки для γ -лазера на «игольчатом» кристалле. В ¹⁰⁷ была развита теория дифракции рентгеновского пучка, обладающего конечными радиусами временной и пространственной когерентности, прослежен переход от когерентного «динамического» режима к некогерентному, «кинематическому» режиму рассеяния (см. также ⁹⁵).

В ¹⁰⁷ были предложены также новые методы измерения параметров когерентности рентгеновского и γ -излучения.

В дальнейших работах лаборатории нелинейной оптики МГУ упор был сделан на рентгеновскую оптику поверхностных волн, рентгеновскую диагностику поверхности (см. ¹⁰⁸, ¹⁰⁹), на импульсные методы рентгеновской спектроскопии и структурного анализа — достижение высокого временного разрешения.

Совершенно новые возможности возникают при их использовании в комбинации с методами лазерного воздействия на вещество и лазерной диагностики в особенности в пикосекундном и фемтосекундном масштабах времени (см. обзор ¹¹⁰).

7. АВТОВОЛНЫ. СИЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В 70-х годах на первый план в научных интересах Р. В. Хохлова выдвигаются работы по лазерным методам управления физико-химическими процессами в объеме и на поверхности (об этом, см. в обзоре Гордиеца и Панченко ¹²⁴), лазерам новых типов, гамма-оптике, взаимодействию с веществом экстремально сильных световых полей.

По инициативе Рема Викторовича в Университете были начаты исследования по лазерной фотобиологии, применению лазеров для зондирования океана. Примерно в эти же годы происходило и формирование новых направлений в физике нелинейных волн, стимулированных открытием самопроизвольно возникающих периодических структур в неравновесных средах, стохастического поведения динамических систем, направлений, связанных с проявлениями *сильной нелинейности* (обзор развития идей в этих областях был дан недавно А. В. Гапоновым и М. И. Рабиновичем ¹¹²). Эти исследования вызывали, естественно, большой интерес в лаборатории нелинейной оптики МГУ.

Автор вспоминает живое обсуждение знаменитой реакции Белоусова ¹¹¹ на семинаре кафедры волновых процессов, комментарий Р. В. Хохлова, относящиеся к теории «диссипативных структур». Выступая оппонентом на защите докторской диссертации А. М. Жаботинского в 1971 г., Рем Викторович впервые предложил для этого нового класса нелинейных волновых процессов термин «автоволны».

Сейчас этот термин общепринят; он адекватно отражает физику дела, устанавливает связь с другим примером возникновения «порядка из хаоса» — автоколебаниями.

Для нелинейной оптики, где сейчас доминируют проблемы физики нелинейного воздействия (*нелинейного возбуждения*) на вещество, *нелинейной релаксации* сильно возбужденных состояний, *нелинейной спектроскопии*, *нелинейной диагностики* атомов, молекул плазмы и конденсированных сред (см. 41, 51, 54, 55, 110, 114, 122, 123), особый интерес представляют проявления сильных нелинейностей в пассивных *) средах.

Можно ли создать условия, когда локальный нелинейный отклик среды уже нельзя считать малым? Можно ли использовать его для лазерного инициирования фазовых переходов, инициирования структурных переходов, не связанных с изменением температуры?

Эти вопросы уже довольно давно возникали в нелинейной оптике (обзор работ, выполненных до 1978 г., см. в 77). Обычно большая величина нелинейности «покупается» ценой сильного возрастания времени релаксации отклика; именно так обстоит дело в жидких кристаллах ⁵⁰. Сейчас имеется все больше указаний на то, что возможны и быстрые «гигантские» оптические нелинейности; наибольший интерес с этой точки зрения представляет кубичный по полю резонансный нелинейный отклик свободных и связанных экситонов ¹²¹.

Последнее обстоятельство стимулировало теоретические исследования самовоздействий в среде с сильным локальным откликом. Удобной модельной системой является нелинейная среда, локальный отклик которой описывается уравнением Дuffинга. Теперь, однако, отклик нелинейного осциллятора рассчитывается не по теории возмущений, как это делалось обычно в нелинейной оптике, а учитывается нелинейный сдвиг резонансной частоты (см. 115, 121). Естественным результатом анализа оказывается появление волновой бистабильности; хорошо известные еще из классической теории нелинейных колебаний бистабильность и гистерезисные явления в локальном отклике «перекладываются» на распространяющуюся волну (см. также уже упоминавшуюся работу ²²). При больших интенсивностях стохастизация колебаний нелинейного осциллятора (см. ¹¹⁶) будет приводить и к стохастизации волнового процесса ¹¹⁵.

Заметим, однако, что до настоящего времени обусловленная быстрой нелинейностью бистабильность и стохастичность бегущих волн в оптике, по-видимому, надежно не наблюдались.

Подавляющее число выполненных к настоящему времени экспериментальных работ связано с исследованием оптической бистабильности ¹¹³ и динамического хаоса ¹²⁰ в системах в обратной связи — оптических резонаторах, заполненных *слабо нелинейной* средой. Такова же ситуация и с наблюдением автоволновых процессов в оптике — пока здесь реальные эксперименты удается делать лишь в системах с внешней обратной связью.

*) В огромном потоке работ по динамическому хаосу, странным аттракторам в автоколебательных системах все чаще можно видеть ссылки на ранние работы Р. В. Хохлова, посвященные теории устойчивости в сложных автоколебательных системах, выполненных еще в 1955—1958 гг. Так, в недавнем обзоре Абрахама и соавторов ¹¹⁸, посвященном неустойчивостям и стохастичности в лазерах, на одном из первых мест стоит ссылка на работу Рема Викторовича ¹¹⁷, в которой были найдены неустойчивые режимы молекулярного генератора.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассказывая о работах Р. В. Хохлова, исследованиях его учеников и коллег, невозможно не сказать о замечательной научной атмосфере тех лет, атмосфере, в создание которой огромный вклад внес прежде всего сам Рем Викторович.

Работы лаборатории нелинейной оптики Московского университета, о которых идет речь в этой статье, развивались в условиях тесного взаимодействия, обмена идеями со многими исследовательскими группами.

Автор с теплотой вспоминает, как в 1962 г. Р. В. Хохлов и он, по инициативе А. М. Бонч-Бруевича, были приглашены в Государственный оптический институт для обсуждения работ по параметрическим генераторам света. Это было время, когда трудности на пути их создания выявлялись намного отчетливее, нежели реальные пути к успеху.

Дружеская помощь ГОИ во многом способствовала организации лазерных экспериментов в МГУ. Расширялись и международные связи. В 1965 г. данные о рекордных по тому времени результатах разработки в МГУ мощных оптических умножителей частоты, получении параметрического усиления света в анизотропных кристаллах были доложены на Международной конференции по физическим проблемам квантовой электроники в Пуэрто-Рико²¹.

Коллектив лаборатории нелинейной оптики быстро рос, и в 1965 г. в Университете была организована кафедра волновых процессов, заведующим которой стал Р. В. Хохлов. Вспоминая это время, Л. В. Келдыш пишет¹²⁶: «... Рем Викторович, несомненно, был одним из главных центров притяжения; на конференциях, у себя на кафедре, на семинаре, в кабинете — всюду он был окружен людьми... Еще не было всех тех титулов и званий, которые пришли к нему в последующие годы, но признанным лидером в зарождающейся новой области физики он уже был. Причем лидером не только научным, но и духовным».

Два эпизода во многом характеризуют, пожалуй, стиль работы Р. В. Хохлова в эти годы. Один из них связан с нелинейной оптикой.

В начале 1962 г. была сделана цитированная уже теоретическая работа¹³; открывались перспективы создания перестраиваемых генераторов света, их разнообразных применений. Но вместе с тем стало ясно, что успешная деятельность в этих областях невозможна без собственного эксперимента.

Рем Викторович активно включился в экспериментальную работу, хотя у него, как у теоретика, естественно, были здесь трудности психологического плана. Группа МГУ, практически не имея никакой «оптической предыстории», уже в 1963 г. опубликовала свои первые эксперименты по лазерной нелинейной оптике.

Другой пример относится к 1967 г. — началу исследований по селективному воздействию лазерного излучения на вещество.

Роль Рема Викторовича в создании этого направления лазерной физики очень велика, ему принадлежат первые предложения по лазерному управлению химическими реакциями, селективному оптическому возбуждению неравновесных молекулярных ансамблей. Следует подчеркнуть, что эти работы он начал в годы расцвета волновой нелинейной оптики.

Надо сказать, что у многих его коллег, это «химическое» направление не вызывало тогда энтузиазма, казалось отвлечением от главного дела. Хорошо известно (и об этом речь уже шла выше), что здесь происходит сейчас. Несомненно, Рем Викторович очень точно ощущал логику развития науки.

И еще об одном следует сказать. В физике селективного воздействия на вещество не во всех случаях развитие пошло по тем путям, которые Р. В. Хохлов обсуждал еще в 1967 г.

Появились очень успешные работы других авторов, основанные на иных идеях. Неизменное доброжелательное обсуждение, поддержку они находи-

ли на семинаре кафедры волновых процессов, руководимом Р. В. Хохловым. Рему Викторовичу никогда не было присуще чувство уязвленного самолюбия; ему действительно высшую радость доставляли новая идея, новый результат. Его научная этика была безупречна. Неподдельное участие, готовность выслушать и понять притягивали к Рему Викторовичу многих. Подлинно научная и доброжелательная атмосфера с самого начала пронизывала деятельность возглавлявшихся Р. В. Хохловым на протяжении почти десяти лет Оргкомитетов крупнейших Всесоюзных конференций по нелинейной оптике (с 1976 г. — по когерентной и нелинейной оптике), Вавиловских конференций по нелинейной оптике, созданного им Совета по когерентной и нелинейной оптике АН СССР.

Первая Всесоюзная конференция по нелинейной оптике собралась по инициативе Б. И. Степанова вблизи Минска в 1965 г.; в ней приняло участие около 80 человек. Проведенная под руководством Р. В. Хохлова III конференция, состоявшаяся в 1967 г. в Ереване, несомненно, стала одной из наиболее представительных в истории международных конференций по лазерной физике и нелинейной оптике (Краткий отчет о ней см. в ¹²⁷).

В предисловии сборнику трудов Международной школы Э. Ферми по нелинейной спектроскопии (см. ¹²⁵) директор школы Н. Бломберген пишет: «Мы посвящаем русское издание «Нелинейной спектроскопии» памяти Рема Викторовича Хохлова, одного из пионеров нелинейной оптики... Быстрое развитие нелинейной оптики, значительные успехи, достигнутые в этой области в Советском Союзе, в большой мере связаны с именем Р. В. Хохлова. Его вклад в нелинейную оптику был отмечен Ленинской премией *)... Память о нем будет хранить многие ученые во всем мире. Его личные и деловые связи способствовали развитию глубокого международного понимания...».

В 1978 г. в Ленинграде состоялась IX конференция — это была конференция, посвященная памяти Р. В. Хохлова.

XII юбилейная конференция по когерентной и нелинейной оптике состоялась в 1985 г. в Московском университете ¹²⁸. На ее открытии в Актовом зале университета присутствовало более тысячи советских и зарубежных участников.

С полным основанием можно сказать, что сейчас нелинейная оптика, нелинейная спектроскопия, как и квантовая электроника и лазерная физика в целом, находятся на этапе роста, роста с очень высокой производной. По-прежнему идет интенсивный приток новых физических идей, разработка новых методов, приходят новые люди, формируются новые коллективы.

Работам Рема Викторовича Хохлова, выдвинутым им физическим идеям суждена долгая жизнь.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хохлов Р. В. // УФН. 1965. Т. 87. С. 17.
2. Андронов А. А., Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний // Академик Л. И. Мандельштам: К 100-летию со дня рождения. — М.: Наука, 1979.
3. Хохлов Р. В. // Радиотехн. и электрон. 1961. Т. 6. С. 917.
4. Хохлов Р. В. // Ibidem. С. 1116.
5. Хохлов Р. В. // ДАН СССР. 1948. Т. 61. С. 637.
6. Хохлов Р. В. // Ibidem. 1952. Т. 85. С. 975.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Гостехиздат, 1954.

*) В 1985 г. Р. В. Хохлову за работы по нелинейной акустике была посмертно присуждена Государственная премия СССР.

8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1955.
9. Хохлов Р. В. // ДАН СССР. 1954. Т. 97. С. 411.
10. Хохлов Р. В. Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений и его применение к некоторым проблемам радиофизики: Автореферат докторской диссертации. — М.: МГУ, 1961.
11. Прохоров А. М. // УФН. 1986. Т. 148. С. 3.
12. Басов Н. Г. // УФН. 1986. Т. 148. С. 313.
13. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 351.
14. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. — М.: ВИНТИ, 1964; англ. изд.: Akhmanov S., Khokhlov R. Problems of Nonlinear Optics. — New York: Gordon and Breach, 1972.
15. Вавилов С. И. Микроструктура света. — М.: Изд-во АН СССР, 1950.
16. Franken P., Hill A., Peters C., Weinreich G. // Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7. P. 118.
17. Giordmaine J. // Ibidem. 1962. V. 8. P. 19.
18. Maker P. D., Terhune R., Nisenoff M., Savage C. Ibidem. P. 21.
19. Armstrong J., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. // Phys. Rev. 1962. V. 127. P. 1918.
20. Bloembergen N. Nonlinear Optics. — New York: W. A. Benjamin, 1965; перевод: Бломберген Н. Нелинейная оптика/Под ред. С. А. Ахманова, Р. В. Хохлова. — М.: Мир, 1966.
21. Akhmanov S., Dmitriev V., Khokhlov R., Kovrygin A. // Physics of Quantum Electronics: Conference Proceedings. — New York: McGraw-Hill. 1965.
22. Ахманов С. А., Коврыгин А. И., Пискарьев А. С., Хохлов Р. В. // Письма ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 223.
23. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1962. Т. 5. С. 742.
24. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. // Радиотехн. и электрон. 1961. Т. 6. С. 1813.
25. Леонтович М. А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1944. Т. 8. С. 16.
26. Леонтович М. А., Фок В. А. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 557.
27. Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1966. № 3. С. 95.
28. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 474.
29. Сухоруков А. П. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1966. Т. 9. С. 765.
30. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. // УФН. 1986. Т. 149. С. 449 (в этом номере).
31. Аскарьян Г. А. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 1567.
32. Таланов В. И. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1964. Т. 7. С. 564.
33. Garmire E., Chiao R., Townes C. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 479.
34. Пилипецкий Н. Ф., Рустамов А. Р. // Письма ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 88.
35. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1537.
36. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 296.
37. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // УФН. 1967. Т. 93. С. 19.
38. Garmire E., Chiao R., Townes C. // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 347.
39. Lallemand P., Bloembergen N. // Ibidem. 1965. V. 15. P. 1010.
40. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. // Письма ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 137.
41. Луговой В. Н., Прохоров А. М. // Ibidem. 1968. Т. 7. С. 153; УФН. 1973. Т. 111. С. 203.
42. Остон Д. // Сверхкороткие световые импульсы/Под ред. С. Шапиро. Пер. с англ. под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
43. Shen Y. R. Principles of Nonlinear Optics. — New York: J. Wiley, 1984; рец. // УФН. 1985. Т. 147. С. 789.
44. Ахманов С. А., Криндач Д. П., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 509.
45. Akhmanov S., Krindach D., Migulin A., Sukhorukov A., Khokhlov R. // IEEE J. Quantum Electron. 1968. V. QE-4. P. 568.
46. Akhmanov S., Khokhlov R., Sukhorukov A. // A. Laser Handbook/Eds F. Arecchi, E. Schulz-Dubois. — Amsterdam: North-Holland, 1972. — V. 2. P. 1151.
47. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Кандидов В. П., Сухоруков А. П., Чесноков С. С. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1980. Т. 28. С. 1.
48. Byer R. Optical Parametric Oscillators // Treatise in Quantum Electronics/Eds H. Rabin, C. Tang. — New York: Academic Press, 1975.
49. Akhmanov S. A., Kovrygin A. I., Sukhorukov A. P. Optical Harmonic Generation and Optical Frequency Multipliers // Ibidem.

48. Дмитриев В. П., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика: Генераторы второй гармоники и параметрические генераторы света.— М.: Радио и связь, 1982.
49. Пискарская А. С. и др. Пикосекундные параметрические генераторы света и пикосекундная спектроскопия.— Вильнюс. Мокслас, 1983.
50. Аракелян С. М., Чилингарян Ю. С. Нелинейная оптика жидких кристаллов.— М.: Наука, 1984.
51. Квантовая электроника и лазерная спектроскопия: Сб. трудов Института физики АНБССР, посвященный юбилею Б. И. Степанова.— Минск: Наука и техника, 1974.
52. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики.— М.: Наука, 1985.
53. Зельдович Б. Я., Шкунов В. В., Яковлева Т. В.//УФН. 1986. Т. 149. С. 511 (в этом номере).
54. Нелинейная спектроскопия: Труды школы им. Э. Ферми/Под ред. Н. Бломбергена.— М.: Мир, 1979.
55. Ахманов С. А., Коротеев Н. И. Методы нелинейной оптики в спектроскопии рассеяния света.— М.: Наука, 1981.
56. Ахманов С. А. Нелинейная оптика в Московском университете: Пленарный доклад на XII Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике. Москва 1985//Изв. АН СССР. Сер. физ. 1986. Т. 50. № 6.
57. Ахманов С. А., Жариков В. И.//Письма ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 644.
58. а) Akhmanov S., Zheludev N. Spectroscopy of Nonlinear Optical Activity in Crystals//Nonlinear Phenomena in Solids: Modern Topics.— Singapore: World Scientific, 1984.— P. 233.
б) Dubenskaia M., Zheludev N., Zadoyan R. J. Opt. Soc. Am. Ser. B. 1985. V. 2. P. 1174.
59. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.//Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 734; ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 834.
60. Ибрагимов Э. А., Усманов Т.//ДАН СССР. 1981. Т. 261. С. 846; ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 1618.
61. Jackson D., Wunne J.//Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 543. Wunne J.//Ibidem. 1984. V. 52. P. 751.
62. Красников В. В., Пшеничников М. С., Соломатин В. С.//Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 43. № 3.
63. Буров А. К.//ДАН СССР. 1956. Т. 106. С. 239.
64. Ахманов С. А., Зарембо Л. К. Нелинейное поглощение мощного ультразвука в вязких жидкостях.— М.: Лаборатория анизотропных структур АН СССР, 1954.
65. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
66. Гапонов А. В., Фрейдман Г. И.//ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 957.
67. Катаев И. Г. Ударные электромагнитные волны.— М.: Сов. Радио, 1963.
68. Солуян С. И., Хохлов Р. В.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика и астрономия». 1961. № 3. С. 52.
69. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.//Акуст. ж. 1974. Т. 20. С. 449.
70. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.
71. Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
72. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков.— М.: Наука, 1982.
73. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.//УФН. 1971. Т. 103. С. 193.
74. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
75. Заболотская Е. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.//Акуст. ж. 1966. Т. 12. С. 435.
76. Бункин Ф. В., Кравцов Ю. А., Ляхов Г. А.//УФН. 1986. Т. 149. С. 391 (в этом номере).
77. Ахманов С. А. Оптические нелинейности высших порядков//⁸⁴.
78. Peughambaran N., Gibbs H.//J. Opt. Soc. Am. Ser. B. 1985. V. 2. P. 1215.
79. Тагнев З. А., Чиркин А. С.//ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 1271.
80. Рейсленд Дж. Физика фононов.— М.: Мир, 1975.
81. Колмогоров А. Н.//ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299.
82. Обухов А. М.//Изв. АН СССР. Сер. «География и геофизика». 1941. Т. 5. С. 453; Нелинейные системы гидродинамического типа.— М.: Наука, 1974.
83. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1966.
84. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Хохлов Р. В., Чунаев О. Н.//ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 1336.

- Ахманов С. А., Ковригин А. И., Чиркин А. С., Чунанев О. Н. //ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 829.
85. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. //Радиотехн. и электрон. 1961. Т. 6. С. 1813.
 86. Ахманов С. А. //Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1961. Т. 4. С. 769.
 - Ахманов С. А., Комолов В. П. //Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1966. № 5. С. 96.
 87. Хохлов Р. В., Маков Ю. Н. //Проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — С. 308.
 - Маков Ю. Н., Хохлов Р. В. //Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1977. Т. 20. С. 538.
 88. Caves C. //Phys. Rev. Ser. D. 1981. V. 23. P. 22.
 89. Kumar P., Shapiro J. //Ibidem. Ser. A. 1984. V. 30. P. 1568.
 90. Levenson M. D., Shelby R. M., Aspect A., Reid M., Walls D. //Ibidem. 1985. V. 32. P. 1150.
 91. Slusher R., Hollberg L. et al. //Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2409.
 92. Ахманов С. А., Чиркин А. С. //Радиотехн. и электрон. 1966. Т. 11. С. 1915.
 93. Платоненко В. Т., Хохлов Р. В. //ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 555.
 - С. 2126.
 94. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. //Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 724.
 - Дьяков Ю. Е. //Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР). 1971. № 7, С. 49.
 95. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
 96. Кандидов В. П. //Изв. АН СССР. Сер. физ. 1983. Т. 47. С. 1583.
 97. Руденко О. В., Чиркин А. С. //ДАН СССР. 1974. Т. 214. С. 1045.
 98. Руденко О. В. //УФН. 1986. Т. 149. С. 413 (в этом номере).
 99. Руденко О. В., Чиркин А. С. //ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 1903.
 100. Ландау Л. Д. Собр. трудов. — М.: Наука. 1969. — Т. 1. С. 227.
 101. Аванесян С. М., Ахманов С. А., Бонч-Осмоловский М. М., Гусев В. Э., Желудев Н. И. //Труды Всесоюзного совещания по нерезонансному взаимодействию лазерного излучения с веществом. — Л.: ГОИ, 1984.
 - Аванесян С. М., Gusev V. E. //Sol. State Commun. 1985. V. 54. P. 1065.
 102. Obnschain S. P., Grun J., Herbst M. et al. Interaction of an Incoherent Laser with Planar Targets. — Anaheim, Cal., USA, 1984. — Proc. of 13 th IQEC.
 103. Хохлов Р. В. //Тезисы докладов на II Симпозиуме по нелинейной оптике. — Новосибирск, 1966.
 104. Беспалов В. И., Таланов В. И. //Письма ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 471.
 105. Хохлов Р. В. //Ibidem. 1972. Т. 15. С. 580.
 106. Андреев А. В., Ильинский Ю. А. //Ibidem. 1975. Т. 22. С. 462.
 107. Ахманов С. А., Гришанин Б. А., Ляхов Г. А., Пономарев Ю. В. //Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1980. Т. 21. С. 31, 38.
 108. Андреев А. В. //УФН. 1985. Т. 145. С. 113.
 109. Андреев А. В., Ахманов С. А., Пономарев Ю. В. //Изв. АН СССР. Сер. физ. 1986. № 6.
 110. Ахманов С. А., Емельянов В. И., Коротеев Н. И., Семиногов В. Н. //УФН. 1985. Т. 147. С. 675.
 111. Белоусов Б. П. //Сборник рефератов по радиационной медицине. — М.: Медгиз, 1959 — С. 145.
 - Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. — М.: Наука, 1974.
 112. Гапонов-Грехов А. В., Рабирович М. И. Нелинейная физика, стохастичность и структуры //физика XX века. — М.: Наука, 1984 г.
 113. Gibbs N. Optical Bistability: Controlling Light with Light. — New York: Academic Press, 1985.
 114. Гладков С. М., Коротеев Н. И., Рычев М. И., Штенцель О. //Письма ЖЭТФ. 1986. Т. 43. С. 227.
 115. Желудев Н. И., Макаров В. А., Матвеева А. В. //Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1984. Т. 25. С. 106.
 116. Заславский Г. М., Чириков Б. В. //УФН. 1971. Т. 105. С. 3.
 117. Халдре Х. Ю., Хохлов Р. В. //Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1958. Т. 1. С. 60.
 - См. также: Хохлов Р. В. //Радиотехн. и электрон. 1958. Т. 3. С. 566.
 118. Abraham N. B., Lugiato L., Narducci L. J. //Opt. Soc. Am. Ser. B. 1985. V. 2. P. 7.
 119. Ильникова Т. М., Хохлов Р. В. //Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1965. Т. 8. С. 899.
 120. Nakatsuka H., Asaka S., Ito H., Ikeda K. et al. //Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 109.
 121. Flytzanis C. Bistability, Instability and Chaos in Passive Nonlinear Optical Systems //^{38a}.

122. Летохов В. С., Чеботаев В. П. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии.— М.: Наука, 1975.
123. Летохов В. С.//УФН. 1986. Т. 148. С. 123.
124. Гордиец Б. Ф., Панченко В. Я.//УФН. 1986. Т. 149. С. 551 (в этом номере).
125. Бломберг Н. Предисловие к сборнику, посвященному памяти Р. В. Хохлова//Нелинейная спектроскопия.— М.: Мир, 1979.
126. Келдыш Л. В.//Академик Рем Викторович Хохлов.— М.: Знание, 1982.— С. 44.
127. Ахманов С. А., Хохлов Р. В.//УФН. 1968. Т. 95. С. 231.
128. XII Всесоюзная конференция по когерентной и нелинейной оптике: Тезисы докладов. Т. 1, 2.— М.: МГУ, 1985.